Λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski και το λογαριθμικό πρόβλημα Minkowski

Διπλωματική Εργασία

Παύλος Καλαντζόπουλος

Επιβλέπων: Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμημα Μαθηματικων
Πανεπιστημιο Αθηνων

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Η ανισότητα και το πρόβλημα . . . 1

2 Κυρτά σώματα **5**

2.1 Ανισότητα Brunn-Minkowski . . . 6

2.2 Εφαρμογές της ανισότητας Brunn-Minkowski . . . 9

2.3 Το θεώρημα του John . . . 13

2.4 Μεικτοί όγκοι . . . 15

2.5 Χωρία Wulff . . . 16

2.6 Επιφανειακό και cone-volume μέτρο . . . 20

2.6.1 Αποτελέσματα μοναδικότητας . . . 25

3 Λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski **33**

3.1 Οι p-κυρτοί συνδυασμοί και οι ανισότητες . . . 33

3.2 Ισοδυναμία των προβλημάτων . . . 36

3.3 Στο επίπεδο . . . 40

3.4 Για τα unconditional σώματα του $\mathbb{R}^n$ . . . 48

3.5 Η B-ιδιότητα . . . 52

4 Πρόβλημα Minkowski **59**

4.1 Μέτρα στήριξης . . . 59

4.2 Θεώρημα ύπαρξης του Minkowski . . . 61

4.3 Άρτιο λογαριθμικό πρόβλημα Minkowski . . . 66

4.3.1 Τα cone-volume μέτρα ικανοποιούν την SCC . . . 67

4.3.2 Μέτρα με την SCC είναι cone-volume μέτρα . . . 74

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η ανισότητα και το πρόβλημα

Η θεωρία Brunn-Minkowski βασίζεται στη σύνδεση του αθροίσματος Minkowski κυρτών σωμάτων με τον όγκο. Κεντρικό ρόλο σε αυτή τη θεωρία έχουν η ανισότητα Brunn-Minkowski και οι μεικτοί όγκοι του Minkowski. Η αντικατάσταση του αθροίσματος Minkowski από άλλου τύπου αθροίσματα δημιουργεί σε όλη την θεωρία νέα ερωτήματα όπως: νέου τύπου ανισότητες, προβλήματα ύπαρξης, μοναδικότητας και χαρακτηρισμού μέτρων με γεωμετρική σημασία.

(I) Λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski

Πίσω από τη μελέτη γεωμετρικών ανισοτήτων (ή προβλημάτων) που αφορούν τον όγκο, υπάρχουν συχνά κανόνες συμπεριφοράς του όγκου κάτω από το άθροισμα Minkowski. Μια μορφή σύνδεσης όγκου και διανυσματικής άθροισης είναι η ανισότητα Brunn-Minkowski που λέει ότι:

$$V(\lambda K + (1-\lambda)L) \geq V(K)^{\lambda} V(L)^{1-\lambda},$$

όπου K, L είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Αυτή η ανισότητα έχει έναν πλούσιο κατάλογο εφαρμογών (μερικές από αυτές περιγράφονται στην Παράγραφο 2.2) και το πρώτο μέρος αυτής της εργασίας αφορά μια ανισότητα ακόμα πιο ισχυρή από αυτήν.

Ο περιορισμός της ανισότητας Brunn-Minkowski στα κυρτά σώματα δίνει τη δυνατότητα έκφρασης του κυρτού συνδυασμού $\lambda K + (1-\lambda)L$ μέσω των συναρτήσεων στήριξης h_K, h_L, ως την τομή των παρακάτω ημιχώρων:

$$\lambda K + (1-\lambda)L = \bigcap_{u \in S^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq \lambda h_K(u) + (1-\lambda) h_L(u)\}.$$

Αυτή η έκφραση δίνει την ιδέα για νέους «κυρτούς συνδυασμούς» που προκύπτουν με την αντικατάσταση της συνάρτησης που προσδιορίζει τους παραπάνω ημιχώρους $\lambda h_K(\cdot) + (1-\lambda)h_L(\cdot)$ από άλλες συναρτήσεις. Παράδειγμα τέτοιου κυρτού συνδυασμού, το οποίο είναι και το κύριο ενδιαφέρον μας, είναι ο 0-κυρτός συνδυασμός που ορίζεται να είναι το κυρτό σώμα

$$\lambda \cdot K +_o (1-\lambda) \cdot L := \bigcap_{u \in S^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq h_K(u)^\lambda h_L(u)^{1-\lambda}\}.$$

Εφόσον ο 0-κυρτός συνδυασμός περιέχεται στον Minkowski κυρτό συνδυασμό τίθεται το ερώτημα αν ισχύει η παρακάτω ισχυρότερη ανισότηα τύπου Brunn-Minkowski, γνωστή ώς *λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski*:

Εικασία 1.1.1. *Αν K, L είναι 0-συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0,1]$ τότε*

$$V(\lambda \cdot K +_o (1-\lambda) \cdot L) \geq V(K)^\lambda V(L)^{1-\lambda}$$

Οι Böröczky-Lutwak-Yang-Zhang έδειξαν ότι η ανισότητα είναι ισοδύναμη με το αν για κάθε $K \in \mathcal{K}_e^n$ (0-συμμετρικό κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^n$) η συνάρτηση

$$\mathcal{K}_e^n \ni L \longmapsto \int_{S^{n-1}} h_L(u)\, dV_K(u) \tag{1.1.1}$$

(όπου V_K είναι το cone volume μέτρο του K, βλέπε παρακάτω) ελαχιστοποιείται στο K, κάτω από την υπόθεση $V(K) = V(L) = 1$.

Ο Χ. Σαρόγλου έδειξε (βλέπε Παράγραφο 3.5) ότι η ανισότητα ισχύει αν: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $K \in \mathcal{K}_e^n$ και $t_1, \ldots, t_n > 0$ η συνάρτηση

$$\mathbb{R} \ni s \longmapsto \mu_{C_n}\big(\mathrm{diag}(t_1^s, \ldots, t_n^s)K\big)$$

είναι λογαριθμικά κοίλη, όπου $C_n := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ ο n-διάστατος κύβος και $\mu_{C_n}(A) = V(C_n \cap A)$.

Η ανισότητα σήμερα είναι ανοικτό πρόβλημα, όμως είναι γνωστό ότι ισχύει για σώματα του επιπέδου και για τα unconditional κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$. Ο πρώτος ισχυρισμός είναι αποτέλεσμα των Böröczky-Lutwak-Yang-Zhang και όπως θα δούμε προκύπτει με χρήση της μεθόδου διαταραχής του Aleksandrov στον ελαχιστοποιητή της (1.1.1), ενώ ο δεύτερος είναι αποτέλεσμα του Χ. Σαρόγλου και προκύπτει με χρήση της ανισότητας Prékopa-Leindler.

(II) Άρτιο λογαριθμικό πρόβλημα Minkowski

Ο όρος «πρόβλημα Minkowski» αναφέρεται γενικά σε προβλήματα χαρακτηρισμού μέτρων πάνω στην σφαίρα τα οποία προέρχονται από κυρτά σώματα. Ξεκινώντας με το επιφανειακό μέτρο S_K κυρτού σώματος K που δίνεται από την

$$S_K(\omega) = \mathcal{H}_{n-1}(\nu_K^{-1}(\omega))$$

όπου $\nu_K : \partial K \longrightarrow S^{n-1}$ η απεικόνιση του Gauss, ο Minkowski έθεσε το πρόβλημα:

Πρόβλημα Minkowski: *Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα πεπερασμένο μέτρο Borel πάνω στη σφαίρα S^{n-1} έτσι ώστε να είναι το επιφανειακό μέτρο ενός κυρτού σώματος.*

Οι συνθήκες βρέθηκαν από τον Minkowski στην περίπτωση που το μέτρο έχει πεπερασμένο φορέα (βλέπε Παράγραφο 4.2). Με ένα επιχείρημα προσέγγισης αποδεικνύεται ότι οι αντίστοιχες συνθήκες ώστε ένα (γενικό) μέτρο μ να είναι επιφανειακό μέτρο κυρτού σώματος είναι: να μη συγκεντρώνεται σε καμία σφαίρα χαμηλότερης διάστασης και να έχει κέντρο βάρους το μηδέν, δηλαδή

$$\mu(\xi \cap S^{n-1}) < \mu(S^{n-1})$$

για κάθε $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο ξ και

$$\int_{S^{n-1}} u \, d\mu(u) = 0.$$

Στο Κεφάλαιο 4 μελετάμε μια οικογένεια προβλημάτων που προκύπτει με αντικατάσταση του επιφανειακού μέτρου από το cone-volume μέτρο, το οποίο ορίζεται για κυρτά σώματα K με $0 \in \mathrm{int}K$ από τη σχέση

$$V_K(\omega) = \frac{1}{n} \int_{x \in \nu_K^{-1}(\omega)} \langle x, \nu_K(x) \rangle \, d\mathcal{H}_{n-1}(x)$$

όπου ω Borel υποσύνολο της S^{n-1}. Τίθεται το πρόβλημα:

Λογαριθμικό πρόβλημα Minkowski: *Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα πεπερασμένο μέτρο Borel πάνω στη σφαίρα S^{n-1} έτσι ώστε να είναι το cone-volume μέτρο ενός κυρτού σώματος.*

Το πρόβλημα αυτό παραμένει ανοικτό, όμως στην περίπτωση που το μέτρο είναι άρτιο οι Böröczky-Lutwak-Yang-Zhang βρήκαν συνθήκη που σχετίζεται με τη συγκέντρωση του μέτρου στα σύνολα $\xi \cap S^{n-1}$, όπου ξ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Η συνθήκη ονομάσθηκε subspace concentration condition, για συντομία SCC. Ένα μέτρο μ ικανοποιεί την SCC αν: για κάθε υπόχωρο ξ του $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\mu(\xi \cap S^{n-1}) \leq \frac{\dim \xi}{n} \mu(S^{n-1}) \tag{1.1.2}$$

και αν έχουμε ισότητα για κάποιον υπόχωρο ξ, τότε υπάρχει ξ' συμπληρωματικός υπόχωρος του ξ στον $\mathbb{R}^n$, ώστε επίσης να έχουμε

$$\mu(\xi' \cap S^{n-1}) = \frac{\dim \xi'}{n} \mu(S^{n-1}).$$

[Böröczky-Lutwak-Yang-Zhang]: Ένα πεπερασμένο, μη-μηδενικό και άρτιο μέτρο Borel πάνω στη σφαίρα S^{n-1} είναι cone-volume μέτρο ενός 0-συμμετρικού κυρτού σώματος αν και μόνο αν ικανοποιεί την (SCC).

Ιδέα της απόδειξης: Η κατεύθυνση ότι τα cone-volume μέτρα ικανοποιούν την SCC γίνεται με μέθοδο συμμετρικοποίησης. Για την άλλη κατεύθυνση κάνουμε μια μικρή περαιτέρω ανάλυση:

- Υποθέτουμε ότι για κάθε υπόχωρο ξ του $\mathbb{R}^n$ τέτοιον ώστε $0 < \dim \xi < n$ ισχύει
$$\mu(\xi \cap S^{n-1}) < \frac{\dim \xi}{n} \mu(S^{n-1}).$$
Από αυτή την ανισότητα προκύπτει ότι υπάρχει το ελάχιστο της συνάρτησης
$$\mathcal{K}_e^n \ni L \longmapsto \int_{S^{n-1}} h_L(u)\, d\mu(u). \tag{1.1.3}$$
κάτω από τις υποθέσεις $\mu(S^{n-1}) = 1$, $V(L) = 1$. Έπειτα, για οποιοδήποτε $K_0 \in \mathcal{K}_e^n$ που είναι ελαχιστοποιητής της (1.1.3), η μέθοδος διαταραχής του Aleksandrov δίνει $\mu = V_{K_0}$.

- Η ύπαρξη συμπληρωματικών υποχώρων ξ, ξ' ώστε να έχουμε ισότητα στην (1.1.2) δίνει την ύπαρξη σωμάτων $D \in \mathcal{K}_e^{\dim \xi}$ και $D' \in \mathcal{K}_e^{\dim \xi'}$ ώστε το μ να είναι το cone-volume του $D + D' \in \mathcal{K}_e^n$.

Κεφάλαιο 2

Βασικά αποτελέσματα από τη θεωρία των κυρτών σωμάτων

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Συμβολίζουμε με $\| \cdot \|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα, γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και S^{n-1} για την μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος (μέτρο Lebesgue) συμβολίζεται με V_n είτε με V αν δεν υπάρχει θέμα σύγχησης. Με $\mathcal{H}_\alpha$ θα συμβολίζουμε το α-διάσατο μέτρο Hausdorff.

Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το K είναι 0-συμμετρικό αν έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, δηλαδή, $x \in K$ τότε $-x \in K$. Με $\mathcal{K}^n$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των κυρτών σωμάτων ενώ με $\mathcal{K}_o^n$ τα στοιχεία του $\mathcal{K}^n$ τα οποία περιέχουν το μηδέν στο εσωτερικό τους. Το σύνολο των 0-συμμετρικών κυρτών σωμάτων το συμβολίζουμε με $\mathcal{K}_e^n$. Προφανώς $\mathcal{K}^n \supseteq \mathcal{K}_o^n \supseteq \mathcal{K}_e^n$.

Με δ_{H} συμβολίζουμε την απόσταση Hausdorff, η οποία, για δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα K και L του $\mathbb{R}^n$, ορίζεται να είναι

$$\delta_{\mathrm{H}}(K, L) = \inf\{t > 0 : K \subseteq L + tB_2^n \ \text{ και } \ L \subseteq K + tB_2^n\}.$$

Η δ_{H} είναι μετρική στην κλάση $\mathcal{C}$ των μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

Βασικές ιδιότητες:

(1) Ο $(\mathcal{C}, \delta_H)$ είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος
(2) Αν K κυρτό σώμα, τότε υπάρχει ακολουθία πολυτόπων P_n που συγκλίνει στο K
(3) Θεώρημα επιλογής του Blaschke: Κάθε φραγμένη ακολουθία κυρτών και συμπαγών συνόλων έχει συγκλίνουσα υπακολουθία που συγκλίνει σε κυρτό και συμπαγές σύνολο.

Η *ακτινική συνάρτηση* $\rho_K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ ενός κυρτού σώματος K με $0 \in \mathrm{int}(K)$ ορίζεται

$$\rho_K(x) = \max\{t > 0 : tx \in K\}.$$

Η *συνάρτηση στήριξης* $h_K : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ενός κυρτού και συμπαγούς υποσύνολου K του $\mathbb{R}^n$ ορίζεται

$$h_K(x) = \max\{\langle x, y\rangle : y \in K\}.$$

Προφανώς, για K, L συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$h_K \leq h_L \quad \text{αν και μόνο αν} \quad K \subseteq L.$$

Επίσης η συνάρτηση στήριξης είναι θετικά ομογενής βαθμού ένα και προσθετική, δηλαδή $h_{sK} = sh_K$ για $s > 0$, και $h_{K+L} = h_K + h_L$. Παρατηρήστε ότι για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_K(\theta) \leqslant h_K(\theta)$. Η h_K είναι κυρτή και αν επιπλέον το $K \in \mathcal{K}_o^n$ τότε η h_K είναι αυστηρά θετική και συνεχής στην σφαίρα S^{n-1}. Επίσης για δύο κυρτά σώματα $K, L \in \mathcal{K}^n$, έχουμε

$$\delta_{\mathrm{H}}(K, L) = \sup_{u \in S^{n-1}} |h_K(u) - h_L(u)|.$$

Επομένως μια ακολουθία κυρτών σωμάτων K_n συγκλίνει στο σώμα K αν και μόνο αν συγκλίνουν ομοιόμορφα οι συναρτήσεις στήριξης h_{K_n} στην h_K πάνω στην σφαίρα S^{n-1}, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} K_n = K \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|h_{K_n} - h_K\|_{L_\infty(S^{n-1})} \to 0$$

2.1 Ανισότητα Brunn-Minkowski

Το άθροισμα Minkowski δύο μη-κενών συνόλων $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζονται ως εξής:

$$K + L := \{x + y : x \in K, y \in L\}$$

και

$$\lambda K := \{\lambda x : x \in K\}$$

αντίστοιχα. Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το διανυσματικό άθροισμα και τον όγκο.

Θεώρημα 2.1.1 (Brunn-Minkowski). *Έστω K και L δύο μη-κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$V_n(K + L)^{1/n} \geqslant V_n(K)^{1/n} + V_n(L)^{1/n}. \tag{2.1.1}$$

Στην περίπτωση που τα K και L είναι κυρτά σώματα, έχουμε ισότητα αν και μόνο αν τα K και L είναι ομοιοθετικά. Το Θεώρημα 2.1.1 εκφράζει το γεγονός ότι ο όγκος είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση ως προς το άθροισμα Minkowski. Γι' αυτό το λόγο, συχνά την γράφουμε στην ακόλουθη μορφή: αν K και L είναι μη-κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ έχουμε

$$V_n(\lambda K + (1 - \lambda)L)^{1/n} \geqslant \lambda V_n(K)^{1/n} + (1 - \lambda)V_n(L)^{1/n}. \tag{2.1.2}$$

Από την (2.1.2) και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε

$$V_n(\lambda K + (1-\lambda)L) \geqslant V_n(K)^\lambda V_n(L)^{1-\lambda}. \tag{2.1.3}$$

Αυτή η μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski έχει το πλεονέκτημα ότι δεν περιέχει τη διάσταση. Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε ότι είναι ισοδύναμη με την (2.1.1), με την έννοια ότι αν γνωρίζουμε την (2.1.3) για κάθε K, L και λ τότε, όπως θα δούμε παρακάτω, μπορούμε να δείξουμε και την ισχυρότερη ανισότητα (2.1.1).

Ανισότητα Prékopa-Leindler

Η ανισότητα των Prékopa και Leindler είναι η γενίκευση της ανισότητας Brunn-Minkowski στο πλαίσιο των μετρήσιμων θετικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.1.2. *Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρείς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}.$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}. \tag{2.1.4}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς τη διάσταση n.

(α) $n = 1$: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f και g είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t\int f \quad , \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t\int g.$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας οι x, y είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t)f(x(t)) = \int f \quad , \quad y'(t)g(y(t)) = \int g.$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda)y(t).$$

Οι x και y είναι γνήσια αύξουσες. Επομένως, η z είναι κι αυτή γνήσια αύξουσα. Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda)y'(t) \geqslant (x'(t))^\lambda (y'(t))^{1-\lambda}.$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της h κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$:

$$\begin{aligned}\int h(s)ds &= \int_0^1 h(z(t))z'(t)dt \\ &\geqslant \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t))(x'(t))^\lambda (y'(t))^{1-\lambda} dt \\ &\geqslant \int_0^1 f^\lambda(x(t))g^{1-\lambda}(y(t)) \left(\frac{\int f}{f(x(t))}\right)^\lambda \left(\frac{\int g}{g(y(t))}\right)^{1-\lambda} dt \\ &= \left(\int f\right)^\lambda \left(\int g\right)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι $n \geqslant 2$ και ότι το θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Έστω f, g, h όπως στο θεώρημα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με $h_s(w) = h(w, s)$, και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s, g_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$. Από την υπόθεση του θεωρήματος για τις f, g και h έπεται ότι, αν $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f_{s_1}(x)^\lambda g_{s_0}(y)^{1-\lambda},$$

και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$\begin{aligned}H(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0} \\ &\geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_1}\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_0}\right)^{1-\lambda} =: F^\lambda(s_1)G^{1-\lambda}(s_0).\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $n = 1$ στις συναρτήσεις F, G και H, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} h = \int_{\mathbb{R}} H \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}} F\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} G\right)^{1-\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

□

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa–Leindler μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα Brunn–Minkowski. Δείχνουμε πρώτα το εξής.

Πρόταση 2.1.3. *Έστω K, L συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, και $\lambda \in (0,1)$. Τότε,*

$$V_n(\lambda K + (1-\lambda)L) \geqslant V_n(K)^\lambda V_n(L)^{1-\lambda}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $f = \mathbf{1}_K$, $g = \mathbf{1}_L$, και $h = \mathbf{1}_{\lambda K + (1-\lambda)L}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 2.1.2. Πράγματι, αν $x \notin K$ ή $y \notin L$ τότε

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant 0 = [f(x)]^\lambda [g(y)]^{1-\lambda},$$

ενώ αν $x \in K$ και $y \in L$ τότε $\lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda K + (1-\lambda)L$, άρα

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1 = [f(x)]^\lambda [g(y)]^{1-\lambda}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa-Leindler παίρνουμε το ζητούμενο. □

Θεωρούμε τώρα συμπαγή μη-κενά K και L (με $V_n(K) > 0$ και $V_n(L) > 0$, αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε), και ορίζουμε

$$K_1 = V_n(K)^{-1/n}K \quad , \quad L_1 = V_n(L)^{-1/n}L \quad , \quad \lambda = \frac{V_n(K)^{1/n}}{V_n(K)^{1/n} + V_n(L)^{1/n}}.$$

Τα K_1 και L_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την Πρόταση 2.1.3 παίρνουμε

$$V_n(\lambda K_1 + (1-\lambda)L_1) \geqslant 1. \tag{2.1.5}$$

Όμως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda)L_1 = \frac{K+L}{V_n(K)^{1/n} + V_n(L)^{1/n}},$$

επομένως η (2.1.5) παίρνει την μορφή

$$V_n(K+L) \geqslant \Big(V_n(K)^{1/n} + V_n(L)^{1/n}\Big)^n,$$

και έπεται το ζητούμενο.

2.2 Εφαρμογές της ανισότητας Brunn-Minkowski στην κυρτή γεωμετρία

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε συνοπτικά κάποιες κλασσικές εφαρμογές της ανισότητας Brunn-Minkowski. Μερικές από αυτές θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα.

Ισοπεριμετρική ανισότητα

Η ισοπεριμετρική ανισότητα απαντάει στο ερώτημα *ποιό σύνολο μεταξύ όλων των συνόλων ίσου όγκου έχει τη μικρότερη επιφάνεια*. Για την απάντηση χρησιμοποιούμε τον παρακάτω ορισμό της επιφάνειας, ο οποίος υπολογίζει την επιφάνεια ως το ρυθμό αύξησης του όγκου του σώματος όταν του προσθέτουμε, κατά Minkowski, μικρή Ευκλείδεια μπάλα.

Ορισμός 2.2.1 (επιφάνεια κατά Minkowski)**.** Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η *επιφάνεια* $S(K)$ του K ορίζεται να είναι η

$$S(K) = \liminf_{t\to 0^+} \frac{V_n(K+tB_2^n) - V_n(K)}{t}.$$

Παρατηρούμε ότι αν το K είναι κυρτό σώμα τότε το παραπάνω $\liminf$ είναι όριο.

Θεώρημα 2.2.2 (ισοπεριμετρική ανισότητα)**.** *Αν K είναι ένα μη-κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$S(K) \geqslant nV_n(K)^{\frac{n-1}{n}} V_n(B_2^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{V_n(K+tB_2^n)-V_n(K)}{t} &\geqslant \frac{\left(V_n(K)^{\frac{1}{n}}+tV_n(B_2^n)^{\frac{1}{n}}\right)^n-V_n(K)}{t}\\ &= \frac{V_n(K)+ntV_n(K)^{\frac{n-1}{n}}V_n(B_2^n)^{\frac{1}{n}}+O(t^2)-V_n(K)}{t}\\ &= nV_n(K)^{\frac{n-1}{n}}V_n(B_2^n)^{\frac{1}{n}}+O(t),\end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ισότητα θεωρήσαμε το διωνυμικό ανάπτυγμα. Έτσι, καθώς το $t\to 0^+$ παίρνουμε

$$S(K)=\liminf_{t\to 0^+}\frac{V_n(K+tB_2^n)-V_n(K)}{t}\geqslant nV_n(K)^{\frac{n-1}{n}}V_n(B_2^n)^{\frac{1}{n}}, \tag{2.2.1}$$

□

Μία ακόμα μορφή της ισοπεριμετρικής ανισότητας είναι

$$\left(\frac{S(K)}{S(B_2^n)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\geqslant\left(\frac{V_n(K)}{V_n(B_2^n)}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Για αυτή, επειδή $S(B_2^n)=nV_n(B_2^n)$ έχουμε

$$\frac{S(K)}{S(B_2^n)}\geqslant\frac{nV_n(K)^{\frac{n-1}{n}}V_n(B_2^n)^{\frac{1}{n}}}{nV_n(B_2^n)},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\left(\frac{S(K)}{S(B_2^n)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\geqslant\left(\frac{nV_n(K)^{\frac{n-1}{n}}V_n(B_2^n)^{\frac{1}{n}}}{nV_n(B_2^n)}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\left(\frac{V_n(K)}{V_n(B_2^n)}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $r>0$ τέτοιος ώστε $V_n(K)=V_n(rB_2^n)$. Τότε*

$$S(K)\geqslant S(rB_2^n)$$

Απόδειξη. Από τη μία πλευρά, αφού $V_n(K)=r^nV_n(B_2^n)$, η ισοπεριμετρική ανισότητας θα δώσει

$$S(K)\geqslant nr^{n-1}V_n(B_2^n)^{\frac{n-1}{n}}V_n(B_2^n)^{\frac{1}{n}}=nr^{n-1}V_n(B_2^n).$$

Από την άλλη πλευρά, από τον ορισμό της επιφάνειας βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}S(rB_2^n)&=\lim_{t\to 0^+}\frac{V_n(rB_2^n+tB_2^n)-V_n(rB_2^n)}{t}=V_n(B_2^n)\lim_{t\to 0^+}\frac{(r+t)^n-r^n}{t}\\ &=V_n(B_2^n)nr^{n-1}.\end{aligned}$$

Άρα, $S(K)\geqslant S(rB_2^n)$. □

Αρχή του Brunn

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σώμα και $\theta \in S^{n-1}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Ενδιαφερόμαστε για τη συμπεριφορά της συνάρτησης $f_\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_\theta(t) = V_{n-1}(K \cap (\theta^\perp + t\theta)),$$

όπου $\theta^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = 0\}$. Η αρχική ερώτηση του Brunn ήταν αν για $t < r < s$ στον φορέα της f_θ ισχύει ότι

$$f_\theta(r) \geqslant \min\{f_\theta(t), f_\theta(s)\}. \tag{2.2.2}$$

Η απάντηση είναι καταφατική και την παίρνουμε από το παρακάτω (ισχυρότερο) αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.2.4 (αρχή του Brunn). *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σώμα και έστω μια διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$. Τότε, η συνάρτηση $f_\theta^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη στο φορέα της.*

Απόδειξη. Αρκεί να το δείξουμε για όλα τα n-διάστατα κυρτά σώματα K και για τη διεύθυνση $\theta = e_n$, γιατί για τυχόν θ μπορούμε να στρέψουμε κατάλληλα το σώμα. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι η

$$f_\theta(t) = V_{n-1}(K \cap \{x_n = t\})$$

είναι κοίλη στο φορέα της. Για t στο φορέα της f_θ θέτουμε

$$K_t = \{x \in R^{n-1} : (x,t) \in K\}.$$

Από την κυρτότητα του K έχουμε ότι αν τα t, s ανήκουν στο φορέα της f_θ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$K_{(1-\lambda)t+\lambda s} \supseteq (1-\lambda)K_t + \lambda K_s.$$

Για να δείξουμε αυτόν τον εγκλεισμό, παίρνουμε $x \in K_t$ και $y \in K_s$. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $(x,t), (y,s) \in K$ περιέχεται στο K, λόγω κυρτότητας. Έτσι, το $(1-\lambda)(x,t) + \lambda(y,s) = ((1-\lambda)x + \lambda y, (1-\lambda)t + \lambda s) \in K$, δηλαδή $(1-\lambda)x + \lambda y \in K_{(1-\lambda)t+\lambda s}$. Τώρα, ο προηγούμενος εγκλεισμός και η ανισότητα Brunn-Minkowski δίνουν

$$V_{n-1}(K_{(1-\lambda)t+\lambda s})^{\frac{1}{n-1}} \geqslant (1-\lambda)V_{n-1}(K_t)^{\frac{1}{n-1}} + \lambda V_{n-1}(K_s)^{\frac{1}{n-1}},$$

το οποίο δείχνει ότι η $t \longmapsto V_{n-1}(K_t)^{\frac{1}{n-1}} = f_\theta(t)^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη. □

Για την απάντηση του αρχικού ερωτήματος (2.2.2) γράφουμε $r = (1-\lambda)t + \lambda s$ και, ξέροντας τώρα ότι η $f_\theta^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη, παίρνουμε

$$f_\theta(r)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant (1-\lambda)f_\theta(t)^{\frac{1}{n-1}} + \lambda f_\theta(s)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \min\{f_\theta(t)^{\frac{1}{n-1}} f_\theta(t)^{\frac{1}{n-1}}\},$$

απ' όπου έπεται η (2.2.2).

Παρατήρηση 2.2.5. Από την αρχή του Brunn μπορούμε να πάρουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski για κυρτά σώματα με τον εξής τρόπο. Αν K και L είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$K_1 = K \times \{0\} \quad \text{και} \quad L_1 = L \times \{1\}$$

στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και θεωρούμε την κυρτή τους θήκη C. Αν

$$C(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,t) \in C\} \qquad (t \in [0,1])$$

ελέγχουμε εύκολα ότι $C(0) = K$, $C(1) = L$ και

$$C(1/2) = \frac{K+L}{2}.$$

Εφαρμόζοντας την αρχή του Brunn για τον $F = \mathbb{R}^n$ βλέπουμε ότι

$$V_n\left(\frac{K+L}{2}\right)^{1/n} \geqslant \frac{1}{2}V_n(K)^{1/n} + \frac{1}{2}V_n(L)^{1/n},$$

το οποίο αποδεικνύει την (2.1.1).

Ανισότητα Grünbaum

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι γνωστό ως «λήμμα του Grünbaum». Ισχυρίζεται ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, δηλαδή

$$\int_K \langle x, u\rangle \, dx = 0$$

για κάθε $u \in S^{n-1}$, τότε κάθε υπερεπίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων χωρίζει το K σε δύο μέρη που έχουν περίπου τον ίδιο όγκο.

Λήμμα 2.2.6 (Grünbaum)**.** *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0. Τότε,*

$$\frac{1}{e} \leqslant V_n(\{x \in K : \langle x, u\rangle \geqslant 0\}) \leqslant 1 - \frac{1}{e}$$

για κάθε $u \in S^{n-1}$.

Απόδειξη. Έστω $u \in S^{n-1}$. Υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$V_n(\{x \in K : |\langle x, u\rangle| > M\}) = 0.$$

Ορίζουμε $G(t) = V_n(\{x \in K : \langle x, u\rangle \leqslant t\})$. Από την ανισότητα Brunn-Minkowski προκύπτει εύκολα ότι η G είναι μια αύξουσα λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση (η $\log G$ είναι κοίλη στο φορέα της) και έχουμε $G(t) = 0$ για $t \leqslant -M$ και $G(t) = 1$ για $t \geqslant M$. Αφού το K έχει κέντρο βάρους το 0, έχουμε επίσης

$$\int_{-M}^{M} tG'(t)dt = 0,$$

και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int_{-M}^{M} G(t)dt = M.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$G(0) \geqslant \frac{1}{e}$$

(η άλλη ανισότητα, $G(0) \leqslant 1 - 1/e$, θα προκύψει κι αυτή άμεσα αν αντικαταστήσουμε το u με το $-u$ και επαναλάβουμε το επιχείρημα). Αφού η $\log G$ είναι κοίλη συνάρτηση, έχουμε

$$G(t) \leqslant G(0)e^{\alpha t}$$

όπου $\alpha = G'(0)/G(0)$. Επιλέγουμε M αρκετά μεγάλο ώστε $1/\alpha < M$. Τότε, χρησιμοποιώντας την $G(t) \leqslant G(0)e^{\alpha t}$ για $t \leqslant 1/\alpha$ και το γεγονός ότι, τετριμμένα, $G(t) \leqslant 1$ αν $t > 1/\alpha$, μπορούμε να γράψουμε

$$M = \int_{-M}^{M} G(t)dt \leqslant \int_{-\infty}^{1/\alpha} G(0)e^{\alpha t}dt + \int_{1/\alpha}^{M} \mathbf{1}\, dt = \frac{eG(0)}{\alpha} + M - \frac{1}{\alpha}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $G(0) \geqslant 1/e$, όπως θέλαμε. □

2.3 Το θεώρημα του John

Ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα της μορφής

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i \rangle^2}{\alpha_i^2} \leqslant 1 \right\},$$

όπου $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του $\mathcal{E}$ αντίστοιχα). Ισοδύναμα, ενα κυρτό σώμα $\mathcal{E}$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός T ($T \in GL(n)$) ώστε $\mathcal{E} = T(B_2^n)$. Ο όγκος του $\mathcal{E}$ ισούται με

$$V_n(\mathcal{E}) = V_n(B_2^n) \prod_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Έστω K ένα 0-συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{E}(K)$ όλων των ελλειψοειδών που περιέχουν στο K. Ο F. John έδειξε ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ που περιέχει το K και έχει τον ελάχιστο δυνατό όγκο. Λέμε ότι το $\mathcal{E}$ είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K. Ο John έδειξε επίσης το εξής.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω K ένα 0-συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K. Τότε,*

$$B_2^n \subseteq \sqrt{n}K.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει x στο σύνορο του K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο της $(1/\sqrt{n})B_2^n$. Αλλάζοντας συντεταγμένες αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του K στο x είναι παράλληλο με το $\{x : x_1 = 0\}$. Δηλαδή,

$$K \subset P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leqslant \frac{1}{c} \right\},$$

όπου $c > \sqrt{n}$. Για κάθε $a, b > 0$ ορίζουμε το ελλειψοειδές

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : a^2 x_1^2 + b^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Ισχυρισμός. Αν $\frac{a^2-b^2}{c^2} + b^2 \leqslant 1$, τότε $K \subseteq \mathcal{E}_{a,b}$.

Πράγματι: αν $y \in K$, τότε $y \in P \cap B_2^n$. Άρα,

$$|y_1| \leqslant \frac{1}{c} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant 1.$$

Έπεται ότι

$$a^2 y_1^2 + b^2 \sum_{i=2}^{n} y_i^2 = (a^2 - b^2) y_1^2 + b^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant \frac{a^2 - b^2}{c^2} + b^2 \leqslant 1.$$

Δηλαδή, $y \in \mathcal{E}_{a,b}$. □

Ο όγκος του $\mathcal{E}_{a,b}$ ισούται με $V_n(\mathcal{E}_{a,b}) = V_n(B_2^n)/(ab^{n-1})$. Αν λοιπόν $ab^{n-1} > 1$, τότε $V_n(\mathcal{E}_{a,b}) < V_n(B_2^n)$. Με την υπόθεση ότι $c > \sqrt{n}$, θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις

$$ab^{n-1} > 1 \quad \text{και} \quad \frac{a^2 - b^2}{c^2} + b^2 \leqslant 1.$$

Αυτό είναι άτοπο, γιατί θα έχουμε βρεί ελλειψοειδές που περιέχει το K και έχει όγκο γνήσια μικρότερο από τον όγκο της B_2^n.

Για κάθε $\varepsilon \in (0, 1/2)$, θέτουμε $b_\varepsilon = 1 - \varepsilon$ και $a_\varepsilon = (1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2)^{n-1}$. Τότε,

$$a_\varepsilon b_\varepsilon^{n-1} = [(1-\varepsilon)(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)]^{n-1} = (1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3)^{n-1} > 1.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\frac{a_\varepsilon^2 - b_\varepsilon^2}{c^2} + b_\varepsilon^2 &= \frac{(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)^{2(n-1)}}{c^2} + \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)(1-\varepsilon)^2 \\
&= \frac{1}{c^2}[1 + 2(n-1)\varepsilon + O(\varepsilon^2)] + \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2) \\
&= 1 + 2\varepsilon\left(\frac{n}{c^2} - 1\right) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Αφού $(n/c^2) - 1 < 0$, είναι φανερό ότι η ποσότητα αυτή γίνεται μικρότερη από 1 αν αφήσουμε το $\varepsilon \to 0^+$. Για μικρό λοιπόν $\varepsilon > 0$, το ελλειψοειδές $\mathcal{E}_{a_\varepsilon, b_\varepsilon}$ μας οδηγεί σε άτοπο. □

Εφαρμόζοντας κατάλληλο γραμμικό μετασχηματισμό σε ένα 0-συμμετρικό κυρτό σώμα K και το ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ ελάχιστου όγκου του K (αυτόν που μετασχηματίζει το $\mathcal{E}$ στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n) και με απευθείας εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3.1, βλέπουμε ότι

$$K \subseteq \mathcal{E} \subseteq \sqrt{n}K.$$

Εντελώς ανάλογα, αν θεωρήσουμε την οικογένεια $\mathcal{E}_1(K)$ όλων των ελλειψοειδών που περιέχονται στο K, τότε υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}_1$ που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Γι' αυτό το ελλειψοειδές, το *ελλειψοειδές μέγιστου όγκου* του K, έχουμε

$$\mathcal{E}_1 \subseteq K \subseteq \sqrt{n}\mathcal{E}_1.$$

2.4 Μεικτοί όγκοι

Συμβολίζουμε με $\tilde{\mathcal{K}}^n$ τον κυρτό κώνο όλων των μη-κενών συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Το θεμελιώδες θεώρημα του Minkowski για τους μεικτούς όγκους ισχυρίζεται ότι υπάρχει μια συνάρτηση $V : (\tilde{\mathcal{K}}^n)^n \to \mathbb{R}^+$ που έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Η V έχει ως «διαγώνιο» τον όγκο: αν $K \in \tilde{\mathcal{K}}^n$ τότε $V(K, \dots, K) = V_n(K)$.

(ii) Η V είναι θετικά γραμμική ως προς κάθε συντεταγμένη της: ισχύει η

$$V(K_1, \dots, t_1K_i^{(1)} + t_2K_i^{(2)}, \dots, K_n) = \sum_{j=1}^{2} t_j V(K_1, \dots, K_i^{(j)}, \dots, K_n)$$

για κάθε $t_1, t_2 \geqslant 0$ και $K_1, \dots, K_i^{(1)}, K_i^{(2)}, \dots, K_n \in \tilde{\mathcal{K}}^n$.

(iii) Η V είναι συμμετρική: αν $K_1, \dots, K_n \in \tilde{\mathcal{K}}^n$ και σ είναι οποιαδήποτε μετάθεση των δεικτών, τότε

$$V(K_{\sigma(1)}, \dots, K_{\sigma(n)}) = V(K_1, \dots, K_n).$$

Η τιμή $V(K_1, \dots, K_n)$ ονομάζεται *μεικτός όγκος* των $K_1, \dots, K_n$.

Έπεται ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $K_1, \dots, K_m \in \tilde{\mathcal{K}}^n$, η συνάρτηση $F : (\mathbb{R}_+)^m \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(t_1, t_2 \cdots, t_m) = V_n(t_1K_1 + t_2K_2 + \cdots + t_mK_m)$$

είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς $t_i > 0$,

$$V_n(t_1K_1 + \cdots + t_mK_m) = \sum_{i_1=1}^{m} \dots \sum_{i_n=1}^{m} V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) t_{i_1} \cdots t_{i_n}.$$

Ειδική περίπτωση:

(1) (Τύπος Minkowski-Steiner) Για $K, L \in \tilde{\mathcal{K}}^n$ η συνάρτηση $t \longmapsto V_n(K+tL)$ είναι πολυώνυμο ως προς $t \in [0, \infty)$:

$$V_n(K+tL) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} V_j(K, L)\, t^j, \tag{2.4.1}$$

όπου $V_j(K, L) = V(K; n-j, L; j)$ είναι ο j-οστός μεικτός όγκος των K και L. Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $L; j$ εννοώντας $L, \ldots, L$ j-φορές.

(2) (*Τύπος του Steiner*) Για $L = B_2^n$ ο τύπος Minkowski-Steiner γράφεται:

$$V_n(K+tB_2^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} W_j(K) t^j,$$

όπου

$$W_j(K) = V_j(K, B_2^n) = V(K; n-j, B_2^n; j)$$

είναι το *j-οστό quermassintegral* του K. Τα quermassintegrals W_j έχουν αρκετές από τις ιδιότητες των μεικτών όγκων: είναι μονότονα, συνεχή ως προς τη μετρική Hausdorff δ_{H}, και ομογενή βαθμού $n-j$.

Συμπεράσματα:

Από την (2.4.1) βλέπουμε ότι

$$V_1(K, L) = \frac{1}{n} \lim_{t \to 0^+} \frac{V_n(K+tL) - V_n(K)}{t}, \tag{2.4.2}$$

το οποίο μαζί με την κλασσική ανισότητα Brunn-Minkowski $V_n(K+tL)^{1/n} \geqslant V_n(K)^{1/n} + tV_n(L)^{1/n}$ συνεπάγεται:

Θεώρημα 2.4.1. *(πρώτη ανισότητα του Minkowski) Για n-διάστατα κυρτά σώματα $K, L \in \tilde{\mathcal{K}}^n$*

$$V_1(K, L) \geqslant V_n(K)^{\frac{n-1}{n}} V_n(L)^{\frac{1}{n}} \tag{2.4.3}$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα K και L είναι ομοιοθετικά.

2.5 Χωρία Wulff

Κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι η τομή των ημιχώρων που ορίζουν τα υπερεπίπεδα στήριξης τα οποία προσδιορίζονται από τη συνάρτηση στήριξης h_K, δηλαδή ισχύει

$$K = \bigcap_{u \in S^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leqslant h_K(u)\}.$$

Θεωρώντας οποιαδήποτε θετική συνεχή συνάρτηση f στη σφαίρα S^{n-1} μπορούμε να γενικεύσουμε αυτή τη σχέση ως εξής.

Ορισμός 2.5.1. Έστω $f : S^{n-1} \to (0,\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Το κυρτό σώμα

$$K_f := \bigcap_{u\in S^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle \leqslant f(u)\}$$

ονομάζεται το *χωρίο Wulff* που αντιστοιχεί στην f.

Αρχικά, αν h είναι η συνάρτηση στήριξης ενός κυρτού σώματος $K \in \mathcal{K}_0^n$ τότε το K συμπίπτει με το χωρίο Wulff που αντιστοιχεί στην h

Παρατηρήσεις: Εστώ $f : S^{n-1} \to (0,\infty)$ συνεχής με γνήσια θετικές τιμές και K το χωρίο Wulff της f τότε:

(i) Το $K \in \mathcal{K}_0^n$ είναι κυρτό σώμα με εσωτερικό σημείο το 0.

(ii) Αν επιπλέον η f είναι άρτια τότε το $K \in \mathcal{K}_e^n$ είναι συμμετρικό ως προς το 0 κυρτό σώμα.

(iii) $h_K(u) = f(u)$ S_K-σχεδόν για κάθε $u \in S^{n-1}$, όπου h_K είναι η συνάρτηση στήριξης του K.

Οι πρώτες δύο παρατηρήσεις έπονται άμεσα. Την (iii) την έχουμε από την προφανή $h_K(u) \leqslant f(u)$ για κάθε $u \in S^{n-1}$ και από το ακόλουθο Λήμμα του Aleksandrov:

Λήμμα 2.5.2 (Aleksandrov)**.** *Έστω $f : S^{n-1} \to (0,\infty)$ συνεχής και K το χωρίο Wulff της f. Τότε, το σύνολο*

$$\nu_K^{-1}(\{u \in S^{n-1} : h_K(u) < f(u)\})$$

περιέχεται στο σύνολο των ιδιαζόντων σημείων του K.

Εφόσον το σύνολο των ιδιαζόντων σημείων του K έχει $(n-1)$-διάστατο μέτρο Hausdorff ίσο με μηδέν, άμεση συνέπεια του Λήμματος 2.5.2 είναι ότι

$$\begin{aligned} S_K(\{u \in S^{n-1} : h_K(u) < f(u)\}) &= \mathcal{H}_{n-1}(\nu_K^{-1}(\{u \in S^{n-1} : h_K(u) < f(u)\})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

δηλαδή, $h_K(u) \geqslant f(u)$ S_K-σχεδόν για κάθε $u \in S^{n-1}$.

Ισχύει επίσης το ακόλουθο *λήμμα σύγκλισης* του Aleksandrov.

Λήμμα 2.5.3. *Έστω K_i τα χωρία Wulff που αντιστοιχούν στις συνεχείς συναρτήσεις h_i για $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Αν $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην h_0, τότε $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στο K_0.*

Απόδειξη. Παραλείπεται [σελ. 449, Schneider] □

Το επόμενο λήμμα είναι χρήσιμο για μεθόδους διαταραχής. Συνδέει την παράγωγο ως προς t του όγκου μιας οικογένειας χωρίων Wulff $\{K_t\}_{t\in I}$ με την παράγωγο των συναρτήσεων $\{k_t\}_{t\in I}$ που τα ορίζουν.

Λήμμα 2.5.4. *Έστω $\{K_t\}_{t\in I}$ τα χωρία Wulff που αντιστοιχούν στις συνεχείς συναρτήσεις $k_t(u) := k(t,u) : I \times S^{n-1} \longrightarrow (0,\infty)$ όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα. Αν η σύγκλιση*

$$\frac{\partial k(t,u)}{\partial t} = \lim_{s\longrightarrow 0} \frac{k(t+s,u)-k(t,u)}{s}$$

είναι ομοιόμορφη στην S^{n-1}, τότε

$$\frac{dV_n(K_t)}{dt} = \int_{S^{n-1}} \frac{\partial k(t,u)}{\partial t}\, S_{K_t}(u).$$

Αποδεικνύουμε το Λήμμα 2.5.4 σε δύο βήματα.

Λήμμα 2.5.5. *Έστω I ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το 0 και $\{K_t\}_{t\in I}$ τα χωρία Wulff μιας οικογένειας συνεχών συναρτήσεων $k_t(u) := k(t,u) : I \times S^{n-1} \longrightarrow (0,\infty)$. Αν η σύγκλιση*

$$\frac{\partial k(t,u)}{\partial t} = \lim_{s\longrightarrow 0} \frac{k(t+s,u)-k(t,u)}{s}$$

είναι ομοιόμορφη στην S^{n-1}, τότε

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{V_n(K_t)-V_n(K_0)}{t} = \int_{S^{n-1}} k'_+(0,u)\, S_{K_t}(u).$$

Απόδειξη. Αφού $k(t,u) \longrightarrow k(0,u)$ ομοιόμορφα στην S^{n-1} καθώς το $t \to 0^+$, από το Λήμμα 2.5.3 έχουμε

$$\lim_{t\to 0^+} K_t = K_0.$$

Από την ασθενή συνέχεια του επιφανειακού μέτρου και το γεγονός ότι τα S_{K_t} είναι πεπερασμένα, παίρνουμε $S_{K_t} \xrightarrow{w} S_{K_0}$. Από την υπόθεση ότι

$$\frac{k(t,u)-k(0,u)}{t} \longrightarrow k'_+(0,u)$$

ομοιόμορφα στην S^{n-1}, παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{S^{n-1}} \frac{k(t,u)-k(0,u)}{t}\, dS_{K_t}(u) = \int_{S^{n-1}} k'_+(0,u)\, dS_{K_0}(u). \tag{2.5.1}$$

Από το Λήμμα 2.5.2 γνωρίζουμε ότι, για κάθε $t \in I$,

$$h_{K_t}(u) \leqslant k(t,u) \quad \text{και} \quad h_{K_t}(u) = k(t,u) \ \text{ σχεδόν παντού ως προς } S_{K_t}.$$

Άρα,

$$V_n(K_t) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_{K_t}(u)\, dS_{K_t}(u) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} k(t,u)\, dS_{K_t}(u).$$

Μπορούμε λοιπόν στο $t=0$ να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to 0^+} \frac{V_n(K_t)-V_1(K_t,K_0)}{t} &= \frac{1}{n}\liminf_{t\to 0^+} \int_{S^{n-1}} \frac{k(t,u)-h_{K_0}(u)}{t}\, dS_{K_t}(u) \\
&\geqslant \frac{1}{n}\liminf_{t\to 0^+} \int_{S^{n-1}} \frac{k(t,u)-k(0,u)}{t}\, dS_{K_t}(u).
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας αυτή την ανισότητα με την (2.5.1) βλέπουμε ότι

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{V_n(K_t) - V_1(K_t, K_0)}{t} \geqslant \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} k'_+(0,u)\, dS_{K_0}(u).$$

Από την ανισότητα του Minkowski έπεται ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} k'_+(0,u)\, dS_{K_0}(u) &\leqslant \liminf_{t\to 0^+} \frac{V_n(K_t) - V_1(K_t, K_0)}{t} \\ &\leqslant \liminf_{t\to 0^+} \frac{V_n(K_t) - V_n(K_t)^{1-\frac{1}{n}} V_n(K_0)^{\frac{1}{n}}}{t} \\ &= V_n(K_0)^{1-\frac{1}{n}} \liminf_{t\to 0^+} \frac{V_n(K_t)^{\frac{1}{n}} - V_n(K_0)^{\frac{1}{n}}}{t},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει διότι $\lim_{t\to 0^+} V_n(K_t) = V_n(K_0)$.

Όμοια ελέγχουμε ότι

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to 0^+} \frac{V_1(K_0, K_t) - V_n(K_0)}{t} &= \frac{1}{n}\limsup_{t\to 0^+}\int_{S^{n-1}} \frac{h_{K_t}(u) - k(0,u)}{t}\, dS_{K_0} \\ &\leqslant \frac{1}{n}\limsup_{t\to 0^+}\int_{S^{n-1}} \frac{k(t,u) - k(0,u)}{t}\, dS_{K_0} \\ &= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} k'_+(0,u)\, dS_{K_0}(u),\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει από την (2.5.1). Εφαρμόζοντας την ανισότητα Minkowski στο αριστερό μέλος, και από την $\lim_{t\to 0^+} V_n(K_t) = V_n(K_0)$, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} k'_+(0,u)\, dS_{K_0}(u) \geqslant V_n(K_0)^{1-\frac{1}{n}} \limsup_{t\to 0^+} \frac{V_n(K_t)^{\frac{1}{n}} - V_n(K_0)^{\frac{1}{n}}}{t}. \tag{2.5.2}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} k'_+(0,u)\, dS_{K_0}(u) = V_n(K_0)^{1-\frac{1}{n}} \lim_{t\to 0^+} \frac{V_n(K_t)^{\frac{1}{n}} - V_n(K_0)^{\frac{1}{n}}}{t}. \tag{2.5.3}$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θεωρούμε την $g(t) := V_n(K_t)^{\frac{1}{n}}$. Έχουμε ήδη δείξει ότι η δεξιά πλευρική παράγωγος της g στο 0 υπάρχει. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος της g^n στο 0, άρα

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{g(t)^n - g(0)^n}{t} = ng(0)^{n-1} \lim_{t\to 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t}.$$

Τέλος, από τον ορισμό της g παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{V_n(K_t) - V_n(K_0)}{t} = n\cdot \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} k'_+(0,u)\, dS_{K_0}(u),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη του Λήμματος 2.5.4. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θα αποδείξουμε το λήμμα για $t = 0$ και για ένα ανοικτό διάστημα I που περιέχει το 0. Από το Λήμμα 2.5.5, το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{V_n(K_t) - V_n(K_0)}{t} = \int_{S^{n-1}} k'(0,u)\, dS_{K_0}(u).$$

Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε μια συνάρτηση $\overline{k} : -I \times S^{n-1} \longrightarrow (0,\infty)$ με $\overline{k}(t,u) = k(-t,u)$. Για την αντίστοιχη οικογένεια $\{\overline{K}_{-t}\}_{t\in I}$ χωρίων Wulff που ορίζονται από την $\overline{k}$, έχουμε $\overline{K}_{-t} = K_t$ και $\overline{K}_0 = K_0$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.5.5 παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{V_n(K_t) - V_n(K_0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{V_n(\overline{K}_t) - V_n(\overline{K}_0)}{t} = \int_{S^{n-1}} \overline{k}'(0,u)\, dS_{K_0}(u).$$

Παρατηρώντας ότι $\overline{k}'(0,u) = -k'(0,u)$ έχουμε το ζητούμενο. □

2.6 Επιφανειακό και cone-volume μέτρο

Για κάθε κυρτό σώμα εισάγουμε δύο μέτρα Borel πάνω στην σφαίρα S^{n-1}, γνωστά ως το επιφανειακό μέτρο (Aleksandrov-Fenchel-Jessen surface area measure) και το cone-volume μέτρο.

Υπενθυμίζουμε ότι η *συνάρτηση στήριξης* $h_K : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ενός κυρτού και συμπαγούς συνόλου $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως εξής:

$$h_K(x) = \max\{\langle y, x\rangle : y \in K\}.$$

Λέμε ότι ένα συνοριακό σημείο $x \in \mathrm{bd}(K)$ του K έχει εξωτερικό κάθετο διάνυσμα το $u \in S^{n-1}$ αν

$$\langle x, u\rangle = h_K(u).$$

Το $x \in \mathrm{bd}(K)$ λέγεται *ιδιάζον* αν έχει περισσότερα από ένα εξωτερικά κάθετα διανύσματα. Το *ουσιώδες σύνορο* (ή σύνολο των *ομαλών συνοριακών σημείων*) του K είναι το σύνολο $\mathrm{bd}'(K)$ όλων των $x \in \mathrm{bd}(K)$ τα οποία έχουν μοναδικό εξωτερικό κάθετο διάνυσμα, δηλαδή αποτελείται από όλα τα μη ιδιάζοντα σημεία του συνόρου του K.

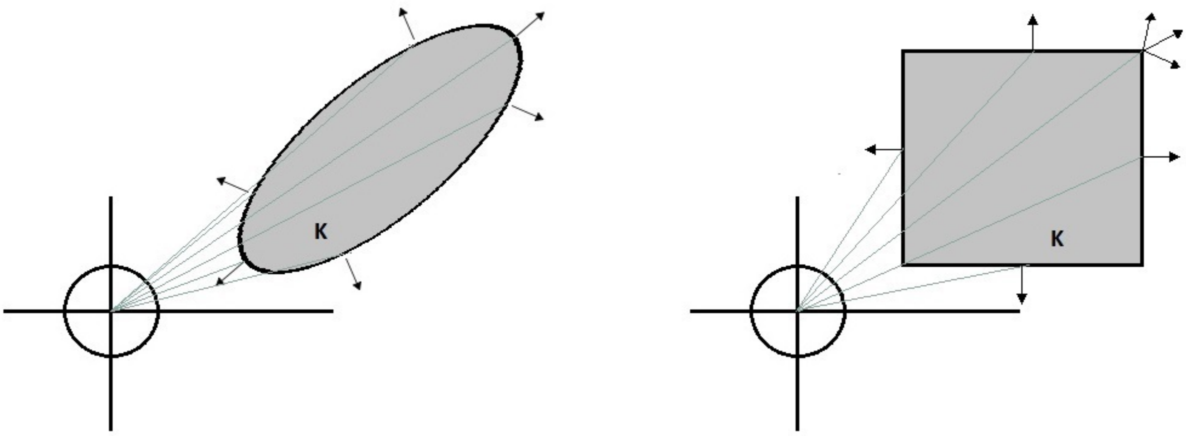
Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, η *απεικόνιση Gauss*

$$\nu_K : \mathrm{bd}'(K) \to S^{n-1}$$

απεικονίζει κάθε $x \in \mathrm{bd}'(K)$ στο μοναδικό εξωτερικό κάθετο διάνυσμά του, δηλαδή ικανοποιεί

$$\langle x, \nu_K(x)\rangle = h_K(\nu_K(x)). \tag{2.6.1}$$

Για τη μετέπειτα χρήση της ν_K μπορούμε να την θεωρούμε ορισμένη και σε ολόκληρο το σύνορο του K, ως μια οποιαδήποτε επέκταση, εφόσον το σύνολο των ιδιαζόντων συνοριακών σημείων του K έχει μηδενικό $(n-1)$-διάστατο μέτρο Hausdorff.



Σχήμα 2.1: Απεικόνιση Gauss

Για ένα Borel σύνολο $\omega \subset S^{n-1}$, η αντίστροφη εικόνα $\nu_K^{-1}(\omega)$ του ω είναι το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του K που έχουν μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο ω. Επίσης το $\nu_K^{-1}(\omega)$ είναι μετρήσιμο ως προς το $(n-1)$-διάστατο μέτρο Hausdorff στο σύνορο του K.

Συμβολίζουμε $\mathcal{B}(S^{n-1})$ το σύνολο των Borel υποσυνόλων της σφαίρας S^{n-1}.

Ορισμός 2.6.1. Έστω $K \in \mathcal{K}^n$ ένα n-διάστατο κυρτό σώμα. Το μέτρο $S_K : \mathcal{B}(S^{n-1}) \longrightarrow [0, \infty)$ που ορίζεται από την

$$S_K(\omega) = \mathcal{H}_{n-1}(\nu_K^{-1}(\omega)) = \int_{\nu_K^{-1}(\omega)} d\mathcal{H}_{n-1}(u),$$

ονομάζεται **επιφανειακό μέτρο** του K.

Μια περιγραφή του S_K είναι η εξής: αν B είναι ένα Borel υποσύνολο της S^{n-1} τότε το $S_K(B)$ είναι το $(n-1)$-διάστατο μέτρο Hausdorff του συνόλου όλων των συνοριακών σημείων του K στα οποία υπάρχει εξωτερικό κάθετο διάνυσμα που ανήκει στο B.

Ορισμός 2.6.2. Έστω $K \in \mathcal{K}_0^n$ ένα n-διάστατο κυρτό σώμα με το μηδέν εσωτερικό του σημείο. Το μέτρο $V_K : \mathcal{B}(S^{n-1}) \longrightarrow [0, \infty)$ που ορίζεται από την

$$V_K(\omega) = \frac{1}{n} \int_{x \in \nu_K^{-1}(\omega)} \langle x, \nu_K(x) \rangle \, d\mathcal{H}_{n-1}(x)$$

ονομάζεται **cone-volume μέτρο** του K.

Θα χρησιμοποιούμε συχνά την παρακάτω γενική Πρόταση:

Πρόταση 2.6.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και συνάρτηση $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow Y$. Αν ορίσουμε ένα μέτρο ν στον Y μέσω της $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, τότε για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\int_Y g(y) \, d\nu(y) = \int_X g \circ f(x) \, d\mu(x).$$

Το παραπάνω μέτρο ν λέγεται μέτρο εικόνα της f και συμβολίζεται με $\nu = f(\mu)$.

Με την παραπάνω ορολογία, εφοδιάζοντας το $\mathrm{bd}(K)$ με το $(n-1)$-διάστατο μέτρο Hausdorff, το επιφανειακό μέτρο S_K είναι το μέτρο εικόνα της απεικόνισης Gauss $\nu_K : (\mathrm{bd}(K), \mathcal{H}_{n-1}) \longrightarrow S^{n-1}$ δηλαδή $S_K = \nu_K(\mathcal{H}_{n-1})$. Από τη (2.6.1) και το συμπέρασμα της Πρότασης 2.6.3, το μέτρο V_K μπορεί ισοδύναμα να ορισθεί

$$V_K(\omega) = \frac{1}{n}\int_{u\in\omega} h_K(u)\, dS_K(u)$$

δηλαδή ισχύει ότι

$$dV_K = \frac{1}{n} h_K\, dS_K.$$

Ο όγκος ενός $K \in \mathcal{K}^n$ μπορεί να υπολογισθεί ως ένα ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο S_K ως εξής

$$V_n(K) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_K(u)\, dS_K(u), \tag{2.6.2}$$

επομένως $V_K(S^{n-1}) = V_n(K)$. Το cone-volume μέτρο πιθανότητας $\overline{V}_K$ του K ορίζεται κανονικοποιώντας το cone-volume μέτρο V_K, δηλαδή ορίζεται να είναι το

$$\overline{V}_K = \frac{1}{V(K)} V_K.$$

Παραδείγματα:
(1) Στη μπάλα: Αν B είναι η μοναδιαία μπάλα τότε

$$S_B(\cdot) = \mathcal{H}_{n-1}(\cdot) \quad \text{και} \quad V_B(\cdot) = V_n(\mathrm{conv}(0,\cdot)).$$

Ενώ αν rB είναι μπάλα ακτίνας r τότε

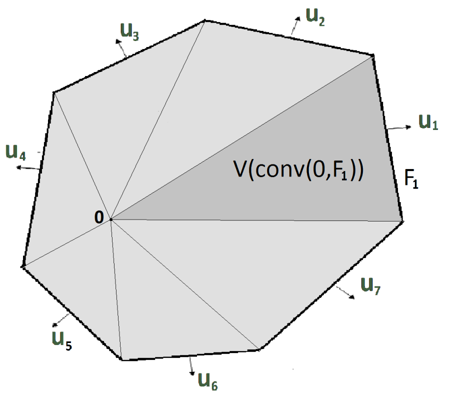
$$S_{rB}(\cdot) = r^{n-1}\mathcal{H}_{n-1}(\cdot) \quad \text{και} \quad V_{rB}(\cdot) = r^n V_n(\mathrm{conv}(0,\cdot)).$$

(2) Στα πολύτοπα: Με τον όρο *πολύτοπο* εννοούμε την κυρτή θήκη ενός πεπερασμένου συνόλου σημείων του $\mathbb{R}^n$. Κάθε πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$ (με μη κενό εσωτερικό) έχει πεπερασμένες το πλήθος έδρες $F_1, \dots, F_N$ με εξωτερικά κάθετα διανύσματα $u_1, \dots, u_N$ αντίστοιχα. Αν το K είναι πολύτοπο τότε τα μέτρα S_K και V_K είναι διακριτά μέτρα που έχουν φορέα το $\{u_1, \dots, u_N\}$ με

$$S_K(\{u_i\}) = V_{n-1}(F_i) \quad \text{και} \quad V_K(\{u_i\}) = V_n(\mathrm{conv}(0, \mathrm{F_i})), \qquad i = 1, \dots, N,$$

δηλαδή το επιφανειακό μέτρο έχει τη μορφή

$$S_K = \sum_{i=1}^{N} V_{n-1}(F_i)\delta_{u_i}$$



Σχήμα 2.2: πολύτοπο

όπου δ_{u_i} το μέτρο Dirac που συγκεντρώνεται στο u_i, ενώ το cone-volume είναι το

$$\begin{aligned} V_K &= \sum_{i=1}^{N} V_n(\mathrm{conv}(0,\mathrm{F_i}))\delta_{u_i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} h_P(u_i)V_{n-1}(F_i)\delta_{u_i}, \end{aligned}$$

από το γνωστό τύπο $V = \frac{1}{n}A \cdot h$ για τον όγκο κώνου με βάση A και ύψος h. Η απόδειξη της (2.6.2) προκύπτει άμεσα από το επόμενο λήμμα και ένα επιχείρημα προσέγγισης.

Λήμμα 2.6.4. *Έστω P ένα n-διάστατο πολύτοπο, με έδρες $F_1, \ldots, F_N$ εξωτερικά κάθετα διανύσματα $u_1, \ldots, u_N$ αντίστοιχα. Τότε,*

$$\sum_{i=1}^{N} V_{n-1}(F_i)u_i = 0 \tag{2.6.3}$$

και

$$V_n(P) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} h_P(u_i)V_{n-1}(F_i). \tag{2.6.4}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$, ο $(n-1)$-διάστατος όγκος της προβολής του P στον $z^{\perp}$ είναι ίσος με

$$\sum_{\langle z,u_i\rangle \geqslant 0} V_{n-1}(F_i)\langle z,u_i\rangle$$

και με

$$-\sum_{\langle z,u_i\rangle < 0} V_{n-1}(F_i)\langle z,u_i\rangle.$$

Έπομένως, η ισότητα των δύο ποσοτήτων μας δίνει ότι

$$\sum_{i=1}^{N} V_{n-1}(F_i)\langle z, u_i\rangle = 0$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$, απ' όπου έπεται η (2.6.3).

Για την (2.6.4) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in \mathrm{int}(P)$ γιατί το αριστερό μέλος της ισότητας είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές του P, ενώ το ίδιο ισχύει και για το δεξί, γιατί

$$\sum_{i=1}^{N} h_{P+z}(u_i)V_{n-1}(F_i+z) = \sum_{i=1}^{N}(h_P(u_i) + \langle z, u_i\rangle)V_{n-1}(F_i) = \sum_{i=1}^{N} h_P(u_i)V_{n-1}(F_i),$$

λόγω της (2.6.3). Τώρα, μπορούμε να γράψουμε το $P = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{conv}(\{0\} \cup F_i)$, επομένως

$$V_n(K) = \sum_{i=1}^{N} V_n(\mathrm{conv}(\{0\} \cup F_i)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} h_P(u_i)V_{n-1}(F_i),$$

από το γνωστό τύπο $V = \frac{1}{n}A \cdot h$ για τον όγκο κώνου με βάση A και ύψος h. □

Σύγκλιση

Έστω $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ ακολουθία Borel μέτρων στην σφαίρα S^{n-1}. Λέμε ότι η ακολουθία των μέτρων $\mu_1, \mu_2, \ldots$ συγκλίνει ασθενώς στο μέτρο μ αν

$$\int_{S^{n-1}} f(u)\, d\mu_n(u) \longrightarrow \int_{S^{n-1}} f(u)\, d\mu(u)$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$. Το επόμενο αποτέλεσμα μας χρησιμεύει για μεθόδους προσέγγισης, για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [Gruber σελ 190]. Αν K_n και K είναι κυρτά σώματα, τότε

$$\lim_{n\to\infty} K_n = K \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_{K_n} = S_K \quad \text{ασθενώς.}$$

Εναλλακτικός ορισμός του επιφανειακού μέτρου:
Σταθεροποιούμε $K \in \tilde{\mathcal{K}}^n$, και για κάθε $L \in \tilde{\mathcal{K}}^n$ ορίζουμε $f(h_L) = V_1(K, L)$. Επεκτείνουμε την f γραμμικά στον υπόχωρο $D(S^{n-1}) = \mathrm{span}\{h_L|_{S^{n-1}}, L \in \tilde{\mathcal{K}}^n\}$ του $C(S^{n-1})$. Από την προσθετικότητα του V_1 ως προς L και το γεγονός ότι $h_{L_1+L_2} = h_{L_1} + h_{L_2}$ για κάθε $L_1, L_2 \in \tilde{\mathcal{K}}^n$, η f είναι καλά ορισμένο θετικό συναρτησοειδές στον $D(S^{n-1})$, άρα επεκτείνεται σε ένα θετικό συναρτησοειδές στον $C(S^{n-1})$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, μπορούμε να βρούμε ένα μέτρο S_K στα Borel σύνολα της S^{n-1} τέτοιο ώστε

$$V_1(K, L) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_L(u)dS_K(u), \qquad L \in \mathcal{K}_n. \tag{2.6.5}$$

Το S_K είναι το *επιφανειακό μέτρο* του K. Συνέπεια της ολοκληρωτικής αναπαράστασης του $V_1(K, L)$ είναι το γεγονός ότι αν $L_1 \subseteq L_2$ τότε $V_1(K, L_1) \leqslant V_1(K, L_2)$. Για μια διαφορετική προσέγγιση της (2.6.5) μέσω πολυτόπων, παραπέμπουμε [Gruber σελ 192]. Πατατηρήστε ότι η πρώτη ανισότητα του Minkowski γίνεται

$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_L(u)\,dS_K(u) \geq V(L)^{\frac{1}{n}}V(K)^{\frac{n-1}{n}} \tag{2.6.6}$$

η οποία για $L = B_2^n$ είναι η ισοπεριμετρική ανισότητα.

Σχόλια:

Το Λήμμα (2.5.4) μας δίνει μία ακόμα διαφορετική προσέγγιση του επιφανειακού και του cone-volume μέτρου. Θεωρώντας τα σύνολα $K + tL$ για $t \geqslant 0$ δηλαδή τα χωρία Wulff των $h_K + th_L$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{dV(K+tL)}{dt}\Big|_{t=0^+} = \int_{S^{n-1}} h_L(u)\,dS_K(u)$$

και μαζί με την (2.4.2) καταλήγουμε ξανά στην (2.6.5). Κάτι ανάλογο για το cone-volume μέτρο το έχουμε αν θεωρήσουμε τα σύνολα $K_t = \bigcap_{u\in S^{n-1}}\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle \leqslant h_K(u)h_L(u)^t\}$ γιατί τότε

$$\frac{dV(K_t)}{dt}\Big|_{t=0} = n\int_{S^{n-1}} \log h_L(u)\,dV_K(u).$$

2.6.1 Αποτελέσματα μοναδικότητας

Σε αυτή την υποπαράγραφο εξετάζουμε κατά πόσο τα μέτρα αυτά χαρακτηρίζονται μοναδικά από τα σώματα, με άλλα λόγια: αν έχουμε ότι $S_K = S_L$ (ή $V_K = V_L$) τότε υποχρεωτικά $K = L$;. Η απάντηση είναι όχι, όμως στην περίπτωση που $K \neq L$ υπάρχει γεωμετρική σχέση μεταξύ των δύο σωμάτων.

Θεώρημα 2.6.5. *Αν $K, L \in \mathcal{K}^n$ δυο n-διάστατα κυρτά σώματα με*

$$S_K = S_L$$

τότε, είτε $K = L$ είτε τα K, L είναι το ένα μεταφορά του άλλου.

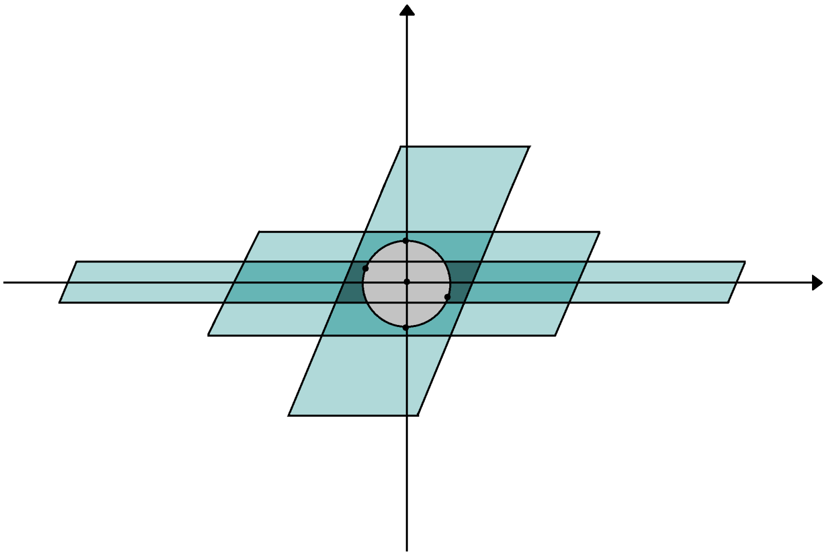
Απόδειξη. Από την (2.6.2) και τον εναλλακτικό ορισμό του επιφανειακού μέτρου έχουμε

$$nV(K) = \int_{S^{n-1}} h_K\,dS_K = \int_{S^{n-1}} h_K\,dS_L = nV_1(K, L)$$

Άρα από την ανισότητα Minkowski έπεται ότι

$$V(K)^n = V_1(K, L)^n \geq V(K)^{n-1}V(L) \tag{2.6.7}$$

συνεπώς $V(K) \geq V(L)$. Λόγω συμμετρίας, έχουμε επίσης $V(L) \geq V(K)$. Συνεπώς έχουμε ισότητα στην πρώτη ανισότητα Minkowski και άρα τα K, L είναι ομοιοθετικά και επειδή έχουν ίσους όγκους έπεται ότι το ένα είναι μεταφορά του άλλου. □



Σχήμα 2.3: Παραλληλόγραμμα ίσου όγκου με παράλληλες πλευρές

Το αντίστοιχο θεώρημα για τα cone-volume μέτρα, είναι ανοικτό πρόβλημα. Σημειώνουμε για την περίπτωση του επιπέδου ότι, το εμβαδόν των τεσσάρων τριγώνων που σχηματίζονται από τις διαγωνίους ενώς παραλληλογράμμου είναι ίσο με το ένα τέταρτο του εμβαδού του παραλληλογράμμου. Επομένως όλα τα 0-συμμετρικά παραλληλόγραμμα ίσου όγκου με παράλληλες πλευρές έχουν το ίδιο cone-volume μέτρο. Στο επίπεδο, από τους Böröczky-Lutwak-Yang-Zhang έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.6.6. *Έστω $K, L \subseteq \mathbb{R}^2$ δύο 0-συμμετρικά κυρτά σώματα με*

$$V_K = V_L$$

τότε, είτε $K = L$ είτε τα K, L είναι παραλληλόγραμμα με παράλληλες πλευρές.

Για την απόδειξη ξεκινάμε με τον εξής :

Ορισμός 2.6.7. Έστω K, L δύο 0-συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Η *εσωτερική ακτίνα* $r(K, L)$ και η *εξωτερική ακτίνα* $R(K, L)$ του K ως προς το L ορίζονται ως εξής:

$$r(K, L) := \sup\{t > 0 : x + tL \subset K, x \in \mathbb{R}^n\},$$
$$R(K, L) := \inf\{t > 0 : x + tL \supset K, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Άμεσα βλέπουμε ότι οι δύο ακτίνες ικανοποιούν την

$$r(K, L) = \frac{1}{R(L, K)}.$$

Αν L είναι η μοναδιαία μπάλα, τότε $r(K,L)$ είναι η μεγαλύτερη ακτίνα μπάλας που περιέχεται στο K και $R(K,L)$ είναι η μικρότερη ακτίνα μπάλας που περιέχει το K. Αν επιπλέον τα K,L είναι 0-συμμετρικά τότε τα παραπάνω $\sup,\inf$ πιάνονται για μια *διαστολή* tL του L, άρα

$$r(K,L)=\sup\{t>0: tL\subset K\}=\min_{u\in S^{n-1}}\frac{h_K(u)}{h_L(u)} \tag{2.6.8}$$
$$R(K,L)=\inf\{t>0: tL\supset K\}=\max_{u\in S^{n-1}}\frac{h_K(u)}{h_L(u)}.$$

Λήμμα 2.6.8. *Έστω $K,L\subseteq\mathbb{R}^n$ κυρτά σώματα και $r=r(K,L)$. Για κάθε $0\leqslant t\leqslant r$ ορίζουμε $K_t=\{x\in\mathbb{R}^n : x+tL\subseteq K\}$. Τότε,*

$$V_n(K)-V_n(K_t)=n\int_0^t V_1(K_s,L)\,ds.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$K_t=\bigcap_{u\in S^{n-1}}\{x\in\mathbb{R}^n : h_{x+tL}(u)\leqslant h_K(u)\}. \tag{2.6.9}$$

Επειδή για κάθε $0\leqslant t<r$ υπάρχει μεταφορά του K η οποία περιέχει το tL, έπεται ότι υπάρχουν (συγκεκριμένες) μεταφορές του K έτσι ώστε η $k_t:=h_K-th_L$ να είναι θετική και το K_t να είναι το χωρίο Wulff της k_t, δηλαδή

$$K_t=\bigcap_{u\in S^{n-1}}\{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle\leqslant h_K(u)-th_L(u)\}.$$

Από το Λήμμα 2.5.4 και τον ορισμό του μεικτού όγκου $V_1(\cdot,L)$ έπεται ότι, για $0<t<r$,

$$\frac{d}{dt}V_n(K_t)=\int_{S^{n-1}}\frac{\partial k_t(u)}{\partial t}\,dS_{K_t}=-\int_{S^{n-1}}h_L(u)\,dS_{K_t} \tag{2.6.10}$$
$$=-nV_1(K_t,L). \tag{2.6.11}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$\lim_{t\longrightarrow r}V_n(K_t)=V_n(K_r)\qquad\text{και}\qquad\lim_{t\longrightarrow 0}K_t=K_0=K,$$

και ότι το K_r έχει κενό εσωτερικό. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (2.6.10) παίρνουμε ότι, για $0\leqslant t\leqslant r$,

$$V_n(K_t)-V_n(K)=-n\int_0^t V_1(K_s,L)\,ds.$$

□

Σε αυτή την παράγραφο θα γράφουμε $V=V_2$ για τον όγκο στο επίπεδο. Υπενθυμίζουμε επίσης τον τύπο του Steiner στον $\mathbb{R}^2$:

$$V(K+tL)=V(K)+2tV_1(K,L)+t^2V(L). \tag{2.6.12}$$

Θεώρημα 2.6.9. *Έστω $K, L \subseteq \mathbb{R}^2$ κυρτά σώματα και έστω $r := r(K, L)$ και $R := R(K, L)$. Για το πολυώνυμο $A(t) = V(K) - 2tV(K, L) + t^2V(L)$ ισχύει ότι:*

(i) *Αν $r \leqslant t \leqslant R$ τότε $A(t) \leqslant 0$.*

(ii) *Αν $r < t < R$ τότε $A(t) < 0$ (προφανές από το (i)).*

(iii) *$A(r) = 0$ αν και μόνο αν το K είναι το Minkowski άθροισμα μιας διαστολής του L και κάποιου ευθύγραμμου τμήματος.*

(iv) *$A(R) = 0$ αν και μόνο αν το L είναι το Minkowski άθροισμα μιας διαστολής του K και κάποιου ευθύγραμμου τμήματος.*

Απόδειξη. Έστω $t \in [0, r]$. Όπως και στην (2.6.9) θεωρούμε το χωρίο Wulff

$$K_t = \bigcap_{u \in S^1} \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, u\rangle \leqslant h_K(u) - th_L(u)\}.$$

Από τον ορισμό του K_t έχουμε ότι $h_{K_t} \leqslant h_K - th_L$, συνεπώς

$$K_t + tL \subseteq K.$$

Τώρα, ο προηγούμενος εγκλεισμός και οι ιδιότητες μονοτονίας, γραμμικότητας και συμμετρίας των μεικτών όγκων δίνουν

$$V(K, L) \geqslant V(K_t + tL, L) = V(K_t, L) + tV(L). \tag{2.6.13}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.6.8 και την (2.6.13) έχουμε

$$V(K) - V(K_t) = 2\int_0^t V(K_s, L)\, ds \leqslant 2\int_0^t (V(K, L) - sV(L))\, ds \tag{2.6.14}$$

$$= 2tV(K, L) - t^2V(L). \tag{2.6.15}$$

Άρα,

$$V(K) - 2tV(K, L) + t^2V(L) \leqslant V(K_t). \tag{2.6.16}$$

Αφού το K_r έχει κενό εσωτερικό, η (2.6.16) για $t = r$ γίνεται

$$V(K) - 2rV(K, L) + r^2V(L) \leqslant 0. \tag{2.6.17}$$

Τώρα, αν αλλάξουμε τη θέση των K και L στην (2.6.17) θα έχουμε

$$V(L) - 2r'V(L, K) + r'^2V(K) \leqslant 0, \tag{2.6.18}$$

όπου $r' = r(L, K)$. Λόγω της συμμετρίας του μεικτού όγκου και της σχέσης $r(L, K) = 1/R(K, L)$, η (2.6.18) γίνεται

$$V(K) - 2RV(K, L) + R^2V(L) \leqslant 0, \tag{2.6.19}$$

και έτσι έπεται η (i) από τις (2.6.17) και (2.6.19). Για τις περιπτώσεις ισότητας παρατηρούμε ότι το K_r είναι ευθύγραμμο τμήμα ή σημείο γιατί $V(K_r)=0$ και ότι στην (2.6.16) έχουμε ισότητα αν και μόνο αν για κάθε $s\in[0,t]$

$$V(K,L)=V(K_s+sL,L). \tag{2.6.20}$$

Η παραπάνω ισοδυναμία ισχύει γιατί ισότητα στην (2.6.16) σημαίνει ισότητα των ολοκληρωμάτων στην (2.6.14), και από την (2.6.13) παίρνουμε ότι για κάθε $s\in[0,t]$

$$V(K_s,L)=V(K,L)-sV(L), \tag{2.6.21}$$

οπότε έχουμε την (2.6.20) λόγω της γραμμικότητας του μεικτού όγκου. Για το (iii) υποθέτουμε ότι $A(r)=0$, δηλαδή

$$V(K)-2rV(K,L)+r^2V(L)=0=V(K_r). \tag{2.6.22}$$

Από την ισοδυναμία της (2.6.20) έχουμε

$$V(K)-2rV(K_r+rL,L)+r^2V(L)=0. \tag{2.6.23}$$

Προσθέτουμε το $V(K_r)=0$ και, από τον τύπο Minkowski-Steiner (2.6.12), έχουμε

$$V(K)-V(K_r+rL)=0.$$

Αφού $K_r+rL\subseteq K$ και τα δύο σώματα έχουν ίσους όγκους, έπεται ότι $K_r+rL=K$, δηλαδή το K είναι το Minkowski άθροισμα μιας διαστολής του L και του ευθύγραμμου τμήματος (ή σημείου) K_r. Έτσι έχουμε το (iii).

Για το (iv) όμοια υποθέτουμε ότι $A(R)=0$, δηλαδή

$$V(L)-2r'V(L,K)+r'^2V(K)=0,$$

όπου $r'=r(L,K)$. Όμοια με πριν βγάζουμε ότι

$$V(L)-V(L_{r'}+r'K)=0,$$

και, αφού $L_{r'}+r'K\subseteq L$ και τα δύο σώματα έχουν ίσους όγκους, έπεται ότι $L_{r'}+r'K=L$. Δηλαδή το L είναι το Minkowski άθροισμα μιας διαστολής του K και του ευθύγραμμου τμήματος (ή σημείου) L'_r. Έτσι έχουμε το (iv). □

Λήμμα 2.6.10. *Έστω K,L δύο 0-συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^2$. Τότε,*

$$\int_{S^1}\frac{h_K}{h_L}\,dV_K\leqslant\frac{V(K)}{V(L)}\int_{S^1}\frac{h_L}{h_K}\,dV_K. \tag{2.6.24}$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα K,L είναι ομοιοθετικά ή παραλληλόγραμμα με παράλληλες πλευρές.

Απόδειξη. Επειδή τα K και L είναι 0-συμμετρικά έχουμε ότι, για $u \in S^1$,

$$r(K,L) \leqslant \frac{h_K(u)}{h_L(u)} \leqslant R(K,L).$$

Από το Θεώρημα 2.6.9 έπεται ότι $A\big(\frac{h_K(u)}{h_L(u)}\big) \leqslant 0$, δηλαδή

$$V(K) - 2\frac{h_K(u)}{h_L(u)}V(K,L) + \left(\frac{h_K(u)}{h_L(u)}\right)^2 V(L) \leqslant 0. \tag{2.6.25}$$

Ολοκληρώνουμε την (2.6.25) ως προς το μέτρο $h_L dS_K$, και έτσι

$$\int_{S^1}\left(V(K) - 2\frac{h_K(u)}{h_L(u)}V(K,L) + \left(\frac{h_K(u)}{h_L(u)}\right)^2 V(L)\right)h_L(u)\,dS_K(u) \leqslant 0. \tag{2.6.26}$$

Ισοδύναμα,

$$V(K)\int_{S^1} h_L(u)\,dS_K(u) - 2V(K,L)\int_{S^1} h_K(u)\,dS_K(u) + V(L)\int_{S^1}\frac{h_K(u)^2}{h_L(u)}\,dS_K(u) \leqslant 0.$$

Χρησιμοποιώντας την (2.6.2), την (2.6.5) και την προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\int_{S^1}\frac{h_K(u)^2}{h_L(u)}\,dS_K \leqslant \frac{V(K)}{V(L)}2V(K,L) = \frac{V(K)}{V(L)}\int_{S^1} h_L\,dS_K,$$

και επειδή $dS_K = 2\frac{1}{h_K}dV_K$ έπεται η (2.6.24).

Για τη συνθήκη ισότητας, αρχικά παρατηρούμε ότι ισότητα στην (2.6.24) σημαίνει ισότητα στην (2.6.26), και αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι, για κάθε $u \in \mathrm{supp}(S_K)$,

$$A\left(\frac{h_K(u)}{h_L(u)}\right) = V(K) - 2\frac{h_K(u)}{h_L(u)}V(K,L) + \left(\frac{h_K(u)}{h_L(u)}\right)^2 V(L) = 0. \tag{2.6.27}$$

Τώρα αν τα K, L είναι ομοιοθετικά, δηλαδή $K = r(K,L)L$, το Θεώρημα 2.6.9 δίνει

$$A\left(\frac{h_K(u)}{h_L(u)}\right) = A(r(K,L)) = 0$$

για κάθε $u \in S^1$, επομένως ικανοποιείται η (2.6.27), άρα έχουμε ισότητα στην (2.6.24). Υποθέτοντας ότι τα K, L δεν είναι ομοιοθετικά και ότι ισχύει η ισότητα, θα δείξουμε ότι τα K, L είναι παραλληλόγραμμα με παράλληλες πλευρές και αυτό θα ολοκληρώσει την απόδειξη του Λήμματος. Αφού τα K, L δεν είναι ομοιοθετικά, έχουμε $r(K,L) < R(K,L)$. Παίρνουμε $u_0 \in \mathrm{supp}S_K$. Τότε, ισχύει ότι

$$\frac{h_K(u_0)}{h_L(u_0)} = r(K,L) \qquad \text{ή} \qquad \frac{h_K(u_0)}{h_L(u_0)} = R(K,L), \tag{2.6.28}$$

αλλιώς, αν $r(K,L) < h_K(u_0)/h_L(u_0) < R(K,L)$ τότε το Θεώρημα 2.6.9 θα δώσει ότι $A\left(\frac{h_K(u)}{h_L(u)}\right) < 0$, που έρχεται σε αντίφαση με την (2.6.27). Έστω ότι $\frac{h_K(u_0)}{h_L(u_0)} = r(K,L)$. Τότε, απο την (2.6.27) και τη συνθήκη ισότητας του Θεωρήματος 2.6.9 βλέπουμε ότι το K είναι διαστολή του L συν κάποιο ευθύγραμμο τμήμα (όχι σημείο). Έτσι, υπάρχει $x_0 \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$h_K(u) = |\langle x_0, u\rangle| + r(K,L)h_L(u)$$

για κάθε $u \in S^1$. Διαιρώντας με $h_L(u)$ και βάζοντας $u = u_0$ έχουμε

$$r(K,L) = \frac{|\langle x_0, u_0\rangle|}{h_L(u_0)} + r(K,L),$$

δηλαδή $x_0 \perp u_0$. Το K είναι 0-συμμετρικό, άρα και το $\mathrm{supp}(S_K)$ είναι 0-συμμετρικό σύνολο. Έτσι, τα μόνα διανύσματα στο $\mathrm{supp}(S_K)$ που ικανοποιούν την $h_K(\cdot)/h_L(\cdot) = r(K,L)$ είναι τα $\pm u_0$, γιατί κάθε άλλο τέτοιο διάνυσμα θα είναι κάθετο στο x_0 και είμαστε στο επίπεδο. Ο φορέας του S_K δεν μπορεί να είναι μόνο τα $\pm u_0$ άρα, απο την (2.6.28), υπάρχει $u_1 \neq \pm u_0$ στο φορέα του S_K ώστε $h_K(u_1)/h_L(u_1) = R(K,L)$. Όμοια με πριν συμπεραίνουμε ότι τα μόνα διανύσματα στο φορέα του S_K που ικανοποιούν την $h_K(\cdot)/h_L(\cdot) = R(K,L)$ είναι τα $\pm u_1$. Έτσι,

$$\mathrm{supp}(S_K) = \{\pm u_0, \pm u_1\},$$

άρα το K είναι παραλληλόγραμμο και επειδή το K είναι διαστολή του L συν κάποιο ευθύγραμμο τμήμα, το L είναι παραλληλόγραμμο με πλευρές παράλληλες προς τις πλευρές του K. □

Θεώρημα 2.6.11. *Έστω $K, L \subseteq \mathbb{R}^2$, 0-συμμετρικά κυρτά σώματα με $V_K = V_L$. Τότε, είτε $K = L$ ή τα K, L είναι παραλληλόγραμμα με παράλληλες πλευρές.*

Απόδειξη. Αφού $V_K = V_L$, έπεται ότι $V(K) = V(L)$, επομένως το Λήμμα 2.6.10 δίνει

$$\int_{S^1} \frac{h_K}{h_L}\, dV_K \leqslant \int_{S^1} \frac{h_L}{h_K}\, dV_K \tag{2.6.29}$$

και

$$\int_{S^1} \frac{h_L}{h_K}\, dV_L \leqslant \int_{S^1} \frac{h_K}{h_L}\, dV_L. \tag{2.6.30}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.6.29), (2.6.30) και την υπόθεση ότι $V_K = V_L$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{S^1} \frac{h_L}{h_K}\, dV_K = \int_{S^1} \frac{h_L}{h_K}\, dV_L &\leqslant \int_{S^1} \frac{h_K}{h_L}\, dV_L \\ = \int_{S^1} \frac{h_K}{h_L}\, dV_K &\leqslant \int_{S^1} \frac{h_L}{h_K}\, dV_K.\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε ισότητα στις (2.6.29) και (2.6.30), και πάλι από το Λήμμα 2.6.10 συμπεραίνουμε οτι τα K, L είναι ομοιοθετικά ή παραλληλόγραμμα με παράλληλες πλευρές. Τώρα, αν τα K, L είναι ομοιοθετικά, τότε $K = L$ γιατί έχουν ίσους όγκους και μη-κενό εσωτερικό. □

Κεφάλαιο 3

Λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski

Έστω K και L είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0,1]$. Η ανισότητα Brunn-Minkowski εκφράζει το γεγονός ότι ο όγκος είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση ως προς το άθροισμα Minkowski,

$$V(\lambda K + (1-\lambda)L) \geq V(K)^{\lambda} V(L)^{1-\lambda}.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα K και L είναι το ένα μεταφορά του άλλου.

Υπάρχει η εικασία ότι ο όγκος είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση ως προς τα p-αθροίσματα που παρουσιάζονται παρακάτω, δηλαδή ότι έχουμε μια οικογένεια ισχυρότερων ανισοτήτων τύπου Brunn-Minkowski τις L_p-ανισότητες Brunn-Minkowski.

3.1 Οι p-κυρτοί συνδυασμοί και οι ανισότητες

Υποθέτουμε ότι τα K και L είναι δύο κυρτά σώματα που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους. Οι συναρτήσεις στήριξης είναι θετικά ομογενείς και προσθετικές ως προς τα αθροίσματα Minkowski, δηλαδή ικανοποιούν την $h_{sK+tL} = sh_K + th_L$ για $s, t > 0$. Επομένως. ο κυρτός συνδυασμός

$$(1-\lambda)K + \lambda L = \{(1-\lambda)x + \lambda y : x \in K, y \in L\}$$

μπορεί να εκφραστεί ως η τομή των ημιχώρων

$$(1-\lambda)K + \lambda L = \bigcap_{u \in S^{n-1}} \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leqslant (1-\lambda)h_K(u) + \lambda h_L(u) \Big\}.$$

Για $p > 0$ ο p-κυρτός συνδυασμός $(1-\lambda)\cdot K +_p \lambda \cdot L$ ορίζεται να είναι

$$(1-\lambda)\cdot K +_p \lambda \cdot L = \bigcap_{u \in S^{n-1}} \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leqslant ((1-\lambda)h_K(u)^p + \lambda h_L(u)^p)^{\frac{1}{p}} \Big\},$$

Παρατηρούμε ότι για $p \geq 1$ η συνάρτηση $((1-\lambda)h_K^p + \lambda h_L^p)^{\frac{1}{p}}$ είναι η συνάρτηση στήριξης του $(1-\lambda)\cdot K +_p \lambda \cdot L$, ενώ για $0 < p < 1$ εν γένει δεν είναι. Η οριακή κατάσταση, για $p = 0$, είναι ο 0-κυρτός συνδυασμός $(1-\lambda)\cdot K +_o \lambda \cdot L$ που ορίζεται από την

$$(1-\lambda)\cdot K +_o \lambda \cdot L = \bigcap_{u\in S^{n-1}} \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle \leqslant h_K(u)^{1-\lambda} h_L(u)^{\lambda}\Big\},$$

Συνέπεια της ανισότητας Hölder είναι ότι για $0 \leq p \leq q$ έχουμε

$$(1-\lambda)\cdot K +_p \lambda \cdot L \subseteq (1-\lambda)\cdot K +_q \lambda \cdot L$$

Για $s, t \geqslant 0$ με $|s| + |t| > 0$ έχει νόημα να ορίσουμε γενικότερα

$$s\cdot K +_p t\cdot L = \bigcap_{u\in S^{n-1}} \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle \leqslant (sh_K(u)^p + th_L(u)^p)^{\frac{1}{p}}\Big\}.$$

και L_p-βαθμωτό πολλαπλασιασμό $s\cdot K$ από την

$$s\cdot K = s^{\frac{1}{p}}K. \tag{3.1.1}$$

Σημειώνουμε ότι, στους παραπάνω συμβολισμούς $+_p$ και $+_o$, συμβολίζουμε τον αντίστοιχο βαθμωτό πολλαπλασιασμό απλώς με $\cdot$ εννοώντας $\cdot_p$ και $\cdot_o$ αντίστοιχα.

Τα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι τα εξής.

Πρόβλημα 3.1.1 (L_p-ανισότητα Brunn-Minkowski)**.** Έστω $0 < p < 1$. Αν K και L είναι δύο 0-συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $\lambda \in [0,1]$,

$$V_n((1-\lambda)\cdot K +_p \lambda \cdot L) \geqslant V_n(K)^{1-\lambda} V_n(L)^{\lambda}.$$

Το πρόβλημα διατυπώνεται μόνο για $0 < p < 1$, αφού για $p = 1$ η ανισότητα ισχύει από την κλασσική ανισότητα Brunn-Minkowski, ενώ για $p > 1$ έπεται από την περίπτωση $p = 1$ αφού τότε

$$(1-\lambda)\cdot K +_p \lambda \cdot L \supseteq (1-\lambda)K + \lambda L.$$

Μάλιστα, αν $p \geqslant 1$ δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι τα K και L είναι 0-συμμετρικά.

Απλά παραδείγματα δείχνουν ότι η L_p-ανισότητα Brunn-Minkowski δεν ισχύει γενικά για κανένα $p < 0$, ακόμα κι αν περιοριστούμε στα 0-συμμετρικά κυρτά σώματα.

Πρόβλημα 3.1.2 (λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski)**.** Αν K, L είναι δύο 0-συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $\lambda \in [0,1]$,

$$V_n((1-\lambda)\cdot K +_o \lambda \cdot L) \geqslant V_n(K)^{1-\lambda} V_n(L)^{\lambda}.$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου βλέπουμε ότι $h_K^{1-\lambda}h_L^{\lambda} \leqslant (h_K^p + h_L^p)^{\frac{1}{p}}$ για κάθε $p > 0$, άρα

$$(1-\lambda)\cdot K +_o \lambda \cdot L \subseteq (1-\lambda)K +_p \lambda L$$

για κάθε $0 < p < 1$. Από αυτόν τον εγκλεισμό συμπεραίνουμε ότι από τη λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski έπεται η L_p-ανισότητα Brunn-Minkowski. Δηλαδή το Πρόβλημα 3.1.2 είναι ισχυρότερο από το Πρόβλημα 3.1.1.

Απλά παραδείγματα (όπως ένας 0-συμμετρικός κύβος και κατάλληλη μεταφορά του) δείχνουν ότι χωρίς την υπόθεση της συμμετρίας για τα K και L, η λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski δεν ισχύει απαραίτητα.

Παρατηρήστε από την (2.6.6) ότι, μία ακόμα μορφή της πρώτης ανισότητας Minkowski είναι

$$\int_{S^{n-1}} \frac{h_L}{h_K}\, d\overline{V}_K \geqslant \left(\frac{V_n(K)}{V_n(L)}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.1.2}$$

Πρόβλημα 3.1.3 (L_p-ανισότητα Minkowski)**.** Έστω $0 < p < 1$. Αν K και L είναι δύο 0-συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\left(\int_{S^{n-1}} \left(\frac{h_L}{h_K}\right)^p d\overline{V}_K\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\frac{V_n(K)}{V_n(L)}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Για κάθε $p \geqslant 1$ η L_p-ανισότητα Minkowski ισχύει για οποιαδήποτε κυρτά σώματα που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους. Επίσης, για κάθε $p > 0$ είναι ισοδύναμη με την αντίστοιχη L_p-ανισότητα Brunn-Minkowski. Όμως η ανισότητα Minkowski (περίπτωση $p = 1$) είναι ασθενέστερη από την L_p-ανισότητα Minkowski για κάθε $0 < p < 1$.

Πρόβλημα 3.1.4 (λογαριθμική ανισότητα Minkowski)**.** Αν K και L είναι δύο 0-συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_{S^{n-1}} \log\frac{h_L}{h_K}\, d\overline{V}_K \geqslant \frac{1}{n}\log\frac{V_n(L)}{V_n(K)}.$$

Ακριβώς όπως η λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski είναι ισχυρότερη από την ανισότητα Brunn-Minkowski, έτσι και η λογαριθμική ανισότητα Minkowski είναι ισχυρότερη από την ανισότητα Minkowski. Είναι επίσης ισχυρότερη από όλες τις L_p-ανισότητες Minkowski με $0 < p < 1$. Η ανισότητα Minkowski είναι αντίστοιχα ασθενέστερη από όλες αυτές. Αυτές οι σχέσεις προκύπτουν άμεσα από την ανισότητα Jensen.

Είδαμε ότι η ανισότητα Brunn-Minkowski είναι ισοδύναμη με την $V_n((1-\lambda)K + \lambda L) \geqslant V_n(K)^{1-\lambda}V_n(L)^{\lambda}$. Ανάλογου τύπου ισοδυναμίες έχουμε και με τα p-αθροίσματα.

Λήμμα 3.1.5. *Έστω $p > 0$ και K, L δύο κυρτά σώματα που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε* $s, t \geqslant 0$ *ισχύει*

$$V_n(s \cdot K +_p t \cdot L)^{\frac{p}{n}} \geqslant sV_n(K)^{\frac{p}{n}} + tV_n(L)^{\frac{p}{n}}$$

(β) *Για κάθε* $0 < \lambda < 1$ *ισχύει*

$$V_n((1-\lambda) \cdot K +_p \lambda \cdot L) \geqslant V_n(K)^{1-\lambda} V_n(L)^{\lambda}$$

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Θέτοντας $s = 1 - \lambda$ και $t = \lambda$, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, έχουμε

$$\begin{aligned} V_n((1-\lambda) \cdot K +_p \lambda \cdot L)^{\frac{p}{n}} &\geqslant (1-\lambda)V_n(K)^{\frac{p}{n}} + \lambda V_n(L)^{\frac{p}{n}} \\ &\geqslant V_n(K)^{\frac{(1-\lambda)p}{n}} V_n(L)^{\frac{\lambda p}{n}}, \end{aligned}$$

απ' όπου παίρουμε την (β).

(β) $\Rightarrow$ (α). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $V_n(K) > 0$ και $V_n(L) > 0$, αλλιώς το ζητούμενο ισχύει. Θέτουμε

$$K_1 = \frac{1}{V_n(K)^{\frac{1}{n}}} K \quad , \quad L_1 = \frac{1}{V_n(L)^{\frac{1}{n}}} L \quad , \quad \lambda = \frac{V_n(L)^{\frac{p}{n}}}{V_n(K)^{\frac{p}{n}} + V_n(L)^{\frac{p}{n}}}$$

Τα K_1 και L_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την (β) παίρνουμε

$$V_n((1-\lambda) \cdot K_1 +_p \lambda \cdot L_1) \geqslant 1. \tag{3.1.3}$$

Όμως η (3.1.1) θα δώσει

$$\begin{aligned} (1-\lambda) \cdot K_1 +_p \lambda \cdot L_1 &= \frac{1}{(V_n(K)^{\frac{p}{n}} + V_n(L)^{\frac{p}{n}})^{\frac{1}{p}}} K +_p \frac{1}{(V_n(K)^{\frac{p}{n}} + V_n(L)^{\frac{p}{n}})^{\frac{1}{p}}} L \\ &= \frac{1}{(V_n(K)^{\frac{p}{n}} + V_n(L)^{\frac{p}{n}})^{\frac{1}{p}}} (K +_p L). \end{aligned}$$

Τώρα, από την (3.1.3) έχουμε

$$V_n(K +_p L)^{\frac{p}{n}} \geqslant V_n(K)^{\frac{p}{n}} + V_n(L)^{\frac{p}{n}},$$

και έτσι καταλήγουμε στην (α), βάζοντας στην θέση των K, L τα $s \cdot K, t \cdot L$ και παίρνοντας υπόψιν ξανά την (3.1.1). $\square$

3.2 Ισοδυναμία των προβλημάτων

Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε ότι, για κάθε σταθερό $p > 0$, η L_p-ανισότητα Brunn-Minkowski και η L_p-ανισότητα Minkowski είναι ισοδύναμες: η μία είναι απλή συνέπεια της άλλης. Ειδικότερα για $p = 1$, η ανισότητα Brunn-Minkowski και η πρώτη ανισότητα του Minkowski είναι ισοδύναμες. Επίσης, η λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski είναι ισοδύναμη με τη λογαριθμική ανισότητα Minkowski.

Λήμμα 3.2.1. *Η λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski και η λογαριθμική ανισότητα Minkowski είναι ισοδύναμες στην κλάση $\mathcal{K}_e^n$ των 0-συμμετρικών κυρτών σωμάτων του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski ισχύει για κάθε $K, L \in \mathcal{K}_e^n$. Έστω $\lambda \in [0,1]$ και $Q_\lambda = (1-\lambda) \cdot K +_o \lambda \cdot L$ το χωρίο Wulff της $q_\lambda = h_K^{1-\lambda} h_L^\lambda$. Επεκτείνουμε την q_λ στα $\lambda \in (-\epsilon_0, 1+\epsilon_0)$ για κάποιο $\epsilon_0 > 0$, έτσι ώστε η q_λ να παραμένει γνήσια θετική. Θεωρούμε την $f : (-\epsilon_0, 1+\epsilon_0) \longrightarrow (0, \infty)$ με

$$f(\lambda) = \log V_n(Q_\lambda).$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι κοίλη και από την παραγωγισιμότητά της στο μηδέν θα πάρουμε τη λογαριθμική ανισότητα Minkowski. Για το πρώτο, ότι η f είναι κοίλη, παίρνουμε $\lambda, \sigma, \tau \in [0,1]$ και θέτουμε $\alpha = (1-\lambda)\sigma + \lambda\tau$. Δηλαδή,

$$f(\alpha) = \log V_n(Q_\alpha) = \log V_n((1-\alpha) \cdot K +_o \alpha \cdot L).$$

Επειδή τα $Q_\sigma = (1-\sigma) \cdot K +_o \sigma \cdot L$ και $Q_\tau = (1-\tau) \cdot K +_o \tau \cdot L$ είναι τα χωρία Wulff των $h_K^{1-\sigma} h_L^\sigma$ και $h_K^{1-\tau} h_L^\tau$ αντίστοιχα, από το λήμμα του Aleksandrov παίρνουμε ότι

$$h_{Q_\sigma}^{1-\lambda} h_{Q_\tau}^\lambda \leqslant (h_K^{1-\sigma} h_L^\sigma)^{1-\lambda} (h_K^{1-\tau} h_L^\sigma)^\lambda = h_K^{1-\alpha} h_L^\alpha,$$

συνεπώς $(1-\lambda) \cdot Q_\sigma +_o \lambda \cdot Q_\tau \subseteq (1-\alpha) \cdot K +_o \alpha \cdot L$. Τώρα, ο προηγούμενος εγκλεισμός και η λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski δίνουν

$$\begin{aligned} f(\alpha) &\geqslant \log V_n((1-\lambda) \cdot Q_\sigma +_o \lambda \cdot Q_\tau) \\ &\geqslant \log V_n(Q_\sigma)^{1-\lambda} V_n(Q_\tau)^\lambda \\ &= (1-\lambda) \log V_n(Q_\sigma) + \lambda \log V_n(Q_\tau) \\ &= (1-\lambda) f(\sigma) + \lambda f(\tau). \end{aligned}$$

Για το δεύτερο, εφαρμόζοντας αρχικά τον κανόνα του L'Hôpital έχουμε

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} q_\lambda(u) = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{q_\lambda - q_0}{\lambda} = h_k \log \frac{h_L}{h_K},$$

και παρατηρούμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στην S^{n-1}. Επίσης έχουμε $Q_0 = K$. Από το Λήμμα 2.5.4 συμπεραίνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} V_n(Q_\lambda) &= \int_{S^{n-1}} h_k \log \frac{h_L}{h_K} \, dS_{Q_0} \\ &= n \int_{S^{n-1}} \log \frac{h_L}{h_K} \, dV_K. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{V_n(Q_0)} \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} V_n(Q_\lambda) \\ &= \frac{n}{V_n(K)} \int_{S^{n-1}} \log \frac{h_L}{h_K} \, dV_K \\ &= n \int_{S^{n-1}} \log \frac{h_L}{h_K} \, d\overline{V}_K. \end{aligned}$$

Τέλος, αφού η f είναι κοίλη και παραγωγίσιμη στο μηδέν, έχουμε ότι

$$f'(0) \geqslant f(1) - f(0),$$

ή ισοδύναμα,

$$n \int_{S^{n-1}} \log \frac{h_L}{h_K}\, d\overline{V}_K \geqslant \log V_n(L) - \log V_n(K)$$

από όπου έπεται η λογαριθμική ανισότητα Minkowski.

Τώρα, υποθέτουμε ότι ισχύει η λογαριθμική ανισότητα Minkowski για κάθε $K, L \in \mathcal{K}_e^n$. Για να πάρουμε τη λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski αρκεί να δείξουμε ότι

$$\log \frac{V_n(K)^{1-\lambda} V_n(L)^\lambda}{V_n(Q_\lambda)} \leqslant 0.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \log \frac{V_n(K)^{1-\lambda} V_n(L)^\lambda}{V_n(Q_\lambda)} &= \frac{1}{n} \log \frac{V_n(K)^{1-\lambda} V_n(L)^\lambda}{V_n(Q_\lambda)^{1-\lambda} V_n(Q_\lambda)^\lambda} \\ &= \frac{1}{n}(1-\lambda) \log \frac{V_n(K)}{V_n(Q_\lambda)} + \frac{1}{n}\lambda \log \frac{V_n(L)}{V_n(Q_\lambda)}.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τη λογαριθμική ανισότητα Minkowski παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \log \frac{V_n(K)^{1-\lambda} V_n(L)^\lambda}{V_n(Q_\lambda)} &\leqslant (1-\lambda) \int \log \frac{h_K}{h_{Q_\lambda}}\, d\overline{V}_{Q_\lambda} + \lambda \int \log \frac{h_L}{h_{Q_\lambda}}\, d\overline{V}_{Q_\lambda} \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{V_n(Q_\lambda)} \left((1-\lambda) \int h_{Q_\lambda} \log \frac{h_K}{h_{Q_\lambda}}\, dS_{Q_\lambda} + \lambda \int h_{Q_\lambda} \log \frac{h_L}{h_{Q_\lambda}}\, dS_{Q_\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{V_n(Q_\lambda)} \int h_{Q_\lambda} \log \frac{h_K^{1-\lambda}}{h_{Q_\lambda}^{1-\lambda}} \frac{h_L^\lambda}{h_{Q_\lambda}^\lambda}\, dS_{Q_\lambda} \\ &= 0,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί $h_{Q_\lambda} = h_K^{1-\lambda} h_L^\lambda$, $S_{Q\lambda}$-σχεδόν παντού, από το Λήμμα 2.5.2 του Aleksandrov. □

Λήμμα 3.2.2. *Η L_p-ανισότητα Brunn-Minkowski και η L_p-ανισότητα Minkowski είναι ισοδύναμες στην κλάση $\mathcal{K}_e^n$ των 0-συμμετρικών κυρτών σωμάτων του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ισχύει η L_p-ανισότητα Brunn-Minkowski και θεωρούμε $K, L \in \mathcal{K}_e^n$. Έστω $\lambda \in [0,1]$ και $Q_\lambda = (1-\lambda)\cdot K +_p \lambda \cdot L$ το χωρίο Wulff της $q_\lambda = ((1-\lambda)h_K^p + \lambda h_L^p)^{\frac{1}{p}}$. Επεκτείνουμε την q_λ για $\lambda \in (-\epsilon_0, 1+\epsilon_0)$, για κάποιο $\epsilon_0 > 0$ έτσι ώστε η q_λ να παραμένει γνήσια θετική. Θεωρούμε την $f : (-\epsilon_0, 1+\epsilon_0) \longrightarrow (0, \infty)$ με

$$f(\lambda) = V_n(Q_\lambda)^{\frac{p}{n}}$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι κοίλη και παραγωγίσιμη στο μηδέν, και ότι αυτό μας δίνει την L_p-ανισότητα Minkowski. Για το πρώτο, ότι η f είναι κοίλη, παίρνουμε $\lambda, \sigma, \tau \in [0,1]$ και θέτουμε $\alpha = (1-\lambda)\sigma + \lambda\tau$. Έτσι

$$f(\alpha) = V_n(Q_\alpha)^{\frac{p}{n}} = V_n((1-\alpha)\cdot K +_p \alpha \cdot L)^{\frac{p}{n}}.$$

Επειδή τα $Q_\sigma = (1-\sigma)\cdot K +_p \sigma \cdot L$ και $Q_\tau = (1-\tau)\cdot K +_p \tau \cdot L$ είναι τα χωρία Wulff των $((1-\sigma)h_K^p + \sigma h_L^p)^{\frac{1}{p}}$ και $((1-\tau)h_K^p + \tau h_L^p)^{\frac{1}{p}}$ αντίστοιχα, από το Λήμμα 2.5.2 του Aleksandrov (και κάποιες πράξεις) παίρνουμε ότι

$$((1-\lambda)h_{Q_\sigma}^p + \lambda h_{Q_\tau}^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant ((1-\alpha)h_K^p + \alpha h_L^p)^{\frac{1}{p}},$$

συνεπώς $(1-\lambda)\cdot Q_\sigma +_p \lambda \cdot Q_\tau \subseteq (1-\alpha)\cdot K +_p \alpha \cdot L$. Τώρα, ο προηγούμενος εγκλεισμός και η «ισχυρή» L_p-ανισότητα Brunn-Minkowski δίνουν

$$\begin{aligned} f(\alpha) &\geqslant V_n((1-\lambda)\cdot Q_\sigma +_p \lambda \cdot Q_\tau)^{\frac{p}{n}} \\ &\geqslant (1-\lambda)V_n(Q_\sigma)^{\frac{p}{n}} + \lambda V_n(Q_\tau)^{\frac{p}{n}} \\ &= (1-\lambda)f(\sigma) + \lambda f(\tau). \end{aligned}$$

Για το δεύτερο, εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hôpital έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} q_\lambda(u) = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{q_\lambda - q_0}{\lambda} = \frac{h_K^{1-p}h_L^p - h_k}{p},$$

και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στην S^{n-1}. Από το Λήμμα 2.5.4 συμπεραίνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} V_n(Q_\lambda) &= \int_{S^{n-1}} \frac{h_K^{1-p}h_L^p - h_k}{p}\, dS_{Q_0} \\ &= \frac{1}{p}\int_{S^{n-1}} \left(\frac{h_L}{h_K}\right)^p h_K\, dS_K - \frac{1}{p}\int_{S^{n-1}} h_K\, dS_K \\ &= \frac{n}{p}\int_{S^{n-1}} \left(\frac{h_L}{h_K}\right)^p dV_K - \frac{n}{p}V_n(K), \end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{p}{n}V_n(Q_0)^{\frac{p}{n}-1} \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} V_n(Q_\lambda) \\ &= V_n(K)^{\frac{p}{n}-1}\left(\int_{S^{n-1}} \left(\frac{h_L}{h_K}\right)^p dV_K - V_n(K)\right). \end{aligned}$$

Τέλος, αφού η f είναι κοίλη και παραγωγίσιμη στο μηδέν, έχουμε ότι

$$f'(0) \geqslant f(1) - f(0),$$

δηλαδή

$$V_n(K)^{\frac{p}{n}-1}\left(\int_{S^{n-1}}\left(\frac{h_L}{h_K}\right)^p dV_K - V_n(K)\right) \geqslant V_n(L)^{\frac{p}{n}} - V_n(K)^{\frac{p}{n}}$$
$$\int_{S^{n-1}}\left(\frac{h_L}{h_K}\right)^p dV_K \geqslant V_n(L)^{\frac{p}{n}} V_n(K)^{-\frac{p}{n}} V_n(K),$$

από όπου έπεται η L_p-ανισότητα Minkowski.

Τώρα υποθέτουμε οτι ισχύει η L_p-ανισότητα Minkowski. Ο όγκος του κυρτού σώματος Q_λ δίνεται από την

$$V_n(Q_\lambda) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_{Q_\lambda}\, dS_{Q_\lambda}.$$

Από Λήμμα 2.5.2 του Aleksandrov έχουμε ότι $h_{Q_\lambda} = ((1-\lambda)h_K^p + \lambda h_L^p)^{\frac{1}{p}}$, S_{Q_λ}-σχεδόν παντού, άρα

$$\begin{aligned}
V_n(Q_\lambda) &= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \left((1-\lambda)h_K^p + \lambda h_L^p\right) h_{Q_\lambda}^{1-p}\, dS_{Q_\lambda} \\
&= (1-\lambda)\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_K^p h_{Q_\lambda}^{1-p}\, dS_{Q_\lambda} + \lambda\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_L^p h_{Q_\lambda}^{1-p}\, dS_{Q_\lambda} \\
&= (1-\lambda)\int_{S^{n-1}}\left(\frac{h_K}{h_{Q_\lambda}}\right)^p dV_{Q_\lambda} + \lambda\int_{S^{n-1}}\left(\frac{h_L}{h_{Q_\lambda}}\right)^p dV_{Q_\lambda} \\
&= (1-\lambda)V_n(Q_\lambda)\int_{S^{n-1}}\left(\frac{h_K}{h_{Q_\lambda}}\right)^p d\overline{V}_{Q_\lambda} + \lambda V_n(Q_\lambda)\int_{S^{n-1}}\left(\frac{h_L}{h_{Q_\lambda}}\right)^p d\overline{V}_{Q_\lambda},
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η $\frac{1}{n}h_{Q_\lambda}dS_{Q_\lambda} = dV_{Q_\lambda}$. Εφαρμόζοντας τώρα την L_p-ανισότητα Minkowski παίρνουμε

$$\begin{aligned}
V_n(Q_\lambda) \geqslant& (1-\lambda)V_n(Q_\lambda)\left(\frac{V_n(K)}{V_n(Q_\lambda)}\right)^{\frac{p}{n}} + \lambda V_n(Q_\lambda)\left(\frac{V_n(L)}{V_n(Q_\lambda)}\right)^{\frac{p}{n}} \\
&\geqslant (1-\lambda)V_n(Q_\lambda)^{1-\frac{p}{n}}V_n(K)^{\frac{p}{n}} + \lambda V_n(Q_\lambda)^{1-\frac{p}{n}}V_n(L)^{\frac{p}{n}},
\end{aligned}$$

και έτσι καταλήγουμε στην L_p-ανισότητα Brunn-Minkowski

$$\begin{aligned}
V_n(Q_\lambda) &\geqslant \left((1-\lambda)V_n(K)^{\frac{p}{n}} + \lambda V_n(L)^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}} \\
&\geqslant V_n(K)^{1-\lambda}V_n(L)^{\lambda}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Στο επίπεδο

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε τη λογαριθμική ανισότητα Minkowski στο επίπεδο. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, έπονται η λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski και όλες οι L_p-ανισότητες Brunn-Minkowski για $p > 0$.

Λήμμα 3.3.1. *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα 0-συμμετρικό κυρτό σώμα, που δεν είναι παραλληλόγραμο, με $V(K) = 1$. Έστω επίσης $\{P_n\}$ μια μη-φραγμένη ακολουθία 0-συμμετρικών παραλληλογράμμων με κάθετες διαγωνίους και $V(P_n) \geqslant 2$. Τότε, η ακολουθία*

$$\int_{S^1} \log h_{P_n}(u)\, dV_K(u) \tag{3.3.1}$$

δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω $u_{1,n}, u_{2,n}$ τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στις διευθύνσεις των διαγωνίων του P_n και $\pm h_{1,n}u_{1,n}, \pm h_{2,n}u_{2,n}$ οι κορυφές του P_n. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$u_{1,n} \longrightarrow u_1, \qquad u_{2,n} \longrightarrow u_2, \qquad 0 < h_{1,n} \leqslant h_{2,n}.$$

Οι πρώτες δύο υποθέσεις μπορούν να γίνουν γιατι η S^1 είναι συμπαγής, άρα αρκεί να δειχθεί το συμπέρασμα του Λήμματος για συγκλίνουσες υπακολουθίες των $u_{1,n}, u_{2,n}$, και η τρίτη υπόθεση από επιλογή. Για $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ θεωρούμε την περιοχή

$$U_\delta = \{u \in S^1 : |\langle u, u_1\rangle| > 1 - \delta\}.$$

του $\{\pm u_1\}$ στην S^1. Τώρα, αφού $V_K(S^1) = V(K) = 1$, βλέπουμε ότι για κάθε δ ισχύει

$$V_K(U_\delta) + V_K(U_\delta^c) = V_K(U_\delta \cup U_\delta^c) = 1. \tag{3.3.2}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι αν $V_K(\{\pm u_1\}) > 0$ τότε το K περιέχει ένα παραλληλόγραμμο όγκου $2V_K(\{\pm u_1\})$, άρα $2V_K(\{\pm u_1\}) \leqslant V(K) = 1$, δηλαδή $V_K(\{\pm u_1\}) \leqslant \frac{1}{2}$. Επίσης, δεν γίνεται να έχουμε $V_K(\{\pm u_1\}) = \frac{1}{2}$ γιατί τότε το K θα περιείχε παραλληλόγραμμο όγκου 1 και έχουμε $V(K) = 1$, άρα το K θα ήταν παραλληλόγραμμο. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$V_K(\{\pm u_1\}) < \frac{1}{2}.$$

Επειδή η U_δ είναι φθίνουσα, καθώς το δ μικραίνει έχουμε

$$\lim_{\delta \to 0^+} V_K(U_\delta) = V_K\left(\bigcap_{\delta > 0} U_\delta\right) = V_K(\{\pm u_1\}) < \frac{1}{2}, \tag{3.3.3}$$

επομένως υπάρχει $\delta_0 \in (0, \frac{1}{3})$ τέτοιο ώστε

$$V_K(U_{\delta_0}) < \frac{1}{2}.$$

Από το τελευταίο βγάζουμε ότι υπάρχει $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{2})$ τέτοιος ώστε

$$\tau_0 := V_K(U_{\delta_0}) - \frac{1}{2} + \epsilon_0 < 0, \tag{3.3.4}$$

και έτσι από την προηγούμενη ανισότητα και την (3.3.2) κρατάμε ότι

$$V_K(U_{\delta_0}) = \frac{1}{2} - \epsilon_0 + \tau_0 \qquad \text{και} \qquad V_K(U_{\delta_0}^c) = \frac{1}{2} + \epsilon_0 - \tau_0. \tag{3.3.5}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση στήριξης του P_n είναι

$$h_{P_n}(u) = \max\{h_{1,n}|\langle u, u_{1,n}\rangle|, h_{2,n}|\langle u, u_{2,n}\rangle|\},$$

γιατί για $p \in P_n$ η συνάρτηση $\langle \cdot, u\rangle \longmapsto \langle p, u\rangle$ είναι συνεχής και κυρτή, άρα πιάνει maximum σε ακραίο σημείο του P_n δηλαδή σε ένα από τα $\pm h_{1,n}u_{1,n}, \pm h_{2,n}u_{2,n}$. Τώρα, λόγω της σύγκλισης των $u_{i,n}$ στα u_i έχουμε $|u_{i,n} - u_i| < \delta_0$ για αρκετά μεγάλα n και $i = 1, 2$. Έτσι, αν $u \in U_{\delta_0}$ και το n είναι αρκετά μεγάλο,

$$\begin{aligned}|\langle u, u_{1,n}\rangle| &\geqslant |\langle u, u_1\rangle| - |\langle u, u_{1,n} - u_1\rangle| \geqslant |\langle u, u_1\rangle| - |\langle u_{1,n}, u_1\rangle| \\ &\geqslant 1 - \delta_0 - \delta_0 \geqslant \delta_0,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα έπεται γιατί $\delta_0 < \frac{1}{3}$. Τώρα, αν $u \in U_{\delta_0}^c$, η καθετότητα των $u_{1,n}, u_{2,n}$ θα δώσει την καθετότητα των u_1, u_2 λόγω της σύγκλισης, άρα

$$\begin{aligned}|\langle u, u_2\rangle|^2 &= 1 - |\langle u, u_1\rangle|^2 \geqslant 1 - (1 - \delta_0)^2 \\ &\geqslant \delta_0^2,\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ανισότητα ισχύει γιατί $u \notin U_{\delta_0}$ και η τελευταία ανισότητα πάλι γιατί $\delta < \frac{1}{3}$. Για αρκετά μεγάλο n,

$$\begin{aligned}|\langle u, u_{2,n}\rangle| &\geqslant |\langle u, u_2\rangle| - |\langle u, u_{2,n} - u_2\rangle| \\ &\geqslant |\langle u, u_2\rangle| - |\langle u_{2,n}, u_2\rangle| \geqslant 2\delta_0 - \delta_0 \\ &= \delta_0.\end{aligned}$$

Άρα, για μεγάλα n έχουμε

$$h_{P_n}(u) \geqslant \begin{cases} \delta_0 h_{1,n}, & \text{αν } u \in U_{\delta_0} \\ \delta_0 h_{2,n}, & \text{αν } u \in U_{\delta_0}^c \end{cases}. \tag{3.3.6}$$

Τέλος,

$$\begin{aligned}\int_{S^1} \log h_{P_n}\, dV_K &= \int_{U_{\delta_0}} \log h_{P_n}\, dV_K + \int_{U_{\delta_0}^c} \log h_{P_n}\, dV_K \\ &\geqslant \int_{U_{\delta_0}} \log \delta_0 h_{1,n}\, dV_K + \int_{U_{\delta_0}^c} \log \delta_0 h_{2,n}\, dV_K \\ &= V_K(U_{\delta_0})(\log \delta_0 + \log h_{1,n}) + V_K(U_{\delta_0}^c)(\log \delta_0 + \log h_{2,n}).\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις (3.3.3) και (3.3.5) με την (3.3.6), και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $0 < h_{1,n} \leqslant h_{2,n}$ μαζί με την υπόθεση ότι $h_{1,n}h_{2,n} \geqslant 1$ γιατί $V(P_n) \geqslant 2$, και τέλος παίρνοντας υπόψη την επιλογή των ϵ_0, δ_0, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{S^1} \log h_{P_n}\, dV_K &\geqslant \log \delta_0 + (\frac{1}{2} - \epsilon_0 + \tau_0) \log h_{1,n} + (\frac{1}{2} + \epsilon_0 - \tau_0) \log h_{2,n} \\ &= \log \delta_0 + 2\epsilon_0 \log h_{2,n} + (\frac{1}{2} - \epsilon_0) \log(h_{1,n}h_{2,n}) + \tau(\log h_{1,n} - \log h_{2,n}) \\ &\geqslant \log \delta_0 + 2\epsilon_0 \log h_{2,n}.\end{aligned}$$

Αφού η ακολουθία P_n είναι μη-φραγμένη, η ακολουθία $h_{2,n}$ είναι επίσης μη-φραγμένη, άρα η

$$\int_{S^1} \log h_{P_n}(u)\, dV_K(u)$$

είναι μια μη-φραγμένη ακολουθία. □

Λήμμα 3.3.2. *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα 0-συμμετρικό κυρτό σώμα, που δεν είναι παραλληλόγραμμο, με $V(K) = 1$. Τότε, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης*

$$\inf \Big\{ \int_{S^1} \log h_Q\, dV_K : Q \in \mathcal{K}_e^2, V(Q) = 1 \Big\} \tag{3.3.7}$$

έχει λύση. Δηλαδή, το παραπάνω infimum είναι minimum.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}_e^2$ την κλάση των 0-συμμετρικών κυρτών σωμάτων του επιπέδου. Το παραπάνω Λήμμα διατυπώνεται ισοδύναμα:

Λήμμα 3.3.3. *Αν το $K \in \mathcal{K}_e^2$ δεν είναι παραλληλόγραμμο, τότε υπάρχει $K_0 \in \mathcal{K}_e^2$ με $V(K_0) = 1$ τέτοιο ώστε για κάθε $Q \in \mathcal{K}_e^2$ με $V(Q) = 1$ να ισχύει*

$$\int_{S^1} \log h_Q\, dV_K \geqslant \int_{S^1} \log h_{K_0}\, dV_K. \tag{3.3.8}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι $V(K) = 1$, γιατί με εφαρμογή του Λήμματος 3.3.2 για το $\frac{K}{V(K)^{\frac{1}{n}}}$ έχουμε ότι η

$$\int_{S^1} \log h_Q\, dV_{\frac{K}{V(K)^{\frac{1}{n}}}} \geqslant \int_{S^1} \log h_{K_0}\, dV_{\frac{K}{V(K)^{\frac{1}{n}}}}$$

συνεπάγεται την

$$\int_{S^1} \log h_Q\, dV_K \geqslant \int_{S^1} \log h_{K_0}\, dV_K,$$

αν πάρουμε υπόψη μας ότι $V_{\alpha K} = \alpha^2 V_K$ για κάθε $\alpha > 0$. Η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης

$$\inf_{\substack{Q \in \mathcal{K}_e^2 \\ V(Q)=1}} \int_{S^1} \log h_Q\, dV_K, \tag{3.3.9}$$

δηλαδή η αλλαγή του παραπάνω infimum σε minimum, δίνει την ύπαρξη του $K_0 \in \mathcal{K}_e^2$ του λήμματος. Παίρνουμε ακολουθία $\{Q_n\}$ στην $\mathcal{K}_e^2$ με $V(Q_n) = 1$, τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S^1} \log h_{Q_n} \, dV_K = \inf_{\substack{Q\in\mathcal{K}_e^2 \\ V(Q)=1}} \int_{S^1} \log h_Q \, dV_K. \tag{3.3.10}$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{Q_n\}$ είναι φραγμένη, υπό την έννοια ότι η ακολουθία περιέχεται σε μια Ευκλείδεια μπάλα. Από το θεώρημα του John υπάρχουν 0-συμμετρικές ελλείψεις E_n τέτοιες ώστε

$$E_n \subseteq Q_n \subseteq \sqrt{2} E_n. \tag{3.3.11}$$

Συμβολίζουμε με $u_{1,n}, u_{2,n}$ τις κύριες διευθύνσεις της έλλειψης E_n, ώστε

$$h_{1,n} := h_{E_n}(u_{1,n}) \leqslant h_{E_n}(u_{2,n}) := h_{2,n}.$$

Θεωρούμε τα παραλληλόγραμμα $P_n \subseteq \mathcal{E}_n$ που έχουν κορυφές τα $\{\pm h_{1,n}u_{1,n}, \pm h_{2,n}u_{2,n}\}$. Τότε, τα P_n έχουν κάθετες διαγωνίους, επειδή τα $u_{1,n}, u_{2,n}$ είναι κάθετα, και επειδή η έλλειψη $\mathcal{E}_n$ είναι περιγεγραμμένη στο παραλληλόγραμμο P_n έχουμε ότι $\mathcal{E}_n \subseteq \sqrt{2} P_n$, άρα από την (3.3.11) βλέπουμε ότι

$$P_n \subseteq Q_n \subseteq 2P_n. \tag{3.3.12}$$

Επίσης $V(Q_n) = 1$, άρα

$$V(\sqrt{8} P_n) = 2V(2P_n) \geqslant 2V(Q_n) = 2.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι η $\{Q_n\}$ δεν είναι φραγμένη, επομένως η ακολουθία παραλληλογράμμων $\{P_n\}$ δεν είναι φραγμένη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3.1 για τα παραλληλόγραμμα $\sqrt{8}P_n$ βγάζουμε ότι η ακολουθία

$$\int_{S^1} \log h_{\sqrt{8}P_n} \, dV_K \tag{3.3.13}$$

δεν είναι φραγμένη και αφού $P_n \subseteq Q_n$, δηλαδή $h_{P_n} \leqslant h_{Q_n}$, βγάζουμε ότι η ακολουθία

$$\int_{S^1} \log h_{Q_n} \, dV_K \tag{3.3.14}$$

δεν είναι φραγμένη. Αφού έχει όριο, συμπεραίνουμε ότι τείνει στο άπειρο, άρα το infimum στην (3.3.10) είναι ίσο με άπειρο, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, η $\{Q_n\}$ είναι φραγμένη. Εφόσον η $\{Q_n\}$ είναι φραγμένη, έχει δ_H-συγκλίνουσα υπακολουθία (βλέπε Gruber σελ. 85) άρα υπάρχει 0-συμμετρικό κυρτό σώμα K_0 όγκου 1, τέτοιο ώστε

$$\delta_H(K_0, Q_{n_i}) \to 0$$

καθώς $n_i \longrightarrow \infty$. Επομένως έχουμε ομοιόμορφη σύγκληση των συναρτήσεων στήρηξης $h_{Q_{n_i}}$ στην h_{K_0} και αφού ο λογάριθμος είναι ομοιόμορφα συνεχής στα κλειστά διαστήματα έπεται η ομοιόμορφη σύγκληση $\log h_{Q_{n_i}} \to \log h_{K_0}$, άρα

$$\int_{S^1} \log h_{Q_{n_i}}\, dV_K \longrightarrow \int_{S^1} \log h_{K_0}\, dV_K.$$

Τέλος

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{Q\in\mathcal{K}_e^2 \\ V(Q)=1}} \int_{S^1} \log h_Q\, dV_K &= \lim_{n_i\to\infty} \int_{S^1} \log h_{Q_{n_i}}\, dV_K \\ &= \int_{S^1} \log h_{K_0}\, dV_K. \end{aligned}$$

□

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε τη λογαριθμική ανισότητα Minkowski στο επίπεδο, από όπου παίρνουμε και τη λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski μέσω του Λήμματος 3.2.1, άρα και όλες τις L_p-ανισότητες Brunn-Minkowski για $p > 0$.

Θεώρημα 3.3.4. *Αν $K, L \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι δύο 0-συμμετρικά κυρτά σώματα, τότε*

$$\int_{S^1} \log \frac{h_L}{h_K}\, d\overline{V}_K \geqslant \frac{1}{2} \log \frac{V(L)}{V(K)} \tag{3.3.15}$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα K, L είναι διαστολές ή παραλληλόγραμμα με παράλληλες πλευρές.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την κανονικοποιημένη εκδοχή, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι για 0-συμμετρικά κυρτά σώματα K, L με $V(K) = (L) = 1$ ισχύει ότι

$$\int_{S^1} \log h_L\, dV_K \geqslant \int_{S^1} \log h_K\, dV_K, \tag{3.3.16}$$

με ισότητα αν και μόνο αν τα K, L είναι ομοιοθετικά ή παραλληλόγραμμα με παράλληλες πλευρές. Γιατί η εφαρμογή του για τα $K' = \frac{K}{V(K)^{\frac{1}{2}}}$ και $L' = \frac{L}{V(L)^{\frac{1}{2}}}$, έχουμε

$$\int_{S^1} \log \frac{h_{L'}}{h_{K'}}\, d\overline{V}_{K'} \geqslant 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$V_{K'}(S^1) \log \Big(\frac{V(K)}{V(L)}\Big)^{\frac{1}{2}} + \int_{S^1} \log \frac{h_L}{h_K}\, dV_{K'} \geqslant 0.$$

Για την απόδειξη σταθεροποιούμε το K και διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

• Το K δεν είναι παραλληλόγραμμο:

Γνωρίζουμε από το Λήμμα 3.3.3 ότι υπάρχει $K_0 \in \mathcal{K}_e^2$ με $V(K_0) = 1$ τέτοιο ώστε

$$\int_{S^1} \log h_L \, dV_K \geqslant \int_{S^1} \log h_{K_0} \, dV_K. \tag{3.3.17}$$

για κάθε $L \in \mathcal{K}_e^2$ με $V(L) = 1$. Θα συμπεράνουμε ότι $V_{K_0} = V_K$ επομένως απο το Θεώρημα 2.6.11, αφού το K δεν είναι παραλληλόγραμμο, έπεται ότι $K_0 = K$ άρα (3.3.16). Αφού τα V_K και V_{K_0} είναι άρτια μέτρα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{S^1} f(u) \, dV_{K_0} = \int_{S^1} f(u) \, dV_K \tag{3.3.18}$$

για κάθε $f \in C_e(S^1)$. Παίρνουμε $f : S^1 \to \mathbb{R}$ άρτια και συνεχή, και για μικρό $\delta_0 > 0$ θεωρούμε την οικογένεια των κυρτών σωμάτων $\{Q_t\}_t$ που κατασκευάζονται ως τα χωρία Wulff των συνεχών συναρτήσεων $q(\cdot,\cdot) : (-\delta_0, \delta_0) \times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$q_t(u) := q(t, u) = h_{K_0}(u) e^{tf(u)}.$$

Δηλαδή,

$$Q_t = \bigcap_{u \in S^1} \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, u \rangle \leqslant q_t(u)\}.$$

Παρατηρούμε ότι τα Q_t είναι 0-συμετρικά, με $Q_0 = K_0$ και $Q_t \subseteq K_0$ για $t < 0$, $Q_t \supseteq K_0$ για $t > 0$. Ορίζουμε $F : (-\delta_0, \delta_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(t) = V(Q_t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ \int_{S^1} \log q_t \, dV_K \right\}.$$

Η f είναι φραγμένη στην S^{n-1}, άρα η σύγκλιση

$$\frac{q_t - q_0}{t} \longrightarrow h_{K_0}(u) f(u)$$

είναι ομοιόμορφη στη S^{n-1}, καθώς το $t \to 0$, επομένως το Λήμμα 2.5.4 βγάζει ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο $t = 0$ και, επιπλέον,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V(Q_t) = \int_{S^{n-1}} h_{K_0}(u) f(u) \, dS_{K_0}.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(t) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V(Q_t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ \int_{S^1} q_0 \, dV_K \right\} + V(Q_0)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp\left\{ \int_{S^1} \log q_t \, dV_K \right\} \\
&= \Big[-\frac{1}{2} V(Q_0)^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V(Q_t) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{S^1} \log q_t \, dV_K \Big] \exp\left\{ \int_{S^1} \log h_{K_0} \, dV_K \right\} \\
&= \Big[-\frac{1}{2} \int_{S^1} h_{K_0} f \, dS_{K_0} + \int_{S^1} f \, dV_K \Big] \exp\left\{ \int_{S^1} \log h_{K_0} \, dV_K \right\}. \qquad (3.3.19)
\end{aligned}$$

Θα δούμε ότι η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης (3.3.7) κάνει την F να παίρνει ελάχιστη τιμή στο $t = 0$. Ορίζουμε $M : (-\delta_0, \delta_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$M(t) = V(Q_t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\int_{S^1} \log h_{Q_t}\, dV_K\right\},$$

και, επειδή $V_K(S^{n-1}) = V(K) = 1$, επίσης έχουμε

$$M(t) = \exp\left\{\int_{S^1} \log h_{\frac{Q_t}{V(Q_t)^{\frac{1}{2}}}}\, dV_K\right\}.$$

Επειδή οι όγκοι των $\frac{Q_t}{V(Q_t)^{\frac{1}{2}}}$ είναι ίσοι με 1, από την (3.3.17) συμπεραίνουμε ότι η M παίρνει ελάχιστη τιμή στο $t = 0$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $M(0) = F(0)$ και $M \leqslant F$ γιατί $h_{Q_t} \leqslant q_t$. Από αυτά τα τρία βγάζουμε ότι η F παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $t = 0$, άρα η παράγωγος της F στο μηδέν είναι μηδέν, επομένως από την (3.3.19) έχουμε

$$\int_{S^1} f\, dV_K = \frac{1}{2}\int_{S^1} f h_{K_0}\, dS_{K_0},$$

το οποίο μας δίνει την (3.3.18). Επομένως δείξαμε ότι $K_0 = K$ δηλαδή

$$\int_{S^1} \log h_L\, dV_K \geqslant \int_{S^1} \log h_K\, dV_K.$$

με ισότητα αν και μόνο αν $K = L$.

• <u>Το Κ είναι παραλληλόγραμμο</u>:

Μπορούμε να γράψουμε $K = I_1 + I_2$, όπου I_1, I_2 είναι δύο 0-συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα, παράλληλα στις πλευρές του K. Τότε,

$$h_K = h_{I_1} + h_{I_2}.$$

Γράφουμε $I_1 = \alpha_1[-u_1, u_1]$ και $I_2 = \alpha_2[-u_2, u_2]$ όπου $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $u_1, u_2 \in S^1$ (και με την αγκύλη εννοούμε το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα αντίστοιχα διανύσματα). Έτσι, η συνάρτηση στήριξης του K παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$h_K(u) = \alpha_1|\langle u_1, u\rangle| + \alpha_2|\langle u_2, u\rangle|.$$

Επίσης αφού το K είναι παραλληλόγραμμο συμπεραίνουμε και κρατάμε ότι

$$\text{supp} S_K = \{\pm u_1^{\perp}, \pm u_2^{\perp}\} \tag{3.3.20}$$

(όπου supp ο φορέα του S_K) και

$$\begin{aligned} V(K) = V_K(S^1) &= 2\alpha_1 2\alpha_2 \sin(u_1, u_2) \\ &= 4\alpha_1\alpha_2 \cos(u_1, u_2^{\perp}) \\ &= 4\alpha_1\alpha_2 |\langle u_1, u_2^{\perp}\rangle|. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{S^1} \log h_L \, dV_K &= 2\log h_L(u_1^{\perp})V_K(u_1^{\perp}) + 2\log h_L(u_2^{\perp})V_K(u_2^{\perp}) \\ &= 2\log h_L(u_1^{\perp})\alpha_1\alpha_2|\langle u_1, u_2^{\perp}\rangle| + 2\log h_L(u_2^{\perp})\alpha_1\alpha_2|\langle u_1, u_2^{\perp}\rangle| \\ &= \frac{1}{2}\log h_L(u_1^{\perp}) + \frac{1}{2}\log h_L(u_2^{\perp}) \\ &= \log\left(h_L(u_1^{\perp})h_L(u_2^{\perp})\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε ότι $V(K)=1$. Τώρα, θεωρούμε το μικρότερο παραλληλόγραμμο P, που περιέχει το L και έχει παράλληλες πλευρές στο K, δηλαδή αυτό που οι πλευρές του οριοθετούνται από το L. Τότε,

$$\begin{aligned}V(P) &= 4h_L(u_1^{\perp})h_L(u_2^{\perp})|\langle u_1, u_2^{\perp}\rangle|^{-1} \\ &= 16\alpha_1\alpha_2 h_L(u_1^{\perp})h_L(u_2^{\perp}),\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε πάλι η υπόθεση ότι $V(K)=1$. Τώρα, το P περιέχει το L, άρα $1 = V(L) \leqslant V(P)$, και έτσι από την (3.3.23) έχουμε

$$\frac{1}{16\alpha_1\alpha_2} \leqslant h_L(u_1^{\perp})h_L(u_2^{\perp}). \tag{3.3.24}$$

Από τις (3.3.22), (3.3.24) καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\int_{S^1} \log h_L \, dV_K &\geqslant \log\left(\frac{1}{16\alpha_1\alpha_2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \log\left(h_K(u_1^{\perp})h_K(u_2^{\perp})\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_{S^1} \log h_K \, dV_K,\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

όπου για την προτελευταία ισότητα χρησιμοποιούμε την $V(K)=1$ και αντικαθιστούμε το P με K στην (3.3.23), ενώ η τελευταία ισότητα ισχύει για τους ίδιους λόγους με την (3.3.22).

Τέλος, ισότητα στην (3.3.25) σημαίνει ισότητα στην (3.3.24), το οποίο με την σειρά του σημαίνει ότι το L είναι παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές παράλληλες προς τις πλευρές του K. □

3.4 Για τα unconditional σώματα του $\mathbb{R}^n$

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε την απόδειξη του Σαρόγλου για τη λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski στην περίπτωση που τα K και L είναι unconditional κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 3.4.1. Ένα 0-συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται unconditional αν η συνήθης ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι unconditional βάση για τη νόρμα $\|\cdot\|_K$ που επάγεται από το K στον $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή αν για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \ldots, t_n$ και κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_i = \pm 1$ ισχύει

$$\|\varepsilon_1 t_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n t_n e_n\|_K = \|t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n\|_K.$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$ τότε το ορθογώνιο $\prod_{i=1}^n [-|x_i|, |x_i|]$ περιέχεται στο K. Ένας άλλος τρόπος να σκεφτόμαστε την ίδια ιδιότητα είναι να πούμε ότι το K είναι συμμετρικό ως προς όλα τα υπερεπίπεδα συντεταγμένων $e_i^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$. Η ιδιότητα αυτή έχει ως συνέπεια ότι η προβολή $P_i(K)$ στον $e_i^\perp$ ταυτίζεται με την τομή $K \cap e_i^\perp$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Θα λέμε επίσης ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι *ανάγωγο* αν δεν μπορεί να γραφτεί σαν καρτεσιανό γινόμενο unconditional κυρτών σωμάτων.

Με αυτούς τους ορισμούς ο Σαρόγλου απέδειξε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω K και L δύο unconditional κυρτά σώματα. Για κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει η ανισότητα*

$$V_n((1-\lambda)K +_o \lambda L) \geqslant V_n(K)^{1-\lambda} V_n(L)^\lambda. \tag{3.4.1}$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν οποτεδήποτε $K = K_1 \times \cdots \times K_m$ για κάποια ανάγωγα unconditional κυρτά σώματα, υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ τέτοιοι ώστε $L = c_1 K_1 \times \cdots \times c_m K_m$.

Η απόδειξη χρησιμοποιεί την ανισότητα Prékopa-Leindler, τη συναρτησιακή δηλαδή μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski.

Θεώρημα 3.4.3. *Έστω $\lambda \in (0,1)$ και $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με την ιδιότητα ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda.$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(z)\, dz \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, dy\right)^\lambda. \tag{3.4.2}$$

Για τη μελέτη και τον χαρακτηρισμό της περίπτωσης ισότητας στο Θεώρημα 3.4.2 θα χρειαστούμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό της περίπτωσης ισότητας στην ανισότητα Prékopa-Leindler:

Αν ισχύει ισότητα στην (3.4.2) τότε

$$f(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, dy}\, q^n g(qx + b) \tag{3.4.3}$$

για κάποιον $q > 0$ και κάποιο $b \in \mathbb{R}^n$.

Λήμμα 3.4.4. *Έστω K, L unconditional κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ορίζουμε*

$$K^{1-\lambda} \cdot L^{\lambda} = \{(\pm|x_1|^{1-\lambda}|y_1|^{\lambda}, \ldots, \pm|x_n|^{1-\lambda}|y_n|^{\lambda}) : (x_1, \ldots, x_n) \in K, (y_1, \ldots, y_n) \in L\}.$$

Τότε,

$$(1-\lambda)K +_o \lambda L \supseteq K^{1-\lambda} \cdot L^{\lambda}.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση ότι τα K και L είναι unconditional έπεται ότι τα $K^{1-\lambda} \cdot L^{\lambda}$ και $(1-\lambda)K +_o \lambda L$ είναι επίσης unconditional. Για το πρώτο αυτό είναι άμεσο από τον ορισμό, ενώ για το δεύτερο αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν K είναι ένα unconditional κυρτό σώμα τότε $h_K(u) = h_K((\pm u_1, \ldots, \pm u_n))$ για κάθε $u = (u_1, \ldots, u_n) \in S^{n-1}$. Αφού το ίδιο ισχύει για το L, παίρνουμε την αντίστοιχη ισότητα για την $h_K^{1-\lambda} h_L^{\lambda}$.

Με βάση αυτή την παρατήρηση αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(1-\lambda)(K \cap \mathbb{R}^n_+) +_o \lambda(L \cap \mathbb{R}^n_+) \supseteq (K^{1-\lambda} \cdot L^{\lambda}) \cap \mathbb{R}^n_+.$$

Επιπλέον, μπορούμε να περιγράψουμε το αριστερό μέλος αυτού του εγκλεισμού ως εξής:

$$\begin{aligned}(1-\lambda)&(K \cap \mathbb{R}^n_+) +_o \lambda(L \cap \mathbb{R}^n_+) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle x, u\rangle \leqslant h_K^{1-\lambda}(u) h_L^{\lambda}(u) \;\text{ για κάθε } u \in S^{n-1} \cap \mathbb{R}^n_+\}.\end{aligned}$$

Έστω $x \in K \cap \mathbb{R}^n_+$, $y \in L \cap \mathbb{R}^n_+$ και $u \in S^{n-1} \cap \mathbb{R}^n_+$. Ορίζουμε

$$X = ((x_1u_1)^{1-\lambda}, \ldots, (x_nu_n)^{1-\lambda}), \qquad Y = ((y_1u_1)^{\lambda}, \ldots, (y_nu_n)^{\lambda}).$$

Από την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle (x_1^{1-\lambda}y_1^{\lambda}, \ldots, x_n^{1-\lambda}y_n^{\lambda}), u\rangle &\leqslant \|X\|_{\frac{1}{1-\lambda}} \|Y\|_{\frac{1}{\lambda}} \\ &= \langle x, u\rangle^{1-\lambda} \langle y, u\rangle^{\lambda} \leqslant h_K^{1-\lambda}(u) h_L^{\lambda}(u),\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $(x_1^{1-\lambda}y_1^{\lambda}, \ldots, x_n^{1-\lambda}y_n^{\lambda}) \in (1-\lambda)(K \cap \mathbb{R}^n_+) +_o \lambda(L \cap \mathbb{R}^n_+)$, και το λήμμα έπεται. □

Από το Λήμμα 3.4.4 βλέπουμε ότι για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.2 μένει να δείξουμε ότι $V_n(K^{1-\lambda} \cdot L^{\lambda}) \geqslant V_n(K)^{1-\lambda} V_n(L)^{\lambda}$ και να διερευνήσουμε την περίπτωση της ισότητας.

Πρόταση 3.4.5. *Έστω K, L unconditional κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\lambda \in (0,1)$. Τότε,*

$$V_n(K^{1-\lambda} \cdot L^{\lambda}) \geqslant V_n(K)^{1-\lambda} V_n(L)^{\lambda}. \tag{3.4.4}$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει θετικά ορισμένος διαγώνιος πίνακας T τέτοιος ώστε $L = T(K)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \mathbf{1}_{K\cap\mathbb{R}^n_+}(x), \qquad g(x) = \mathbf{1}_{L\cap\mathbb{R}^n_+}(x), \qquad h(x) = \mathbf{1}_{(K^{1-\lambda}\cdot L^\lambda)\cap\mathbb{R}^n_+}(x).$$

Κατόπιν ορίζουμε

$$\begin{aligned}\overline{f}(x) &= f(e^{x_1},\dots,e^{x_n})e^{x_1+\cdots+x_n},\\ \overline{g}(x) &= g(e^{x_1},\dots,e^{x_n})e^{x_1+\cdots+x_n},\\ \overline{h}(x) &= h(e^{x_1},\dots,e^{x_n})e^{x_1+\cdots+x_n}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν $(e^{x_1},\dots,e^{x_n})\in K\cap\mathbb{R}^n_+$ και $(e^{y_1},\dots,e^{y_n})\in L\cap\mathbb{R}^n_+$ τότε

$$\big((e^{x_1})^{1-\lambda}(e^{y_1})^\lambda,\dots,(e^{x_n})^{1-\lambda}(e^{y_n})^\lambda\big)\in(K^{1-\lambda}\cdot L^\lambda)\cap\mathbb{R}^n_+.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{(K^{1-\lambda}\cdot L^\lambda)\cap\mathbb{R}^n_+}(e^{(1-\lambda)x_1+\lambda y_1},\dots,e^{(1-\lambda)x_n+\lambda y_n})\\ &\qquad\geqslant \mathbf{1}_{K\cap\mathbb{R}^n_+}(e^{x_1},\dots,e^{x_n})\cdot\mathbf{1}_{L\cap\mathbb{R}^n_+}(e^{y_1},\dots,e^{y_n}).\end{aligned}$$

Από τον ορισμό των $\overline{f},\overline{g}$ και $\overline{h}$ έπεται ότι

$$\overline{h}((1-\lambda)x+\lambda y)\geqslant\overline{f}(x)^{1-\lambda}\overline{g}(x)^\lambda$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa-Leindler παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n}\overline{h}(z)\,dz\geqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f}(x)\,dx\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\overline{g}(y)\,dy\right)^\lambda. \tag{3.4.5}$$

Τώρα, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $z_i\mapsto e^{z_i}$ για $i=1,\dots,n$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}V_n(K^{1-\lambda}\cdot L^\lambda) &= 2^n\int_{\mathbb{R}^n_+}h(z)\,dz\\ &= 2^n\int_{\mathbb{R}^n}\overline{h}(z)\,dz\\ &\geqslant\left(2^n\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f}(x)\,dx\right)^{1-\lambda}\left(2^n\int_{\mathbb{R}^n}\overline{g}(y)\,dy\right)^\lambda\\ &=\left(2^n\int_{\mathbb{R}^n_+}f(x)\,dx\right)^{1-\lambda}\left(2^n\int_{\mathbb{R}^n_+}g(y)\,dy\right)^\lambda\\ &= V_n(K)^{1-\lambda}V_n(L)^\lambda.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.4.4). Παρατηρούμε τώρα ότι ισότητα ισχύει αν και μόνο αν έχουμε ισότητα στην (3.4.5). Από την (3.4.3) αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχουν $c>0$, $q\in\mathbb{R}$ και $b\in\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\overline{f}(x)=c\overline{g}(qx+b). \tag{3.4.6}$$

Η σχέση αυτή παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{1}_{K\cap\mathbb{R}^n_+}(e^{x_1},\dots,e^{x_n})e^{x_1+\cdots+x_n}=c\mathbf{1}_{L\cap\mathbb{R}^n_+}(e^{qx_1+b_1},\dots,e^{qx_n+b_n})e^{q(x_1+\cdots+x_n)+(b_1+\cdots+b_n)}.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$\{x\in\mathbb{R}^n:(e^{x_1},\dots,e^{x_n})\in K,\ (e^{qx_1+b_1},\dots,e^{qx_n+b_n})\in L\}$$

έχει μη κενό εσωτερικό. Σε συνδυασμό με την (3.4.6) αυτό μας δίνει ότι υπάρχει μια σταθερά $c'>0$ τέτοια ώστε να ισχύει η

$$e^{x_1+\cdots+x_n}=c'e^{q(x_1+\cdots+x_n)}$$

για όλα τα x σε κάποιο μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έπεται ότι $q=1$ και η (3.4.6) γίνεται

$$\mathbf{1}_{K\cap\mathbb{R}^n_+}(e^{x_1},\dots,e^{x_n})=c\,\mathbf{1}_{L\cap\mathbb{R}^n_+}(e^{b_1}e^{x_1},\dots,e^{b_n}e^{x_n}),\qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

Άρα, $L=T(K)$, όπου $T=\mathrm{diag}(e^{b_1},\dots,e^{b_n})$.

Αντίστροφα, αν το K είναι unconditional και $L=T(K)$ για κάποιον θετικά ορισμένο διαγώνιο πίνακα $\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)$, τότε εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύει ισότητα στην (3.4.4). □

3.5 Η B-ιδιότητα

Μια συνάρτηση $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}_+$ λέγεται λογαριθμικά κοίλη αν το πεδίο ορισμού της A είναι κυρτό σύνολο και

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}$$

για κάθε $x,y\in A$ και $\lambda\in(0,1)$. Αν η f είναι γνησίως θετική τότε ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με το να πούμε ότι η $\log\circ f$ είναι κοίλη δηλαδή

$$\log f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\lambda\log f(x)+(1-\lambda)\log f(y).$$

Είναι προφανές ότι αν η f είναι κοίλη τότε η f είναι λογαριθμικά κοίλη, από την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου που λέει ότι $\lambda x+(1-\lambda)y\geqslant x^\lambda y^{1-\lambda}$. Επίσης, αν οι f,g είναι γνησίως θετικές και λογαριθμικά κοίλες τότε η fg είναι λογαριθμικά κοίλη, γιατί

$$\log(fg)=\log f+\log g,$$

άρα η $\log(fg)$ είναι κοίλη.

Ορισμός 3.5.1. Έστω μ ένα μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το μ έχει την B-ιδιότητα αν για κάθε 0-συμμετρικό κυρτό σώμα $K\subseteq\mathbb{R}^n$ και για κάθε $t_1,\dots,t_n>0$ η συνάρτηση

$$s\longmapsto\mu\big(\mathrm{diag}(t_1^s,\dots,t_n^s)K\big)$$

είναι λογαριθμικά κοίλη. Με $\mathrm{diag}(c_1, \dots, c_n)$ συμβολίζουμε τον διαγώνιο πίνακα με στοιχεία της διαγωνίου τους $c_1, \dots, c_n$. Επίσης, θα λέμε ότι το μ έχει την ασθενή B-ιδιότητα αν το παραπάνω ισχύει για κάθε $t_1 = \cdots = t_n$, δηλαδή αν, για κάθε $t > 0$, η συνάρτηση

$$s \longmapsto \mu\big(t^s K\big)$$

είναι λογαριθμικά κοίλη.

Ορισμός 3.5.2. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 0-συμμετρικό κυρτό σώμα. Το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_K του K είναι το

$$\mu_K(A) = \frac{V_n(K \cap A)}{V_n(K)}$$

Θεώρημα 3.5.3. *Αν ισχύει η λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski στον $\mathbb{R}^n$, τότε:*

(i) *Για κάθε 0-συμμετρικό κυρτό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^n$ το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_K έχει την ασθενή B-ιδιότητα.*

(ii) *Το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας του n-διάστατου κύβου $\mu_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}$ έχει την B-ιδιότητα.*

Απόδειξη. (i) Παίρνουμε δύο 0-συμμετρικά κυρτά σώματα $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ και $d > 0$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$s \longmapsto \mu_K(d^s L) = \frac{V_n(K \cap d^s L)}{V_n(K)}$$

είναι λογαριθμικά κοίλη, δηλαδή για $s, t > 0$ και $\lambda \in (0,1)$ θα δείξουμε ότι

$$V_n(K \cap d^{\lambda s + (1-\lambda)t} L) \geqslant V_n(K \cap d^s L)^{\lambda} V_n(K \cap d^t L)^{1-\lambda}. \tag{3.5.1}$$

Θέτουμε $Q_\lambda := K \cap d^{\lambda t + (1-\lambda)s} L$ και ισχυριζόμαστε ότι

$$Q_\lambda \supseteq \lambda \cdot Q_0 +_o (1-\lambda) \cdot Q_1. \tag{3.5.2}$$

Από τον ισχυρισμό και τη λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski θα έχουμε

$$V_n(Q_\lambda) \geqslant V_n(\lambda \cdot Q_0 +_o (1-\lambda) \cdot Q_1) \geqslant V_n(Q_0)^{\lambda} V_n(Q_1)^{1-\lambda},$$

από όπου παίρνουμε την (3.5.1). Για την απόδειξη του ισχυρισμού (3.5.2) θεωρούμε $x \in \lambda \cdot Q_0 +_o (1-\lambda) \cdot Q_1$ και $u \in S^{n-1}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\langle x, u \rangle &\leqslant h_{Q_0}^{\lambda}(u) h_{Q_1}^{1-\lambda}(u) = h_{K \cap d^s L}^{\lambda}(u) h_{K \cap d^t L}^{1-\lambda}(u) \\
&\leqslant \min\{h_K(u), h_{d^s L}(u)\}^{\lambda} \min\{h_K(u), h_{d^t L}(u)\}^{1-\lambda} \\
&\leqslant \min\{h_K(u), h_{d^s L}^{\lambda}(u) h_{d^t L}^{1-\lambda}(u)\}.
\end{aligned}$$

Έτσι, από τη μία έχουμε ότι $\langle x, u\rangle \leqslant h_K(u)$ άρα $x \in K$, και από την άλλη έχουμε

$$\langle x, u\rangle \leqslant h_{d^s L}^{\lambda}(u) h_{d^t L}^{1-\lambda}(u) = h_{d^{s\lambda+(1-\lambda)t} L}(u)$$

άρα $x \in d^{s\lambda+(1-\lambda)t} L$, επομένως $x \in Q_\lambda$.

(ii) Παίρνουμε $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 0-συμμετρικό, κυρτό σώμα και $t_1, \ldots, t_n > 0$. Συμβολίζουμε με $C_n = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ τον n-διάστατο κύβο. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$s \longmapsto \mu_{C_n}(\mathrm{diag}(t_1^s, \ldots, t_n^s)K) = V_n(C_n \cap \mathrm{diag}(t_1^s, \ldots, t_n^s)K)$$

είναι λογαριθμικά κοίλη. Επειδή $V_n(TK) = |\det T| V_n(K)$ για κάθε γραμμική απεικόνιση T, έχουμε ότι

$$V_n(C_n \cap \mathrm{diag}(t_1^s, \ldots, t_n^s)K) = \frac{1}{(t_1 \cdots t_n)^s} V_n(\mathrm{diag}(r_1^s, \ldots, r_n^s)C_n \cap K),$$

όπου $r_i = t_i^{-1}, i = 1, \ldots, n$. Αφού η συνάρτηση $s \longmapsto \frac{1}{(t_1 \cdots t_n)^s}$ είναι λογαριθμικά κοίλη, και το γινόμενο λογαριθμικά κοίλων συναρτήσεων είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$s \longmapsto V_n(\mathrm{diag}(r_1^s, \ldots, r_n^s)C_n \cap K) \tag{3.5.3}$$

είναι λογαριθμικά κοίλη. Παίρνουμε $s, t \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in (0, 1)$ και θέτουμε $Q_\lambda = C_n(\lambda) \cap K$ όπου $C_n(\lambda) = \mathrm{diag}(r_1^{\lambda s+(1-\lambda)t}, \ldots, r_n^{\lambda s+(1-\lambda)t})C_n$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$Q_\lambda \supseteq \lambda \cdot Q_1 +_o (1-\lambda) \cdot Q_0.$$

Από τον ισχυρισμό και τη λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski έπεται άμεσα ότι η συνάρτηση (3.5.3) είναι λογαριθμικά κοίλη. Απομένει να δείξουμε τον ισχυρισμό. Αρχικά, για $x \in \lambda \cdot Q_1 +_o (1-\lambda) \cdot Q_0$ και $u \in S^{n-1}$, βλέπουμε ότι

$$\langle x, u\rangle \leqslant h_{Q_1}^{\lambda}(u) h_{Q_0}^{1-\lambda}(u) \leqslant h_K^{\lambda}(u) h_K^{1-\lambda}(u) = h_K(u),$$

άρα $x \in K$. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$C_n(\lambda) = \left[-\frac{1}{2} r_1^{\lambda s+(1-\lambda)t}, \frac{1}{2} r_1^{\lambda s+(1-\lambda)t}\right] \times \cdots \times \left[-\frac{1}{2} r_n^{\lambda s+(1-\lambda)t}, \frac{1}{2} r_n^{\lambda s+(1-\lambda)t}\right],$$

επομένως, αν $e_1, \ldots, e_n$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\begin{aligned}\langle x, e_i\rangle &\leqslant h_{Q_1}^{\lambda}(e_i) h_{Q_0}^{\lambda}(e_i) \leqslant h_{C_n(1)}^{\lambda}(e_i) h_{C_n(0)}^{\lambda}(e_i) = \left(\frac{1}{2} r_i^s\right)^{\lambda} \left(\frac{1}{2} r_i^t\right)^{1-\lambda} \\ &= h_{C_n(\lambda)}(e_i),\end{aligned}$$

άρα $x \in C_n(\lambda)$, επομένως $x \in Q_\lambda$. $\square$

Θεώρημα 3.5.4. *Αν, για κάθε $n \geqslant 1$, το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας του n-διάστατου κύβου $\mu_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}$ έχει την Β-ιδιότητα, τότε η λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski ισχύει σε όλους τους $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski ισχύει στον $\mathbb{R}^n$. Παίρνουμε ακέραιο $m \geqslant n$, θετικούς αριθμούς $r_1, \dots, r_m$ και $s_1, \dots, s_m$, και μοναδιαία διανύσματα $v_1, \dots, v_m \in S^{n-1}$. Θεωρούμε την τομή των λωρίδων

$$R_\lambda = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i \rangle| \leqslant r_i^\lambda s_i^{1-\lambda}\},$$

όπου $\lambda \in [0,1]$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$V_n(R_\lambda) \geqslant V_n(R_0)^{1-\lambda} V_n(R_1)^\lambda \tag{3.5.4}$$

για κάθε $\lambda \in [0,1]$. Γιατί έχοντας δείξει την (3.5.4) για κάθε $\lambda \in (0,1)$ και $m, r_i, s_i, v_i, i = 1, \dots, m$ παίρνουμε τη λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski με επιχείρημα προσέγγισης.

Διακόπτουμε την απόδειξη για μια περαιτέρω ανάλυση του επιχειρήματος προσέγγισης. Έστω K, L 0-συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την ακουλουθία συνόλων $B_m = \{v_i : i = 1, \dots, m\} \subseteq S^{n-1}$ και ορίζουμε

$$R_\lambda^m = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i \rangle| \leqslant h_K(v_i)^\lambda h_L(v_i)^{1-\lambda}\}.$$

Επιλέγοντας κατάλληλα την ακολουθία B_m ώστε η σύγκλιση $h_{R_\lambda^m} \longrightarrow h_K^\lambda h_L^{1-\lambda}$ να είναι ομοιόμορφη, τότε από το Λήμμα 2.5.3 θα έχουμε τη σύγκλιση $R_\lambda^m \longrightarrow \lambda \cdot K +_o (1-\lambda) \cdot L$ από όπου παίρνουμε την σύγκλιση των αντίστοιχων όγκων, και αφού

$$V_n(R_\lambda^m) \geqslant V_n(R_0^m)^{1-\lambda} V_n(R_1^m)^\lambda \tag{3.5.5}$$

(για μεγάλα m) καταλήγουμε στην λογαριθμική ανισότητα Brunn-Minkowski.

Για να δείξουμε την (3.5.4), ορίζουμε

$$\begin{aligned} F(\lambda) := & \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{[-r_i^\lambda s_i^{1-\lambda}, r_i^\lambda s_i^{1-\lambda}]}(\langle x, v_i \rangle)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{R_\lambda}(x)\, dx \\ = & V_n(R_\lambda), \end{aligned}$$

άρα θέλουμε για κάθε $\lambda \in [0,1]$ να ισχύει

$$F(\lambda) \geqslant F(0)^{1-\lambda} F(1)^\lambda.$$

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει, δηλαδή ότι $F(\lambda) < F(0)^{1-\lambda}F(1)^{\lambda}$ για κάποιο λ (και για κάποια $m, r_i, s_i, v_i, i = 1, \ldots, m$). Για $u \in \mathbb{R}^m$, ορίζουμε

$$F_u(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{[-r_i^{\lambda}s_i^{1-\lambda}, r_i^{\lambda}s_i^{1-\lambda}]}(\langle x, v_i\rangle + u_i)\, dx.$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε ότι $F_u(\lambda) \longrightarrow F_0(\lambda)$ καθώς $u \longrightarrow 0$, και επειδή $F_0(\lambda) < F_0(0)^{1-\lambda}F_0(1)^{\lambda}$ έπεται ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $u \in [-\epsilon, \epsilon]^m$ να ισχύει

$$F_u(\lambda) < F_u(0)^{1-\lambda}F_u(1)^{\lambda}. \tag{3.5.6}$$

Για το προηγούμενο $\epsilon > 0$ ορίζουμε

$$G_\epsilon(\lambda) = \int_{u \in [-\epsilon, \epsilon]^m} F_u(\lambda)\, du.$$

Έτσι, από την (3.5.6) και την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\begin{aligned} G_\epsilon(\lambda) &< \int_{u\in[-\epsilon,\epsilon]^m} F_u(0)^{1-\lambda}F_u(1)^{\lambda}\, du \\ &\leqslant \Big(\int_{u\in[-\epsilon,\epsilon]^m} F_u(0)\Big)^{1-\lambda}\Big(\int_{u\in[-\epsilon,\epsilon]^m} F_u(1)\Big)^{\lambda} \\ &= G_\epsilon^{1-\lambda}(0)G_\epsilon^{\lambda}(1), \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

δηλαδή η G_ϵ δεν είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση του λ. Θα δούμε ότι λόγω της B-ιδιότητας του ομοιόμορφου μέτρου πιθανότητας του $(n+m)$-διάστατου κύβου η G_ϵ πρέπει να είναι λογαριθμικά κοίλη και έτσι θα καταλήξουμε σε άτοπο. Σημειώνουμε ότι το γεγονός ότι η G_ϵ ορίσθηκε ως ολοκλήρωμα πάνω σε έναν m-διάστατο κύβο, είναι βασικό στοιχείο για την απόδειξη του ότι είναι λογαριθμικά κοίλη. Γράφουμε

$$G_\epsilon(\lambda) = \int_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{u\in\mathbb{R}^m} \prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{[-r_i^{\lambda}s_i^{1-\lambda}, r_i^{\lambda}s_i^{1-\lambda}]}(\langle x, v_i\rangle + u_i)\mathbf{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}(u_i)\, du\, dx,$$

και κάνοντας γραμμική αλλαγή μεταβλητής ($w_i = \langle x, v_i\rangle + u_i$) έχουμε

$$G_\epsilon(\lambda) = \int_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{w\in\mathbb{R}^m} \prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{[-r_i^{\lambda}s_i^{1-\lambda}, r_i^{\lambda}s_i^{1-\lambda}]}(w_i)\mathbf{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}(w_i - \langle x, v_i\rangle)\, dw\, dx.$$

Θέτουμε

$$\Delta_\lambda = \{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : |w_i| \leqslant r_i^{\lambda}s_i^{1-\lambda}, |w_i - \langle x, v_i\rangle| < \epsilon\},$$

οπότε $G_\epsilon(\lambda) = V_n(\Delta_\lambda)$. Τώρα παρατηρούμε ότι για $(x, w) \in \Delta_\lambda$ έχουμε

$$-r_i^{\lambda}s_i^{1-\lambda} - \epsilon \leqslant \langle x, v_i\rangle \leqslant r_i^{\lambda}s_i^{1-\lambda} + \epsilon,$$

άρα $x \in \bigcap_{i=1}^m \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle y, v_i\rangle| \leqslant r_i^\lambda s_i^{1-\lambda} + \epsilon\} =: E$. Επειδή στο δεύτερο σκέλος της απόδειξης θα γίνει ένα επιχείρημα προσέγγισης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $\{v_i\}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$ και έτσι έχουμε ότι το E είναι φραγμένο, (ειδικότερα είναι κυρτό σώμα). Άρα, υπάρχει (μεγάλος) $b > 0$ τέτοιος ώστε

$$\Delta_\lambda \subseteq \left\{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : |x_i| \leqslant \frac{b}{2}\right\} =: \Gamma.$$

Για αυτόν τον $b > 0$ θέτουμε

$$\begin{aligned} K &= \left\{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : |x_j| \leqslant \frac{b}{2}, |w_i - \langle x, v_i\rangle| < \epsilon\right\} \\ T_\lambda &= \mathrm{diag}(b, \dots, b, 2r_1^\lambda s_1^{1-\lambda}, \dots, 2r_m^\lambda s_m^{1-\lambda}), \end{aligned}$$

όπου ο T_λ είναι διαγώνιος πίνακας στον $\mathbb{R}^{n+m}$. Έτσι, $\Delta_\lambda = \Delta_\lambda \cap \Gamma = K \cap T_\lambda C$, όπου $C = C_{n+m}$ ο $(n+m)$-διάστατος κύβος. Άρα,

$$\begin{aligned} G_\epsilon(\lambda) &= V_n(K \cap T_\lambda C) \\ &= |\mathrm{det} T_\lambda| V_n(T_\lambda^{-1} K \cap C) \\ &= b^n 2^m \prod_{i=1}^m r_i^\lambda s_i^{1-\lambda} V_n(T_\lambda^{-1} K \cap C). \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Τώρα γράφουμε

$$T_\lambda^{-1} = \mathrm{diag}\left(1, \dots, 1, \left(\frac{s_1}{r_1}\right)^\lambda, \dots, \left(\frac{s_m}{r_m}\right)^\lambda\right) \times \mathrm{diag}(b^{-1}, \dots, b^{-1}, (2s_1)^{-1}, \dots, (2s_m)^{-1}).$$

Επομένως, για το

$$K' := \mathrm{diag}(b^{-1}, \dots, b^{-1}, (2s_1)^{-1}, \dots, (2s_m)^{-1})K$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V_n(T_\lambda^{-1} K \cap C) &= V_n\Big(\mathrm{diag}\Big(1, \dots, 1, \Big(\frac{s_1}{r_1}\Big)^\lambda, \dots, \Big(\frac{s_m}{r_m}\Big)^\lambda\Big) K' \cap C\Big) \\ &= \mu_C\Big(\mathrm{diag}\Big(1, \dots, 1, \Big(\frac{s_1}{r_1}\Big)^\lambda, \dots, \Big(\frac{s_m}{r_m}\Big)^\lambda\Big) K'\Big). \end{aligned}$$

Το K' είναι ένα $(n+m)$-διάστατο κυρτό 0-συμμετρικό σώμα, επομένως από την υπόθεση η συνάρτηση $\lambda \longmapsto V_n(T_\lambda^{-1} K \cap C)$ είναι λογαριθμικά κοίλη, άρα η $G_\epsilon(\lambda)$ είναι λογαριθμικά κοίλη ώς γινόμενο των λογαριθμικά κοίλων συναρτήσεων (3.5.8), το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (3.5.7).

□

Κεφάλαιο 4

Πρόβλημα Minkowski

Το γενικό πρόβλημα του Minkowski είναι να χαρακτηριστούν τα Borel μέτρα $S_j(K,\cdot), \tilde{C}_j(K,\cdot)$ που ορίζονται στις (4.1.1), (4.1.2) παρακάτω. Για $j = 0, \ldots, n-1$ τίθεται το:

> S_j-**Πρόβλημα**: Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα Borel μέτρο μ πάνω στη σφαίρα S^{n-1}, ώστε το μ να είναι το $S_j(K,\cdot)$-μέτρο ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$.

Τα προβλήματα αυτά είναι γνωστα ως «προβλήματα Minkowski-Christoffel». Το δυϊκό πρόβλημα Minkowski είναι το ίδιο πρόβλημα για τα $\tilde{C}_j(K,\cdot)$-μέτρα. Για $j = 0, \ldots, n$ τίθεται το:

> $\tilde{C}_j$-**Πρόβλημα**: Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα Borel μέτρο μ πάνω στη σφαίρα S^{n-1}, ώστε το μ να είναι το $\tilde{C}_j(K,\cdot)$-μέτρο ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$.

Θα δούμε ότι το επιφανειακό μέτρο S_K και το cone-volume μέτρο V_K που ορίστηκαν στην Παράγραφο 2.6 είναι τα μέτρα $S_1(K,\cdot)$ και $\tilde{C}_n(K,\cdot)$ αντίστοιχα. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε το θεώρημα ύπαρξης του Minkowski που είναι η απάντηση στο S_1-Πρόβλημα και ένα αποτέλεσμα των Böröczky-Lutwak-Yang-Zhang που απάντησαν στο $\tilde{C}_n$-πρόβλημα με την επιπλέον υπόθεση ότι το μέτρο μ είναι άρτιο.

4.1 Μέτρα στήριξης

Υπενθυμίζουμε τον *τύπο του Steiner* που λέει ότι η συνάρτηση $t \longrightarrow V_n(K + tB_2^n)$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n,

$$V_n(K + tB_2^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} W_j(K) t^j,$$

όπου ο συντελεστής $W_j(K)$ ονομάζεται *j-οστό quermassintegral* του K.

Έστω $K \in \mathcal{K}^n$ και $t > 0$. Θεωρούμε την $f_t : (K + tB_2^n) \setminus K \longrightarrow \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ με

$$x \longmapsto (\rho(K,x), u(K,x))$$

όπου $\rho(K,x)$ το κοντινότερο σημείο στο x από το K και $u(K,x)$ το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\rho(K,x)$, δηλαδή $u(K,x) = x - \rho(K,x)/\|x - \rho(K,x)\|$. Η f_t είναι συνεχής άρα μετρήσιμη, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε το μέτρο εικόνα $\mu_t(K,\cdot) = V(f_t^{-1}(\cdot))$ ως προς f_t του μέτρου Lebesgue. Για $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times S^{n-1})$ το σύνολο

$$f_t^{-1}(\eta) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(K,x) \leq t,\ (\rho(K,x), u(K,x)) \in \eta\}$$

λέγεται *τοπικό παράλληλο σύνολο.* Ο *τοπικός τύπος του Steiner* λέει ότι, η συνάρτηση $t \longrightarrow \mu_t(K,\eta)$ είναι πάλι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n,

$$\mu_t(K,\eta) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\Theta_j(K,\eta)t^{n-j}$$

όπου ο όρος $\Theta_j(K,\cdot)$ ονομάζεται j-οστό μέτρο στήριξης ή γενικευμένο μέτρο καμπυλότητας του K [βλέπε Schneider, σελ. 230]. Πράγματι, τα $\Theta_1(K,\cdot),\dots,\Theta_{n-1}(K,\cdot)$ είναι πεπερασμένα θετικά μέτρα Borel στο $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ και επάγουν δύο ακολουθίες μέτρων.

Μέτρα καμπυλότητας – επιφανειακά μέτρα

Για $j = 0,\dots,n-1$ θεωρούμε τα μέτρα

$$\begin{aligned} &C_j(K,\beta) := \Theta_j(K,\beta \times S^{n-1}) \ \text{ για } \ \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\\ &S_j(K,\omega) := \Theta_j(K,\mathbb{R}^n \times \omega) \ \text{ για } \ \omega \in \mathcal{B}(S^{n-1}). \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Τα $C_j(K,\cdot)$ και $S_j(K,\omega)$ ονομάζονται *j-οστό μέτρο καμπυλότητας* του K και *j-οστό επιφανειακό μέτρο* του K, αντίστοιχα. Τα μέτρα αυτά εμφανίζονται στον τοπικό τύπο του Steiner ως ειδικές περιπτώσεις των συνόλων

$$\begin{aligned} A_t(K,\beta) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(K,x) \leq t, \rho(K,x) \in \beta\} \ \text{ με } \ \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\\ B_t(K,\omega) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(K,x) \leq t, u(K,x) \in \omega\} \ \text{ με } \ \omega \in \mathcal{B}(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Επαναλαμβάνουμε τον τοπικό τύπο του Steiner σε αυτά τα σύνολα

$$V(A_t(K,\beta)) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}C_j(K,\beta)t^{n-j},$$

και

$$V(B_t(K,\omega)) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}S_j(K,\omega)t^{n-j}.$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι τα μέτρα C_j, S_j στις ακραίες περιπτώσεις $j = 0$ και $n-1$ είναι το μέτρο Hausdorff κατάλληλων συνόλων, ειδικότερα τα μέτρο $S_{n-1}(K,\cdot)$ είναι το επιφανειακό μέτρο S_K που ορίσθηκε στην Παράγραφο 2.6.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω $K \in \mathcal{K}^n$,$\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $\omega \in \mathcal{B}(S^{n-1})$. Τότε,*

$$\begin{aligned} C_0(K,\beta) &= \mathcal{H}^{n-1}(\nu_K(\beta \cap \partial K)), \\ S_0(K,\omega) &= \mathcal{H}^{n-1}(\omega). \end{aligned}$$

Αν το K είναι n-διάστατο, τότε

$$\begin{aligned} C_{n-1}(K,\beta) &= \mathcal{H}^{n-1}(\beta \cap \partial K), \\ S_{n-1}(K,\omega) &= \mathcal{H}^{n-1}(\nu_K^{-1}(\omega)). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Βλέπε Schneider, σελ. 235. □

Για να προσεγγίσουμε το cone-volume μέτρο με ανάλογο τρόπο, ξεκινάμε από το σύνολο

$$\tilde{B}_t(K,\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : (1-\rho_K(x))\|x\| \leq t,\ \rho_K(x)x \in \nu_K^{-1}(\omega)\},$$

γνωστό ώς τοπικό δυϊκό εξωτερικό παράλληλο σώμα, για το οποίο έχουμε την πολυωνυμική έκφραση

$$V(\tilde{B}_t(K,\omega)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \tilde{C}_{n-j}(K,\omega)t^j,$$

γνωστή ως *δυϊκό τοπικό τύπο του Steiner*. Το μέτρο $\tilde{C}_j$ ονομάζεται *j-οστό δυϊκό μέτρο καμπυλότητας* και υπάρχει ολοκληρωτική αναπαράστασή του ως προς το μέτρο Hausdorff:

$$\tilde{C}_j(K,\omega) = \frac{1}{n} \int_{\alpha_K^*(\omega)} \rho_K(u)^j \, d\mathcal{H}^{n-1}(u), \tag{4.1.2}$$

όπου $\alpha_K^*(\omega) = \{u \in S^{n-1} : \rho_K(u)u \in \nu_K^{-1}(\omega)\}$. Εύκολα βλέπουμε ότι το $\tilde{C}_n(K,\cdot)$ είναι το cone-volume μέτρο $V_K(\cdot)$.

4.2 Θεώρημα ύπαρξης του Minkowski

Το θεώρημα ύπαρξης του Minkowski απαντάει στο S_1-πρόβλημα, γνωστό ως:

Πρόβλημα Minkowski: Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα Borel μέτρο μ πάνω στη σφαίρα S^{n-1}, ώστε το μ να είναι το επιφανειακό μέτρο ενός κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 4.2.1. *Αν $K \in \mathcal{K}^n$ είναι ένα n-διάστατο κυρτό σώμα, τότε το επιφανειακό μέτρο S_K δεν συγκεντρώνεται σε καμία σφαίρα χαμηλότερης διάστασης (δηλ. σε σύνολο της μορφής $\xi \cap S^{n-1}$, όπου ξ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$) και ικανοποιεί την*

$$\int_{S^{n-1}} u \, dS_K(u) = 0.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το S_K συγκεντρώνεται σε σφαίρα χαμηλότερης διάστασης, έστω στην $\xi \cap S^{n-1}$. Αν πάρουμε H έναν ανοικτό ημίχωρο που περιέχει τον ξ στο σύνορό του, τότε $S_K(H \cap S^{n-1}) = 0$. Από την άλλη πλευρά, το $\nu_K^{-1}(H \cap S^{n-1})$ έχει θετικό $n-1$-διάστατο μέτρο Hausdorff και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

Παίρνουμε ακολουθία πολυτόπων P_l που συγκλίνουν στο K. Τότε, από την ασθενή σύγκλιση των μέτρων S_{P_l} στο μέτρο S_K, έχουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{l\to\infty} \int_{S^{n-1}} \langle z, u\rangle \, dS_{P_l}(u) = \int_{S^{n-1}} \langle z, u\rangle \, dS_K(u).$$

Έστω $\{u_{1,l}, \ldots, u_{N_l,l}\}$ τα εξωτερικά κάθετα διανύσματρα του P_l. Τότε,

$$\int_{S^{n-1}} \langle z, u\rangle \, dS_{P_l}(u) = \sum_{i=1}^{N_l} \langle z, u_{i,l}\rangle S_{P_l}(\{u_{i,l}\}) = 0,$$

το οποίο έπεται από την (2.6.3) και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Το θεώρημα ύπαρξης του Minkowski λέει οτι αυτές οι δύο συνθήκες είναι και ικανές.

Θεώρημα 4.2.2 (θεώρημα ύπαρξης του Minkowski)**.** *Έστω μ ένα Borel μέτρο στην S^{n-1}. Υποθέτουμε ότι το μ δεν συγκεντρώνεται σε καμία σφαίρα χαμηλότερης διάστασης και ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$\int_{S^{n-1}} u d\mu(u) = 0$$

Τότε, υπάρχει μοναδικό, αν αγνοήσουμε μεταφορές, κυρτό σώμα K, τέτοιο ώστε $\mu = S_K$.

Ο Minkowski απάντησε τη διακριτή περίπτωση, δίνοντας ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα μέτρο πάνω στη σφαίρα, με πεπερασμένο φορέα, ώστε να είναι το επιφανειακό μέτρο ενός πολυτόπου. Με άλλα λόγια, απάντησε στο εξής:

Διακριτό πρόβλημα Minkowski Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα σύνολο μοναδιαίων διανυσμάτων $u_1, \ldots, u_m$ στον $\mathbb{R}^n$ και ένα σύνολο πραγματικών αριθμών $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$ ώστε να υπάρχει ένα πολύτοπο με m έδρες στον $\mathbb{R}^n$ οι έδρες του οποίου να έχουν εξωτερικά κάθετα διανύσματα τα $u_1, \ldots, u_m$ και αντίστοιχους $(n-1)$-διάστατους όγκους ίσους με $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$.

Θεώρημα 4.2.3 (Minkowski)**.** *Έστω $m \in \mathbb{N}$. Δίνονται μοναδιαία διανύσματα $u_1, \ldots, u_m \in S^{n-1}$ και πραγματικοί αριθμοί $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) $\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j = 0$ *και τα u_j δεν ανήκουν όλα σε κάποιον ημίχωρο με την αρχή των αξόνων στο συνορό του.*

(β) *Υπάρχει μοναδικό, αν αγνοήσουμε μεταφορές, πολύτοπο P με m έδρες, το οποίο έχει εξωτερικά κάθετα διανύσματα τα u_j και αντίστοιχους $(n-1)$-διάστατους όγκους τα α_j.*

Απόδειξη. (β) $\Rightarrow$ (α). Θεωρούμε ότι το πολύτοπο που μας δίνει η υπόθεση είναι το

$$P = \{x : \langle x, u_j\rangle \leqslant h_P(u_j),\ j = 1, \dots, m\}.$$

Έστω ότι υπάρχει $v \neq 0$ τέτοιο ώστε $\langle u_j, v\rangle \leqslant 0$ για κάθε j. Τότε, εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $x \in P$ ισχύει επίσης $x + tv \in P$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το P είναι φραγμένο. Στη συνέχεια, για κάθε $v \in S^{n-1}$ γράφουμε

$$\Big\langle v, \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j \Big\rangle = \sum_{\{j:\langle v,u_j\rangle > 0\}} \alpha_j \langle v, u_j\rangle + \sum_{\{j:\langle v,u_j\rangle < 0\}} \alpha_j \langle v, u_j\rangle.$$

Η απόλυτη τιμή των δύο αθροισμάτων στο δεξιό μέλος ισούται με τον όγκο της προβολής του P στον $v^\perp$. Άρα, το άθροισμα αυτό ισούται με 0 για κάθε v, και αυτό μας δίνει την $\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j = 0$.

(α) $\Rightarrow$ (β). Για την ύπαρξη του πολυτόπου θα χρησιμοποιήσουμε πολλαπλασιαστές Lagrange. Για κάθε m-άδα μη αρνητικών s_i, ορίζουμε

$$P(s) = \{x : \langle x, u_j\rangle \leqslant s_j,\ j = 1, \dots, m\}.$$

Το σύνολο αυτό είναι πολύεδρο, και μπορούμε να δείξουμε ότι είναι πολύτοπο. Για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι είναι φραγμένο, το οποίο προκύπτει από τη συνθήκη (α). Αν όχι, θα περιείχε μια ημιευθεία στη διεύθυνση κάποιου v, και τότε όλα τα u_i θα ικανοποιούσαν την $\langle tv, u_j\rangle \leqslant s_j$ για κάθε $t > 0$, άρα $\langle v, u_j\rangle \leqslant 0$, το οποίο θα σήμαινε ότι ανήκουν όλα σε κάποιον ημίχωρο με την αρχή των αξόνων στο συνορό του, που είναι άτοπο από την υπόθεση.

Έστω $P(s)$ ένα πολύτοπο όπως παραπάνω, με έδρες $F_j(s) = \{x \in P(s) : \langle x, u_j\rangle = s_j\}$, $j \leqslant m$ (μπορεί να συμβεί να ισχύει $F_j(s) = \emptyset$ για κάποια j). Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι ο όγκος του $P(s)$ σαν συνάρτηση του s είναι παραγωγίσιμη ως προς $s_1, \dots, s_m > 0$, και η παράγωγός του ως προς s_j ισούται με

$$\frac{\partial V_n(P(s))}{\partial s_j} = V_{n-1}(F_j(s)).$$

Η συνάρτηση $s \mapsto V_n(P(s))$ παίρνει μέγιστη τιμή στο simplex $S = \{s \geqslant 0 : \sum_{j=1}^m \alpha_j s_j = 1\}$. Αν αυτή πιάνεται σε κάποιο συνοριακό σημείο $\hat{s}$ του S, τότε κάποιο από τα s_j ισούται με 0, και τότε η αρχή των αξόνων είναι στο σύνορο του $P(\hat{s})$. Επιλέγουμε ένα διάνυσμα $t = (t_1, \dots, t_m)$ τέτοιο ώστε $0 \in \mathrm{int}(t + P(\hat{s}))$. Παρατηρούμε ότι

$$t + P(\hat{s}) = \{x : \langle x, u_j\rangle \leqslant \hat{s}_j + \langle u_j, t\rangle, j = 1, \dots m\} = P(s'),$$

όπου $s' = \hat{s} + (\langle u_1, t\rangle, \dots, \langle u_m, t\rangle)$, και ότι $0 \in \mathrm{int}(P(s'))$, απ' όπου έπεται ότι $s'_j > 0$. Επίσης, έχουμε

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j s'_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j \hat{s}_j + \sum_{j=1}^m \alpha_j \langle u_j, t\rangle = 1,$$

γιατί έχουμε υποθέσει ότι $\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j = 0$. Συνεπώς, $s' \in \mathrm{relint}(S)$. Αυτό το επιχείρημα μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι ο όγκος του $P(s)$ μεγιστοποιείται σε κάποιο σημείο $\hat{s}$ στο σχετικό εσωτερικό του S.

Τότε, από τη θεωρία των πολλαπλασιαστών Lagrange, υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\frac{\partial\big(V_n(P(s)) - \gamma \sum_{j=1}^m \alpha_j s_j\big)}{\partial s_j}(\hat{s}) = V_{n-1}(F_j(\hat{s})) - \gamma\alpha_j = 0,\ j = 1, \dots, m.$$

Αφού $\hat{s}_j > 0$ για κάθε j, βλέπουμε ότι το $P(\hat{s})$ έχει μη κενό εσωτερικό. Ειδικότερα, $V_{n-1}(F_j(\hat{s})) \neq 0$ για τουλάχιστον μία τιμή του j, το οποίο αποδεικνύει ότι $\gamma \neq 0$ και $\hat{s}_j = \gamma^{-1}V_{n-1}(F_j(s))$ για κάθε $j = 1, \dots, m$. Συνεπώς, το πολύτοπο $\gamma^{-\frac{1}{n-1}}P(\hat{s})$ ικανοποιεί το (β).

Η μοναδικότητα προκύπτει από το Θεώρημα (2.6.5), γιατί αν P και Q είναι δύο πολύτοπα με εξωτερικά κάθετα διανύσματα u_j και τα εμβαδά των αντίστοιχων εδρών τους είναι ίσα με α_j, τότε $S_P = S_Q$. □

Θεώρημα 4.2.4 (θεώρημα ύπαρξης του Minkowski). *Έστω μ ένα Borel μέτρο στην S^{n-1}. Υποθέτουμε ότι το μ δεν συγκεντρώνεται σε καμία σφαίρα χαμηλότερης διάστασης και ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$\int_{S^{n-1}} u d\mu(u) = 0$$

Τότε, υπάρχει μοναδικό, αν αγνοήσουμε μεταφορές, κυρτό σώμα K, τέτοιο ώστε $\mu = S_K$.

Απόδειξη. Με τον όρο *σφαιρικό κυρτό σύνολο* εννοούμε την τομή της σφαίρας με έναν κυρτό κώνο με αρχή το μηδεν. Για κάθε $m = 1, 2, \dots$, έστω $\mathcal{F}_m$ μια πεπερασμένη και ξένη διαμέριση της σφαίρας S^{n-1} σε σφαιρικά κυρτά σύνολα, διαμέτρου το πολύ $1/m$. Έστω $S_1, \dots, S_l$ τα στοιχεία της $\mathcal{F}_m$ που έχουν θετικό μ-μέτρο. Θέτουμε

$$\varrho_i u_i = \frac{1}{\mu(S_i)} \int_{S_i} u\, d\mu(u), \tag{4.2.1}$$

όπου $0 < \varrho_i \leq 1$ και $u_i \in S^{n-1}$ για $i = 1, \dots, l(= l(m))$. Το $\varrho_i u_i$ είναι το βαρύκεντρο του S_i ως προς το μέτρο μ. Ορίζουμε S_m διακριτά μέτρα Borel στη σφαίρα S^{n-1} ως εξής:

$$S_m(B) = \sum_{u_i \in B} \mu(S_i)\varrho_i,$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}(S^{n-1})$. Δείχνουμε τα εξής:

(1) Η S_m συγκλίνει ασθενώς στο μ καθώς το $m \to \infty$:

Έστω $g : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} g(u)\, dS_m(u) - \int_{S^{n-1}} g(u)\, d\mu(u) &= \sum_{i=1}^{l} \Big(\mu(S_i)\varrho_i g(u_i) - \int_{S_i} g(u)\, d\mu(u)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \int_{S_i} (\varrho_i g(u_i) - g(u))\, d\mu(u)\end{aligned}$$

Αφού $\varrho_i u_i \in conv(S_i)$ και $\mathrm{d}iam(S_i) \leq \frac{1}{m}$, έπεται ότι

$$1 - \frac{1}{2m^2} \leq \varrho_i \leq 1,$$

άρα

$$| \varrho_i g(u_i) - g(u) | \leq | g(u_i) - g(u) | + \max_{u \in S^{n-1}} \{| g(u) |\} \frac{1}{2m^2}.$$

Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στην σφαίρα S^{n-1} και για $u \in S_i$ έχουμε $\|u_i - u\| \leq \mathrm{diam} S_i \leq \frac{1}{m}$, επομένως,

$$\int_{S^{n-1}} g(u)\, dS_m(u) - \int_{S^{n-1}} g(u)\, d\mu(u) \longrightarrow 0$$

καθώς $m \to \infty$.

(2) Για μεγάλα m, υπάρχουν πολύτοπα P_m τέτοια ώστε $S_m = S_{P_m}$:

Από την υπόθεση και την (4.2.1) έχουμε

$$0 = \int_{S^{n-1}} u\, d\mu(u) = \sum_{i=1}^{l} \int_{S_i} u\, d\mu(u) = \sum_{i=1}^{l} \varrho_i \mu(S_i) u_i = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i u_i,$$

όπου $\alpha_i = \varrho_i \mu(S_i) > 0$. Από υπόθεση, υπάρχει $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ τέτοιο ώστε κάθε γεωδαισιακή μπάλα ακτίνας τ στην σφαίρα S^{n-1} να έχει θετικό μέτρο. Επομένως, για μεγάλα m κάθε ανοικτός ημίχωρος περιέχει ένα από τα $S_1, \ldots, S_l$ και άρα περιέχει ένα από τα $u_1, \ldots, u_l$. Από το Θεώρημα (4.2.3) του Minkowski συμπεραίνουμε ότι, για όλα τα μεγάλα m υπάρχει πολύτοπο P_m με εξωτερικά κάθετα διανύσματα στις έδρες του τα u_i και αντίστοιχους $(n-1)$-διάσατους όγκους τα $\alpha_i = \varrho_i \mu(S_i)$. Άρα $S_m = S_{P_m}$.

(3) Η P_m είναι φραγμένη:

Από την (1) έχουμε για την επιφάνεια κατά Minkowski του P_m ότι

$$S(P_m) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = \sum_{i=1}^{l} \varrho_i \mu(S_i) = S_m(S^{n-1}) \to \mu(S^{n-1}) > 0,$$

άρα η ισοπεριμετρική ανισότητα δείχνει ότι η ακολουθία $V(P_m)$ είναι άνω και κάτω φραγμένη, ας πούμε $C_1 \leq V(P_m) \leq C_2$ για κάποιες σταθερές. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in P_m$, γιατι το επιφανειακό μέτρο είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές. Για $\alpha \in \mathbb{R}$ θέτουμε $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$ και για $x \in P_m$ γράφουμε $x = \|x\| v_x$. Τότε για $u \in S^{n-1}$ έχουμε $h_{P_m}(u) \geq h_{[0,x]}(u) = \|x\| (\langle u, v_x \rangle)^+$ επειδή $0 \in P_m$, συνεπώς

$$\begin{aligned} V(P_m) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} h_{P_m}(u_i) \alpha_i \geq \frac{\|x\|}{n} \sum_{i=1}^{n} (\langle u_i, v_x \rangle)^+ \alpha_i \\ &= \frac{\|x\|}{n} \int_{S^{n-1}} (\langle u, v_x \rangle)^+ \, dS_m(u) \left(\to \frac{\|x\|}{n} \int_{S^{n-1}} (\langle u, v \rangle)^+ \, d\mu(u) \right) \\ &> \beta \|x\|, \end{aligned}$$

όπου β θετική σταθερά ανεξάρτητη από το v_x άρα και από το x. Δηλαδή, για μεγάλα m έχουμε $\|x\| < \frac{V(P_m)}{\beta} \leq \frac{C_2}{\beta}$ για κάθε $x \in P_m$ και αυτό δείχνει το (3).

Αφού η P_m είναι φραγμένη, υπάρχει P_{m_j} συγκλίνουσα υπακολουθία της P_m και επειδή $V(P_m) \geq C_1$ συμπεραίνουμε ότι υπαρχει $K \in \mathcal{K}^n$ τέτοιο ώστε

$$P_{m_j} \longrightarrow K.$$

Έπεται η ασθενής σύγκλιση των μέτρων

$$S_{m_j} = S_{P_{m_j}} \longrightarrow S_K,$$

το οποίο μαζί με την (1) δίνει ότι $\mu = S_K$.

Η μοναδικότητα έπεται από το Θεώρημα (2.6.5). □

Η συνεχής περίπτωση παρουσιάζει επίσης ενδιαφέρον γιατί συνδέεται με το εξής κλασσικό πρόβλημα του Minkowski:

Αν μας δοθεί μια θετική συνάρτηση κ ορισμένη στη σφαίρα, μπορούμε να βρούμε κάποιο κυρτό σώμα που να έχει καμπυλότητα Gauss στο σημείο με εξωτερικό κάθετο διάνυσμα u ίση με $\kappa(u)$;

Η σχέση ανάμεσα στην καμπυλότητα Gauss και το επιφανειακό μέτρο είναι απλή:

$$\kappa_K(u) = \lim_{B \downarrow u} \frac{V_{n-1}(B)}{\sigma_K(B)}.$$

Δηλαδή, $dV_{n-1}(u) = \kappa(u) d\sigma_K(u)$. Εδώ προφανώς υποθέτουμε ότι η καμπυλότητα Gauss είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ότι το κυρτό σώμα K έχει C^2-σύνορο. Μερικές φορές, στην περίπτωση που η κ δεν μηδενίζεται πουθενά, γράφουμε

$$\sigma_K(B) = \int_B \frac{1}{\kappa(u)} dV_{n-1}(u).$$

Η απάντηση σε αυτό το πρόβλημα δίνεται από το θεώρημα ύπαρξης του Minkowski.

4.3 Άρτιο λογαριθμικό πρόβλημα Minkowski

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε τη συνθήκη που έδωσαν οι Boroczky-Lutwak-Yang-Zhang στο $\widetilde{C}_n$-πρόβλημα με την επιπλέον υπόθεση ότι το μέτρο μ είναι άρτιο και είναι γνωστό ως:

Άρτιο λογαριθμικό πρόβλημα Minkowski: Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα άρτιο Borel μέτρο μ πάνω στη σφαίρα S^{n-1}, ώστε το μ να είναι το cone-volume μέτρο ενός 0-συμμετρικού κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 4.3.1. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel πάνω στη σφαίρα S^{n-1}. Λέμε ότι το μ ικανοποιεί την *subspace concentration condition*, για συντομία (SCC), αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Για κάθε υπόχωρο ξ του $\mathbb{R}^n$, τέτοιον ώστε $0 < \dim \xi < n$, ισχύει

$$\mu(\xi \cap S^{n-1}) \leq \frac{\dim \xi}{n} \mu(S^{n-1}).$$

(β) Αν έχουμε ισότητα στην (α) για κάποιον υπόχωρο ξ, τότε υπάρχει ξ' συμπληρωματικός υπόχωρος του ξ στον $\mathbb{R}^n$, ώστε επίσης να έχουμε

$$\mu(\xi' \cap S^{n-1}) = \frac{\dim \xi'}{n} \mu(S^{n-1}).$$

Αν ένα μέτρο μ ικανοποιεί την (α), τότε λέμε ότι ικανοποιεί την *subspace concentration inequality*, για συντομία (SCI), και αν την ικανοποιεί αυστηρά τότε λέμε ότι ικανοποιεί την *strict subspace concentration inequality*, για συντομία (SSCI).

Η ιδιότητα (β) μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής:

(β′) Αν έχουμε ισότητα στην (α) για κάποιον υπόχωρο ξ, τότε υπάρχει ξ' συμπληρωματικός υπόχωρος του ξ στον $\mathbb{R}^n$, ώστε το μ να συγκεντρώνεται στην $S^{n-1} \cap (\xi \cup \xi')$, δηλαδή

$$\mu(\xi \cap S^{n-1}) + \mu(\xi' \cap S^{n-1}) = \mu(S^{n-1}).$$

Οι Boroczky-Lutwak-Yang-Zhang δώσαν το εξής:

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω $\mu : \mathcal{B}(S^{n-1}) \longrightarrow [0, |\mu|]$ ένα πεπερασμένο, μη-μηδενικό και άρτιο μέτρο Borel πάνω στην σφαίρα. Το μ είναι cone-volume μέτρο ενός 0-συμμετρικού κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν ικανοποιεί την subspace concentration condition.*

4.3.1 Τα cone-volume μέτρα ικανοποιούν την SCC

Σε αυτή την υποπαράγραφο θα δούμε ότι τα cone-volume μέτρα των 0-συμμετρικών κυρτών σωμάτων ικανοποιούν τη συνθήκη (SCC). Η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της συμμετρικοποίησης.

Συμμετρικοποίηση: Έστω $K \in \mathcal{K}_0^n$ και υπόχωρος ξ του $\mathbb{R}^n$ με $m = \dim \xi$. Η συμμετρικοποίηση του K ως προς τον ξ είναι το σύνολο

$$S_\xi K = \bigcup_{x \in P_\xi K} B_{r(x)}^{n-m}(x),$$

όπου $B_{r(x)}^{n-m}(x)$ είναι η $(n-m)$-διάστατη μπάλα, μέσα στον αφινικό υπόχωρο $x + \xi^\perp$, με κέντρο το x και ακτίνα $r(x)$ τόση ώστε

$$V_{n-m}(B_{r(x)}^{n-m}(x)) = V_{n-m}(K \cap (\xi^\perp + x)).$$

Με άλλα λόγια, η συμμετρικοποίηση του K ως προς τον υπόχωρο ξ προκύπτει με αντικατάσταση, για κάθε $x \in P_\xi K$, του συνόλου $K \cap (\xi^\perp + x)$ με τη μπάλα $B_{r(x)}^{n-m}(x) \subseteq x + \xi^\perp$, κέντρου x και ακτίνας $r(x)$, διαλεγμένη έτσι ώστε

$$\omega_{n-m} r(x)^{n-m} = V_{n-m}(K \cap (x + \xi^\perp)).$$

Ιδιότητες της συμμετρικοποίησης:

(α) Ισχύει $V_n(S_\xi K) = V_n(K)$, από το θεώρημα Fubini.

(β) Το $S_\xi K$ είναι κυρτό σώμα, από την ανισότητα Brunn-Minkowski.

(γ) Αν το K είναι 0-συμμετρικό τότε και το συμμετρικοποιημένο $S_\xi K$ είναι 0-συμμετρικό.

Δηλαδή, η συμμετρικοποίηση διατηρεί τον όγκο και τις δύο παραπάνω γεωμετρικές ιδιότητες ενός συνόλου K και το κάνει να έχει μια επιπλέον έννοια συμμετρίας ως προς τον υπόχωρο ξ.

Εργαλεία για χρήση:

1. *Αλλαγή μεταβλητής:* Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω συνάρτηση $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow Y$. Αν ορίσουμε ένα μέτρο ν στον Y μέσω της $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, τότε για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_Y g(y)\, d\nu(y) = \int_X g \circ f(x)\, d\mu(x).$$

Το παραπάνω μέτρο ν λέγεται μέτρο εικόνα της f και συμβολίζεται με $\nu = f(\mu)$.

2. *Υπολογισμός όγκου με πολικές συντεταγμένες:* Για κάθε $K \in \mathcal{K}_0^n$ ισχύει

$$V_n(K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_K(u)^n\, d\mathcal{H}^{n-1}(u).$$

Το παραπάνω είναι άμεσο από το γνωστό τύπο αλλαγής της ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} f(ru)\, dr\, du,$$

και το γεγονός ότι $\mathbf{1}_K(ru) = 1$ αν και μόνο αν $r \le \rho_K(u)$, από όπου έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(x)\, dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_K(u)} r^{n-1}\, dr\, du.$$

Θα συμβολίζουμε με $\tilde{K}$ το $S_\xi K$ και με $\nu, \tilde{\nu}$ τις απεικονίσεις Gauss των K και $\tilde{K}$ αντίστιχα. Επίσης, θα γράφουμε $B(x)$ αντί για $B_{r(x)}^{n-m}(x)$.

Αν ένα κυρτό και συμπαγές $C \subseteq \mathbb{R}^n$ έχει διάσταση χαμηλότερη από n, θα συμβολίζουμε με ∂C το σχετικό σύνορο του C ως προς την αφινική θήκη του C, και κρατάμε το συμβολισμό relint$C$ για το σχετικό εσωτερικό του C.

Για την (SCI), την πρώτη ιδιότητα της συνθήκης, θα χρειαστούμε το εξής:

Λήμμα 4.3.3. *Έστω $K \in \mathcal{K}_0^n$ και ξ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ τέτοιος ώστε $0 < \dim \xi < n$. Τότε, τα cone-volume μέτρα του K και του συμμετρικοποιημένου $\tilde{K}$ ως προς το ξ, ικανοποιούν την*

$$V_K(\xi \cap S^{n-1}) = V_{\tilde{K}}(\xi \cap S^{n-1}).$$

Απόδειξη. Έστω $m = \dim \xi$ και έστω $S^{m-1} = S^{n-1} \cap \xi$ η σφαίρα του υποχώρου ξ. Για $z \in \mathbb{R}^n$, θα γράφουμε $z = x + y$, όπου $x = P_\xi z$ και $y = P_{\xi^\perp} z$. Έστω επίσης $d_K(z)$ η απόσταση του υπερεπίπεδου, που στηρίζει το K στο $z \in \partial K$, από το μηδέν. Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $z \in \partial K$ τότε $d_K(z) = \langle z, \nu(z)\rangle = h_K(\nu(z))$, γιατί $\cos\theta = \frac{d_K(z)}{\|z\|}$, όπου θ η γωνία ανάμεσα στα $z, \nu(z)$.

(ii) Αν $z = x + y \in \nu^{-1}(S^{m-1})$ τότε $x \in \partial P_\xi K$, αλλιώς αν $x \in \mathrm{relint} P_\xi K$, λόγω συνέχειας της P_ξ θα βγάζαμε ότι το $z \in \mathrm{int} K$.

(iii) Αν $z \in \nu^{-1}(S^{m-1})$ τότε $d_K(z) = d_{P_\xi K}(P_\xi(z))$, γιατί

$$d_K(z) = h_K(\nu(z)) = h_{P_\xi K}(\nu(z)) = h_{P_\xi K}(\nu_{P_\xi K}(P_\xi z)) = d_{P_\xi K}(P_\xi(z)),$$

όπου $\nu_{P_\xi K}$ η απεικόνιση Gauss του $P_\xi K$ μέσα στον ξ. Πρέπει να δείξουμε τη δεύτερη και την τρίτη ισότητα. Για τη δεύτερη ισότητα, αν $u \in S^{m-1}$ και $z \in K$ τότε $\langle z, u\rangle = \langle x, u\rangle \leqslant h_{P_\xi K}(u)$, άρα $h_K(u) \leqslant h_{P_\xi K}(u)$, και από την άλλη αν $x \in P_\xi K$, υπάρχει $y \in P_{\xi^\perp} K$ τέτοιο ώστε $z := x + y \in K$, επομένως $h_K(u) \geqslant \langle z, u\rangle = \langle x, u\rangle$, άρα $h_K(u) \geqslant h_{P_\xi K}(u)$. Για την τρίτη ισότητα, έχουμε $P_\xi z = x \in \partial P_\xi K$, και έστω η υπερεπίπεδο στον ξ που στηρίζει το $P_\xi K$ στο x, δηλαδή $\nu_{P_\xi K}(x) \in \eta^\perp$. Τώρα, το υπερεπίπεδο $\eta + \xi^\perp$ του $\mathbb{R}^n$, στηρίζει το K στο z, άρα $\nu(z) \perp (\eta + \xi^\perp)$, επομένως $\nu(z) \in \eta^\perp$ αφού $\eta + \eta^\perp + \xi^\perp = \mathbb{R}^n$, άρα $\nu(z) = \nu_{P_\xi K}(P_\xi z)$.

Απο τους ορισμούς και την πρώτη παρατήρηση έχουμε

$$\begin{aligned} V_K(\xi \cap S^{n-1}) &= V_K(S^{m-1}) \\ &= \frac{1}{n}\int_{z\in\nu^{-1}(S^{m-1})} \langle z, \nu(z)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\ &= \frac{1}{n}\int_{z\in\nu^{-1}(S^{m-1})} d_K(z)\, d\mathcal{H}^{n-1}(z). \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Από την τρίτη παρατήρηση η (4.3.1) γίνεται

$$V_K(\xi \cap S^{n-1}) = \frac{1}{n}\int_{z\in\nu^{-1}(S^{m-1})} d_{P_\xi K}(P_\xi(z))\, d\mathcal{H}^{n-1}(z). \tag{4.3.2}$$

Θεωρούμε την προβολή $P_\xi : (\nu^{-1}(S^{m-1}), \mathcal{H}^{n-1}) \longrightarrow (\partial P_\xi K, \sigma)$, όπου σ το μέτρο εικόνα της P_ξ, δηλαδή $\sigma(A) = \mathcal{H}^{n-1}(P_\xi^{-1}(A))$ για $A \subseteq \partial P_\xi K$. Τότε, για κάθε $g : \partial P_\xi K \longrightarrow \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{\nu^{-1}(S^{m-1})} g \circ P_\xi \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial P_\xi K} g\, d\sigma.$$

Θέτοντας $g(x) = d_{P_\xi K}(x)$, η (4.3.2) γίνεται

$$V_K(\xi \cap S^{n-1}) = \frac{1}{n}\int_{x\in\partial P_\xi K} d_{P_\xi K}(x)\, d\sigma(x). \tag{4.3.3}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sigma(A) = \int_{x\in A} V_{n-m}(K \cap (x + \xi^\perp))\, d\mathcal{H}^{m-1}(x),$$

δηλαδή

$$d\sigma(x) = V_{n-m}(K \cap (x + \xi^{\perp}))\, d\mathcal{H}^{m-1}(x), \tag{4.3.4}$$

επομένως η (4.3.3) γίνεται

$$V_K(\xi \cap S^{n-1}) = \frac{1}{n} \int_{x \in \partial P_\xi K} d_{P_\xi K}(x) V_{n-m}(K \cap (x + \xi^{\perp}))\, d\mathcal{H}^{m-1}(x). \tag{4.3.5}$$

Ομοίως, όπως πήγαμε από την (4.3.1) στην (4.3.5), βγάζουμε

$$V_{\tilde{K}}(\xi \cap S^{n-1}) = \frac{1}{n} \int_{x \in \partial P_\xi \tilde{K}} d_{P_\xi \tilde{K}}(x) V_{n-m}(B(x))\, d\mathcal{H}^{m-1}(x). \tag{4.3.6}$$

Έτσι δείξαμε την επιθυμητή ισότητα, επειδή $P_\xi \tilde{K} = P_\xi\big(\cup_{x \in P_\xi K} B(x)\big) = P_\xi K$ (και αυτό γιατί $B(x) \subseteq x + \xi^{\perp}$). □

Για τη δεύτερη ιδιότητα της συνθήκης (SCC) θα χρειαστούμε την εξής:

Παρατήρηση 4.3.4. Έστω $K_1 \in \mathcal{K}^m$ και $K_2 \in \mathcal{K}^{n-m}$ δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε οι υπόχωροι

$$\xi_1 := \mathrm{span} K_1 \qquad \text{και} \qquad \xi_2 := \mathrm{span} K_2$$

να είναι συμπληρωματικοί στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, το cone-volume μέτρο $V_{K_1+K_2}$ συγκεντρώνεται στην $S^{n-1} \cap ({\xi_1}^{\perp} \cup {\xi_2}^{\perp})$.

Απόδειξη. Εφόσον οι υπόχωροι ξ_1, ξ_2 είναι συμπληρωματικοί, έπεται ότι το $K_1 + K_2$ είναι ένα n-διάστατο κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, σημειώνουμε ότι

$$\partial(K_1 + K_2) \subseteq (\partial(K_1) + \mathrm{relint}(K_2)) \cup (\mathrm{relint}(K_1) + \partial(K_2)) \cup (\partial(K_1) + \partial(K_2)).$$

Έστω ν η απεικόνιση Gauss του $K_1 + K_2$. Έστω $y \in \partial K_1, y' \in \mathrm{relint}(K_2)$ και έστω θ το $(m-1)$-διάστατο υπερεπίπεδο που στιρίζει το K_1 στο y. Τότε το $\theta + \xi_2$ είναι $(n-1)$-διάστατο υπερεπίπεδο που στηρίζει το $K_1 + K_2$ στο y και άρα το στηρίζει και στο $y + y'$. Οπότε $\nu(y + y') \perp \theta + \xi_2$ επομένως

$$\nu(\partial(K_1) + \mathrm{relint}(K_2)) \subseteq {\xi_2}^{\perp}.$$

Όμοια,

$$\nu(\mathrm{relint}(K_1) + \partial(K_2)) \subseteq {\xi_1}^{\perp}.$$

Επομένως,

$$S^{n-1} \setminus ({\xi_1}^{\perp} \cup {\xi_2}^{\perp}) \subseteq \nu(\partial(K_1) + \partial(K_2)),$$

και επειδή το $\partial(K_1)+\partial(K_2)$ έχει διάσταση το πολύ ίση με $n-2$, βγάζουμε

$$\begin{aligned} S_{K_1+K_2}(S^{n-1}\setminus({\xi_1}^{\perp}\cup{\xi_2}^{\perp})) &= \mathcal{H}^{n-1}(\nu^{-1}(S^{n-1}\setminus({\xi_1}^{\perp}\cup{\xi_2}^{\perp}))) \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial(K_1)+\partial(K_2))=0, \end{aligned}$$

δηλαδή το $S_{K_1+K_2}$ συγκεντρώνεται στην $S^{n-1}\cap({\xi_1}^{\perp}\cup{\xi_2}^{\perp})$, επομένως το ίδιο και το $V_{K_1+K_2}$. $\square$

Θεώρημα 4.3.5. *Έστω $K\in\mathcal{K}_e^n$ ένα n-διάστατο 0-συμμετρικό, κυρτό σώμα. Τότε, το cone-volume μέτρο V_K ικανοποιεί την* (SCC).

Απόδειξη. Έστω ξ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ με $0<\dim\xi=m<n$ και έστω $S^{m-1}=S^{n-1}\cap\xi$. Έστω $\tilde{K}$ η συμμετρικοποίηση του K ως προς τον ξ. Για να δείξουμε την πρώτη ιδιότητα της συνθήκης, από το Λήμμα 4.3.3 και το γεγονός ότι $V_n(\tilde{K})=V_n(K)$, αρκεί να δειχθεί ότι

$$V_{\tilde{K}}(\xi\cap S^{n-1})\leq\frac{\dim\xi}{n}V_{\tilde{K}}(S^{n-1}). \tag{4.3.7}$$

Για το αριστερό μέλος, γράφουμε ξανά την (4.3.6)

$$V_{\tilde{K}}(S^{m-1})=\frac{1}{n}\int_{x\in\partial P_\xi\tilde{K}}d_{P_\xi\tilde{K}}(x)V_{n-m}(B(x))\,d\mathcal{H}^{m-1}(x). \tag{4.3.8}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(S^{m-1},\mu)\longrightarrow(\partial P_\xi\tilde{K},\sigma)$ με $u\longmapsto\rho_{\tilde{K}}(u)u$ και γράφουμε

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_A\rho_{\tilde{K}}(u)^m\,d\mathcal{H}^{m-1}(u), \\ \sigma(B) &= \int_B d_{P_\xi\tilde{K}}(x)\,d\mathcal{H}^{m-1}(x). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το σ είναι το μέτρο εικόνα της f, δηλαδή $\sigma(A)=\mu(f^{-1}(A))$ με $A\subseteq\partial P_\xi\tilde{K}$. Έτσι, για κάθε $g:\partial P_\xi\tilde{K}\longrightarrow\mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{S^{m-1}}g\circ f\,d\mu=\int_{\partial P_\xi\tilde{K}}g\,d\sigma.$$

Τώρα, θέτοντας $g(x)=V_{n-m}(B(x))$, η (4.3.8) γίνεται

$$V_{\tilde{K}}(S^{m-1})=\frac{1}{n}\int_{u\in S^{m-1}}V_{n-m}(B(\rho_{\tilde{K}}(u)u))\,d\mu(u),$$

δηλαδή

$$V_{\tilde{K}}(S^{m-1})=\frac{1}{n}\int_{u\in S^{m-1}}\rho_{\tilde{K}}(u)^mV_{n-m}(B(\rho_{\tilde{K}}(u)u))\,d\mathcal{H}^{m-1}(u).$$

Επειδή $\rho_{\tilde{K}}(u)u+P_{\xi^\perp}B(\rho_{\tilde{K}}(u)u)=B(\rho_{\tilde{K}}(u)u)$, γράφουμε

$$V_{\tilde{K}}(S^{m-1})=\frac{1}{n}\int_{u\in S^{m-1}}\rho_{\tilde{K}}(u)^m\left(\int_{y\in P_{\xi^\perp}B(\rho_{\tilde{K}}(u)u)}\mathbf{1}(y)\,d\mathcal{H}^{n-m}(y)\right)d\mathcal{H}^{m-1}(u),$$

και επειδή $\rho_{\tilde{K}}(u)u \in B(\rho_{\tilde{K}}(u)u) - y \subseteq \partial(\tilde{K} - y)$ για κάθε $y \in P_{\xi^\perp}B(\rho_{\tilde{K}}(u)u)$ και $u \in S^{m-1}$, έπεται ότι $\rho_{\tilde{K}}(u) = \rho_{-y+\tilde{K}}(u)$, άρα

$$V_{\tilde{K}}(S^{m-1}) = \frac{1}{n}\int_{u\in S^{m-1}}\int_{y\in P_{\xi^\perp}B(\rho_{\tilde{K}}(u)u)} \rho_{-y+\tilde{K}}(u)^m \, d\mathcal{H}^{n-m}(y)\, d\mathcal{H}^{m-1}(u). \tag{4.3.9}$$

Για το δεξιό μέλος, αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\tilde{K} = \bigcup_{y\in B(0)} (y+\xi)\cap \tilde{K},$$

επειδή η μπάλα $B(x)$ έχει μέγιστο μέγεθος στο $x = 0$. Αυτό ισχύει γιατί οι ακτίνες των μπαλών, ως συνάρτηση $r : P_\xi K \longrightarrow [0,\infty)$ είναι κοίλη και άρτια, επομένως για $x \in P_\xi K$ έχουμε

$$r(0) = r(1/2x + (1-1/2)(-x)) \geqslant 1/2r(x) + (1-1/2)r(-x) = r(x).$$

Η r είναι άρτια, γιατι το K είναι 0-συμμετρικό, επομένως

$$V_{n-m}(B(x)) = V_{n-m}(K\cap(x+\xi^\perp)) = V_{n-m}(K\cap(-x+\xi^\perp)) = V_{n-m}(B(-x)),$$

και η r είναι κοίλη, από τον εγκλεισμό $B(\lambda x + (1-\lambda)y) \supseteq \lambda B(x) + (1-\lambda)B(y)$ και την ανισότητα Brunn-Minkowski. Τώρα μπορούμε να δούμε ότι $\tilde{K} = \bigcup_{y\in B(0)}(y+\xi)\cap\tilde{K}$. Γιατί αν $z \in \tilde{K}$ τότε $z \in B(x)$ για κάποιο $x \in P_\xi K$ και

$$V_n(B(x) - x) = V_n(B(x)) \leq V_n(B(0)),$$

άρα $B(x) - x \subseteq B(0)$, οπότε $z = y' + x$ για κάποιο $y' \in B(0)$. Έτσι,

$$\begin{aligned}\frac{m}{n}V_n(\tilde{K}) &= \frac{m}{n}V_n\Big(\bigcup_{y\in B(0)}(y+\xi)\cap\tilde{K}\Big)\\ &= \frac{m}{n}\int_{y\in B(0)} V_m((y+\xi)\cap\tilde{K})\, d\mathcal{H}^{n-m}(y)\end{aligned}$$

Επίσης $\xi\cap(-y+\tilde{K}) + y = (y+\xi)\cap\tilde{K}$, επομένως

$$\frac{m}{n}V_n(\tilde{K}) = \frac{m}{n}\int_{y\in B(0)} V_m(\xi\cap(-y+\tilde{K}))\, d\mathcal{H}^{n-m}(y).$$

Υπολογίζοντας τον m-διάστατο όγκο του $\xi\cap(-y+\tilde{K})$ με πολικές συντεταγμένες και κάνοντας αλλαγή ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$\frac{m}{n}V_n(\tilde{K}) = \frac{1}{n}\int_{u\in S^{m-1}}\int_{y\in B(0)} \rho_{-y+\tilde{K}}(u)^m\, d\mathcal{H}^{n-m}(y)\, d\mathcal{H}^{m-1}(u). \tag{4.3.10}$$

Εφόσον $r(0) = \max\{r(x) : x \in P_\xi K\}$ έχουμε ότι $P_{\xi^\perp}B(\rho_{\tilde{K}}(u)u) \subseteq B(0)$ και άρα από τις (4.3.9),(4.3.10) συμπεραίνουμε ότι

$$V_{\tilde{K}}(S^{m-1}) \leq \frac{m}{n}V(\tilde{K})$$

δηλαδή (4.3.7).

Τώρα, για τη δεύτερη ιδιότητα της συνθήκης, υποθέτουμε ότι για έναν υπόχωρο ξ του $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$V_K(\xi \cap S^{n-1}) = \frac{\dim \xi}{n} V_K(S^{n-1}), \tag{4.3.11}$$

και πρέπει να βρούμε ξ' συμπληρωματικό υπόχωρο του ξ, στον $\mathbb{R}^n$, όπου πάλι να ισχύει η (4.3.11) με τον ξ' αντί για τον ξ. Από την (4.3.11) θα βγάλουμε ότι το K είναι το άθροισμα Minkowski ενός m-διάστατου και ενός $n-m$-διάστατου κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$ και έτσι, από το Λήμμα 4.3.4, θα έχουμε ότι το V_K συγκεντρώνεται σε συμπληρωματικούς υπόχωρους ξ, ξ' πάνω στη σφαίρα S^{n-1}, άρα

$$\begin{aligned} V_K(S^{n-1}) &= V_K(S^{n-1} \cap \xi) + V_K(S^{n-1} \cap \xi') \\ &= \frac{\dim \xi}{n} V_K(S^{n-1}) + V_K(S^{n-1} \cap \xi'), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$V_K(\xi' \cap S^{n-1}) = \frac{\dim \xi'}{n} V_K(S^{n-1}). \tag{4.3.12}$$

Τώρα, αναλύοντας την περίπτωση ισότητας στην (4.3.11) βγάζουμε ότι

$$P_{\xi^\perp} B(\rho_{\tilde{K}}(u)u) = B(0)$$

για κάθε $u \in S^{m-1}$. Η συνάρτηση ακτίνας r είναι άρτια και κοίλη, επομένως, για κάθε $x \in P_\xi K$,

$$P_{\xi^\perp}(B(\rho_{\tilde{K}}(u)u)) \subseteq P_{\xi^\perp} B(x) \subseteq B(0),$$

όπου $u = \frac{x}{|x|}$. Άρα, από τα δύο προηγούμενα βγάζουμε ότι, για κάθε $x \in P_\xi K$,

$$P_{\xi^\perp} B(x) = B(0),$$

δηλαδή $r(x) = r(0)$ για κάθε $x \in P_\xi K$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $x \in P_\xi K$,

$$V_{n-m}((x + \xi^\perp) \cap K) = V_{n-m}(\xi^\perp \cap K).$$

Έτσι βγάζουμε ότι το $(x + \xi^\perp) \cap K$ είναι μεταφορά του 0-συμμετρικού $\xi^\perp \cap K$, επομένως $(x + \xi^\perp) \cap K = z + \xi^\perp \cap K$ για κάποιο $z \in K$, δηλαδή

$$K = \xi^\perp \cap K + \{z \in K : z + \xi^\perp \cap K \subseteq K\}.$$

Άρα το K είναι άθροισμα Minkowski του $(n-m)$-διάστατου $\xi^\perp \cap K$ και του m-διάστατου

$$C := \{z \in K : z + \xi^\perp \cap K \subseteq K\}$$

□

4.3.2 Μέτρα με την SCC είναι cone-volume μέτρα

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα σούμε ότι η (SSC) είναι και ικανή συνθήκη στο Άρτιο λογαριθμικό πρόβλημα Minkowski.

Αν ένα μέτρο μ ικανοποιεί την ικανοποιεί την (SCC) τότε

(i) Είτε για κάθε υπόχωρο ξ του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $0 < \dim\xi < n$ ικανοποιείται η

$$\mu(\xi \cap S^{n-1}) < \frac{\dim\xi}{n}\mu(S^{n-1}).$$

(ii) Είτε υπάρχουν ξ_1, ξ_2 συμπληρωματικοί υπόχωροι στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιοι ώστε

$$\mu(\xi_i \cap S^{n-1}) = \frac{\dim\xi_i}{n}\mu(S^{n-1})$$

για $i = 1, 2$.

Θα δούμε ότι, αν ένα μέτρο ικανοποιεί ένα από τα (i) ή (ii), τότε είναι cone-volume μέτρο. Ξεκινάμε με την διαπίστωση ότι αν έχουμε ένα μέτρο στη σφαίρα το οποίο ικανοποιεί την (i) δηλαδή την (SSCI) τότε είναι cone volume μέτρο.

Λήμμα 4.3.6. *Αν οι αριθμοί $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geqslant 0$ ικανοποιούν τις*

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_i}{i} < \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε } i = 1, \dots, n\\ &\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1,\end{aligned}$$

τότε υπάρχει $t \in (0, 1]$ τέτοιος ώστε αν θέσουμε $\lambda = \frac{(1-t)}{n}$ και

$$\begin{aligned}\beta_i &= \alpha_i - \lambda \quad \text{με} \quad i = 1, \dots, n-1\\ \beta_n &= \alpha_n - \lambda - t,\end{aligned}$$

να ισχύει

$$\begin{aligned}&\beta_1 + \dots + \beta_i \leqslant 0 \quad \text{με} \quad i = 1, \dots, n-1\\ &\beta_1 + \dots + \beta_n = 0.\end{aligned}$$

Απόδειξη. Παίρνουμε $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ τέτοιον ώστε

$$\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_i}{i} \leq \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_{i_0}}{i_0}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n-1$. Όμως,

$$\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_{i_0}}{i_0} < \frac{1}{n},$$

άρα υπάρχει $t \in (0,1]$ τέτοιος ώστε

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{i_0}}{i_0} = \frac{1}{n}(1-t) := \lambda.$$

Επομένως, για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$ έχουμε

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_i}{i} \leq \lambda,$$

άρα

$$\beta_1 + \cdots + \beta_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_i - i\lambda \leq 0 \tag{4.3.13}$$

και

$$\begin{aligned} \beta_1 + \cdots + \beta_n &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n - n\lambda - t \\ &= 1 - n\lambda - t \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.3.7. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στη σφαίρα S^{n-1} το οποίο ικανοποιεί την* (SSCI). *Για κάθε $l \in \mathbb{N}$, έστω $\{u_{1,l}, \ldots, u_{n,l}\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και θετικοί αριθμοί $h_{1,l}, \ldots, h_{n,l}$ που ικανοποιούν τις*

$$h_{1,l} \leq \cdots \leq h_{n,l}, \qquad h_{1,l} \cdots h_{n,l} \geq 1, \qquad \lim_{n\to\infty} h_{n,l} = \infty.$$

Θεωρούμε την ακολουθία πολυτόπων $Q_l = [\pm h_{1,l}u_{1,l}, \ldots, \pm h_{n,l}u_{n,l}]$. Τότε, η ακολουθία

$$\Phi_\mu(Q_l) = \int_{S^{n-1}} \log h_{Q_l}\, d\mu$$

δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το συμπέρασμα για μια υπακολουθία των πολυτόπων $\{Q_l\}$, επομένως λόγω της συμπάγειας της σφαίρας S^{n-1}, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\lim_{l\to\infty} u_{i,l} = u_i \tag{4.3.14}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Τότε, το $\{u_1, \ldots, u_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Για $\eta \in (0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ και $i = 1, \ldots, n$ θεωρούμε την περιοχή $A_{i,\eta}$ του $\{\pm u_i\}$ στην S^{n-1}

$$A_{i,\eta} = \{v \in S^{n-1} : |\langle v, u_i\rangle| \geq \eta,\ |\langle v, u_i\rangle| < \eta \ \text{ για } \ j > i\}.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι, για κάθε $\eta \in (0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ τα $A_{i,\eta}$ είναι μια ξένη διαμέριση της S^{n-1}, γιατί για κάθε $v \in S^{n-1}$ υπάρχει u_i τέτοιο ώστε $|\langle v, u_i\rangle| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, αλλιώς $|v| = \sum_{i=1}^n |\langle v, u_i\rangle|^2 < 1$. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\lim_{\eta\to 0} \mu(A_{i,\eta}) = \mu(S^{n-1} \cap (\xi_i \setminus \xi_{i-1})), \tag{4.3.15}$$

όπου ξ_i ο υπόχωρος που παράγεται από το $\{u_1, \ldots, u_i\}$. Για να το δείξουμε αυτό, αρχικά παρατηρούμε ότι, καθώς το η φθίνει προς το μηδέν τα σύνολα $A_{i,\eta} \cap \xi_i$ αυξάνουν και $\cup_{\eta>0} A_{i,\eta} \cap \xi_i = S^{n-1} \cap (\xi_i \setminus \xi_{i-1})$, επομένως

$$\liminf_{\eta \to 0^+} \mu(A_{i,\eta}) \geq \lim_{\eta \to 0^+} \mu(A_{i,\eta} \cap \xi_i) = \mu(S^{n-1} \cap (\xi_i \setminus \xi_{i-1})).$$

Επίσης, καθώς το η φθίνει προς το μηδέν, τα σύνολα

$$B_{i,\eta} := \{v \in S^{n-1} : |\langle v, u_i \rangle| > 0, \ |\langle v, u_i \rangle| < \eta \ \text{ για } \ j > i\} \qquad i = 1, \ldots, n$$

φθίνουν και $\cap_{\eta>0} B_{i,\eta} = S^{n-1} \cap (\xi_i \setminus \xi_{i-1})$, επομένως

$$\limsup_{\eta \to 0^+} \mu(A_{i,\eta}) \leq \lim_{\eta \to 0^+} \mu(B_{i,\eta}) = \mu(S^{n-1} \cap (\xi_i \setminus \xi_{i-1})),$$

και έτσι παίρνουμε την (4.3.15).

Τώρα, το μέτρο πιθανότητας μ ικανοποιεί την (SSCI), επομένως για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\sum_{j=1}^{i} \mu(S^{n-1} \cap (\xi_i \setminus \xi_{i-1})) = \mu\big(S^{n-1} \cap \big(\bigcup_{j=1}^{i} \xi_i \setminus \xi_{i-1}\big)\big) = \mu(S^{n-1} \cap \xi_i) < \frac{i}{n}. \tag{4.3.16}$$

Άρα, από τις (4.3.15), (4.3.16) βγάζουμε ότι υπάρχει $\eta_0 \in (0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \mu(A_{j,\eta_0}) < \frac{1}{n}.$$

Τώρα, εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3.6 για $\alpha_j = \mu(A_{j,\eta_0})$ βγάζουμε ότι υπάρχει $t \in (0,1]$ τέτοιος ώστε για $\lambda = \frac{1-t}{n}$ και

$$\beta_i = \alpha_i - \lambda \ \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, n-1, \text{ και } \beta_n = \alpha_n - \lambda - t \tag{4.3.17}$$

να έχουμε

$$\beta_1 + \cdots + \beta_i \leq 0 \ \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, n-1 \tag{4.3.18}$$

και

$$\beta_1 + \cdots + \beta_n = 0. \tag{4.3.19}$$

Τώρα, από τη σύγκλιση (4.3.14), έχουμε ότι $|u_{i,l} - u_i| < \frac{\eta_0}{2}$ για μεγάλα l, άρα για $u \in A_{i,\eta_0}$ ισχύει

$$\begin{aligned} |\langle u, u_{i,l} \rangle| &\geq |\langle u, u_i \rangle| - |\langle u, (u_{i,l} - u_i) \rangle| \\ &\geq |\langle u, u_i \rangle| - |(u_{i,l} - u_i)| \\ &\geq \frac{\eta_0}{2}. \end{aligned}$$

Επίσης, για κάθε l, η συνάρτηση στήριξης του Q_l είναι της μορφής

$$h_{Q_l}(v) = \max_{1\leq i\leq n} h_{i,l}|\langle v, u_{i,l}\rangle|$$

για $v \in S^{n-1}$. Αφού $S^{n-1} = \sqcup_{i=1}^{n} A_{i,\eta_0}$ έχουμε, για $u \in A_{i,\eta_0}$,

$$h_{Q_l}(u) \geq h_{i,l}\frac{\eta_0}{2} \tag{4.3.20}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και μεγάλα l. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα A_{i,η_0} είναι διαμέριση της S^{n-1}, έπειτα την (4.3.20), μετά ξανά ότι τα A_{i,η_0} είναι διαμέριση της S^{n-1} και το μ είναι μέτρο πιθανότητας και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \log h_{Q_l}\, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \int_{A_{i,\eta_0}} \log h_{Q_l}\, d\mu \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_{i,\eta_0}} \log h_{i,l}\frac{\eta_0}{2}\, d\mu \\
&= \log\frac{\eta_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log h_{i,l} \\
&= \log\frac{\eta_0}{2} + \alpha_n \log h_{n,l} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \log h_{i,l}
\end{aligned}$$

Τώρα από τις (4.3.17) και το γεγονός ότι $\lambda > 0$ και την υπόθεση ότι $h_{1,l}\cdots h_{n,l} \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \log h_{Q_l}\, d\mu &= \log\frac{\eta_0}{2} + (\beta_n + \lambda + t)\log h_{n,l} + \sum_{i=1}^{n-1}(\beta_i + \lambda)\log h_{i,l} \\
&= \log\frac{\eta_0}{2} + t\log h_{n,l} + \sum_{i=1}^{n} \lambda\log h_{i,l} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log h_{i,l} \\
&= \log\left(\frac{\eta_0}{2}h_{n,l}^t\right) + \lambda\log(h_{1,l}\cdots h_{n,l}) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log h_{i,l} \\
&\geq \log\left(\frac{\eta_0}{2}h_{n,l}^t\right) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log h_{i,l}
\end{aligned}$$

Θα δούμε ότι δεν αλλάζει κάτι αν ορίσουμε $h_{n+1,l} = 1$ για κάθε l. Τέλος επειδή $0 < h_{i,l} \leq h_{i+1,l}$ για $i = 1, \ldots, n-1$ και από τις (4.3.18) (4.3.19) έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \log h_{Q_l}\, d\mu &= \log\left(\frac{\eta_0}{2}h_{n,l}^t\right) + \sum_{i=1}^{n}(\beta_1 + \cdots + \beta_i)(\log h_{i,l} - \log h_{i+1,l}) \\
&\geq \log\left(\frac{\eta_0}{2}h_{n,l}^t\right).
\end{aligned}$$

Αφού $t > 0$ και $\lim_{l\longrightarrow\infty} h_{n,l} = \infty$, έπεται ότι

$$\lim_{l\longrightarrow\infty} \int_{S^{n-1}} \log h_{Q_l}\, d\mu = \infty.$$

□

Σχόλιο: Για το επόμενο θεώρημα αναφέρουμε ότι, αν E είναι ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ με κύριες διευθύνσεις $u_1, \dots, u_n$ και $C = [\pm h_1 u_1, \dots, \pm h_n u_n]$ πολύτοπο, όπου $h_i = h_E(u_i)$ με $i = 1, \dots, n$, τότε

$$V(C) = \prod_{i=1}^{n} h_i \frac{2^n}{n!}.$$

Για το παραπάνω αρκεί να υπολογιστεί ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας B_1^n ως προς την 1-νόρμα, διότι γράφοντας $C = T(B_1^n)$ όπου $T = \mathrm{diag}(h_1, \dots, h_n)$, έχουμε

$$V(C) = V(T(B_1^n)) = |\mathrm{det} T| V(B_1^n) = \prod_{i=1}^{n} h_i V(B_1^n).$$

Ο υπολογισμός του όγκου $V(B_1^n)$ μπορεί να γίνει είτε με επαγωγή ως προς τη διάσταση είτε απο τον γενικό τύπο

$$n! V(K) = \int_{S^{n-1}} e^{-\|x\|_K}\, dx,$$

όπου K ένα κυρτό συμμετρικό σύνολο. Επιπλέον, είναι προφανές ότι $C \subseteq E \subseteq \sqrt{n} C$ εφόσον $B_1^n \subseteq B_2^n \subseteq \sqrt{n} B_1^n$.

Θεώρημα 4.3.8. *Έστω $n \geq 2$, και μ ένα άρτιο πεπερασμένο μέτρο Borel στη σφαίρα S^{n-1}, το οποίο ικανοποιεί την* (SSCI). *Τότε, υπάρχει ένα* 0*-συμμετρικό, κυρτό σώμα $K \in \mathcal{K}_e^n$ τέτοιο ώστε*

$$\inf \Big\{ \int_{S^{n-1}} \log h_Q \, d\mu : Q \in \mathcal{K}_e^n, V_n(Q) = |\mu| \Big\} = \int_{S^{n-1}} \log h_K \, d\mu.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι μέτρο πιθανότητας, δηλαδή $|\mu| = 1$. Παίρνουμε ακολουθία $Q_l \in \mathcal{K}_e^n$ με $V_n(Q_l) = 1$ και

$$\inf \Big\{ \Phi_\mu(Q) : Q \in \mathcal{K}_e^n, V_n(Q) = 1 \Big\} = \lim_{l \to \infty} \Phi_\mu(Q_l).$$

Τώρα, η διαστολή $\omega_n^{-\frac{1}{n}} B$ της μοναδιαίας μπάλας έχει όγκο 1 και

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \log h_{\omega_n^{-\frac{1}{n}} B} \, d\mu &= \int_{S^{n-1}} \log \omega_n^{-\frac{1}{n}} \, d\mu + \int_{S^{n-1}} \log h_B \, d\mu \\ &= -\frac{1}{n} \log \omega_n,\end{aligned}$$

επομένως,

$$\lim_{l \to \infty} \Phi_\mu(Q_l) \leq -\frac{1}{n} \log \omega_n. \tag{4.3.21}$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{Q_l\}$ είναι φραγμένη, υπό την έννοια ότι η ακολουθία περιέχεται σε μια Ευκλείδεια μπάλα. Από το θεώρημα του John υπάρχουν 0-συμμετρικά ελλειψοειδή E_l τέτοια ώστε

$$E_l \subseteq Q_l \subseteq \sqrt{n} E_l.$$

Έστω $u_{1,l}, \ldots, u_{n,l}$ οι κύριες διευθύνσεις του ελλειψοειδούς E_l, αριθμημένες έτσι ώστε

$$h_{1,l} \leq \cdots \leq h_{n,l}, \tag{4.3.22}$$

όπου $h_{i,l} = h_{E_l}(u_{i,l})$ για $i = 1, \ldots, n$. Θεωρούμε τα πολύτοπα

$$C_l = [\pm h_{1,l} u_{1,l}, \ldots, \pm h_{n,l} u_{n,l}].$$

Εφόσον $C_l \subseteq E_l \subseteq \sqrt{n} C_l$ έπεται

$$C_l \subseteq Q_l \subseteq n C_l.$$

Τώρα, υποθέτουμε ότι η $\{Q_l\}$ δεν είναι φραγμένη, επομένως η ακολουθία παραλληλογράμμων C_l δεν είναι φραγμένη, άρα

$$\lim_{l \to \infty} h_{n,l} = \infty. \tag{4.3.23}$$

Αφού $V_n(Q_l) = 1$, έχουμε ότι $1 \leq n^n V_n(C_l)$, δηλαδή $V_n(C_l) \geq n^{-n}$, άρα

$$\prod_{i=1}^{n} h_{i,l} = \frac{n! V_n(C_l)}{2^n} \geq \frac{n!}{2^n n^n} := \gamma$$

δηλαδή

$$\prod_{i=1}^{n} \gamma^{-\frac{1}{n}} h_{i,l} = \frac{n! V_n(\gamma^{-\frac{1}{n}} C_l)}{2^n} \geq 1.$$

Έτσι, τα πολύτοπα $C_l' = \gamma^{-\frac{1}{n}} C_l$ ικανοποιούν τις τρείς υποθέσεις του Λήμματος 4.3.7, συνεπώς η ακολουθία $\{\Phi_\mu(C_l')\}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Ετσι και η $\{\Phi_\mu(C_l)\}$ δεν είναι άνω φραγμένη, άρα και η $\{\Phi_\mu(Q_l)\}$ δεν είναι άνω φραγμένη, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (4.3.21). Επομένως, η $\{Q_l\}$ είναι φραγμένη, άρα έχει δ_H-συγκλίνουσα υπακολουθία ([6] σελ. 85) άρα υπάρχει 0-συμμετρικό, κυρτό σώμα K όγκου 1, τέτοιο ώστε

$$\delta_H(K, Q_{l_i}) \to 0$$

καθώς $l_i \longrightarrow \infty$. Άρα, η σύγκλιση $\lim_{l_i \to \infty} h_{Q_{l_i}} = h_K$ είναι ομοιόμορφη στην S^{n-1} και άρα

$$\int_{S^{n-1}} \log h_{Q_{l_i}} \, d\mu \longrightarrow \int_{S^{n-1}} \log h_K \, d\mu$$

καθώς $l_i \longrightarrow \infty$. Τέλος

$$\begin{aligned} \inf \Big\{ \Phi_\mu(Q) : Q \in \mathcal{K}_e^n, V_n(Q) = 1 \Big\} &= \lim_{l_i \to \infty} \int_{S^{n-1}} \log h_{Q_{l_i}} \, d\mu \\ &= \int_{S^{n-1}} \log h_K \, d\mu. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.3.9. *Έστω μ ένα άρτιο μέτρο Borel στη σφαίρα S^{n-1} με $0 < |\mu| < \infty$. Αν υπάρχει $K \in \mathcal{K}_e^n$ με $V_n(K) = |\mu|$ και*

$$\inf\Big\{ \int_{S^{n-1}} \log h_Q \, d\mu : Q \in \mathcal{K}_e^n, V_n(Q) = |\mu|\Big\} = \int_{S^{n-1}} \log h_K \, d\mu, \tag{4.3.24}$$

τότε το μ είναι το cone-volume μέτρο του K, δηλαδή $\mu = V_K$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι μέτρο πιθανότητας, δηλαδή $|\mu| = 1$. Αφού τα μ και V_K είναι άρτια μέτρα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} g \, d\mu = \int_{S^{n-1}} g \, dV_K \tag{4.3.25}$$

για κάθε $g \in C_e(S^{n-1})$. Παίρνουμε μια $g \in C_e(S^{n-1})$ και θεωρούμε την οικογένεια των κυρτών σωμάτων $\{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ που κατασκευάζονται ως τα χωρία Wulff των συνεχών συναρτήσεων $h_t(\cdot) : \mathbb{R} \times S^{n-1} \longrightarrow (0, \infty)$ με

$$h_t(u) = h_K(u)e^{tg(u)}.$$

Δηλαδή,

$$K_t = \bigcap_{u\in S^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle \leq h_t(u)\}.$$

Παρατηρούμε ότι $K_0 = K$. Ορίζουμε $F : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ με

$$F(t) = V_n(h_t)^{-\frac{1}{n}} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log h_t \, d\mu\right)$$

Η g είναι φραγμένη στην S^{n-1}, άρα η σύγκλιση

$$\frac{h_t - h_0}{t} \longrightarrow gh_{K_0}$$

είναι ομοιόμορφη στη S^{n-1}, καθώς το $t \to 0$, επομένως το Λήμμα 2.5.4 βγάζει ότι η F είναι παραγωγήσιμη στο $t = 0$, και επιπλέον

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V_n(h_t) = \int_{S^{n-1}} gh_{K_0} \, dS_{K_0}.$$

Υπολογίζουμε

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(t) = \Big[-\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} gh_{K_0} \, dS_{K_0} + \int_{S^{n-1}} g \, d\mu\Big] \exp\Big(\int_{S^{n-1}} \log h_{K_0} \, d\mu\Big). \tag{4.3.26}$$

Θα δούμε ότι η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης (4.3.24) κάνει την F να παίρνει ελάχιστη τιμή στο $t = 0$, άρα η παράγωγος της F στο μηδέν είναι μηδέν, συνεπώς από την (4.3.26) βγάζουμε

$$\int_{S^{n-1}} g \, d\mu = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} gh_{K_0} \, dS_{K_0},$$

απ' όπου παίρνουμε την (4.3.25). Για το ότι η F παίρνει ελάχιστη τιμή στο $t = 0$, ορίζουμε $M_0 : C_e^+(S^{n-1}) \longrightarrow (0, \infty)$ με

$$M_0(q) = V_n(q)^{-\frac{1}{n}} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log q \, d\mu\right),$$

και θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\inf\{M_0(q) : q \in C_e^+(S^{n-1})\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $f \in C_e^+(S^{n-1})$ και Q είναι το χωρίο Wulff που αντιστοιχεί στην f, τότε $V_n(f) = V_n(h_Q) = V_n(Q)$ και $h_Q \leq f$, άρα $M_0(h_K) \leq M_0(f)$. Επομένως, το παραπάνω infimum μπορεί να πιαστεί από τη συνάρτηση στήριξης ενός 0-συμμετρικού κυρτού σώματος, δηλαδή

$$\inf\{M_0(q) : q \in C_e^+(S^{n-1})\} = \inf\{M_0(h_Q) : Q \in \mathcal{K}_e^n\}.$$

Τώρα βλέπουμε ότι η M_0 είναι ομογενής βαθμού 0, δηλαδή $M_0(sq) = M_0(q)$ για κάθε $s > 0$. Επομένως, μπορούμε να περιοριστούμε και άλλο, στα σώματα όγκου 1, δηλαδή

$$\inf\{M_0(h_Q) : Q \in \mathcal{K}_e^n\} = \inf\{M_0(h_Q) : Q \in \mathcal{K}_e^n, V_n(Q) = 1\}.$$

Τώρα η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης (4.3.24) δίνει

$$\begin{aligned}\inf\{M_0(h_Q) : Q \in \mathcal{K}_e^n, V_n(Q) = 1\} &= \inf\Big\{\exp\Big(\int_{S^{n-1}} \log h_Q \, d\mu\Big) : Q \in \mathcal{K}_e^n, V_n(Q) = 1\Big\} \\ &= \exp\Big(\int_{S^{n-1}} \log h_K \, d\mu\Big) \\ &= M_0(h_K).\end{aligned}$$

Τέλος, $F(0) = M_0(h_K) \leq M_0(h_t) = F(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, δηλαδή η F παίρνει ελάχιστη τιμή στο $t = 0$. □

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν ενα μέτρο πάνω στην σφαίρα ικανοποιεί την (ii) τότε είναι cone-volume μέτρο.

Έστω μ ένα μέτρο Borel πάνω στη σφαίρα S^{n-1} και ξ ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Θα συμβολίζουμε με μ_ξ τον περιορισμό του μ στο σύνολο $S^{n-1} \cap \xi$.

Λήμμα 4.3.10. *Έστω $n \geqslant 2$ και μ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel πάνω στην σφαίρα S^{n-1}, το οποίο ικανοποιεί την* SCC. *Αν ξ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ τέτοιος ώστε*

$$\mu(\xi \cap S^{n-1}) = \frac{\dim \xi}{n} \mu(S^{n-1}), \tag{4.3.27}$$

τότε το μ_ξ ικανοποιεί την SCC *ως μέτρο στη σφαίρα $S^{n-1} \cap \xi$.*

Απόδειξη. Έστω $m = \dim \xi$ και $S^{m-1} = S^{n-1} \cap \xi$. Τότε, η (4.3.27) γράφεται

$$\frac{1}{m}\mu_\xi(S^{m-1}) = \frac{1}{n}\mu(S^{n-1}). \tag{4.3.28}$$

Για την ανισότητα της συνθήκης παίρνουμε έναν k-διάστατο υπόχωρο ξ_k μέσα στον ξ και από την (SCI) του μ και την (4.3.28) βγάζουμε

$$\begin{aligned} \mu_\xi(\xi_k \cap S^{m-1}) &= \mu(\xi_k \cap S^{n-1}) \\ &\le \frac{k}{n}\mu(S^{n-1}) \\ &= \frac{k}{m}\mu_\xi(S^{m-1}). \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

Τώρα για την περίπτωση ισότητας της συνθήκης, αν για κάποιον k-διάστατο υπόχωρο ξ_k μέσα στον ξ έχουμε

$$\mu_\xi(\xi_k \cap S^{m-1}) = \frac{k}{m}\mu_\xi(S^{m-1}),$$

αυτό συνεπάγεται ισότητα στην (4.3.29), δηλαδή

$$\mu(\xi_k \cap S^{n-1}) = \frac{k}{n}\mu(S^{n-1}).$$

Αλλά, επειδή το μ ικανοποιεί την (SCC), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ξ', συμπληρωματικός υπόχωρος του ξ_k στον $\mathbb{R}^n$, τέτοιος ώστε

$$\mu(\xi' \cap S^{n-1}) = \frac{\dim \xi'}{n}\mu(S^{n-1}),$$

δηλαδή το μ συγκεντρώνεται στην $S^{n-1} \cap (\xi_k \cup \xi)$. Θέτουμε $\xi'' = \xi' \cap \xi$. Τότε, το μ_ξ συγκεντρώνεται στην $(S^{n-1} \cap (\xi_k \cup \xi)) \cap \xi = S^{m-1} \cap (\xi_k \cup \xi'')$ και ο ξ'' είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του ξ_k στον ξ. □

Λήμμα 4.3.11. *Έστω ξ και ξ' συμπληρωματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$, με $0 < \dim \xi = m < n$. Έστω επίσης μ ένα πεπερασμένο, άρτιο μέτρο Borel πάνω στη σφαίρα, το οποίο συγκεντρώνεται στην $S^{n-1} \cap (\xi \cup \xi')$ και ικανοποιεί την*

$$\mu(\xi \cap S^{n-1}) = \frac{\dim \xi}{n}\mu(S^{n-1}).$$

Αν τα μέτρα μ_ξ και $\mu_{\xi'}$ είναι cone-volume μέτρα κάποιων κυρτών σωμάτων στους υπόχωρους ξ και ξ', τότε το μ είναι cone-volume μέτρο κάποιου κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Από τη συγκέντρωση του μέτρου μ στην $S^{n-1} \cap (\xi \cup \xi')$ έχουμε

$$\mu(\omega) = \mu_\xi(\omega \cap \xi) + \mu_{\xi'}(\omega \cap \xi'),$$

για $\omega \subseteq S^{n-1}$. Επομένως αν βρούμε κυρτό σώμα $K \in \mathcal{K}_e^n$ τέτοιο ώστε

$$V_K(\omega) = \mu_\xi(\omega) \quad \text{για} \quad \omega \subseteq S^{n-1} \cap \xi, \tag{4.3.30}$$

$$V_K(\omega') = \mu_{\xi'}(\omega') \quad \text{για} \quad \omega' \subseteq S^{n-1} \cap \xi', \tag{4.3.31}$$

και το V_K να συγκεντρώνεται στην $S^{n-1} \cap (\xi \cup \xi')$, βγάζουμε ότι

$$\mu = V_K.$$

Τα μ_ξ και $\mu_{\xi'}$ είναι cone-volume μέτρα, άρα για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχουν $C \in \mathcal{K}_e^m$ και $C' \in \mathcal{K}_e^{n-m}$, στους ξ και ξ' αντίστοιχα, τέτοια ώστε

$$V_C = \alpha\mu_\xi \quad \text{και} \quad V_{C'} = \alpha\mu_{\xi'}. \tag{4.3.32}$$

Κατασκευάζουμε κυρτά σώματα $D \in \mathcal{K}_e^m$ και $D' \in \mathcal{K}_e^{n-m}$ στους ${\xi'}^\perp$ και $\xi^\perp$ αντίστοιχα με

$$D = \{(x + \xi^\perp) \cap {\xi'}^\perp : x \in C\},$$
$$D' = \{(x + {\xi'}^\perp) \cap \xi^\perp : x \in C'\}.$$

Το α θα επιλεγεί κατάλληλα έτσι ώστε το K που ψάχνουμε να είναι το $D + D'$. Οι υπόχωροι $\xi^\perp, {\xi'}^\perp$ είναι συμπληρωματικοί, επομένως από την Παρατήρηση 4.3.4 το $V_{D+D'}$ συγκεντρώνεται στην $S^{n-1} \cap (\xi \cup \xi')$. Τώρα, $P_\xi D = C$ και $P_{\xi'} D' = C'$, συνεπώς

$$\frac{V_m(D)}{V_m(C)} = \frac{V_{n-m}(D')}{V_{n-m}(C')} = r,$$

όπου το r εξαρτάται μόνο από τη γωνία μεταξύ του ξ και του ${\xi'}^\perp$. Τότε

$$V_m(D) = rV_m(C) = rV_C(\xi \cap S^{n-1}) = r\alpha\mu_\xi(\xi \cap S^{n-1}) = r\alpha\mu(\xi \cap S^{n-1}) = r\alpha\frac{m}{n}\mu(S^{n-1}).$$

Όμοια,

$$V_{n-m}(D') = r\alpha\frac{n-m}{n}\mu(S^{n-1}). \tag{4.3.33}$$

Σημειώνουμε

$$\partial(D + D') = (\partial D + \mathrm{relint}D') \cup (\mathrm{relint}D + \partial D') \cup (\partial D + \partial D'),$$

Γράφουμε $y = y_1 + y_2 \in \mathbb{R}^n$, όπου $y_1 = P_\xi y$ και $y_2 = P_{\xi^\perp} y$. Βλέπουμε ότι για $y \in \partial(D)$ το $y_1 \in \partial(C)$ και $y = (y_1 + \xi^\perp) \cap {\xi'}^\perp$. Για $\omega \subseteq S^{n-1} \cap \xi$ παρατηρούμε:

(1) Προφανώς $\nu_{D+D'}^{-1}(\omega) \subseteq \partial(D) + \mathrm{relint}(D')$ και για $y + y' \in \partial(D) + \mathrm{relint}(D')$ ισχύει

$$\nu_{D+D'}(y + y') = \nu_{D+D'}(y) = \nu_C(y_1).$$

(2) Επιπλέον $P_\xi(\nu_{D+D'}^{-1}(\omega)) = \nu_C^{-1}(\omega)$

Από τον ορισμό του cone-volume μέτρου και τις παρατηρήσεις έχουμε

$$\begin{aligned} V_{D+D'}(\omega) &= \frac{1}{n}\int_{\nu_{D+D'}^{-1}(\omega)} \langle y+y', \nu_{D+D'}(y+y')\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y+y') \\ &= \frac{1}{n}\int_{\nu_{D+D'}^{-1}(\omega)} \langle y, \nu_C(y_1)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y+y') \\ &= \frac{1}{n}\int_{\nu_C^{-1}(\omega)} \langle y_1, \nu_C(y_1)\rangle \, d\varphi(y_1) \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

όπου φ το μέτρο εικόνα της προβολής $P_\xi : (\nu_{D+D'}^{-1}(\omega), \mathcal{H}^{n-1}) \longrightarrow (\nu_C^{-1}(\omega), \varphi)$ με $y+y' \longmapsto y_1$, δηλαδή $\varphi(\cdot) = \mathcal{H}^{n-1}(P_\xi(\cdot))$. Έγινε χρήση του Πρότασης (2.6.3) με $g(y_1) = \langle y_1, \nu_C(y_1)\rangle$. Αναλύοντας το μέτρο φ, για $A \subseteq \nu_C^{-1}(\omega)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi(A) = \mathcal{H}^{n-1}(P_\xi^{-1}(A)) &= \mathcal{H}^{n-1}\Big(\bigcup_{x\in A}(x+D')\Big) \\ = \mathcal{H}^{m-1}(A)\mathcal{H}^{n-m}(D') &= \int_{y_1\in A} V_{n-m}(D')\, d\mathcal{H}^{m-1}(y_1), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$d\varphi(y_1) = V_{n-m}(D')\, d\mathcal{H}^{m-1}(y_1).$$

Οπότε, η (4.3.34) γίνεται

$$\begin{aligned} V_{D+D'}(\omega) &= \frac{1}{n}\int_{\nu_C^{-1}(\omega)} \langle y_1, \nu_C(y_1)\rangle \, d\mathcal{H}^{m-1}(y_1) V_{n-m}(D') \\ &= \frac{m}{n} V_C(\omega) V_{n-m}(D') \\ &= \frac{m(n-m)}{n^2} r\alpha^2 \mu(S^{n-1})\mu_\xi(\omega). \end{aligned}$$

στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκαν οι (4.3.32), (4.3.33).

Όμοια, για κάθε $\omega' \subseteq S^{n-1}\cap \xi'$ βγάζουμε

$$V_{D+D'}(\omega') = \frac{m(n-m)}{n^2} r\alpha^2 \mu(S^{n-1})\mu_{\xi'}(\omega').$$

Επιλέγονας το α έτσι ώστε

$$\frac{m(n-m)}{n^2} r\alpha^2 \mu(S^{n-1}) = 1,$$

έχουμε ότι το $K = D + D'$ ικανοποιεί τις (4.3.30). □

Θεώρημα 4.3.12. *Έστω $n \geqslant 1$ και μ ένα πεπερασμένο, μη-μηδενικό και άρτιο μέτρο Borel πάνω στη σφαίρα S^{n-1} το οποίο ικανοποιεί την (SCC). Τότε, το μ είναι cone-volume μέτρο ενός 0-συμμετρικού κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Πρώτα βλέπουμε ότι αν ένα μέτρο μ ικανοποιεί την (SCC) τότε:

(i) Είτε για κάθε υπόχωρο ξ του $\mathbb{R}^n$ τέτοιον ώστε $0 < \dim \xi < n$ ικανοποιεί την

$$\mu(\xi \cap S^{n-1}) < \frac{\dim \xi}{n} \mu(S^{n-1}).$$

(ii) Είτε υπάρχουν ξ_1, ξ_2 συμπληρωματικοί υπόχωροι στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιοι ώστε

$$\mu(\xi_i \cap S^{n-1}) = \frac{\dim \xi_i}{n} \mu(S^{n-1})$$

για $i = 1, 2$.

Αν το μέτρο μ ικανοποιεί την (i), τότε από το Θεώρημα (4.3.8) υπάρχει ένα 0-συμμετρικό, κυρτό σώμα $K \in \mathcal{K}_e^n$ τέτοιο ώστε

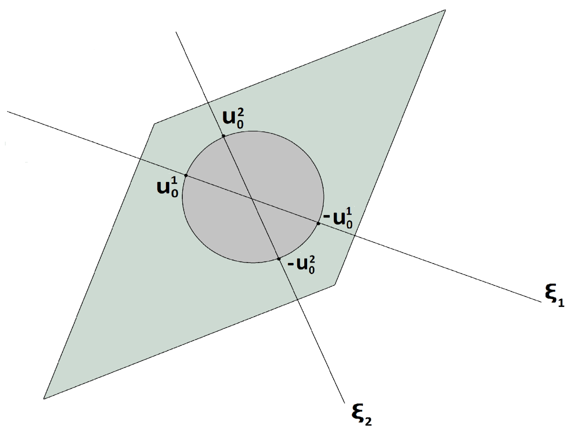
$$\inf \left\{ \int_{S^{n-1}} \log h_Q \, d\mu : Q \in \mathcal{K}_e^n, V(Q) = |\mu| \right\} = \int_{S^{n-1}} \log h_K \, d\mu,$$

και άρα από το Λήμμα 4.3.9 έπεται ότι το μ είναι cone-volume μέτρο ενός 0-συμμετρικού κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$. Τώρα, αν το μέτρο μ ικανοποιεί την ιδιότητα (ii), θα δείξουμε ότι είναι cone-volume μέτρο με επαγωγή ως προς τη διάσταση n.

(α) $n = 2$: Υποχρεωτικά $\dim\xi_1 = \dim\xi_2 = 1$ οπότε γράφουμε $\xi_i \cap S^1 = \{-u_0^i, u_0^i\}$. Το μέτρο μ ικανοποιεί την ιδιότητα (ii) άρα

$$\mu(\{-u_0^i\}) + \mu(\{u_0^i\}) = \mu(\xi_i \cap S^1) = \frac{1}{2} \mu(S^1)$$

για $i = 1, 2$ και επειδή το μέτρο μ είναι άρτιο βγάζουμε ότι $\mu(\{-u_0^i\}) = \mu(\{u_0^i\}) = \frac{1}{4}\mu(S^1)$ με



$i = 1, 2$. Το παραλληλόγραμμο με πλευρές κάθετες στα διανύσματα u_0^1, u_0^2 και εμβαδόν ισό με $\mu(S^1)$ είναι το ζητούμενο κυρτό σώμα.

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι $n \geqslant 3$ και ότι το θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Έστω μ ένα μέτρο όπως στο θεώρημα, το οποίο ικανοποιεί την ιδιότητα (ii). Από το Λήμμα 4.3.10, τα μ_{ξ_1} και μ_{ξ_2} ικανοποιούν την (SCC). Επίσης, είναι άρτια μέτρα και $0 < |\mu_{\xi_1}|, |\mu_{\xi_2}| < \infty$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν $C \in \mathcal{K}_e^m$ και $C' \in \mathcal{K}_e^{n-m}$ τέτοια ώστε

$$\mu_{\xi_1} = V_C \quad \text{και} \quad \mu_{\xi_2} = V_{C'},$$

και άρα από το Θεώρημα 4.3.11 έπεται ότι το μ είναι cone-volume μέτρο ενός 0-συμμετρικού κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs **202** (2015).

[2] K. Böröczky, E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *The log-Brunn-Minkowski inequality*, Adv. Math. **231** (2012), 1974-1997.

[3] K. Böröczky, E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *The Logarithmic Minkowski Problem*, J. Amer. Math. Soc., **26** (2013), 831-852.

[4] S. Dubuc, *Critères de convexité et inégalités intégrales*, Annales de l' Institut Fourier **27** (1977).

[5] R. Gardner, *Geometric Tomography*, *Second Edition*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **58**, Cambridge University Press, 2006.

[6] P. M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*, Grundlehren Math. Wiss. **336**, Springer, Heidelberg (2007).

[7] B. Grünbaum, *Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1257-1261.

[8] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187–204.

[9] C. Saroglou, *Remarks on the conjectured log-Brunn-Minkowski inequality*, Geom. Dedicata **177** (2015), 353-365.

[10] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.