Τα Θεωρήματα των Dvoretzky και Krivine

ΜΑΡΙΑΝΝΑ ΧΑΡΤΖΟΥΛΑΚΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1999

.

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Απρίλιο του 1999. Επιβλέποντες ήταν οι Α. Γιαννόπουλος και Ε. Δεληγιάννη.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Α. Γιαννόπουλος, Ε. Δεληγιάννη και Σ. Παπαδοπούλου.

.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Το Θεώρημα του Dvoretzky

1.1 Εισαγωγή

Το Θεώρημα του Dvoretzky [Dv1,2] για τις σχεδόν σφαιρικές τομές συμμετρικών κυρτών σωμάτων είναι το πρώτο ασυμπτωτικό αποτέλεσμα για χώρους πεπερασμένης διάστασης με νόρμα.

Θεώρημα. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, υπάρχουν $k \geq c\varepsilon^2 \log n$, k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ και $r > 0$, που ικανοποιούν την*

$$(1+\varepsilon)^{-1} r D_n \cap F \subset K \cap F \subset (1+\varepsilon) r D_n \cap F,$$

όπου D_n η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα.

Θα δώσουμε πλήρη απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, και θα συζητήσουμε ειδικές περιπτώσεις και επεκτάσεις του. Η μέθοδος της απόδειξης είναι πιθανοθεωρητική ([Mi], [MS]), και βασίζεται στο «φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου». Τελείως σχηματικά, τα βήματα είναι τα εξής:

(α) Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η D_n (η ύπαρξη και η μοναδικότητα ενός τέτοιου ελλειψοειδούς θα συζητηθούν στην Παράγραφο 3). Τότε, η συνάρτηση $r : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ με $r(x) = \|x\|_K$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1.

(β) Χρησιμοποιώντας την σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα, στην Παράγραφο 5 βλέπουμε ότι υπάρχει θετικός αριθμός L_r (ο μέσος Lévy της r) με την ιδιότητα

$$\sigma\left(x \in S^{n-1} : |r(x) - L_r| \geq \varepsilon L_r\right) \leq c \exp\left(-c'\varepsilon^2 n L_r^2\right).$$

Δηλαδή, οι τιμές της r *συγκεντρώνονται* με την έννοια του μέτρου γύρω από τον μέσο της, όλο και πιό έντονα καθώς η διάσταση n τείνει στο άπειρο.

(γ) Η συγκέντρωση αυτή του μέτρου μας επιτρέπει να βρούμε υπόχωρο F του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $k \geq c\varepsilon^2 n L_r^2$, τέτοιον ώστε

$$(1+\varepsilon)^{-1} L_r \leq \|x\|_K \leq (1+\varepsilon) L_r$$

για κάθε x στη μοναδιαία σφαίρα του F.

(δ) Ο μέσος L_r είναι, αν εξαιρέσουμε απόλυτες σταθερές, ισοδύναμος με τη μέση τιμή της r

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|_K \sigma(dx).$$

Τέλος, το Λήμμα των Dvoretzky και Rogers μας δίνει ένα κάτω φράγμα για το M:

$$M \geq c'' \left(\frac{\log n}{n} \right)^{1/2}.$$

Δηλαδή, $k \geq c\varepsilon^2 \log n$.

Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X, ορίζουμε $k(X)$ τον μεγαλύτερο φυσικό $k \leq n$ για τον οποίο υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος F του X ο οποίος είναι 4-ισόμορφος με τον ℓ_2^k. Η απόδειξη του Θεωρήματος του Dvoretzky μας δίνει

$$k(X) \geq c \left(\frac{M}{b} \right)^2,$$

όπου $b = \max\{\|x\|_K : x \in S^{n-1}\}$. Στην Παράγραφο 6, υπολογίζουμε την τάξη μεγέθους της παραμέτρου $k(\ell_p^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Το παράδειγμα του κύβου ($k(\ell_\infty^n) \simeq \log n$) δείχνει ότι η εκτίμηση του Θεωρήματος είναι, σε πλήρη γενικότητα, βέλτιστη.

Όταν $1 \leq p \leq 2$, ισχύει $k(X) \simeq n$: υπάρχουν Ευκλείδειες τομές της B_p^n με διάσταση ανάλογη του n. Στην Παράγραφο 7 βλέπουμε ότι κάθε σώμα που έχει μικρό *λόγο όγκων* έχει την ίδια ιδιότητα.

1.2 Κυρτά σώματα

Ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ λέγεται *κυρτό σώμα* αν έχει μη κενό εσωτερικό. Θα λέμε ότι το K είναι *συμμετρικό*, αν έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων o.

1.2.1. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|\cdot\|_K := \|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$\|x\| = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}$$

έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geq 0$ με ισότητα μόνο αν $x = o$.

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.
(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,

είναι δηλαδή *νόρμα* στον $\mathbb{R}^n$. Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\|_K$ θα συμβολίζεται με X_K. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε *η μοναδιαία του μπάλα* $K_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό δείχνει ότι η μελέτη των συμμετρικών κυρτών σωμάτων και η μελέτη των χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα συμβαδίζουν.

Από τον ορισμό της νόρμας έπεται άμεσα ότι αν K και L είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε $K \subseteq L$ αν και μόνο αν $\|x\|_L \leq \|x\|_K$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Επίσης, $\|x\|_{rK} = \frac{1}{r}\|x\|_K$ γιά κάθε $r > 0$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

1.2.2. Έστω X και Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα όπως παραπάνω. Αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός (θα γράφουμε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), ορίζουμε τη νόρμα $\|T : X \to Y\|$ του T ως *τελεστή* από τον X στον Y ως εξής:

$$\|T : X \to Y\| = \max\{\|T(x)\|_Y : x \in K_X\}.$$

Ισοδύναμα, η νόρμα του T είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός ρ γιά τον οποίο

$$T(K_X) \subseteq \rho K_Y.$$

Ο $T : X \to Y$ λέγεται ισομορφισμός αν είναι αντιστρέψιμος (δηλαδή, αν $T \in GL_n$).

Η απόσταση Banach-Mazur των X και Y είναι ο αριθμός

$$d(X, Y) = \min\{\|T\| \, \|T^{-1}\| : T \in GL_n\},$$

και μετράει *πόσο καλά ισόμορφοι* είναι οι X και Y. Μιά ισοδύναμη γεωμετρική ερμηνεία είναι η εξής: η $d(X, Y)$ είναι ο μικρότερος $\rho \geq 1$ για τον οποίο υπάρχει $T \in GL_n$ που ικανοποιεί την $K_Y \subseteq T(K_X) \subseteq \rho K_Y$. Εύκολα βλέπουμε ότι $d(X, Y) = d(Y, X)$ για κάθε X και Y (η d είναι συμμετρική), και $d(X, Y) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει $T : X \to Y$ ισομετρία.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}_n$ όλων των κλάσεων ισοδυναμίας n-διάστατων χώρων με νόρμα, όπου ο X είναι ισοδύναμος με τον X' αν και μόνο αν οι X και X' είναι ισομετρικοί. Ο $\mathcal{B}_n$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, με μετρική την $\log d$: η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της

$$d(X, Y) \leq d(X, Z) \, d(Z, Y)$$

που επαληθεύεται εύκολα για κάθε τριάδα $X, Y, Z \in \mathcal{B}_n$.

Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{B}_n, \log d)$ συνήθως λέγεται Banach-Mazur compactum ή Minkowski compactum. Αντί για την $\log d$, θα χρησιμοποιούμε την d σαν μία πολλαπλασιαστική απόσταση στον $\mathcal{B}_n$.

1.2.3. Υποθέτουμε ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με μία Ευκλείδεια δομή $\langle \cdot, \cdot \rangle$, και συμβολίζουμε την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα με $|\cdot|$. Γράφουμε D_n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα.

Η *ακτινική συνάρτηση* $\rho_K : \mathbb{R}^n \backslash \{o\} \to \mathbb{R}^+$ του K ορίζεται από την

$$\rho_K(x) = \max\{\lambda > 0 : \lambda x \in K\}.$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x \neq o$

$$\rho_K(x) = \|x\|^{-1}.$$

Η *συνάρτηση στήριξης* $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ του K ορίζεται από την

$$h_K(x) = \max\{\langle x, y\rangle : y \in K\}.$$

Η σχέση ανάμεσα στην ακτινική συνάρτηση ρ_K και τη συνάρτηση στήριξης h_K γιά δοσμένη διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ είναι $\rho_K(\theta) \leq h_K(\theta)$.

Το *πολικό σώμα* K° του K είναι το

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y\rangle| \leq 1, \forall x \in K\}.$$

Οι βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος περιγράφονται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1. *Έστω K και L συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύουν τα εξής:*
(1) *Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, $\rho_{K^\circ}(\theta) = 1/h_K(\theta)$.*
(2) *Αν $K \subseteq L$, τότε $L^\circ \subseteq K^\circ$.*
(3) *Αν $T \in GL_n$, τότε $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$.*
(4) *$(K^\circ)^\circ = K$.*
(5) *$|TK||(TK)^\circ| = |K||K^\circ|$.* $\square$

1.2.4. Η *δυϊκή νόρμα* $\|\cdot\|_*$ της $\|\cdot\|$ ορίζεται από την

$$\|y\|_* = \max\{|\langle x, y\rangle| : \|x\| \leq 1\}.$$

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|y\|_* \|x\|$$

γιά κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Αν X^* είναι ο *δυϊκός χώρος* του X, τότε η μοναδιαία μπάλα K_{X^*} του X^* είναι το πολικό σώμα της μοναδιαίας μπάλας K_X του X. Θα γράφουμε $\|\cdot\|_{K^\circ}$ ή $\|\cdot\|_*$, και $\|\cdot\|_K$ ή $\|\cdot\|$ χωρίς αυτό να δημιουργεί σύγχυση.

1.2.5. Το *άθροισμα Minkowski* των $A, B \subset \mathbb{R}^n$ είναι το $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$.

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο στον $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 1. *Έστω K και T δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K + T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}. \tag{1}$$

Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα, ισότητα στην (1) μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά.

Η (1) εκφράζει με μία έννοια το γεγονός ότι ο όγκος είναι *κοίλη* συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geq \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}. \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας την (2) και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geq |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}. \tag{3}$$

Η ασθενέστερη αυτή μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ανεξάρτητη της διάστασης.

Υπάρχουν πολλές και ενδιαφέρουσες αποδείξεις της (1). Θα δώσουμε εδώ την απόδειξη της *συναρτησιακής μορφής* της ανισότητας, που οφείλεται στους Prékopa και Leindler (βλέπε [Pi]):

Θεώρημα 2. *Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρεις μετρήσιμες συναρτήσεις, και $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}. \tag{4}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς την διάσταση n.

(α) $n = 1$: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f και g είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ιδέα της μεταφοράς του μέτρου.

Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t \int f \quad , \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t \int g.$$

Με βάση τις υποθέσεις μας οι x, y είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t) f(x(t)) = \int f \quad , \quad y'(t) g(y(t)) = \int g.$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t).$$

Οι x και y είναι γνήσια αύξουσες. Έπεται ότι η z είναι κι αυτή γνήσια αύξουσα και, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda) y'(t) \geq (x'(t))^{\lambda} (y'(t))^{1-\lambda}.$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της h κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = z(t)$:

$$\begin{aligned}\int h &= \int_0^1 h(z(t))z'(t)dt \\ &\geq \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t))(x'(t))^\lambda (y'(t))^{1-\lambda} dt \\ &\geq \int_0^1 f^\lambda(x(t)) g^{1-\lambda}(y(t)) \left(\frac{\int f}{f(x(t))}\right)^\lambda \left(\frac{\int g}{g(y(t))}\right)^{1-\lambda} dt \\ &= \left(\int f\right)^\lambda \left(\int g\right)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι $n \geq 2$ και ότι το Θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Έστω f, g, h όπως στο Θεώρημα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με $h_s(w) = h(w, s)$, και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s, g_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$. Από την (4) έπεται ότι, αν $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f_{s_1}(x)^\lambda g_{s_0}(y)^{1-\lambda},$$

και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$\begin{aligned}H(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0} \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_1}\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_0}\right)^{1-\lambda} =: F^\lambda(s_1) G^{1-\lambda}(s_0).\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $n = 1$ στις συναρτήσεις F, G και H, παίρνουμε

$$\int h = \int_{\mathbb{R}} H \geq \left(\int_{\mathbb{R}} F\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} G\right)^{1-\lambda} = \left(\int f\right)^\lambda \left(\int g\right)^{1-\lambda}. \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 1: Έστω K, T συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, και $\lambda \in (0,1)$. Ορίζουμε $f = \chi_K$, $g = \chi_T$, και $h = \chi_{\lambda K + (1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2, οπότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| = \int h \geq \left(\int f\right)^\lambda \left(\int g\right)^{1-\lambda} = |K|^\lambda |T|^{1-\lambda}.$$

Αυτό αποδεικνύει την (3) για κάθε τριάδα K, T, λ. Για να πάρουμε την (1) θεωρούμε K και T όπως στο Θεώρημα 1 (με $|K| > 0$, $|T| > 0$), και ορίζουμε

$$K_1 = |K|^{-1/n} K \quad , \quad T_1 = |T|^{-1/n} T \quad , \quad \lambda = \frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}}.$$

Τα K_1 και T_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την (3) παίρνουμε

$$(*) \qquad |\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1| \geq 1.$$

Όμως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1 = \frac{K+T}{|K|^{1/n}+|T|^{1/n}},$$

επομένως η $(*)$ παίρνει την μορφή

$$|K+T| \geq \left(|K|^{1/n}+|T|^{1/n}\right)^n. \quad \square$$

1.2.6. Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε τις νόρμες

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leq p < \infty$$

και

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Θα γράφουμε ℓ_p^n για τον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, και B_p^n για τη μοναδιαία μπάλα του ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$. Στις περιπτώσεις $p=2$ και $p=\infty$ θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $D_n := B_2^n$ και $Q_n := [-1,1]^n = B_\infty^n$ αντίστοιχα.

Για τις αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία των R.J. Gardner [Gar], V.D. Milman και G. Schechtman [MS], και R. Schneider [Sch].

1.3 Το Θεώρημα του John και το Λήμμα των Dvoretzky και Rogers

Θεωρούμε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και την οικογένεια $\mathcal{E}(K)$ όλων των *ελλειψοειδών* που περιέχονται στο K. Ένα ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα της μορφής

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} \leq 1\right\},$$

όπου $\{v_i\}_{i\leq n}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του E αντίστοιχα). Εύκολα ελέγχουμε ότι $E = T(D_n)$, όπου T είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τις $T(v_i) = \alpha_i v_i$, $i=1,\dots,n$. Επομένως, ο όγκος του E ισούται με

$$|E| = |D_n| \prod_{i=1}^n \alpha_i.$$

Ο F. John ([Jo], 1948) έδειξε ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Θα λέμε ότι το E είναι το *ελλειψοειδές μέγιστου όγκου* του K. Για την απόδειξη, βλέπουμε ταυτόχρονα ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχει το K και έχει ελάχιστο όγκο:

Πρόταση 1. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E \supseteq K$ με ελάχιστο όγκο.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τον αριθμό

$$V = \inf\{|E| : E \supseteq K\} > 0.$$

Υπάρχει ακολουθία $T_m \in GL_n$ ώστε $E_m = T_m^{-1}(D_n) \supseteq K$ και

$$|E_m| = \frac{|D_n|}{|\det(T_m)|} \to V.$$

Αφού $\|T_m : X_K \to \ell_2^n\| \leq 1$, $m \in \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{T_{k_m}\}$ και $S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ με $T_{k_m} \to S$. Τότε,

$$|\det(S)| = |D_n|/V > 0,$$

επομένως, $S \in GL_n$. Ορίζουμε $E = S^{-1}(D_n)$. Έχουμε

$$\|S : X_K \to \ell_2^n\| = \lim \|T_{k_m} : X_K \to \ell_2^n\| \leq 1,$$

άρα $E \supseteq K$. Αφού $|E| = V$, το E είναι ένα ελλειψοειδές που περιέχει το K, και έχει τον ελάχιστο δυνατό όγκο.

Δείχνουμε τώρα ότι υπάρχει ένα μόνο ελλειψοειδές με αυτήν την ιδιότητα. Έστω ότι τα E_1 και E_2 περιέχουν το K και έχουν ελάχιστο όγκο. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E_1 = D_n$ είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και

$$E_2 = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle^2/\alpha_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Θεωρούμε ένα τρίτο ελλειψοειδές, τον «μέσο όρο» τους

$$F = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(1+\alpha_i^{-2})\langle x, v_i\rangle^2 \leq 1 \right\}.$$

Είναι φανερό ότι $F \supseteq E_1 \cap E_2 \supseteq K$, επομένως

$$(*) \qquad |F| \geq |E_1| = |E_2|.$$

Αφού $E_1 = D_n$, η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$1 = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \quad \leq \quad \prod_{i=1}^{n} \frac{2}{1+\alpha_i^{-2}}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{2\alpha_i^2}{1+\alpha_i^2}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i^2},$$

οπότε, αφού $2\alpha_i \leq 1+\alpha_i^2$ για κάθε $i=1,\ldots,n$, έπεται ότι $\alpha_i = 1$, $i=1,\ldots,n$. Άρα, $E_1 = E_2$. $\square$

Η Πρόταση 1 μας δίνει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα του ελλειψοειδούς μέγιστου όγκου του K:

Θεώρημα 1. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E \in \mathcal{E}(K)$ με μέγιστο όγκο.*

Απόδειξη: Είδαμε ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές F ελάχιστου όγκου του K°. Θεωρούμε το $E = F^\circ$. Τότε $E \subseteq K$, και αν E_1 είναι ένα άλλο ελλειψοειδές με $E_1 \subseteq K$, τότε $E_1^\circ \supseteq K^\circ$, άρα $|E_1^\circ| \geq |F|$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1(5) της Παραγράφου 2, βλέπουμε ότι

$$|E_1| = \frac{|D_n|^2}{|E_1^\circ|} \leq \frac{|D_n|^2}{|F|} = |E|.$$

Από την Πρόταση 1, ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $E_1^\circ = F$, δηλαδή $E_1 = E$. Άρα, το E είναι το μοναδικό ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. $\square$

Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η D_n. Το $u \in \mathbb{R}^n$ λέγεται *σημείο επαφής* των K και D_n αν $|u| = \|u\|_K = 1$, δηλαδή αν ανήκει στην τομή των συνόρων τους. Το θεώρημα του John περιγράφει την κατανομή των σημείων επαφής πάνω στην μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}:

Θεώρημα 2. *Αν η D_n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε υπάρχουν σημεία επαφής $u_1,\ldots,u_m$ των K και D_n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ τέτοιοι ώστε*

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j\rangle u_j$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις. Το Θεώρημα 2 μας λέει ότι η ταυτοτική απεικόνιση I του $\mathbb{R}^n$ αναπαρίσταται στη μορφή

$$I = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \otimes u_j,$$

όπου $u_j \otimes u_j$ είναι η προβολή στην διεύθυνση του u_j: $(u_j \otimes u_j)(x) = \langle x, u_j\rangle u_j$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j\rangle^2.$$

Επίσης, παίρνοντας $x = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, όπου $\{e_i\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{n} |e_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle e_i, u_j\rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j |u_j|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j. \end{aligned}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2: Από τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν, αν υπάρχει η ζητούμενη αναπαράσταση θα πρέπει να ισχύει $\sum(\lambda_j/n) = 1$. Αυτό λοιπόν που χρειάζεται να δείξουμε είναι ότι η I/n γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός πινάκων της μορφής $u \otimes u$, όπου u σημείο επαφής των K και D_n. Ορίζουμε δηλαδή

$$\mathcal{C} = \{u \otimes u : |u| = \|u\|_K = 1\},$$

και δείχνουμε ότι $I/n \in \mathrm{co}(\mathcal{C})$. Παρατηρούμε ότι το $\mathrm{co}(\mathcal{C})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$, και ότι $\mathcal{C} \neq \emptyset$: αν η D_n δεν ακουμπούσε το σύνορο του K, θα μπορούσαμε να βρούμε $rD_n \subseteq K$ με το r λίγο μεγαλύτερο από 1, οπότε η D_n δεν θα ήταν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

Υποθέτουμε ότι $I/n \notin \mathrm{co}(\mathcal{C})$. Από διαχωριστικό θεώρημα, μπορύμε να βρούμε $\phi \in \mathbb{R}^{n^2}$ και $r \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\langle \phi, I/n\rangle < r \leq \langle \phi, A\rangle$$

για κάθε $A \in \mathrm{co}(\mathcal{C})$. Ειδικότερα, για κάθε σημείο επαφής u των K και D_n έχουμε

$$\langle \phi, I/n\rangle < r \leq \langle \phi, u \otimes u\rangle.$$

Οι πίνακες I/n και $u \otimes u$ είναι συμμετρικοί, οπότε παίρνοντας τον $\psi = (\phi + \phi^*)/2$ αντί του ϕ έχουμε ότι ο ψ είναι συμμετρικός και εξακολουθεί να ικανοποιεί την

$$\langle \psi, I/n\rangle < r \leq \langle \psi, u \otimes u\rangle$$

για κάθε $u \otimes u \in \mathcal{C}$. Έστω $\beta = \mathrm{tr}(\psi)/n$. Αφού $\mathrm{tr}(I/n) = 1$ και $\mathrm{tr}(u \otimes u) = \sum u_i^2 = 1$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle \psi - \beta I, I/n\rangle &= \langle \psi, I/n\rangle - \beta \\ &= 0 < r - \beta \\ &\leq \langle \psi - \beta I, u \otimes u\rangle \end{aligned}$$

για κάθε $u \otimes u \in \mathcal{C}$. Παίρνοντας $B = \psi - \beta I$, έχουμε:

Λήμμα 1. *Αν* $I/n \notin \mathrm{co}(\mathcal{C})$*, τότε υπάρχουν* $s > 0$ *και* B *συμμετρικός με* $\mathrm{tr}(B) = 0$*, έτσι ώστε*

$$\langle B, u \otimes u \rangle \geq s$$

για κάθε $u \otimes u \in \mathcal{C}$*.* □

Για $\delta > 0$ αρκετά μικρό, θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$E_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle (I + \delta B)x, x \rangle \leq 1\}.$$

[Αν $M = \max\{|\langle Bx, y \rangle| : |x| = |y| = 1\}$ και $0 < \delta < 1/M$, τότε ο $I + \delta B$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα έχει συμμετρική θετική τετραγωνική ρίζα S_δ, και $E_\delta = S_\delta^{-1}(D_n)$.]

Θα δείξουμε ότι $E_\delta \subseteq K$ αν το δ είναι μικρό, δείχνοντας ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leq \rho_K(v)$ για κάθε $v \in S^{n-1}$:

1η Περίπτωση: Έστω U το σύνολο των σημείων επαφής των K, D_n. Αν $u \in U$ και $v \in S^{n-1}$ με $|u - v| < s/2M$, τότε από το Λήμμα 1,

$$\langle (I + \delta B)u, u \rangle \geq 1 + \delta s,$$

ενώ

$$\begin{aligned} |\langle v + \delta Bv, v \rangle - \langle u + \delta Bu, u \rangle| &= \delta |\langle Bv, v \rangle - \langle Bu, u \rangle| \\ &\leq \delta |\langle Bv, v - u \rangle| + \delta |\langle Bu, u - v \rangle| \\ &\leq 2M\delta |u - v| < \delta s. \end{aligned}$$

Άρα, αν το $v \in S^{n-1}$ απέχει απόσταση μικρότερη της $s/2M$ από το U, τότε

$$\langle (I + \delta B)v, v \rangle > 1 + \delta s - \delta s = 1,$$

δηλαδή $v \notin E_\delta$. Όμως, $v \in D_n \subseteq K$ για κάθε $v \in S^{n-1}$. Άρα, σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει ότι

$$\rho_{E_\delta}(v) < 1 \leq \rho_K(v).$$

2η Περίπτωση: Έστω V το σύνολο των $v \in S^{n-1}$ που απέχουν τουλάχιστον $s/2M$ από το U. Τότε, το V είναι συμπαγές και $r = \max\{\|v\| : v \in V\} < 1$. Θέτουμε $\lambda = \min\{\langle Bv, v \rangle : v \in V\}$. Παρατηρήστε ότι τα r, λ δεν εξαρτώνται από το δ (εξαρτώνται μόνο από τον B και το U). Αν $0 < \delta < (1 - r^2)/|\lambda|$, τότε

$$\begin{aligned} \langle (I + \delta B)(v/\|v\|), v/\|v\| \rangle &= \frac{1 + \delta \langle Bv, v \rangle}{\|v\|^2} \\ &\geq \frac{1 + \delta \lambda}{r^2} > 1, \end{aligned}$$

δηλαδή $v/\|v\| \notin E_\delta$. Αυτό σημαίνει ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leq \rho_K(v)$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής:

Λήμμα 2. *Υπάρχει* $\delta_0 > 0$ *τέτοιο ώστε* $E_\delta \subseteq K$ *για κάθε* $0 < \delta < \delta_0$. $\square$

Μπορούμε τώρα να καταλήξουμε σε άτοπο: Παίρνουμε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε ο $I+\delta B$ να είναι θετικά ορισμένος και το ελλειψοειδές E_δ να περιέχεται στο K. Αφού η D_n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, έχουμε $|E_\delta| \leq |D_n|$. Όμως,

$$|E_\delta| = |S_\delta^{-1}(D_n)| = |D_n|/\sqrt{\det(I+\delta B)}.$$

Άρα, $\det(I+\delta B) \geq 1$. Από την άλλη πλευρά, η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου μας δίνει

$$[\det(I+\delta B)]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\mathrm{tr}(I+\delta B)}{n} = 1 + \delta\frac{\mathrm{tr}(B)}{n} = 1,$$

γιατί $\mathrm{tr}(B) = 0$. Για να ισχύουν τα παραπάνω, πρέπει να έχουμε ισότητα στην ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Τότε όμως, όλες οι ιδιοτιμές του $I+\delta B$ είναι ίσες, δηλαδή $I+\delta B = \mu I$. Έπεται ότι ο B είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, και αφού $\mathrm{tr}(B) = 0$ παίρνουμε $B = 0$.

Αυτό είναι άτοπο, γιατί από το Λήμμα 1 έχουμε $\langle Bu, u\rangle \geq s > 0$, $u \in U$. Επομένως $I/n \in \mathrm{co}(\mathcal{C})$, και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης που μας δίνει το Θεώρημα 2, χαρακτηρίζει το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου με την εξής έννοια [Ba]:

Θεώρημα 3. *Έστω* K *συμμετρικό κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$ *που περιέχει την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα* D_n. *Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σημεία επαφής* $u_1, \ldots, u_m$ *των* K *και* D_n *και θετικοί πραγματικοί αριθμοί* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *τέτοιοι ώστε*

$$I = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \otimes u_j.$$

Τότε, η D_n *είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του* K.

Απόδειξη: Ορίζουμε

$$L = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle u_j, y\rangle| \leq 1, j = 1, \ldots, m\}.$$

Τότε $K \subseteq L$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι η D_n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του L. Έστω

$$E = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{-2}\langle y, v_i\rangle^2 \leq 1\},$$

όπου $\{v_i\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $\alpha_i > 0$. Υποθέτουμε ότι $E \subseteq L$. Για κάθε $j = 1, \ldots, m$ έχουμε

$$y(u_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle u_j, v_i\rangle^2\right)^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle u_j, v_i\rangle v_i \in E \subseteq L,$$

οπότε η $|\langle u_j, y(u_j)\rangle| \leq 1$ δίνει

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle u_j, v_i\rangle^2 \leq 1 \quad , \quad j = 1, \ldots, m.$$

Πολλαπλασιάζοντας με λ_j και προσθέτοντας, βλέπουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle u_j, v_i\rangle^2\right)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n.$$

Αφού $|x|^2 = \sum \lambda_j \langle x, u_j\rangle^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και τα v_i σχηματίζουν ορθοκανονική βάση, χρησιμοποιώντας την $(*)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \lambda_j \langle v_i, u_j\rangle^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, u_j\rangle^2\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle v_i, u_j\rangle^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle v_i, u_j\rangle^2\right)^{1/2} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle v_i, u_j\rangle^2\right)^{1/2} \leq n.
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου $(\prod \alpha_i)^{1/n} \leq \sum \alpha_i / n \leq 1$, επομένως $|E| \leq |D_n|$. Δηλαδή, η D_n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του L. $\square$

Η πιό γνωστή συνέπεια του Θεωρήματος 2 (η οποία αναφέρεται συχνά σαν *το θεώρημα του John*) είναι ότι, αν K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και E είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subseteq \sqrt{n}E$. Αυτό προκύπτει άμεσα από το εξής:

Πρόταση 2. *Αν D_n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subset \sqrt{n}D_n$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j\rangle u_j$$

του Θεωρήματος 2. Αφού $u_j \in S^{n-1}$, έχουμε

$$1 = \langle u_j, u_j\rangle \leq \|u_j\|_K \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_{K^\circ} \quad , \quad j = 1, \ldots, m.$$

Από την άλλη πλευρά, σε κάθε u_j τα K και D_n έχουν το ίδιο εφαπτόμενο υπερεπίπεδο με κάθετο διάνυσμα το u_j (για την μπάλα, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο σε κάθε σημείο

$u \in S^{n-1}$ έχει κάθετο διάνυσμα το u). Επομένως, για κάθε $x \in K$ έχουμε $\langle x, u_j \rangle \leq 1$, και λόγω συμμετρίας του K, $|\langle x, u_j \rangle| \leq 1$. Δηλαδή, $\|u_j\|_K = \|u_j\|_{K^\circ} = |u_j| = 1$, $j = 1, \ldots, m$.

Έστω τώρα $x \in K$. Τότε,

$$\begin{aligned} |x|^2 &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $|x| \leq \sqrt{n}$. Άρα, $D_n \subseteq K \subseteq \sqrt{n} D_n$. $\square$

Το Θεώρημα 2 μας λέει με μία έννοια ότι υπάρχουν πολλά σημεία επαφής ανάμεσα σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα και το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του. Ένας τρόπος ποσοτικής περιγραφής αυτού του ισχυρισμού είναι ο εξής:

Πρόταση 3. *Αν η D_n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ υπάρχει σημείο επαφής u των K και D_n με την ιδιότητα:*

$$\langle u, Tu \rangle \geq \frac{\mathrm{tr} T}{n}.$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 2, αν $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ τότε

$$\mathrm{tr} T = \langle T, I \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle T, u_j \otimes u_j \rangle.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν και την $\sum \lambda_j = n$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει u ανάμεσα στα u_j με την ιδιότητα

$$\langle u, Tu \rangle = \langle T, u \otimes u \rangle \geq \frac{\mathrm{tr} T}{n}. \quad \square$$

Οι Dvoretzky και Rogers [DR] έδειξαν ακριβή αποτελέσματα γιά την κατανομή των σημείων επαφής στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς μέγιστου όγκου. Όλα τους εκφράζουν με τον έναν ή τον άλλο τρόπο την αρχή ότι παρόλο που οι νόρμες $|\cdot|$ και $\|\cdot\|$ μπορεί να διαφέρουν ως και $\sqrt{n}$ γιά κάποια x, υπάρχουν πολλές και «αρκετά ορθογώνιες» διευθύνσεις στις οποίες οι δύο νόρμες συγκρίνονται καλά. Θα δείξουμε ένα τέτοιο αποτέλεσμα, που θα παίξει ουσιαστικό ρόλο και στην απόδειξη του Θεωρήματος του Dvoretzky:

Πρόταση 4. *Αν D_n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $y_1, \ldots, y_n$ στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\left(\frac{n-i+1}{n} \right)^{1/2} \leq \|y_i\|_K \leq |y_i| = 1 \quad , \quad i = 1, \ldots, n.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε τα y_i επαγωγικά. Σαν y_1 μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε σημείο επαφής των K και D_n. Ας υποθέσουμε ότι έχουν επιλεγεί τα $y_1, \ldots, y_{i-1}$. Θέτουμε $F_i = \mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_{i-1}\}$. Τότε, $\mathrm{tr}(P_{F_i^\perp}) = n - i + 1$, και από την Πρόταση 3 υπάρχει σημείο επαφής u_i τέτοιο ώστε

$$|P_{F_i^\perp} u_i|^2 = \langle u_i, P_{F_i^\perp} u_i \rangle \geq \frac{n-i+1}{n}.$$

Έπεται ότι $\|P_{F_i} u_i\|_K \leq |P_{F_i} u_i| \leq \sqrt{(i-1)/n}$. Ορίζουμε $y_i = P_{F_i^\perp} u_i / |P_{F_i^\perp} u_i|$. Τότε,

$$1 = |y_i| \geq \|y_i\|_K \geq |\langle u_i, y_i \rangle| = |P_{F_i^\perp} u_i| \geq \left(\frac{n-i+1}{n} \right)^{1/2}. \quad \square$$

Πόρισμα. *Υποθέτουμε ότι η D_n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Αν $k = [n/2] + 1$, μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά διανύσματα $y_1, \ldots, y_k$ τέτοια ώστε*

$$\frac{1}{2} \leq \|y_j\| \leq 1 \quad , \quad j = 1, \ldots, k. \quad \square$$

1.4 Αναλλοίωτα μέτρα σε ομογενείς χώρους

Έστω (M, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος, και G μία συμπαγής τοπολογική ομάδα της οποίας τα στοιχεία δρούν σαν ισομετρίες στον M: υπάρχει συνεχής απεικόνιση $\pi : G \times M \to M$ με $(g, t) \mapsto \pi(g, t) =: gt$, που ικανοποιεί την

$$d(gt, gs) = d(t, s)$$

για κάθε $g \in G$ και $t, s \in M$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\pi(e, t) = t$ για κάθε $t \in M$ όπου e το ουδέτερο στοιχείο της G, και $\pi(gh, t) = \pi(g, \pi(h, t))$ για κάθε $g, h \in G$ και $t \in M$. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε $\pi_g : M \to M$ με $\pi_g(t) = gt$ είναι ομοιομορφισμός του M, και ότι $\pi_g \circ \pi_h = \pi_{gh}$, $\pi_g \circ \pi_{g^{-1}} = I_M$.

Θεώρημα 1. *Υπάρχει κανονικό μέτρο μ στα Borel υποσύνολα του M, το οποίο είναι αναλλοίωτο ως προς την δράση της ομάδας G. Δηλαδή, $\mu(A) = \mu(gA)$ για κάθε $g \in G$ και κάθε Borel $A \subseteq M$. Ισοδύναμα,*

$$\int_M f(t) d\mu(t) = \int_M f(gt) d\mu(t)$$

για κάθε $g \in G$ και κάθε $f \in C(M)$.

Η απόδειξη που θα δώσουμε οφείλεται στον Maak (βλέπε [Do], [MS]), και χρησιμοποιεί το *θεώρημα του γάμου*:

Λήμμα. *Έστω B και Γ δύο πεπερασμένα σύνολα, και $R \subset B \times \Gamma$ μία σχέση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $B_1 \subset B$ με $|B_1| = k$, το σύνολο*

$$R(B_1) = \{\gamma \in \Gamma \mid \exists \beta \in B_1 : (\beta, \gamma) \in R\}$$

έχει τουλάχιστον k στοιχεία. Τότε, υπάρχει $1-1$ συνάρτηση $\phi : B \to \Gamma$ με την ιδιότητα $(\beta, \phi(\beta)) \in R$ για κάθε $\beta \in B$. $\Box$

Απόδειξη του Θεωρήματος: Για κάθε $t \in M$ και $\varepsilon > 0$, η μπάλα με κέντρο t και ακτίνα ε είναι το $B(t,\varepsilon) = \{s \in M : d(s,t) \leq \varepsilon\}$. Λόγω συμπάγειας του M, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο $N \subseteq M$ τέτοιο ώστε

$$M = \bigcup_{t \in N} B(t,\varepsilon).$$

Ορίζουμε n_ε τον ελάχιστο πληθάριθμο ενός τέτοιου ε-*δικτύου* για τον M, και επιλέγουμε ένα ε-δίκτυο N_ε με $|N_\varepsilon| = n_\varepsilon$.

Χρησιμοποιώντας το N_ε ορίζουμε $\mu_\varepsilon \in [C(M)]^*$ με

$$\mu_\varepsilon(f) = \frac{1}{n_\varepsilon} \sum_{t \in N_\varepsilon} f(t).$$

Είναι φανερό ότι κάθε μ_ε ανήκει στην μοναδιαία μπάλα του $[C(M)]^*$, η οποία είναι w^*-συμπαγής και μετρικοποιήσιμη. Επομένως, υπάρχουν $\mu \in [C(M)]^*$ καί $\varepsilon_i \to 0$ τέτοια ώστε $\mu_{\varepsilon_i} \to \mu$ με την w^*-τοπολογία. Δηλαδή, για κάθε $f \in C(M)$,

$$\mu_{\varepsilon_i}(f) \to \mu(f) \quad , \quad i \to \infty.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $\mu(1) = 1$ και ότι το μ είναι θετικό συναρτησοειδές στον $C(M)$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, το μ είναι κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας στον M.

Σταθεροποιούμε την ακολουθία ε_i, και δείχνουμε ότι το μ προσδιορίζεται μονοσήμαντα με την εξής έννοια: αν για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίσουμε μ'_{ε_i} χρησιμοποιώντας ένα άλλο ελάχιστο ε_i-δίκτυο N'_{ε_i}, τότε

$$\mu'_{\varepsilon_i}(f) \to \mu(f)$$

για κάθε $f \in C(M)$. Για τον σκοπό αυτό αποδεικνύουμε το εξής:

Ισχυρισμός. Υπάρχει $1-1$ και επί $\phi_i : N_{\varepsilon_i} \to N'_{\varepsilon_i}$ τέτοια ώστε $d(t, \phi_i(t)) \leq 2\varepsilon_i$ για κάθε $t \in N_{\varepsilon_i}$.

[Ορίζουμε σχέση $R \subset N_{\varepsilon_i} \times N'_{\varepsilon_i}$ θέτοντας $(t,s) \in R$ αν $B(t,\varepsilon_i) \cap B(s,\varepsilon_i) \neq \emptyset$. Η R ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος: Έστω $K \subset N_{\varepsilon_i}$ και $L = R(K)$. Το σύνολο $L \cup (N_{\varepsilon_i} \setminus K)$ είναι ε_i-δίκτυο στον M:

Πράγματι, αν $x \in M$, υπάρχουν $t \in N_{\varepsilon_i}$ και $s \in N'_{\varepsilon_i}$ τέτοια ώστε $d(x,t) \leq \varepsilon_i$ και $d(x,s) \leq \varepsilon_i$. Αν $t \in K$, τότε αφού $B(t,\varepsilon_i) \cap B(s,\varepsilon_i) \neq \emptyset$ πρέπει να έχουμε $s \in R(K) = L$. Άρα, σε κάθε περίπτωση υπάρχει $z \in L \cup (N_{\varepsilon_i} \setminus K)$ τέτοιο ώστε $d(z,x) \leq \varepsilon_i$.

Έπεται ότι $|L \cup (N_{\varepsilon_i} \setminus K)| \geq |N_{\varepsilon_i}|$, οπότε $|R(K)| = |L| \geq |K|$. Από το Λήμμα, υπάρχει $\phi_i : N_{\varepsilon_i} \to N'_{\varepsilon_i}$ συνάρτηση 1-1 (άρα και επί) με την ιδιότητα $(t, \phi_i(t)) \in R$ για κάθε $t \in N_{\varepsilon_i}$. Δηλαδή,

$$d(t, \phi_i(t)) \leq 2\varepsilon_i \quad , \quad t \in N_{\varepsilon_i}.]$$

Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό βλέπουμε ότι, αν $f \in C(M)$ και $i \in \mathbb{N}$ τότε

$$|\mu_{\varepsilon_i}(f) - \mu'_{\varepsilon_i}(f)| \leq \frac{1}{n_{\varepsilon_i}} \sum_{t \in N_{\varepsilon_i}} |f(t) - f(\phi_i(t))| \leq \omega(2\varepsilon_i),$$

όπου $\omega(\varepsilon) = \max\{|f(t) - f(s)| : d(t,s) \leq \varepsilon\}$ είναι το μέτρο συνέχειας της f. Αφού $\omega(2\varepsilon_i) \to 0$ καθώς $i \to \infty$, έπεται ότι το $\lim \mu'_{\varepsilon_i}(f)$ υπάρχει και είναι ίσο με $\mu(f)$.

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι το μέτρο μ είναι αναλλοίωτο ως προς τη δράση της G: Αν $g \in G$, τότε το $N'_{\varepsilon_i} = \{gt\}_{t \in N_{\varepsilon_i}}$ είναι ελάχιστο ε_i-δίκτυο στον M, και

$$\begin{aligned} \int_M f(gt)\mu(dt) &= \lim_{i \to \infty} \frac{1}{n_{\varepsilon_i}} \sum_{t \in N_{\varepsilon_i}} f(gt) \\ &= \lim_{i \to \infty} \frac{1}{n_{\varepsilon_i}} \sum_{s \in N'_{\varepsilon_i}} f(s) \\ &= \lim_{i \to \infty} \mu'_{\varepsilon_i}(f) \\ &= \mu(f) = \int_M f(t)\mu(dt). \quad \square \end{aligned}$$

Ορισμοί. Έστω M και G όπως παραπάνω. Η δράση της G πάνω στον M λέγεται *μεταβατική* αν για κάθε $t, s \in M$ υπάρχει $g \in G$ με $gt = s$. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο, λέμε ότι ο M είναι *ομογενής χώρος της* G.

Θεώρημα 2. *Έστω (M,d) ομογενής χώρος της συμπαγούς ομάδας G. Τότε, υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ στον M το οποίο είναι αναλλοίωτο ως προς τη δράση της G.*

Απόδειξη: Ορίζουμε μία ψευδομετρική ρ στην G, θέτοντας

$$\rho(g_1, g_2) = \max_{t \in M} d(g_1 t, g_2 t).$$

Η $G_0 = \{g \in G : \rho(g,e) = 0\}$ είναι κανονική υποομάδα της G, η $H = G/G_0$ είναι συμπαγής με την επαγόμενη μετρική ρ', και τα στοιχεία της δρούν μεταβατικά σαν ισομετρίες στον M.

Η H δρά στον εαυτό της με την $(h,g) \mapsto g \circ h$. Επομένως, το Θεώρημα 1 εφαρμόζεται για την H: υπάρχει μέτρο πιθανότητας ν στα Borel υποσύνολα της H τέτοιο ώστε:

$$\int_H F(g \circ h)\nu(dg) = \int_H F(g)\nu(dg)$$

για κάθε $h \in H$ και κάθε $F \in C(H)$. Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον M, αναλλοίωτο ως προς τη δράση της H. Σταθεροποιούμε $t_0 \in M$. Για κάθε $t \in M$ από την μεταβατικότητα της δράσης της H υπάρχει $h_t \in H$ τέτοιο ώστε $t = h_t t_0$. Αν

$f \in C(M)$, τότε για κάθε $t \in M$ η απεικόνιση $F_t(g) = f(gt)$ είναι συνεχής στην H. Χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο των μ και ν, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_M f(t)\mu(dt) &= \int_H 1\nu(dg)\int_M f(t)\mu(dt) \ = \int_H\int_M f(gt)\mu(dt)\nu(dg) \\
&= \int_M\int_H f(gt)\nu(dg)\mu(dt) \\
&= \int_M\int_H f((g\circ h_t)t_0)\nu(dg)\mu(dt) \\
&= \int_M\int_H F_{t_0}(g\circ h_t)\nu(dg)\mu(dt) \\
&= \int_M\int_H F_{t_0}(g)\nu(dg)\mu(dt) \\
&= \int_M\int_H f(gt_0)\nu(dg)\mu(dt) \\
&= \int_H f(gt_0)\nu(dg).
\end{aligned}$$

Έπεται ότι, αν μ_1 είναι ένα άλλο μέτρο πιθανότητας στα Borel υποσύνολα του M, αναλλοίωτο ως προς την δράση της G, τότε για κάθε $f \in C(M)$ ισχύει

$$\int_M f(t)\mu(dt) = \int_H f(gt_0)\nu(dg) = \int_M f(t)\mu_1(dt).$$

Δηλαδή, $\mu = \mu_1$. $\square$

Παίρνουμε σαν G την ορθογώνια ομάδα $O(n)$. Σταθεροποιούμε ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, και ταυτίζουμε τον $U \in O(n)$ με την ορθοκανονική βάση $\{Ue_1, \ldots, Ue_n\}$. Η $O(n)$ είναι συμπαγής ομάδα με μετρική την

$$\rho(U,V) = \left(\sum_{i=1}^n |Ue_i - Ve_i|^2\right)^{1/2}.$$

Η $O(n)$ δρά μεταβατικά στον εαυτό της, υπάρχει λοιπόν μοναδικό αναλλοίωτο ως προς $O(n)$ Borel μέτρο πιθανότητας ν στην $O(n)$. Η $O(n)$ δρά μεταβατικά στην S^{n-1}, δηλαδή, η S^{n-1} είναι ομογενής χώρος της $O(n)$. Έστω σ το μοναδικό μέτρο πιθανότητας στα Borel υποσύνολα της S^{n-1} που είναι αναλλοίωτο ως πρός την δράση της $O(n)$. Δηλαδή, για κάθε συνεχή $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ και κάθε $U \in O(n)$,

$$\int_{S^{n-1}} f(Ux)\sigma(dx) = \int_{S^{n-1}} f(x)\sigma(dx).$$

Θα χρειαστούμε την εξής ταυτότητα:

Πρόταση 1. *Αν A Borel υποσύνολο της S^{n-1}, τότε για δοσμένο $x_0 \in S^{n-1}$,*

$$\nu\left(U \in O(n) : Ux_0 \in A\right) = \sigma(A).$$

Απόδειξη: Για κάθε $x \in S^{n-1}$ υπάρχει $V_x \in O(n)$ τέτοιος ώστε $V_x x_0 = x$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= \int_{S^{n-1}} \chi_A(x)\sigma(dx) \\
&= \int_{O(n)} \int_{S^{n-1}} \chi_A(Ux)\sigma(dx)\nu(dU) \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{O(n)} \chi_A(UV_x x_0)\nu(dU)\sigma(dx) \\
&= \int_{S^{n-1}} \nu\left(U \in O(n) : UV_x x_0 \in A\right)\sigma(dx) \\
&= \int_{S^{n-1}} \nu\left(U \in O(n) : Ux_0 \in A\right)\sigma(dx) \\
&= \nu\left(U \in O(n) : Ux_0 \in A\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Αμεση συνέπεια της Πρότασης 1 είναι η εξής:

Πρόταση 2. *Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ συνεχής, και $x_0 \in S^{n-1}$. Τότε,*

$$\int_{O(n)} f(Ux_0)\nu(dU) = \int_{S^{n-1}} f(x)\sigma(dx).$$

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f \geq 0$. Τότε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{O(n)} f(Ux_0)\nu(dU) &= \int_0^\infty \nu\left(U \in O(n) : f(Ux_0) \geq t\right) dt \\
&= \int_0^\infty \nu\left(U \in O(n) : Ux_0 \in f^{-1}([t,\infty))\right) dt \\
&= \int_0^\infty \sigma\left(f^{-1}([t,\infty))\right) dt \\
&= \int_0^\infty \sigma(x : f(x) \geq t) dt \\
&= \int_{S^{n-1}} f(x)\sigma(dx). \quad \square
\end{aligned}$$

Η *πολλαπλότητα Grassman* $G_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, αποτελείται από όλους τους k-διάστατους υποχώρους του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε μετρική στην $G_{n,k}$ θέτοντας

$$\tilde{\rho}(F_1, F_2) = \inf \left(\sum_{i=1}^{k} |f_i - f_i'|^2 \right)^{1/2},$$

όπου το inf παίρνεται πάνω από όλες τις ορθοκανονικές βάσεις $\{f_i\}$, $\{f_i'\}$ των F_1, F_2 αντίστοιχα.

Η $O(n)$ δρά μεταβατικά πάνω στην $G_{n,k}$, οπότε η $G_{n,k}$ γίνεται ομογενής χώρος της $O(n)$. Άρα, υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\nu_{n,k}$ στα Borel υποσύνολα της $G_{n,k}$, το οποίο είναι αναλλοίωτο ως προς την δράση της $O(n)$.

Πρόταση 3. *Αν* $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ *συνεχής, τότε*

$$\int_{S^{n-1}} f(x)\sigma(dx) = \int_{G_{n,k}} \int_{S_F} f(x)\sigma_F(dx)\nu_{n,k}(dF).$$

[Το μέτρο σ_F ορίζεται από την

$$\int_{S_F} f(x)\sigma_F(dx) = \int_{S^{k-1}} f(U_F x)\sigma(dx),$$

όπου $U_F \in O(n)$ τέτοιος ώστε $U_F(\mathbb{R}^k) = F$. Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του U_F.]

Απόδειξη: Θεωρούμε το μέτρο σ_1 στην S^{n-1} που ορίζεται από την

$$\int_{S^{n-1}} f(x)\sigma_1(dx) = \int_{G_{n,k}} \int_{S_F} f(x)\sigma_F(dx)\nu_{n,k}(dF) \quad , \quad f \in C(S^{n-1}).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $f \in C(S^{n-1})$ και κάθε $U \in O(n)$,

$$\int_{G_{n,k}} \int_{S_F} f(Ux)\sigma_F(dx)\nu_{n,k}(dF) = \int_{G_{n,k}} \int_{S_F} f(x)\sigma_F(dx)\nu_{n,k}(dF),$$

δηλαδή ότι το σ_1 είναι αναλλοίωτο ως προς την $O(n)$. Τότε, $\sigma_1 = \sigma$.

Ορίζουμε

$$A_f(F) = \int_{S_F} f(x)\sigma_F(dx).$$

Από την συνέχεια της f στην S^{n-1} και τον ορισμό των σ_F και $\tilde{\rho}$ έπεται ότι η A_f είναι συνεχής στην $G_{n,k}$. Επίσης,

$$A_f(UF) = \int_{S_{UF}} f(x)\sigma_{UF}(dx) = \int_{S_F} f(Ux)\sigma_F(dx).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{G_{n,k}} \int_{S_F} f(Ux)\sigma_F(dx)\nu_{n,k}(dF) &= \int_{G_{n,k}} A_f(UF)\nu_{n,k}(dF) \\
&= \int_{G_{n,k}} A_f(F)\nu_{n,k}(dF) \\
&= \int_{G_{n,k}} \int_{S_F} f(x)\sigma_F(dx)\nu_{n,k}(dF). \quad \square
\end{aligned}$$

Ανάλογη απόδειξη έχει και η ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 4. *Αν* $B \subset O(n)$ *και* $F_0 \in G_{n,k}$, *τότε*

$$\nu(B) = \nu_{n,k}\left(U(F_0) : U \in B\right). \quad \square$$

1.5 Το θεώρημα του Dvoretzky

Η αφετηρία για το θεώρημα του Dvoretzky βρίσκεται στην εργασία [DR]. Οι Dvoretzky και Rogers έδειξαν την εξής:

Πρόταση 1. *Υποθέτουμε ότι η D_n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του συμμετρικού κυρτού σώματος K. Υπάρχουν $k \simeq \sqrt{n}$ και $y_1, \ldots, y_k$ ορθοκανονικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε, για κάθε $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \max_{i \leq k} |a_i| \leq \Big\| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \Big\| \leq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \right)^{1/2} .$$

Απόδειξη: Επιστρέφουμε στην απόδειξη της Πρότασης 3.4, και ορίζουμε $w_i = P_{F_i^\perp} u_i$. Τότε, $u_i - w_i \in F_i$, και

$$\begin{aligned} |u_i - w_i|^2 &= 1 - |w_i|^2 = 1 - |P_{F_i^\perp} u_i|^2 \\ &\leq \frac{i-1}{n}. \end{aligned}$$

Θέτουμε $k = [\sqrt{n}/4]$, και δείχνουμε με επαγωγή ότι

$$\|y_i\|_{K^\circ} \leq \sqrt{3} \quad , \quad i = 1, \ldots, k.$$

Αν $i = 1$, έχουμε $y_1 = u_1$ σημείο επαφής που εμφανίζεται στην αναπαράσταση της ταυτοτικής, οπότε (βλέπε Πρόταση 3.2) $\|y_1\|_{K^\circ} = 1$.

Υποθέτουμε ότι $\|y_j\|_{K^\circ} \leq \sqrt{3}$, για κάθε $j \leq i-1 < k$. Τότε, αν $z = \sum_{j=1}^{i-1} t_j y_j$,

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{j=1}^{i-1} t_j y_j \Big\|_{K^\circ} &\leq \sum_{j=1}^{i-1} |t_j| \|y_j\|_{K^\circ} \leq \sqrt{3k} \left(\sum_{j=1}^{i-1} t_j^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{3k} \Big| \sum_{j=1}^{i-1} t_j y_j \Big|. \end{aligned}$$

Επομένως, $\|I : (F_i, |\cdot|) \to X_K^*\| \leq \sqrt{3k}$. Όμως $u_i - w_i \in F_i$, άρα

$$\begin{aligned} \|u_i - w_i\|_{K^\circ} &\leq \sqrt{3k} |u_i - w_i| \leq \sqrt{3k} \left(\frac{i-1}{n} \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Η τριγωνική ανισότητα δίνει

$$\|w_i\|_{K^\circ} \leq \|u_i\|_{K^\circ} + \|u_i - w_i\|_{K^\circ} \leq 1 + \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{n}},$$

οπότε,

$$\|y_i\|_{K^\circ} = \frac{\|w_i\|_{K^\circ}}{|w_i|} \leq \frac{1+\frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n-k+1}{n}}}$$
$$= \frac{\sqrt{n}+\sqrt{3}k}{\sqrt{n-k+1}} \leq \frac{\sqrt{n}+\sqrt{3n}/4}{\sqrt{n-\sqrt{n}/4+1}} \leq \sqrt{3}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, για κάθε $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{R}$,

$$\|\sum_{i=1}^k a_iy_i\| \leq |\sum_{i=1}^k a_iy_i| = \left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right)^{1/2},$$

και, για κάθε $i=1,\dots,k$,

$$|a_i| = |\langle \sum_{i=1}^k a_iy_i, y_i\rangle| \leq \|\sum_{i=1}^k a_iy_i\|_K \|y_i\|_{K^\circ}$$
$$\leq \sqrt{3}\|\sum_{i=1}^k a_iy_i\|_K. \quad \square$$

Με αφορμή αυτό το αποτέλεσμα, ο Grothendieck [Gr] έθεσε το ερώτημα αν είναι δυνατό να αντικαταστήσουμε το $\max_{i\leq k}|a_i|$ από το $\left(\sum_{i\leq k} a_i^2\right)^{1/2}$ στην παραπάνω πρόταση, και ταυτόχρονα να έχουμε $k=k(n)\to\infty$ καθώς $n\to\infty$. [Ισοδύναμα, αν υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $D_n\cap F \subseteq K\cap F \subseteq cD_n\cap F$, όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά, και το k να «μεγαλώνει» με το n.] Ο Dvoretzky [Dv1,2] έδωσε καταφατική απάντηση στο ερώτημα:

Θεώρημα 1. *Έστω $\varepsilon>0$ και k φυσικός αριθμός. Υπάρχει $N=N(k,\varepsilon)$ με την εξής ιδιότητα: Αν X είναι χώρος με νόρμα διάστασης $n\geq N$, μπορούμε να βρούμε k-διάστατο υπόχωρο F του X με $d(F,\ell_2^k)\leq 1+\varepsilon$.*

Σε γεωμετρική γλώσσα, το Θεώρημα 1 μάς λέει ότι κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα αρκετά μεγάλης διάστασης έχει κεντρικές τομές που είναι σχεδόν ελλειψοειδή. Η ακριβής εξάρτηση του $N(k,\varepsilon)$ από τα k και ε μελετήθηκε συστηματικά, και το θεώρημα του Dvoretzky πήρε πολύ πιό συγκεκριμένη ποσοτική μορφή:

Θεώρημα 2. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα, και $\varepsilon>0$. Υπάρχουν ακέραιος $k\geq c\varepsilon^2\log n$ και k-διάστατος υπόχωρος F του X ο οποίος ικανοποιεί την $d(F,\ell_2^k)\leq 1+\varepsilon$.*

Δηλαδή, το Θεώρημα 1 ισχύει με $N(k,\varepsilon)=\exp(c\varepsilon^{-2}k)$. Η αρχική απόδειξη του Dvoretzky έδινε την εκτίμηση $N(k,\varepsilon)=\exp(c\varepsilon^{-2}k^2\log k)$. Αργότερα, ο Milman [Mi] έδειξε ότι αρκεί να πάρουμε $N(k,\varepsilon)=\exp(c\varepsilon^{-2}|\log\varepsilon|k)$, χρησιμοποιώντας διαφορετική μέθοδο. Τον λογαριθμικό ως προς ε παράγοντα αφαίρεσε ο Gordon [Go], και αργότερα ο Schechtman [Sc].

Ένα από τα βασικότερα στοιχεία στην απόδειξη του Θεωρήματος 2 είναι το λεγόμενο *φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου* στην S^{n-1}, το οποίο με τη σειρά του είναι συνέπεια της σφαιρικής ισοπεριμετρικής ανισότητας: Θεωρούμε την S^{n-1} σαν μετρικό χώρο πιθανότητας, με τη γεωδαισιακή απόσταση ρ και το αναλλοίωτο ως προς τις στροφές μέτρο πιθανότητας σ. Για κάθε Borel υποσύνολο A της S^{n-1} και κάθε $\varepsilon > 0$, ορίζουμε την *ε-επέκταση* του A:

$$A_\varepsilon = \left\{x \in S^{n-1} : \rho(x, A) \leq \varepsilon\right\}.$$

Η ισοπεριμετρική ανισότητα για τη σφαίρα είναι η ακόλουθη πρόταση:

Ανάμεσα σε όλα τα Borel υποσύνολα A της S^{n-1} που έχουν δοσμένο μέτρο $\alpha \in (0,1)$, η μπάλα $B(x,r)$ γωνιακής ακτίνας $r > 0$ για την οποία $\sigma(B(x,r)) = \alpha$, έχει ελάχιστη ε-επέκταση για κάθε $\varepsilon > 0$.

Αυτό σημαίνει ότι αν $A \subseteq S^{n-1}$ και $\sigma(A) = \sigma(B(x_0, r))$ για κάποιο $x_0 \in S^{n-1}$ και κάποιο $r > 0$, τότε

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq \sigma(B(x_0, r + \varepsilon))$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Δεδομένου ότι το σ-μέτρο μιάς μπάλας υπολογίζεται εύκολα, μπορούμε να δώσουμε κάτω φράγμα για το μέτρο της ε-επέκτασης τυχόντος υποσυνόλου της σφαίρας, αρκεί να γνωρίζουμε το μέτρο του. Ενδιαφερόμαστε κυρίως για την περίπτωση $\sigma(A) = \frac{1}{2}$, και τότε απευθείας υπολογισμός δείχνει το εξής:

Πρόταση 2. *Αν A είναι Borel υποσύνολο της S^{n+1} και $\sigma(A) = 1/2$, τότε*

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\pi/8}\exp(-\varepsilon^2 n/2)$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

[Η σταθερά $\sqrt{\pi/8}$ μπορεί να αντικατασταθεί από μία ακολουθία σταθερών a_n που τείνουν στο $\frac{1}{2}$ καθώς $n \to \infty$.]

Απόδειξη: Σύμφωνα με τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα, αρκεί να δώσουμε κάτω φράγμα για το $\sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + \varepsilon))$. Όμως,

$$\sigma(B(x, \pi/2 + \varepsilon)) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \sin^n \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin^n \theta d\theta}.$$

Θέτουμε λοιπόν $h(\varepsilon, n) = 1 - \sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + \varepsilon))$, και ζητάμε άνω φράγμα για την

$$h(\varepsilon, n) = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} \sin^n \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin^n \theta d\theta} = \frac{\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \phi d\phi}{2I_n},$$

όπου $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \phi d\phi$. Μετά την αλλαγή μεταβλητής $t = \phi\sqrt{n}$, βλέπουμε ότι

$$h(\varepsilon, n) = \frac{1}{2\sqrt{n} I_n} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \cos^n(t/\sqrt{n}) dt.$$

Συγκρίνοντας τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $\cos s$ και $\exp(-s^2/2)$ έχουμε

$$\cos s \leq \exp(-s^2/2)$$

στο $[0,\pi/2]$, επομένως

$$\begin{aligned} h(\varepsilon,n) &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}I_n}\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}I_n}\int_0^{(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\sqrt{n}} \exp(-(s+\varepsilon\sqrt{n})^2/2)ds \\ &\leq \frac{\exp(-\varepsilon^2 n/2)}{2\sqrt{n}I_n}\int_0^{\infty}\exp(-s^2/2)ds \\ &= \frac{\sqrt{\pi/8}}{\sqrt{n}I_n}\exp(-\varepsilon^2 n/2). \end{aligned}$$

Μένει να δούμε ότι $\sqrt{n}I_n \geq 1$ γιά κάθε $n \geq 1$. Γιά το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι, από την αναδρομική σχέση $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$,

$$\sqrt{n+2}I_{n+2} = \sqrt{n+2}\frac{n+1}{n+2}I_n = \frac{n+1}{\sqrt{n+2}}I_n \geq \sqrt{n}I_n,$$

επομένως αρκεί να ελέγξουμε τις

$$I_1 = \int_0^{\pi/2}\cos\phi d\phi = 1 \geq 1$$

και

$$\sqrt{2}I_2 = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\phi d\phi = \sqrt{2}\frac{\pi}{4} \geq 1.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα αποδεικνύεται με τεχνικές σφαιρικής συμμετρικοποίησης. Πρόσφατα παρατηρήθηκε [ABV]ότι μπορεί κανείς πολύ απλά να δώσει εκτίμηση ανάλογη μ' αυτήν της Πρότασης 2, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski. Η βασική ιδέα βρίσκεται στο παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 1. *Έστω K και L μη κενά, κλειστά υποσύνολα της D_n, με απόσταση $d(K,L) = \rho > 0$. Τότε,*

$$\min\{|K|,|L|\} \leq \exp(-\rho^2 n/8)|D_n|.$$

Απόδειξη: Έστω $x \in K$ και $y \in L$. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2 \leq 4.$$

Όμως $\rho^2 \leq |x-y|^2$, επομένως

$$\left|\frac{x+y}{2}\right| \leq \sqrt{1-\rho^2/4}.$$

Άρα,
$$\frac{K+L}{2} \subseteq \left(1-\rho^2/4\right)^{1/2} D_n.$$
Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski για τα συμπαγή K, L παίρνουμε
$$\min\{|K|,|L|\}^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2}|K|^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}|L|^{\frac{1}{n}} \leq \left|\frac{K+L}{2}\right|^{\frac{1}{n}} \leq \left(1-\rho^2/4\right)^{1/2}|D_n|^{\frac{1}{n}},$$
άρα
$$\min\{|K|,|L|\} \leq \left(1-\rho^2/4\right)^{\frac{n}{2}}|D_n| \leq \exp(-\rho^2 n/8)|D_n|. \quad \square$$

Απόδειξη της Πρότασης 2 (με ασθενέστερες σταθερές): Έστω A κλειστό υποσύνολο της S^{n-1} με $\sigma(A) = 1/2$ και $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε $B = \{x \in S^{n-1} : d(x, A) \geq \varepsilon\}$. Σταθεροποιούμε $\lambda \in (0,1)$ και θεωρούμε τα υποσύνολα $K = \bigcup\{tA : \lambda \leq t \leq 1\}$ και $L = \bigcup\{tB : \lambda \leq t \leq 1\}$ της D_n. Τα K και L είναι κλειστά, ξένα, και η απόστασή τους είναι ίση με
$$d(K, L) = 2\lambda \sin(\varepsilon/2) \geq (2/\pi)\lambda\varepsilon.$$
Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1, παίρνουμε
$$|L| \leq \exp(-\lambda^2\varepsilon^2 n/2\pi^2)|D_n|.$$
Από την άλλη πλευρά, ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι $|L| = (1-\lambda^n)\sigma(B)|D_n|$. Επομένως,
$$\sigma(A_\varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{1-\lambda^n}\exp(-\lambda^2\varepsilon^2 n/2\pi^2).$$
Τέλος, επιλέγουμε $\lambda = 1/2 \in (0,1)$. $\square$

Η ανισότητα της Πρότασης 2 εξηγεί τον όρο «συγκέντρωση του μέτρου»: Όσο μικρό κι αν είναι το $\varepsilon > 0$, το μέτρο του συνόλου που μένει έξω από την ε-γειτονιά τυχόντος υποσυνόλου της σφαίρας μέτρου $1/2$, φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς η διάσταση n αυξάνει στο άπειρο. Το γεγονός αυτό (που προκαλεί έκπληξη αρχικά) παρατηρήθηκε για πρώτη φορά και χρησιμοποιήθηκε από τον P. Lévy:

- Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Με $\omega_f(\cdot)$ συμβολίζουμε το μέτρο συνέχειας της f
$$\omega_f(t) = \max\{|f(x) - f(y)| : \rho(x,y) \leq t,\ x, y \in S^{n-1}\}.$$

Υπάρχει μοναδικός αριθμός $L_f \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε
$$\sigma\left(\{x : f(x) \leq L_f\}\right) \geq \frac{1}{2} \quad , \quad \sigma\left(\{x : f(x) \geq L_f\}\right) \geq \frac{1}{2}.$$
Ο L_f ονομάζεται *μέσος Lévy* της f. Ορίζουμε
$$A_f^- = \{x : f(x) \leq L_f\} \quad , \quad A_f^+ = \{x : f(x) \geq L_f\} \quad , \quad A_f = \{x : f(x) = L_f\}.$$

Από τον ορισμό του L_f και την Πρόταση 2, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\sigma\left((A_f^+)_\varepsilon\right) \quad , \quad \sigma\left((A_f^-)_\varepsilon\right) \geq 1 - c_1 e^{-c_2\varepsilon^2 n}.$$

Όμως,

$$(A_f)_\varepsilon = (A_f^+)_\varepsilon \cap (A_f^-)_\varepsilon.$$

Άρα,

$$\sigma\left((A_f)_\varepsilon\right) \geq 1 - 2c_1 e^{-c_2\varepsilon^2 n}.$$

Αφού $|f(x) - L_f| \leq \omega_f(\varepsilon)$ στο $(A_f)_\varepsilon$, συμπεραίνουμε το εξής:

Λήμμα 2. *Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon > 0$,*

$$\sigma\left(x \in S^{n-1} : |f(x) - L_f| \geq \omega_f(\varepsilon)\right) \leq 2c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n). \quad \square$$

Αν υποθέσουμε ότι η $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq b|x - y|$ για κάθε $x, y \in S^{n-1}$, τότε για κάθε $x \in (A_f)_\varepsilon$ ισχύει $|f(x) - L_f| \leq b\varepsilon$. Από το Λήμμα 2 παίρνουμε:

Πρόταση 3. *Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$,*

$$\sigma\left(x \in S^{n-1} : |f(x) - L_f| \geq b\varepsilon\right) \leq 2c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n). \quad \square$$

Η Πρόταση 3 μάς λέει ότι κάθε *καλή συνάρτηση* f ορισμένη στη μοναδιαία σφαίρα μεγάλης διάστασης είναι σχεδόν σταθερή, με την έννοια ότι οι τιμές της *συγκεντρώνονται* γύρω από τον μέσο Lévy της L_f: το μέτρο του συνόλου στο οποίο η f παίρνει τιμές *κοντά* στον L_f είναι πρακτικά ίσο με 1.

Από τη συγκέντρωση με την έννοια του μέτρου, θα περάσουμε σε υποχώρους μεγάλης διάστασης, στη σφαίρα των οποίων η f είναι σχεδόν σταθερή. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε το εξής Λήμμα:

Λήμμα 3. *Έστω $\delta > 0$. Ορίζουμε δ-δίκτυο της S^{k-1} ένα $\mathcal{N} \subset S^{k-1}$ με την ιδιότητα: για κάθε $y \in S^{k-1}$ υπάρχει $x \in \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε $|x - y| < \delta$. Τότε, υπάρχει δ-δίκτυο της S^{k-1} με*

$$|\mathcal{N}| \leq \left(1 + \frac{2}{\delta}\right)^k.$$

Απόδειξη: Έστω $(x_i)_{i=1}^m$ ένα μεγιστικό υποσύνολο της S^{k-1}, του οποίου τα σημεία έχουν ανά δύο απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του δ. Τέτοιο υποσύνολο υπάρχει λόγω της συμπάγειας της S^{k-1}.

Τότε, το $(x_i)_{i=1}^m$ είναι δ-δίκτυο της S^{k-1}: Έστω ότι δεν είναι. Τότε, υπάρχει $y \in S^{k-1}$ τέτοιο ώστε $|x_i - y| \geq \delta$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$. Όμως τότε, το $\{x_1, \ldots, x_m, y\}$ είναι ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία ανήκουν στην S^{k-1} και οι αποστάσεις τους ανά δύο είναι μεγαλύτερες ή ίσες του δ. Αυτό είναι άτοπο αφού το $(x_i)_{i=1}^m$ είναι ένα μεγιστικό υποσύνολο της S^{k-1} με την παραπάνω ιδιότητα.

Θεωρούμε τα σύνολα $x_i + \frac{1}{2}\delta D_k$. Αυτά έχουν ανά δύο ξένα εσωτερικά, και

$$x_i + \frac{\delta}{2} D_k \subset D_k + \frac{\delta}{2} D_k$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Επομένως,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{m} \left(x_i + \frac{\delta}{2} D_k \right) \right| \leq \left| \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) D_k \right| .$$

Έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\delta}{2} D_k \right| \leq \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)^k |D_k|,$$

δηλαδή,

$$m \left(\frac{\delta}{2} \right)^k |D_k| \leq \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)^k |D_k|.$$

Άρα,

$$m \leq (1 + \frac{2}{\delta})^k. \quad \square$$

Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα διάστασης n. Η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδεια νόρμα $|\cdot|$, δηλαδή υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε

$$\frac{1}{a}|x| \leq \|x\| \leq b|x|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι οι a, b είναι οι μικρότεροι τέτοιοι θετικοί αριθμοί.

Η συνάρτηση $r : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ με $r(x) = \|x\|$, είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Γράφουμε L_r για το μέσο Lévy της.

Λήμμα 4. *Έστω $m \leq \exp(c_2 \varepsilon^2 n/2)$ και $y_i \in S^{n-1}$, $i = 1, \ldots, m$. Τότε, υπάρχει $B \subset O(n)$ με $\nu(B) \geq 1 - 2c_1 \exp(-c_2 \varepsilon^2 n/2)$, τέτοιο ώστε: για κάθε $U \in B$,*

$$L_r - b\varepsilon \leq \|U y_i\| \leq L_r + b\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Απόδειξη: Με βάση την μοναδικότητα του μέτρου Haar, στην παράγραφο 4 είδαμε ότι αν $x_0 \in S^{n-1}$ και $A \subset S^{n-1}$, τότε

$$\sigma(A) = \nu\{U \in O(n) \ : \ U x_0 \in A\}.$$

Ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{x \in S^{n-1} \ : \ L_r - b\varepsilon \leq \|x\| \leq L_r + b\varepsilon\}.$$

Τότε, από την Πρόταση 3,

$$\sigma(A) \geq 1 - 2c_1 e^{-c_2 \varepsilon^2 n}.$$

Επομένως, αν για $i = 1, \ldots, m$ θέσουμε

$$B_i = \{U \in O(n) \ : \ L_r - b\varepsilon \leq \|Uy_i\| \leq L_r + b\varepsilon\},$$

τότε,

$$\nu(B_i) > 1 - 2c_1 e^{-c_2\varepsilon^2 n}.$$

Άρα, το $B = \bigcap B_i$ έχει μέτρο

$$\nu(B) \geq 1 - \sum \nu(B_i^c) \geq 1 - 2c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n/2).$$

Τέλος, για κάθε $U \in B$ και κάθε $i \leq m$ ισχύει

$$L_r - b\varepsilon \leq \|Uy_i\| \leq L_r + b\varepsilon. \quad \square$$

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4 στην ακόλουθη περίπτωση: Έστω $\delta, \varepsilon \in (0,1)$. Θεωρούμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε

$$\left(1 + \frac{2}{\delta}\right)^k \leq \exp(c_2\varepsilon^2 n/2),$$

και σταθεροποιούμε υπόχωρο F_0 του $\mathbb{R}^n$ με διάσταση $\dim F_0 = k$.

Από το Λήμμα 3, υπάρχει δ-δίκτυο $y_1, \ldots, y_m$ της μοναδιαίας σφαίρας $S_{F_0} = S^{n-1} \cap F_0$ του F_0, με $m \leq (1 + 2/\delta)^k$.

Θεωρούμε το $B \subset O(n)$ του Λήμματος 4: Για κάθε $U \in B$ και κάθε $i \leq m$,

$$L_r - b\varepsilon \leq \|Uy_i\| \leq L_r + b\varepsilon.$$

Θέτουμε $F_U := U(F_0)$ και $x_i := Uy_i$ $i = 1, \ldots, m$. Αφού ο U είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, το $x_1, \ldots, x_m$ είναι δ-δίκτυο της S_{F_U}, για το οποίο ισχύει

$$L_r - b\varepsilon \leq \|x_i\| \leq L_r - b\varepsilon.$$

Επομένως, έχουμε αποδείξει την εξής:

Πρόταση 4. *Έστω $\delta, \varepsilon \in (0,1)$. Αν $(1 + 2/\delta)^k \leq \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$, τότε υπάρχει $\Gamma \subset G_{n,k}$ με $\nu_{n,k}(\Gamma) \geq 1 - 2c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n/2)$, τέτοιο ώστε: για κάθε $F \in \Gamma$ υπάρχει δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S_F με την ιδιότητα*

$$L_r - b\varepsilon \leq \|x\| \leq L_r + b\varepsilon \quad , \quad x \in \mathcal{N}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\Gamma = \{F_U \ : \ U \in B\}$, και παρατηρούμε ότι

$$\nu_{n,k}(\Gamma) = \nu_{n,k}(\{U(F_0) \ : \ U \in B\}) = \nu(B). \quad \square$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα, θα περάσουμε την εκτίμηση της Πρότασης 4 από το δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S_F, $F \in \Gamma$, σε ολόκληρη την S_F:

Πρόταση 5. *Έστω $\delta, \varepsilon \in (0,1)$ και $F \in \Gamma$ όπως στην Πρόταση 4. Τότε, για κάθε $y \in S_F$ ισχύει*

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta}L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta} \leq \|y\| \leq \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta}.$$

Απόδειξη: Έστω $y \in S_F$. Υπάρχει $x_0 \in \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε $|y - x_0| = \delta_1 < \delta$. Τότε, $\frac{y-x_0}{\delta_1} \in S_F$, άρα υπάρχει $x_1 \in \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{y-x_0}{\delta_1} - x_1\right| = \delta_2 < \delta.$$

Τότε,

$$|y - x_0 - \delta_1 x_1| = \delta_1\delta_2 < \delta^2.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε $x_0, \ldots, x_n \in \mathcal{N}$ τέτοια ώστε

$$\left|y - \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{i}\delta_j\right)x_i\right| \leq \delta^{n+1},$$

όπου $\delta_0 = 1$. Αφού $\delta < 1$,

$$y = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{i}\delta_j\right)x_i.$$

Όμως, $\prod_{j=0}^{i}\delta_j \leq \delta^i$, άρα

$$\begin{aligned}\|y\| &= \left\|\sum_{i=0}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{i}\delta_j\right)x_i\right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty}\delta^i\|x_i\| \\ &\leq (L_r + b\varepsilon)\sum_{i=0}^{\infty}\delta^i = \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta}.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\|y\| &\geq \|x_0\| - \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{i}\delta_j\right)x_i\right\| \\ &\geq L_r - b\varepsilon - \frac{\delta}{1-\delta}(L_r + b\varepsilon) \\ &= \frac{1-2\delta}{1-\delta}L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta}.\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $y \in S_F$,

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta}L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta} \leq \|y\| \leq \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta}. \quad \square$$

Επιλέγοντας κατάλληλα τα δ, ε, παίρνουμε μιά πρώτη εκτίμηση για τη διάσταση των σχεδόν σφαιρικών τομών του $K = K_X$:

Θεώρημα 4. *Έστω* $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *χώρος με νόρμα* $r(x) = \|x\|$ *που ικανοποιεί την* $\|x\| \leq b|x|$, $x \in \mathbb{R}^n$, *και* $\varepsilon \in (0,1)$. *Αν*

$$k \leq k_X(\varepsilon) = c_3 \varepsilon^2 [\log^{-1}(1/\varepsilon)] n \left(\frac{L_r}{b}\right)^2,$$

τότε υπάρχει F *υπόχωρος του* $\mathbb{R}^n$ *με* $\dim F = k$ *τέτοιος ώστε: για κάθε* $x \in S_F$,

$$(*) \qquad (1+\varepsilon)^{-1} L_r \leq \|x\| \leq L_r(1+\varepsilon).$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 5, αν $\zeta, \delta \in (0,1)$ και ο $k \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί την $(1+2/\delta)^k \leq \exp(c_2 \zeta^2 n/2)$, τότε για τον τυχαίο k-διάστατο υπόχωρο F του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $x \in S_F$ έχουμε

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\zeta}{1-\delta} \leq \|x\| \leq \frac{L_r + b\zeta}{1-\delta}.$$

Για την $(*)$ αρκεί να επιλέξουμε τα $\delta, \zeta \in (0,1)$ έτσι ώστε

$$\frac{L_r + b\zeta}{1-\delta} \leq L_r(1+\varepsilon)$$

και

$$\frac{L_r}{1+\varepsilon} \leq \frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\zeta}{1-\delta}.$$

Εάν επιλέξουμε $\zeta = \frac{L_r \delta}{b}$ και $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, παρατηρούμε ότι οι παραπάνω σχέσεις επαληθεύονται.

Μένει να προσδιορίσουμε την ελάχιστη τιμή του k η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\left(1 + \frac{6}{\epsilon}\right)^k \leq \exp\left(\frac{c_2}{18} \varepsilon^2 n \left(\frac{L_r}{b}\right)^2\right).$$

Ζητάμε

$$k \log \frac{6}{\varepsilon} \leq c_2' \varepsilon^2 n \left(\frac{L_r}{b}\right)^2,$$

οπότε το μικρότερο k που μπορούμε να θεωρήσουμε είναι το $k_X(\varepsilon)$, όπου $c_3 > 0$ κατάλληλη απόλυτη σταθερά. $\Box$

Το Θεώρημα 4 μας λέει ότι η διάσταση των σχεδόν σφαιρικών τομών ενός συμμετρικού κυρτού σώματος $K = K_X$ εξαρτάται απο την τάξη της ποσότητας $\frac{L_r}{b}$. Ορίζουμε έναν δεύτερο *μέσο* της $r(x) = \|x\|$, θέτοντας

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\| \sigma(dx).$$

Τότε, οι L_r και M συγκρίνονται αν το K είναι σε *καλή θέση*:

Λήμμα 5. *Υποθέτουμε ότι η* $r(x) = \|x\|$ *ικανοποιεί την* $\frac{1}{a}|x| \leq \|x\| \leq b|x|$, $x \in \mathbb{R}^n$, *και* $ab \leq \sqrt{n}$. *Τότε,*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{M}{L_r} \leq c,$$

όπου $c > 0$ *απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $|x| \leq \|x\| \leq b|x|$, όπου $b \leq \sqrt{n}$.

Από την Πρόταση 2, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\sigma\{x : |r(x) - L_r| \geq b\varepsilon\} \leq 2c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n).$$

Γράφουμε

$$|M - L_r| \leq \int_{S^{n-1}} |r(x) - L_r|\sigma(dx) = \int_0^\infty \sigma\{x : |r(x) - L_r| \geq t\}dt.$$

Θέτουμε $b\varepsilon = t$. Χρησιμοποιώντας την $b \leq \sqrt{n}$, παίρνουμε

$$|M - L_r| \leq \int_0^\infty 2c_1 \exp(-c_2 t^2)dt = c_4.$$

Επομένως,

$$\left|\frac{M}{L_r} - 1\right| \leq \frac{c_4}{L_r}.$$

Όμως, αν $x \in S^{n-1}$, τότε $\|x\| \geq |x| \geq 1$. Άρα, $L_r \geq 1$. Έπεται ότι $M/L_r \leq c = 1 + c_4$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, παρατηρούμε ότι

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|\sigma(dx) \geq \int_{\{x:\, \|x\| \geq L_r\}} \|x\|\sigma(dx) \geq \frac{1}{2}L_r.$$

Άρα, $M/L_r \geq 1/2$. □

Το τελευταίο λήμμα που χρειαζόμαστε είναι (ουσιαστικά) μία πιθανοθεωρητική ανισότητα για τη μέση τιμή του μεγίστου πεπερασμένων το πλήθος ανεξάρτητων κανονικών τυχαίων μεταβλητών (βλέπε [LT], [Pi]):

Λήμμα 6. *Για κάθε* $1 \leq m \leq n$ *ισχύει*

$$\int_{S^{n-1}} \max_{j \leq m} |x_j|\sigma(dx) \geq c_5 \left(\frac{\log m}{n}\right)^{1/2},$$

όπου $c_5 > 0$ *απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το μέτρο του Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα

$$(2\pi)^{-n/2} \exp(-|x|^2/2).$$

Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \max_{j\leq m}|t_j|d\gamma_m(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \max_{j\leq m}|t_j|d\gamma_n(t)\\ &= \lambda_n \int_{S^{n-1}} \max_{j\leq m}|x_j|\sigma(dx),\end{aligned}$$

όπου $\lambda_n \simeq \sqrt{n}$. Όμως,

$$\begin{aligned}\gamma_m\left(t : \max_{j\leq m}|t_j| < s\right) &= (2\pi)^{-m/2}\int_{-s}^{s}\cdots\int_{-s}^{s}\exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}t_j^2)dt_1\ldots dt_m\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-s}^{s}e^{-t^2/2}dt\right)^m \leq (1-ce^{-s^2/2})^m.\end{aligned}$$

Άρα, αν επιλέξουμε $s\simeq c_1\sqrt{\log m}$, καταλήγουμε στην

$$\gamma_m\left(t : \max_{j\leq m}|t_j| \geq c_1\sqrt{\log m}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \max_{j\leq m}|x_j|\sigma(dx) &\simeq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}^m}\max_{j\leq m}|t_j|d\gamma_m(t)\\ &\geq \frac{c_1\sqrt{\log m}}{\sqrt{n}}\gamma_m\left(t : \max_{j\leq m}|t_j|\geq c_1\sqrt{\log m}\right)\\ &\geq \frac{c_1}{2}\left(\frac{\log m}{n}\right)^{1/2}. \quad \square\end{aligned}$$

Θεώρημα 5. *Έστω X χώρος με νόρμα, διάστασης n, τέτοιος ώστε η D_n να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K_X. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει υπόχωρος F του X διάστασης $k\geq c\varepsilon^2[\log^{-1}(1/\varepsilon)]\log n$, με την ιδιότητα: για κάθε $x\in S_F$,*

$$(1+\varepsilon)^{-1}L_r \leq \|x\| \leq L_r(1+\varepsilon).$$

Απόδειξη: Από το θεώρημα του John, έχουμε $\frac{1}{\sqrt{n}}|x| \leq \|x\| \leq |x|$, $x\in\mathbb{R}^n$. Εφαρμόζεται επομένως το Λήμμα 5, και έχουμε

$$\frac{1}{2} \leq \frac{M}{L_r} \leq c,$$

όπου $M=\int_{S^{n-1}}\|x\|\sigma(dx)$. Από το λήμμα Dvoretzky-Rogers, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_1,\ldots,x_n\}$, με $\|x_i\|\geq\frac{1}{2}$ για $i=1,2,\ldots,[\frac{n}{2}]$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις Rademacher $r_i:[0,1]\to\{-1,1\}$ με

$$r_i(t) = \operatorname{sign}\sin(\pi 2^i t).$$

Τότε, ο τελεστής $T_t : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με

$$T_t\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i(t) a_i x_i$$

είναι ισομετρία. Το σ είναι αναλλοίωτο ως προς τις ισομετρίες, οπότε ισχύει ότι

$$(*) \qquad M = \int_{S^{n-1}} \|\sum_{i=1}^n a_i x_i\| \sigma(da) = \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \|\sum_{i=1}^n r_i(t) a_i x_i\| dt \sigma(da).$$

Ισχυρισμός: Για $j = 1, \ldots n$,

$$\int_0^1 \|\sum_{i=1}^n r_i(t) y_i\| dt \geq \|y_j\|.$$

Πράγματι, για $n = 1$ είναι φανερό, οπότε ας υποθέσουμε ότι

$$\int_0^1 \|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i\| dt \geq \|y_j\| \quad , \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Από την τριγωνική ανισότητα, για κάθε $t \in [0,1]$

$$2\|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i + y_n\| + \|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i - y_n\|,$$

οπότε, ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int_0^1 \|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i\| dt \leq \int_0^1 \|\sum_{i=1}^n r_i(t) y_i\| dt.$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

$$\int_0^1 \|\sum_{i=1}^n r_i(t) y_i\| dt \geq \|y_j\| \quad , \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

και η απόδειξη του ισχυρισμού ολοκληρώνεται με κυκλική εναλλαγή των y_j. $\square$

Παίρνοντας $y_i = a_i x_i$, έχουμε

$$\int_0^1 \|\sum_{i=1}^n r_i(t) a_i x_i\| dt \geq \max_{1 \leq i \leq n} \|a_i x_i\|.$$

Επιστρέφοντας στην $(*)$, παίρνουμε

$$M \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq n} \|a_i x_i\| \sigma(da) \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]} \|a_i x_i\| \sigma(da).$$

Τώρα, εφαρμόζοντας το λήμμα Dvoretzky-Rogers έχουμε

$$M \geq \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq [\frac{n}{2}]} |a_i|\sigma(da),$$

και από το Λήμμα 6 έπεται ότι

$$M \geq c\sqrt{\frac{\log\left[\frac{n}{2}\right]}{n}} \geq c'\sqrt{\frac{\log n}{n}}.$$

Αφού $L_r \geq cM$, από το Θεώρημα 4 συμπεραίνουμε ότι, αν

$$\begin{aligned} k = [k_X(\varepsilon)] &= \left[c_3\varepsilon^2[\log^{-1}(1/\varepsilon)]n\left(\frac{L_r}{b}\right)^2\right] \\ &\geq c_3'\varepsilon^2[\log^{-1}(1/\varepsilon)]n\left(\frac{M}{b}\right)^2 \\ &\geq c_3''\varepsilon^2[\log^{-1}(1/\varepsilon)]\log n, \end{aligned}$$

τότε υπάρχει F υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F = k$ τέτοιος ώστε: για κάθε $x \in S_F$,

$$(1+\varepsilon)^{-1}L_r \leq \|x\| \leq L_r(1+\varepsilon). \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2: Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ n-διάστατος χώρος με νόρμα, και $\varepsilon \in (0,1)$. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/4$, οπότε $(1+\delta)^2 \leq 1+\varepsilon$.

Υπάρχει $T \in GL_n$ τέτοιος ώστε το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του $T(K_X)$ να είναι η D_n. Ορίζουμε $r(x) = \|x\|_{T(K_X)}$ και θεωρούμε τον μέσο L της r. Από το Θεώρημα 5, υπάρχουν $k \geq c(\delta)\log n = c(\varepsilon)\log n$ και F k-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, έτσι ώστε

$$\frac{L}{(1+\delta)}\left(D_n \cap F\right) \subset T(K_X) \cap F \subset (1+\delta)L\left(D_n \cap F\right).$$

Τότε, παίρνοντας $F_1 = T^{-1}(F)$ έχουμε $d(F_1, \ell_2^k) \leq (1+\delta)^2 \leq 1+\varepsilon$. $\square$

Η γεωμετρική διατύπωση του Θεωρήματος 2 είναι η εξής: Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $k \geq c\varepsilon^2 \log n$, υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k, και ελλειψοειδές E στον F, τέτοια ώστε

$$(*) \qquad E \subset K \cap F \subset (1+\varepsilon)E.$$

Υποδιπλασιάζοντας τη διάσταση k του υποχώρου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το E στην $(*)$ είναι Ευκλείδεια μπάλα στον F (χωρίς καμμία υπόθεση για την αρχική θέση του K). Το γεγονός αυτό είναι άμεση συνέπεια του παρακάτω Λήμματος (βλέπε π.χ. [Z]):

Λήμμα 7. *Έστω E ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^{2l-1}$ με κέντρο το o. Υπάρχει l-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^{2l-1}$ τέτοιος ώστε το $E \cap F$ να είναι Ευκλείδεια μπάλα στον F.*

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2l-1} : \sum_{i=1}^{2l-1} a_i^2 \langle x, e_i \rangle^2 \leq 1 \right\},$$

όπου $a_1 > a_2 > \ldots > a_{2l-1} > 0$ και $\{e_i\}$ ορθοκανονική βάση.

Αφού για κάθε $i \leq l-1$ ισχύει $a_i > a_l > a_{2l-i}$, μπορούμε να ορίσουμε $b_1, \ldots, b_{l-1} > 0$ από τις εξισώσεις

$$a_i^2 b_i^2 + a_{2l-i}^2 = a_l^2 (b_i^2 + 1).$$

Θεωρούμε τον υπόχωρο F που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\langle x, e_i \rangle = b_i \langle x, e_{2l-i} \rangle \quad , \quad i = 1, \ldots, l-1.$$

Ορίζουμε $v_l = e_l$ και v_i, $i = 1, \ldots, l-1$ μέσω των

$$v_i = \frac{b_i e_i + e_{2l-i}}{\sqrt{b_i^2 + 1}} \quad , \quad i = 1, \ldots, l-1.$$

Τότε, το $\{v_1, \ldots, v_l\}$ είναι ορθοκανονική βάση του F. Επίσης, αν $x \in F$ τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{l} a_l^2 \langle x, v_i \rangle^2 &= a_l^2 \langle x, e_l \rangle^2 + \sum_{i=1}^{l-1} a_l^2 \frac{(b_i \langle x, e_i \rangle + \langle x, e_{2l-i} \rangle)^2}{b_i^2 + 1} \\
&= a_l^2 \langle x, e_l \rangle^2 + \sum_{i=1}^{l-1} a_l^2 (b_i^2 + 1) \langle x, e_{2l-i} \rangle^2 \\
&= a_l^2 \langle x, e_l \rangle^2 + \sum_{i=1}^{l-1} (a_i^2 b_i^2 + a_{2l-i}^2) \langle x, e_{2l-i} \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2l-1} a_i^2 \langle x, e_i \rangle^2.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το $E \cap F$ είναι μπάλα ακτίνας a_l^{-1} στον F. $\square$

Χρησιμοποιήσαμε τη συγκέντρωση του μέτρου στην S^{n-1} για την απόδειξη του Θεωρήματος του Dvoretzky. Η ίδια αρχή βρίσκει εφαρμογές σε πλήθος διαφορετικών καταστάσεων. Για να τονίσουμε αυτό το γεγονός, δίνουμε ένα ακόμα παράδειγμα:

Απόσταση Banach-Mazur. Σύμφωνα με το θεώρημα του John, $d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$ για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X. Επομένως, η πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την d δείχνει ότι $d(X, Y) \leq n$ για κάθε ζευγάρι χώρων X και Y. Από την άλλη πλευρά, ο Gluskin [Gl] έχει αποδείξει ότι η διάμετρος του Banach-Mazur compactum είναι της τάξης του n:

Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε n μπορούμε να βρούμε δύο n-διάστατους χώρους X_n, Y_n με $d(X_n, Y_n) \geq cn$.

Οι χώροι X_n, Y_n στο παράδειγμα του Gluskin είναι τυχαίοι και του ίδιου τύπου: τυχαία συμμετρικά πολύτοπα με αn κορυφές ($\alpha > 1$). Θα δείξουμε ότι χώροι που οι μοναδιαίες μπάλες τους είναι πολύ διαφορετικά γεωμετρικά αντικείμενα έχουν μικρή απόσταση:

Πρόταση 6. *Έστω X και Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα, με $|\mathrm{Extr}(K_X)| \leq n^\alpha$ και $|\mathrm{Extr}(K_{Y^*})| \leq n^\beta$ για κάποιους $\alpha, \beta > 0$, όπου με $\mathrm{Extr}(\cdot)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ακραίων σημείων. Τότε,*

$$d(X,Y) \leq c\sqrt{\alpha+\beta}\sqrt{n\log n}.$$

[Μ' άλλα λόγια, αν ένα σώμα έχει λίγες κορυφές και ένα δεύτερο σώμα έχει λίγες έδρες, τότε η απόστασή τους δεν ξεπερνά την $\sqrt{n\log n}$.]

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{n}}D_n \subseteq K_X \subseteq D_n \subseteq K_Y \subseteq \sqrt{n}D_n$. Τότε, $K_{Y^*} \subseteq D_n$. Αν $U \in O(n)$, εύκολα ελέγχουμε ότι $\|U^{-1} : Y \to X\| \leq n$. Θα δείξουμε ότι η $\|U : X \to Y\|$ είναι μικρή για τον τυχαίο U.

Για να εκτιμήσουμε τη νόρμα του U εργαζόμαστε ως εξής:

$$\|U : X \to Y\| = \sup_{x\in K_X}\|Ux\|_Y = \max_{x\in \mathrm{Extr}(K_X)}\ \max_{y^*\in \mathrm{Extr}(K_{Y^*})}|\langle Ux, y^*\rangle|.$$

Παρατηρούμε ότι αν $x \in \mathrm{Extr}(K_X)$ και $y^* \in \mathrm{Extr}(K_{Y^*})$, τότε $Ux, y^* \in D_n$. Έπεται ότι

$$\nu\left(U \in O(n) : |\langle Ux, y^*\rangle| \geq \varepsilon\right) = \sigma\left(\theta \in S^{n-1} : |\langle \theta, y^*\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq c\exp(-\varepsilon^2 n/2).$$

Επομένως, αν $cn^{\alpha+\beta}\exp(-\varepsilon^2 n/2) < 1$, μπορούμε να βρούμε $U \in O(n)$ με την ιδιότητα

$$|\langle Ux, y^*\rangle| \leq \varepsilon, \quad x \in \mathrm{Extr}(K_X), y^* \in \mathrm{Extr}(K_{Y^*}),$$

δηλαδή, $\|U : X \to Y\| \leq \varepsilon$. Λύνοντας ως προς ε, βλέπουμε ότι οι περιορισμοί μας ικανοποιούνται με

$$\varepsilon \simeq \sqrt{\alpha+\beta}\sqrt{\log n/n}.$$

Άρα, υπάρχει $U \in O(n)$ για τον οποίο

$$d(X,Y) \leq \|U : X \to Y\|\,\|U^{-1} : Y \to X\| \leq c\sqrt{\alpha+\beta}\sqrt{n\log n}. \quad \square$$

1.6 Η διάσταση των Ευκλείδειων υποχώρων του ℓ_p^n

Η απόδειξη του θεωρήματος του Dvoretzky που δόθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι πιθανοθεωρητικής φύσης, και μας δίνει ότι τυχαίος υπόχωρος F του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ με διάσταση $\dim F = [c\varepsilon^2 n(M/b)^2]$ είναι $(1+\varepsilon)$-Ευκλείδειος. Αυτό μας οδηγεί στον ορισμό της ακόλουθης παραμέτρου του X:

Ορισμός. Έστω X n-διάστατος χώρος με νόρμα. Ορίζουμε $k(X)$ τον μεγαλύτερο ακέραιο $k \leq n$ για τον οποίο

$$\nu_{n,k}\left(F \in G_{n,k} : \frac{1}{2}M|x| \leq \|x\| \leq 2M|x|, x \in F\right) \geq 1 - \frac{k}{n+k}.$$

Μ' άλλα λόγια, $k(X)$ είναι η μεγαλύτερη δυνατή διάσταση $k \leq n$ για την οποία η πλειοψηφία των k-διάστατων υποχώρων του X είναι 4-Ευκλείδειοι. Η επιλογή της σταθεράς M στον παραπάνω ορισμό, αντιστοιχεί στην σωστή κανονικοποίηση, αφού ο μέσος του $M(F)$ πάνω στην $G_{n,k}$ ισούται με M για κάθε $1 \leq k \leq n$.

Από το θεώρημα του Dvoretzky έπεται ότι $k(X) \geq cn(M/b)^2$. Όπως θα δούμε, ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα:

Πρόταση 1. $k(X) \leq 8n(M/b)^2$.

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε ορθογώνιους υπόχωρους $F^1, \ldots, F^t$ διάστασης $\dim F^i \leq k(X)$ τέτοιους ώστε $\mathbb{R}^n = \oplus F^i$ (παίρνουμε $[n/k(X)]$ δάστασης $k(X)$ και, ενδεχομένως, έναν διάστασης $n - [n/k(X)]k(X)$, οπότε $t \leq 2n/k(X)$). Από τον ορισμό του $k(X)$, οι περισσότερες ορθογώνιες εικόνες καθενός F^i είναι 4-Ευκλείδειες, επομένως μπορούμε να βρούμε $U \in O(n)$ έτσι ώστε

$$\frac{1}{2}M|x| \leq \|x\| \leq 2M|x| \quad , \quad x \in U(F^i)$$

για κάθε $i = 1, \ldots, t$. Κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται στη μορφή $x = \sum_{i=1}^t x_i$, όπου $x_i \in U(F^i)$. Αφού τα x_i είναι κάθετα ανά δύο, παίρνουμε

$$\|x\| \leq 2M \sum_{i=1}^t |x_i| \leq 2M\sqrt{t}|x|.$$

Αυτό σημαίνει ότι $b \leq 2M\sqrt{t}$, και αφού $t \leq 2n/k(X)$, συμπεραίνουμε ότι $k(X) \leq 8n(M/b)^2$. □

Μ' άλλα λόγια, ισχύει ο ακόλουθος *ασυμπτωτικός τύπος*:

Θεώρημα 1. *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X έχουμε*

$$k(X) \simeq n(M/b)^2. \quad \square$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τους κλασικούς χώρους ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$, και προσδιορίζουμε την τάξη μεγέθους (σαν συνάρτηση των p και n) του $k_p = k_{\ell_p^n}(1)$, της μεγαλύτερης δηλαδή διάστασης υποχώρου του ℓ_p^n που είναι 4-ισόμορφος με τον $\ell_2^{\dim F}$.

Θεώρημα 2. *Αν $1 \leq p \leq 2$, τότε $k_p \simeq n$.*

Απόδειξη: Ισχύει $k_p \geq cn(M/b)^2$, όπου $b = \max\{\|x\|_p : x \in S^{n-1}\}$ και

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|_p \sigma(dx).$$

Από την ανισότητα του Hölder, με δεδομένο ότι $1 \leq p \leq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|x\|_p \leq |x| n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}},$$

άρα $b \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$. Ισχύει μάλιστα ισότητα.

Πάλι από την ανισότητα του Hölder, παίρνουμε $\|x\|_1 \leq \|x\|_p n^{\frac{1}{q}}$, $x \in \mathbb{R}^n$, άρα

$$M \geq \int_{S^{n-1}} n^{-\frac{1}{q}} \|x\|_1 \sigma(dx) = n^{-\frac{1}{q}} \sum_{i=1}^{n} \int_{S^{n-1}} |x_i| \sigma(dx) = n^{1-\frac{1}{q}} \int_{S^{n-1}} |x_1| \sigma(dx).$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής: θεωρούμε το

$$\int_{D_n} |x_1| dx = n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^1 r^n |\theta_1| dr \sigma(d\theta) = \frac{n}{n+1} \omega_n \int_{S^{n-1}} |\theta_1| \sigma(d\theta),$$

όπου $\omega_n = |D_n|$. Άρα,

$$\int_{S^{n-1}} |\theta_1| \sigma(d\theta) = \frac{n+1}{n} \frac{1}{\omega_n} \int_{D_n} |x_1| dx = \frac{2(n+1)\omega_{n-1}}{n\omega_n} \int_0^1 t(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα, βλέπουμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} |\theta_1| \sigma(dx) = \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})},$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{n+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

καταλήγουμε στην

$$\int_{S^{n-1}} |x_1| dx \geq \frac{2}{\sqrt{e\pi}} \left(\frac{n+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{n} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Δηλαδή,

$$M \geq (2/e\pi)^{1/2} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$k_p \geq cn \left(\frac{M}{b} \right)^2 \geq c' n.$$

Αφού (προφανώς) $k_p \leq n$, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 2. $k_\infty \simeq \log n$.

Απόδειξη: Από το θεώρημα του Dvoretzky έπεται ότι $k_\infty \geq c\log n$. Για την αντίστροφη ανισότητα, δείχνουμε πρώτα κάτι πιό γενικό:

Πρόταση 2. *Αν P είναι ένα πολύτοπο στον $\mathbb{R}^k$ με m έδρες, και $D_k \subset P \subset aD_k$, τότε*

$$m \geq \exp(k/2a^2).$$

Απόδειξη: Γράφουμε το P στη μορφή

$$P = \{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, v_j\rangle \leq 1\ ,\ j \leq m\}.$$

Αφού $D_k \subset P$, πρέπει να ισχύει $|v_j| \leq 1$ (αλλιώς, $v_j/|v_j| \in D_k\backslash P$) για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Από τον δεύτερο εγκλεισμό συμπεραίνουμε το εξής:

Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, υπάρχει $j \leq m$ με την ιδιότητα $\langle\theta, v_j\rangle \geq 1/a$. [Πράγματι, αν $r > a$, τότε $r\theta \notin aD_k$. Επομένως $r\theta \notin P$, δηλαδή υπάρχει j με $\langle r\theta, v_j\rangle > 1$. Αφού το $r > a$ ήταν τυχόν, έπεται ο ισχυρισμός.]

Θέτουμε $u_j = v_j/|v_j|$, $j = 1, \ldots, m$. Τότε, αφού $|v_j| \leq 1$,

$$\{\theta \in S^{k-1} : \langle\theta, v_j\rangle \geq 1/a\} \subseteq \{\theta \in S^{k-1} : \langle\theta, u_j\rangle \geq 1/a\},$$

άρα

$$(*) \qquad S^{k-1} \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left\{\theta \in S^{k-1} : \langle\theta, u_j\rangle \geq 1/a\right\}.$$

Κάθε $\{\theta \in S^{k-1} : \langle\theta, u_j\rangle \geq 1/a\}$ είναι μιά μπάλα στην S^{k-1}, με κέντρο u_j και γωνιακή ακτίνα $2\arcsin(1/2a)$. Το Λήμμα που ακολουθεί δίνει άνω φράγμα για το μέτρο της:

Λήμμα 1. *Για κάθε $u \in S^{k-1}$ και $\varepsilon \in (0,1)$ θέτουμε $C(u,\varepsilon) = \{\theta \in S^{k-1} : \langle u, \theta\rangle \geq \varepsilon\}$. Τότε,*

$$\sigma(C(u,\varepsilon)) \leq \exp(-\varepsilon^2 k/2).$$

Απόδειξη: Το $\sigma(C(u,\varepsilon))$ είναι ίσο με το ποσοστό της D_k που καταλαμβάνει ο *σφαιρικός κώνος* που αντιστοιχεί στο $C(u,\varepsilon)$. Όμως, αυτός ο σφαιρικός κώνος περιέχεται σε μια Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας $(1-\varepsilon^2)^{1/2}$, άρα

$$\sigma(C(u,\varepsilon)) \leq (1-\varepsilon^2)^{k/2} \leq \exp(-\varepsilon^2 k/2). \quad \square$$

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της Πρότασης: από την $(*)$ και το Λήμμα με $\varepsilon = 1/a$,

$$1 = \sigma(S^{k-1}) \leq m\sigma(C(u,\varepsilon)) \leq m\exp(-k/2a^2). \quad \square$$

Για την απόδειξη της $k_\infty \leq c'\log n$, υποθέτουμε ότι για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος του ℓ_∞^n τέτοιος ώστε $d(F, \ell_2^k) \leq 4$. Ο κύβος Q_n έχει $2n$ έδρες, επομένως το πολύτοπο $Q_n \cap F$ έχει κι αυτό $m \leq 2n$ έδρες και υπάρχει ελλειψοειδές E στον F για το οποίο $E \subset Q_n \cap F \subset 4E$. Με κατάλληλο λοιπόν γραμμικό μετασχηματισμό, βρίσκουμε πολύτοπο $P_1 = T(P) \subset \mathbb{R}^k$ με m έδρες, που ικανοποιεί την

$$D_k \subset P_1 \subset 4D_k.$$

Από την Πρόταση 2, $2n \geq m \geq \exp(k/32)$, δηλαδή

$$k \leq 32 \log(2n).$$

Έπεται ότι $k_\infty \leq 32\log(2n)$, άρα $k_\infty \simeq \log n$. □

Για την περίπτωση που απομένει ($2 < q < \infty$) θα χρειαστούμε την ανισότητα του Khintchine:

Θεώρημα 3. *Για κάθε $1 \leq p < \infty$ υπάρχουν θετικές σταθερές A_p και B_p τέτοιες ώστε: για κάθε n και κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_n$,*

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i^2| \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 |\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i^2| \right)^{1/2}.$$

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. Δείχνουμε την δεξιά ανισότητα, πρώτα για $p = k \in \mathbb{N}$: Ορίζουμε $f(t) = \sum_{i=1}^n a_i r_i(t)$. Τότε,

$$|f(t)|^k \leq k! e^{|f(t)|} \leq k! \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)} \right).$$

Όμως, βλέποντας τις r_i σαν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στο $[0,1]$, παίρνουμε

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt = \int_0^1 \prod_{i=1}^m \exp(a_i r_i(t)) dt = \prod_{i=1}^n \int_0^1 \exp(a_i r_i(t)) dt = \prod_{i=1}^n \cosh(a_i).$$

Από την ανισότητα $\cosh(x) \leq \exp(x^2/2)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt \leq \prod_{i=1}^n \exp(a_i^2/2) = \sqrt{e},$$

και λόγω συμμετρίας, $\int e^{-f(t)} dt \leq \sqrt{e}$. Δηλαδή,

$$\left(\int_0^1 |\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)|^k dt \right)^{1/k} \leq \left(2\sqrt{e} k! \right)^{1/k} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}.$$

Έστω $p \geq 2$. Θεωρώντας τον φυσικό αριθμό $k = [p] + 1$ και την ανισότητα του Hölder βλέπουμε ότι

$$\left(\int_0^1 |\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)|^k dt \right)^{1/k} \leq cp \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $B_p \leq cp$. Συμπληρώνουμε την απόδειξη δείχνοντας την αριστερή ανισότητα στην περίπτωση $1 \leq p < 2$. Βρίσκουμε $\theta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $2 = p\theta + 4(1-\theta)$, δηλαδή $\theta = 2/(4-p)$. Τότε,

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 |f(t)|^{p\theta} |f(t)|^{4(1-\theta)} dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^\theta \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt \right)^{1-\theta}.$$

Από την δεξιά ανισότητα (για $p = 4$),

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^\theta 3^{1-\theta} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{2(1-\theta)},$$

το οποίο μας δίνει

$$3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Άρα, $A_p \geq 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$. $\square$

Θεώρημα 4. *Αν $2 < q < \infty$, τότε $k_q \simeq n^{\frac{2}{q}}$.*

Απόδειξη: Αν $q > 2$, τότε $\|x\|_q \leq |x|$. Έπεται εύκολα ότι $b = 1$. Από την άλλη πλευρά, η ολοκλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος 1 δείχνει ότι

$$M \geq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}.$$

Άρα,

$$k_q \geq cn(n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}})^2 = cn^{\frac{2}{q}}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F = k$, ο οποίος είναι 4-ισόμορφος με τον ℓ_2^k. Ισοδύναμα, υπάρχουν $u_j = (u_{j1}, \ldots, u_{jn})$ με την ιδιότητα: για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_k$,

$$\left(\sum_{j=1}^k |a_j|^2 \right)^{1/2} \leq \| \sum_{j=1}^k a_j u_j \|_q \leq 4 \left(\sum_{j=1}^k |a_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Επιλέγοντας $a_i = r_i(t)$, έχουμε: για κάθε $t \in [0,1]$,

$$k^{\frac{q}{2}} = \left(\sum_{j=1}^k |r_j(t)|^2 \right)^{q/2} \leq \| \sum_{j=1}^k r_j(t) u_j \|_q^q = \sum_{i=1}^n | \sum_{j=1}^k r_j(t) u_{ji} |^q.$$

Ολοκληρώνουμε στο $[0,1]$ και χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Khinchine:

$$(*) \qquad k^{\frac{q}{2}} \leq \sum_{i=1}^n \int_0^1 | \sum_{j=1}^k r_j(t) u_{ji} |^q dt \leq B_q^q \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k u_{ji}^2 \right)^{q/2}.$$

Όμως, για οποιοδήποτε $i \in \{1,\dots,n\}$, παίρνοντας $a_i = u_{ji}$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} u_{ji}^2 &= \sum_{j=1}^{k} u_{ji}u_{ji} \le \left(\sum_{l=1}^{n} |\sum_{j=1}^{k} u_{ji}u_{jl}|^q \right)^{1/q} \\ &= \|\sum_{j=1}^{k} u_{ji}u_j\|_q \le 4 \left(\sum_{j=1}^{k} u_{ji}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\left(\sum_{j=1}^{k} u_{ji}^2 \right)^{1/2} \le 4,$$

και επιστρέφοντας στην $(*)$ βλέπουμε ότι

$$k^{\frac{q}{2}} \le (4B_q)^q n.$$

Δηλαδή, $k_q \le 16B_q^2 n^{2/q}$. $\Box$

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με δύο εφαρμογές των μεθόδων που αναπτύξαμε (από το [FLM]).

(α) Αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η δυϊκή νόρμα ορίζεται από την $\|x\|_* = \sup\{|\langle x, y\rangle| : \|y\| \le 1\}$. Αν $\frac{1}{a}|x| \le \|x\| \le b|x|$, τότε $\frac{1}{b}|x| \le \|x\|_* \le a|x|$, επομένως αν ορίσουμε $k^* = k(X^*)$ και $M^* = M(X^*)$, το Θεώρημα 1 δείχνει ότι

$$k^* \simeq n(M^*/a)^2.$$

Από την άλλη πλευρά, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$MM^* \ge \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|_*^{\frac{1}{2}} \|x\|^{\frac{1}{2}} \sigma(dx) \right)^2 \ge \left(\int_{S^{n-1}} |\langle x, x\rangle|^{\frac{1}{2}} \sigma(dx) \right)^2 = 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εκτιμήσεις μας για τους k και k^*, συμπεραίνουμε ότι

$$kk^* \ge cn^2 \frac{(MM^*)^2}{(ab)^2} \ge cn^2/(ab)^2.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του John, μπορούμε να επιλέξουμε την θέση του K έτσι ώστε $ab \le \sqrt{n}$, άρα έχουμε αποδείξει το εξής:

Θεώρημα 5. *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X,*

$$k(X)k(X^*) \ge cn. \quad \Box$$

Αυτό ήδη δείχνει ότι για κάθε ζευγάρι (X, X^*), τουλάχιστον μία από τις ποσότητες k, k^* είναι μεγαλύτερη από $c\sqrt{n}$.

(β) Η εκτίμηση $\log n$ στο θεώρημα του Dvoretzky είναι βέλτιστη όπως είδαμε μελετώντας το παράδειγμα του ℓ_∞^n. Το επιχείρημα που δώσαμε για τον κύβο δείχνει κάτι πιό γενικό: Αν P είναι ένα συμμετρικό πολύτοπο, και αν συμβολίσουμε το πλήθος των εδρών του με $f(P)$ και το πλήθος των κορυφών του με $v(P)$, τότε, $k(X) \leq \log f(P)$ και αφού $v(P) = f(P^\circ)$, συμπεραίνουμε ότι $k^* \leq \log v(P)$. Από το Θεώρημα 5 έχουμε $kk^* \geq cn$, και αυτό αποδεικνύει το ακόλουθο συνδυαστικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 6. *Έστω P ένα συμμετρικό πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\log f(P) \log v(P) \geq cn. \quad \Box$$

1.7 Λόγος όγκων - το θεώρημα του Kashin

Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο *λόγος όγκων* του K είναι η ποσότητα

$$vr(K) = \inf\Big\{ \left(\frac{|K|}{|E|}\right)^{1/n} : E \subseteq K \Big\},$$

όπου το inf παίρνεται πάνω από όλα τα ελλειψοειδή που περιέχονται στο K. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο λόγος όγκων είναι αναλλοίωτος ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε αρχικά τυχόν συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Αν $\|\cdot\|$ η αντίστοιχη νόρμα, τότε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\|x\|}^\infty pt^{p-1} e^{-t^p} dt dx \\
&= \int_0^\infty pt^{p-1} e^{-t^p} |\{x : \|x\| \leq t\}| dt \\
&= |K| \int_0^\infty pt^{n+p-1} e^{-t^p} dt \\
&= |K| \Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right).
\end{aligned}$$

Παίρνοντας $K = B_p^n$, $1 \leq p < \infty$, βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p} dx = \left(2 \int_0^\infty e^{-t^p} dt\right)^n = [2\Gamma(1/p + 1)]^n.$$

Επομένως,

$$|B_p^n| = \frac{[2\Gamma(\frac{1}{p} + 1)]^n}{\Gamma(\frac{n}{p} + 1)}.$$

Παρατηρούμε ότι, αν $1 \leq p \leq 2$ τότε το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της B_p^n είναι η $n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} D_n$. Άρα,

$$vr(B_p^n) = \frac{2\Gamma(\frac{1}{p}+1)[\Gamma(\frac{n}{2}+1)]^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}[\Gamma(\frac{n}{p}+1)]^{\frac{1}{n}}\sqrt{\pi}} \leq C,$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά. Δηλαδή, οι μοναδιαίες μπάλες των ℓ_p^n, $1 \leq p \leq 2$ έχουν ομοιόμορφα φραγμένο λόγο όγκων.

Θα δείξουμε ότι αν ένα σώμα K έχει μικρό λόγο όγκων, τότε ο χώρος X_K έχει υποχώρους F με διάσταση ανάλογη του n που έχουν μικρή απόσταση Banach-Mazur από τον $\ell_2^{\dim F}$ (βλέπε [Sz], [STJ]):

Θεώρημα 1. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $vr(K) = A$. Τότε, για κάθε $k \leq n$ υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος F του X_K με την ιδιότητα*

$$d(F, \ell_2^k) \leq 2(8A)^{\frac{n}{n-k+1}}.$$

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η D_n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Τότε, $\|x\|_K \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $k \leq n$. Στην παράγραφο 3 είδαμε ότι

$$\int_{G_{n,k}} \int_{S_F} \|x\|^{-n} \sigma_F(dx) \nu_{n,k}(dF) = \int_{S^{n-1}} \|x\|^{-n} \sigma(dx) = (vr(K))^n.$$

Από την ανισότητα του Markov, το μέτρο των $F \in G_{n,k}$ που ικανοποιούν την

$$\int_{S_F} \|x\|^{-n} \sigma_F(dx) \leq (2vr(K))^n = (2A)^n$$

είναι μεγαλύτερο από $1 - 2^{-n}$. Έστω F ένας τέτοιος υπόχωρος. Τότε, πάλι από την ανισότητα του Markov, για κάθε $r \in (0,1)$ ισχύει

$$\sigma_F\{x \in S_F : \|x\| < r\} \leq (2rA)^n.$$

Έστω $x \in S_F$. Τότε, μπορούμε με απλές εκτιμήσεις να δούμε ότι

$$\sigma_F(C(x, r/2)) \geq \frac{(r/2)^{k-1}}{2^k}.$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν $(2rA)^n < r^{k-1}/2^{2k-1}$ τότε

$$C(x, r/2) \cap \{y \in S_F : \|y\| \geq r\} \neq \emptyset.$$

Δηλαδή, μπορούμε να βρούμε $y \in S_F$ τέτοιο ώστε $|x - y| \leq r/2$ και $\|y\| \geq r$. Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\|x\| \geq \|y\| - \|x - y\| \geq r - |x - y| \geq r/2.$$

Δηλαδή,

$$d(F, \ell_2^k) \leq \frac{2}{r}.$$

Μένει να δούμε πόσο μεγάλο μπορούμε να επιλέξουμε το r: θέλουμε

$$2^{n+2k-1}A^n r^{n-k+1} < 1,$$

το οποίο δίνει $r_{\max} = (8A)^{-\frac{n}{n-k+1}}$. Επομένως,

$$d(F, \ell_2^k) \leq 2(8A)^{\frac{n}{n-k+1}}. \quad \square$$

Παρατήρηση: Το Θεώρημα 1 μας λέει για παράδειγμα ότι, αν $1 \leq p \leq 2$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε ο ℓ_p^n έχει υποχώρους F διάστασης $k = [\lambda n] + 1$ με $d(F, \ell_2^k) \leq C_1^{\frac{1}{1-\lambda}}$, όπου $C_1 > 0$ απόλυτη σταθερά. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ισχυρότερο από τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, με την έννοια ότι έχουμε πληροφορία για υποχώρους διάστασης λn με το λ οσοδήποτε κοντά στο 1. Βέβαια, η εκτίμηση είναι κακή όταν $\lambda \to 1$.

Θα δούμε ένα ακόμα αποτέλεσμα για σώματα με μικρό λόγο όγκων (το Θεώρημα του Kashin [Ka]):

Θεώρημα 2. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η D_n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, και $vr(K) = A$. Τότε, υπάρχει ορθογώνιος μετασχηματισμός $U \in O(n)$ με την ιδιότητα*

$$D_n \subset K \cap U(K) \subset 8A^2 D_n.$$

Απόδειξη: Προφανώς, $D_n \subset K \cap U(K)$, $U \in O(n)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $U \in O(n)$

$$1/\|x\|_{K \cap U(K)} = 1/\max\{\|Ux\|, \|x\|\}.$$

Ψάχνουμε λοιπόν $U \in O(n)$ τέτοιον ώστε $\max\{\|U\theta\|, \|\theta\|\} \geq 1/8A^2$, $\theta \in S^{n-1}$, κάτι για το οποίο αρκεί η

$$N(\theta) := \frac{\|U\theta\| + \|\theta\|}{2} \geq \frac{1}{8A^2} \quad , \quad \theta \in S^{n-1}.$$

Εχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{O(n)} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|U\theta\|^n \|\theta\|^n} \sigma(d\theta)\nu(dU) &= \int_{S^{n-1}} \left(\int_{O(n)} \frac{1}{\|U\theta\|^n} \nu(dU) \right) \frac{1}{\|\theta\|^n} \sigma(d\theta) \\
&= \int_{S^{n-1}} \left(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|\phi\|^n} \sigma(d\phi) \right) \frac{1}{\|\theta\|^n} \sigma(d\theta) \\
&= \left(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|\theta\|^n} \sigma(d\theta) \right)^2 \\
&= A^{2n}.
\end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχει $U \in O(n)$ ο οποίος ικανοποιεί την

$$\int_{S^{n-1}} \left(\frac{2}{\|U\theta\| + \|\theta\|} \right)^{2n} \sigma(d\theta) \leq \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|U\theta\|^n \|\theta\|^n} \sigma(d\theta) \leq A^{2n}.$$

Έστω $\theta \in S^{n-1}$, και $N(\theta) = t$. Αν $\phi \in S^{n-1}$ και $|\theta - \phi| \leq t$, τότε το γεγονός ότι η N είναι νόρμα με σταθερά Lipschitz 1 μας δίνει

$$N(\phi) \leq N(\theta) + N(\phi - \theta) \leq t + |\phi - \theta| \leq 2t.$$

Όμως, $\sigma(C(\theta, t)) \geq t^{n-1}/2^n$, άρα

$$\begin{aligned} \frac{t^{n-1}}{2^n}\frac{1}{(2t)^{2n}} &\leq \sigma(C(\theta,t))\frac{1}{(2t)^{2n}} \\ &\leq \int_{S^{n-1}} \left(\frac{2}{\|U\theta\| + \|\theta\|}\right)^{2n} \sigma(d\theta) \\ &\leq A^{2n}. \end{aligned}$$

Από την παραπάνω ανισότητα είναι φανερό ότι $t \geq 1/(8A)^2$, και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Παρατήρηση: Οι αποδείξεις των δύο Θεωρημάτων είναι της ίδιας φύσης. Αυτό είναι ένα παράδειγμα ενός πολύ γενικότερου φαινομένου: προτάσεις *τοπικού χαρακτήρα* (όπως το Θεώρημα 1) που αφορούν την δομή των υποχώρων ενός χώρου X με νόρμα, έχουν τις αντίστοιχές τους προτάσεις *ολικού χαρακτήρα* (όπως το Θεώρημα 2) που αφορούν την συμπεριφορά ολόκληρης της μοναδιαίας μπάλας του X και των ορθογώνιων μετασχηματισμών της.

Για να τονίσουμε αυτήν τη σχέση, δίνουμε μία απόδειξη του Θεωρήματος 2 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1: Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα που περιέχει την D_n και ικανοποιεί την $|K|/|D_n| \leq A^n$. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 δείχνει ότι το μέτρο των υποχώρων F του X_K διάστασης $n/2$ που ικανοποιούν την

$$D_n \cap F \subset K \cap F \leq cA^2 D_n \cap F$$

είναι μεγαλύτερο από $1 - 2^{-n}$. Επομένως, μπορούμε να βρούμε F τέτοιον ώστε

$$\frac{1}{cA^2}|x| \leq \|x\| \leq |x| \quad , \quad x \in F, F^{\perp}.$$

Ορίζουμε $U = P_F - P_{F^{\perp}}$, όπου $P_F, P_{F^{\perp}}$ οι ορθογώνιες προβολές στους $F, F^{\perp}$ αντίστοιχα. Τότε $U \in O(n)$, και αν $x = x_1 + x_2$ είναι η γραφή του x με $x_1 \in F$, $x_2 \in F^{\perp}$,

$$\begin{aligned} 2|x| &\geq 2\|x\|_{K\cap U(K)} \;\geq\; \|x\| + \|Ux\| \\ &= \|x_1 + x_2\| + \|x_1 - x_2\| \;\geq\; 2\max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} \\ &\geq \|x_1\| + \|x_2\| \;\geq\; \frac{1}{cA^2}\left(|x_1| + |x_2|\right) \\ &\geq \frac{1}{cA^2}|x|. \end{aligned}$$

Άρα, $D_n \subset K \cap U(K) \subset (cA^2/2)D_n$.

Θεωρώντας τον ℓ_1^n, παίρνουμε μια πολύ ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Θεωρήματος 2:

Θεώρημα 3. *Υπάρχουν διανύσματα $y_1,\ldots,y_{2n}\in S^{n-1}$ τέτοια ώστε*

$$c\sqrt{n}\leq\sum_{j=1}^{n}|\langle x,y_j\rangle|\leq 2\sqrt{n}$$

για κάθε $x\in S^{n-1}$, όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της B_1^n είναι η $n^{-1/2}D_n$, και ο λόγος όγκων της είναι μικρότερος από C. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2, υπάρχει $U\in O(n)$ με την ιδιότητα

$$2\sqrt{n}\geq\|x\|_1+\|Ux\|_1\geq\frac{\sqrt{n}}{8C^2}$$

για κάθε $x\in S^{n-1}$. Θέτουμε $y_i=e_i$ και $y_{n+i}=U^*e_i$, $i=1,\ldots,n$. Τότε, η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$2\sqrt{n}\geq\sum_{j=1}^{2n}|\langle x,y_j\rangle|\geq\frac{\sqrt{n}}{8C^2}.\quad\Box$$

Παρατηρήστε ότι τα y_j είναι πολύ ειδικής μορφής: η ένωση μιάς ορθοκανονικής βάσης με μιά στροφή της. Όμως, δεν υπάρχει συγκεκριμένο παράδειγμα τέτοιας επιλογής διανυσμάτων. Η ύπαρξη του U εξασφαλίστηκε, όπως είδαμε, με πιθανοθεωρητικές μεθόδους.

Κεφάλαιο 2

Το Θεώρημα του Krivine

2.1 Εισαγωγή

Έστω X ένας χώρος Banach άπειρης διάστασης και έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στον X. Μία (πεπερασμένη ή άπειρη) ακολουθία $(y_n)_n$ στον X ονομάζεται *block ακολουθία* της $(x_n)_n$, αν υπάρχει ακολουθία φυσικών $k_1 < k_2 < \dots$, ώστε, για κάθε n,

$$y_n = \sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} a_i x_i,$$

για κάποιους συντελεστές $a_i,\ i = k_n + 1, \dots, k_{n+1}$.

Θεωρούμε τώρα δύο χώρους Banach $(X, \|\cdot\|)$, $(Z, |||\cdot|||)$ και δύο ακολουθίες γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ στον X και $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ στον Z. Λέμε ότι η $(z_n)_n$ είναι *πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block* στην $(x_n)_n$, αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει block ακολουθία $(y_i)_{i=1}^{m}$ της $(x_n)_n$ τέτοια ώστε

$$(1-\varepsilon)|||\sum_{i=1}^{m} a_i z_i||| \leq \|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\| \leq (1+\varepsilon)|||\sum_{i=1}^{m} a_i z_i|||,$$

για κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^{m}$.

Ειδικότερα, για $1 \leq p < \infty$, λέμε ότι ο ℓ_p (αντίστοιχα, ο c_0) είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος κατά block στην ακολουθία $(x_n)_n$, αν η κανονική βάση του ℓ_p (αντίστοιχα, του c_0) είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στην $(x_n)_n$, δηλαδή αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει block ακολουθία $(y_i)_{i=1}^{m}$ της $(x_n)_n$ τέτοια ώστε

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\| \leq (1+\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(αντίστοιχα, $(1-\varepsilon)\max_{i=1,\dots,m}|a_i| \le \|\sum_{i=1}^m a_i y_i\| \le (1+\varepsilon)\max_{i=1,\dots,m}|a_i|$), για κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^m$.

Το Θεώρημα του Krivine [K] (1976) που θα παρουσιάσουμε είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα. *Έστω $(x_n)_{n=1}^\infty$ μία ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων σε έναν χώρο Banach X. Τότε είτε υπάρχει p, $1 \le p < \infty$, ώστε ο ℓ_p να είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος κατά block στην $(x_n)_n$ είτε ο c_0 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος κατά block στην $(x_n)_n$.*

Το ερώτημα αν κάθε χώρος Banach άπειρης διάστασης περιέχει έναν υπόχωρο ισόμορφο με κάποιον ℓ_p, $1 \le p < \infty$, ή με τον c_0, ήταν ένα από τα κεντρικά προβλήματα της θεωρίας χώρων Banach ως τις αρχές της δεκαετίας του 70. Αν ο X είναι χώρος Banach με βάση Schauder $(x_n)_n$ και υπάρχει υπόχωρος του X ισόμορφος με τον ℓ_p, για κάποιο $p \in [1,\infty)$ (αντίστοιχα, με τον c_0,), τότε είναι γνωστό ότι υπάρχει άπειρη block ακολουθία $(y_n)_{n=1}^\infty$ της $(x_n)_n$ που είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_p (αντίστοιχα, του c_0.) Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν σταθερές $C, c > 0$, ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^n$, να ισχύει

$$c\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \|\sum_{i=1}^n a_i y_i\| \le C\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(αντίστοιχα, $c\max_{i=1,\dots,n}|a_i| \le \|\sum_{i=1}^n a_i y_i\| \le C\max_{i=1,\dots,n}|a_i|$).

Με βάση αυτό, το προηγούμενο ερώτημα μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής:

Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder $(x_n)_n$. Υπάρχει πάντα μία άπειρη block ακολουθία $(y_n)_n$ της $(x_n)_n$ που είτε είναι ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_p, για κάποιο $p \in [1,\infty)$, είτε είναι ισοδύναμη με τη βάση του c_0;

Το παράδειγμα του Tsirelson [T] (1974) έδωσε αρνητική απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Το θεώρημα του Krivine μπορεί να θεωρηθεί σαν το καλύτερο δυνατό θετικό αποτέλεσμα σε αυτήν την κατεύθυνση.

Μία άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Krivine είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πόρισμα. *Έστω $1 \le p < \infty$ και X χώρος Banach ισόμορφος με τον ℓ_p. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει υπόχωρος F του X διάστασης n που είναι $1+\varepsilon$ - ισόμορφος με τον ℓ_p^n.*

Πάλι, αν $p > 1$, το ανάλογο αποτέλεσμα για υποχώρους άπειρης διάστασης δεν είναι σωστό: Για κάθε $C > 1$, υπάρχει χώρος Banach X ισόμορφος με τον ℓ_p, με την ακόλουθη ιδιότητα: Κάθε υπόχωρος άπειρης διάστασης του X έχει απόσταση Banach-Mazur από τον ℓ_p μεγαλύτερη του C [OS].

Σημειώνουμε ότι, αν $p = 1$, στην περίπτωση δηλαδή που ο X είναι ισόμορφος με τον ℓ_1, ένα θεώρημα του James [J] αποδεικνύει ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει υπόχωρος άπειρης διάστασης Y του X που έχει απόσταση Banach-Mazur από τον ℓ_1 μικρότερη του $1+\varepsilon$. Το ανάλογο ισχύει και αν ο X είναι ισόμορφος με τον c_0. Την απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα τη δούμε παρακάτω.

Περιγράφουμε τώρα τη δομή της απόδειξης του θεωρήματος του Krivine που παρουσιάζουμε.

Χρησιμοποιούμε επανειλημμένα το ακόλουθο λήμμα, η απόδειξη του οποίου είναι άμεση:

Λήμμα. *Η σχέση* «πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα κατά block» *είναι μεταβατική. Δηλαδή, αν οι $(x_i)_i$, $(y_i)_i$, $(z_i)_i$ είναι ακολουθίες στους χώρους Banach X, Y, Z αντίστοιχα, και η $(z_i)_i$ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στην $(y_i)_i$ και η $(y_i)_i$ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στην $(x_i)_i$, τότε η $(z_i)_i$ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στην $(x_i)_i$.* □

Με βάση αυτό το Λήμμα η απόδειξη χωρίζεται σε δύο βασικά στάδια, τα οποία περιγράφονται από τα δύο επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα Α. *Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στον X. Τότε υπάρχει μία 1 - unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά ακολουθία $(z_i)_{i=1}^{\infty}$, η οποία είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στην $(x_n)_n$.*

Θεώρημα Β. *Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία 1 - unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά ακολουθία σε έναν χώρο Banach X με $x_n \neq 0\ \forall n$. Τότε είτε, για κάποιο $p \in [1, \infty)$, ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος κατά block στην $(x_n)_n$, είτε ο c_0 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος κατά block στην $(x_n)_n$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Α, ακολουθούμε κυρίως την εργασία του Rosenthal [R2]. Η απόδειξη προκύπτει συνδυάζοντας τα ακόλουθα αποτελέσματα: Το θεώρημα του Rosenthal [R1] για τον ℓ_1, το θεώρημα Brunel - Sucheston [BS1,2], το θεώρημα του James [J] για τους χώρους που είναι ισόμορφοι με τον ℓ_1 ή τον c_0 και ένα λήμμα του Krivine [K] για unconditional ακολουθίες. Δίνουμε πλήρεις αποδείξεις για τα τρία τελευταία αποτελέσματα, αλλά δεν αποδεικνύουμε το θεώρημα του Rosenthal.

Για το Θεώρημα Β, ακολουθούμε την απόδειξη του Lemberg [Lem], όπως αυτή παρουσιάζεται στο βιβλίο των Milman - Schechtman [MS]. Ο Lemberg βελτίωσε το αρχικό αποτέλεσμα του Krivine και απλοποίησε την απόδειξη του. Ο Krivine είχε αποδείξει αρχικά το ακόλουθο: Αν $(x_n)_n$ είναι μία ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων σε έναν χώρο Banach X, τότε είτε υπάρχει $p \in [1, \infty)$ ώστε ο ℓ_p να είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος κατά block στην $(x_n)_n$, είτε ο c_0 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος κατά block *σε μία αναδιάταξη* της (x_n).

2.2 Ορισμοί - Προκαταρκτικά αποτελέσματα

Συμβολισμός.

Οι διανυσματικοί χώροι που θεωρούμε είναι πραγματικοί και άπειρης διάστασης, εκτός αν δηλώνεται το αντίθετο. Αν το $\{x_i : i \in I\}$ είναι υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X, συμβολίζουμε με $[x_i]_{i \in I}$ τη γραμμική θήκη αυτού του συνόλου.

Συμβολίζουμε με c_{00} το διανυσματικό χώρο των πραγματικών ακολουθιών που είναι τελικά ίσες με 0.

Για κάθε $p \in [1, \infty)$, συμβολίζουμε με ℓ_p το διανυσματικό χώρο

$$\left\{ (a_i)_{i=1}^{\infty} : a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty \right\},$$

εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|(a_i)_{i=1}^{\infty}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p}$.

Συμβολίζουμε με c_0 το διανυσματικό χώρο

$$\left\{ (a_i)_{i=1}^{\infty} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{i \to \infty} a_i = 0 \right\},$$

εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|(a_i)_{i=1}^{\infty}\| = \sup_i |a_i|$.

Οι ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, και ο c_0 είναι χώροι Banach.

Βάσεις Schauder.

Μία ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ σε έναν χώρο Banach X λέγεται *βάση Schauder* του X, αν, για κάθε $x \in X$, υπάρχει μοναδική ακολουθία συντελεστών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

Μία ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ σε έναν χώρο Banach X λέγεται *βασική ακολουθία*, αν είναι βάση Schauder του υποχώρου $\overline{[x_n]}_{n=1}^{\infty}$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει έναν χαρακτηρισμό των βασικών ακολουθιών.

Θεώρημα 1. *Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Η $(x_n)_n$ είναι βασική ακολουθία αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:*
(i) $x_n \neq 0$, για κάθε n.
(ii) Υπάρχει σταθερά $K \geq 1$ ώστε, για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \leq n$ και κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^{n}$, να ισχύει

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|. \square$$

Έστω $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ δύο βασικές ακολουθίες. Λέμε ότι οι $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ είναι *ισοδύναμες*, αν υπάρχει ισομορφισμός $T : \overline{[x_n]}_{n=1}^{\infty} \to \overline{[y_n]}_{n=1}^{\infty}$, με $T(x_n) = y_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. Σ' αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι οι $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ είναι C - ισοδύναμες $(C > 0)$, αν $\|T\|\|T^{-1}\| \leq C$.

Με άλλα λόγια, οι βασικές ακολουθίες $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ είναι C - ισοδύναμες, αν υπάρχουν σταθερές $a, b > 0$ με $ab \leq C$, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^{n}$, να ισχύει

$$\frac{1}{a} \| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \| \leq \| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \| \leq b \| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \|.$$

Unconditional ακολουθίες.

Έστω $C \geq 1$. Μία ακολουθία $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ σε έναν χώρο Banach X λέγεται C - *unconditional* αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^n$ και κάθε ακολουθία προσήμων $(\varepsilon_i)_{i=1}^n$, ισχύει

$$\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i x_i\| \leq C\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|. \tag{1}$$

Πρόταση 1. *Έστω $(x_n)_n$ μία ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) Η ακολουθία $(x_n)_n$ είναι unconditional.
(ii) Υπάρχει σταθερά $M \geq 1$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε $F \subset \{1, \ldots, n\}$ και κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^n$, να ισχύει

$$\|\sum_{i \in F} a_i x_i\| \leq M\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|. \tag{2}$$

Επιπλέον, αν C και M είναι οι καλύτερες σταθερές για τις οποίες ισχύουν οι (1) και (2) αντίστοιχα, τότε $M \leq C \leq 2M$.

Απόδειξη: $(i) \Rightarrow (ii)$. Έστω $F \subset \{1, \ldots, n\}$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, θέτουμε $\varepsilon_i = 1$, αν $i \in F$, $\varepsilon_i = -1$, αν $i \notin F$. Έχουμε

$$\|\sum_{i \in F} a_i x_i\| \leq \frac{1}{2}\left(\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\| + \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i x_i\|\right) \leq C\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Έστω $(\varepsilon_i)_{i=1}^n \in \{-1, 1\}^n$. Θέτουμε $F = \{i \in \{1, \ldots, n\} : \varepsilon_i = 1\}$. Τότε:

$$\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i x_i\| \leq \|\sum_{i \in F} a_i x_i\| + \|\sum_{i \notin F} a_i x_i\| \leq 2M\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|. \ \square$$

Ειδικότερα έπεται ότι κάθε unconditional ακολουθία $(x_n)_n$ με $x_n \neq 0 \ \forall n$, είναι βασική.

Πρόταση 2. *Έστω $(e_i)_i$ μία C - unconditional ακολουθία, $m \in \mathbb{N}$ και $(a_i)_{i=1}^m, (b_i)_{i=1}^m$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν $|a_i| \leq |b_i| \ \forall i$, τότε*

$$\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\| \leq C\|\sum_{i=1}^m b_i e_i\|.$$

Απόδειξη: Έστω $a_i = \mu_i b_i$, όπου $|\mu_i| \leq 1$. Θεωρούμε ένα συναρτησοειδές x^* τέτοιο ώστε $\|x^*\| = 1$ και $x^*\left(\sum_{i=1}^m \mu_i b_i e_i\right) = \|\sum_{i=1}^m \mu_i b_i e_i\|$. Τότε,

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^m \mu_i b_i e_i\| &= \left|x^*\left(\sum_{i=1}^m \mu_i b_i e_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^m |\mu_i||b_i||x^*(e_i)| \\ &\leq \max|\mu_i| \sum_{i=1}^m |b_i||x^*(e_i)| \leq \sum_{i=1}^m |b_i x^*(e_i)|.\end{aligned}$$

Επιλέγουμε ακολουθία προσήμων $(\varepsilon_i)_{i=1}^m$ τέτοια ώστε $\varepsilon_i b_i x^*(e_i) \geq 0$, οπότε

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^m \mu_i b_i e_i\| &\leq \sum_{i=1}^m |b_i x^*(e_i)| = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i b_i x^*(e_i) = x^*\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i b_i e_i\right) \\ &\leq \|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i b_i e_i\| \leq C\|\sum_{i=1}^m b_i e_i\|.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\| \leq C\|\sum_{i=1}^m b_i e_i\|. \ \square$$

Ακολουθίες αναλλοίωτες ως προς διασπορά.

Μία ακολουθία $(x_n)_n$ σε έναν χώρο Banach X λέγεται *αναλλοίωτη ως προς διασπορά (spreading),* αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, κάθε $\{n_1, \ldots, n_m\} \subset \mathbb{N}$ με $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ και κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^m$, ισχύει

$$\|\sum_{i=1}^m a_i x_{n_i}\| = \|\sum_{i=1}^m a_i x_i\|.$$

Θεωρούμε την ακολουθία $(e_i)_{i=1}^\infty$ στον c_{00} με $e_i(j) = \delta_{ij}$ $\forall i, j$. Είναι φανερό ότι η $(e_i)_i$ είναι βάση Schauder του χώρου ℓ_p, για κάθε $p \in [1, \infty)$, καθώς και του c_0. Επιπλέον, σε καθέναν από αυτούς τους χώρους, η $(e_i)_i$ είναι 1 - unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά. Η $(e_i)_i$, θεωρούμενη ως ακολουθία στον ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, (αντίστοιχα, στον c_0), ονομάζεται *συνήθης* ή *κανονική βάση* του ℓ_p (αντίστοιχα, του c_0).

2.3 Απόδειξη του Θεωρήματος Α

Παρουσιάζουμε πρώτα τα βασικά θεωρήματα που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη.

(α) Το Θεώρημα του Rosenthal για τον ℓ_1.

Μία ακολουθία $(x_n)_{n=1}^\infty$ σε έναν χώρο Banach X λέγεται *ασθενώς Cauchy* (w - Cauchy) αν, για κάθε $x^* \in X^*$, η ακολουθία $(x^*(x_n))_{n=1}^\infty$ συγκλίνει. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν ο δυϊκός X^* του X είναι διαχωρίσιμος, τότε κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n)_n$ στον X έχει υπακολουθία που είναι ασθενώς Cauchy: Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $D = \{x_k^* : k \in \mathbb{N}\}$ της B_{X^*}. Η ακολουθία $(x_1^*(x_n))_{n=1}^\infty$ είναι φραγμένη, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Υπάρχει λοιπόν ένα άπειρο υποσύνολο N_1 του $\mathbb{N}$ ώστε η ακολουθία $(x_1^*(x_n))_{n\in N_1}$ να συγκλίνει. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $N_2 \subset N_1$ ώστε η ακολουθία $(x_2^*(x_n))_{n\in N_2}$ να συγκλίνει. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μία ακολουθία $(N_k)_{k=1}^\infty$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με $N_1 \supset N_2 \supset \ldots$

ώστε, για κάθε $k = 1, 2, \dots$, η ακολουθία $(x_k^*(x_n))_{n \in N_k}$ να συγκλίνει. Επιλέγουμε $n_1 < n_2 < \dots$ με $n_k \in N_k$, για κάθε k. Τότε η υπακολουθία $(x_{n_k})_k$ της $(x_n)_n$ είναι ασθενώς Cauchy.

Από την άλλη μεριά, η συνήθης βάση $(e_n)_n$ του χώρου ℓ_1 δεν έχει καμμία w - Cauchy υπακολουθία: Για οποιαδήποτε ακολουθία $(n_i)_{i=1}^{\infty}$, θέτουμε $x^* = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ με $a_{n_{2i}} = 1$, για κάθε i, και $a_n = -1$, για κάθε $n \neq n_{2i}$, Η $(x^*(e_{n_i}))_i$ αποκλίνει. Ο Rosenthal [R1] απέδειξε το ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα διχοτομίας:

Θεώρημα 1 (Rosenthal) [R1]. *Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία διανυσμάτων νόρμας 1 σε έναν χώρο Banach X. Τότε είτε υπάρχει υπακολουθία της $(x_n)_n$ που είναι w - Cauchy είτε υπάρχει υπακολουθία της $(x_n)_n$ που είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1.* $\square$

Η απλούστερη απόδειξη του Θεωρήματος αυτού οφείλεται στον Farahat [F], ο οποίος συνδύασε τις ιδέες του Rosenthal με το γενικευμένο θεώρημα Ramsey του Nash-Williams. Η απόδειξη αυτή παρουσιάζεται στα [D] και [O].

(β) Το Θεώρημα του James για χώρους ισόμορφους με τον ℓ_1 ή τον c_0.

Θεώρημα 2 (James) [J]. (1) *Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία στον X η οποία είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1, δηλαδή υπάρχουν $C, c > 0$ ώστε*

$$c \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \| \leq C \sum_{i=1}^{n} |a_i| \ \ \forall n, \ \forall (a_i)_{i=1}^{n}.$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει block ακολουθία $(y_n)_n$ της $(x_n)_n$, η οποία είναι $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ - ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1.

(2) *Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία στον X η οποία είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του c_0, δηλαδή υπάρχουν $C, c > 0$ ώστε*

$$c \max_{i=1,\dots,n} |a_i| \leq \| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \| \leq C \max_{i=1,\dots,n} |a_i| \ \ \forall n, \ \forall (a_i)_{i=1}^{n}.$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει block ακολουθία $(y_n)_n$ της $(x_n)_n$, η οποία είναι $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ - ισοδύναμη με την κανονική βάση του c_0.

Απόδειξη. (1) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$\lambda_n = \inf \left\{ \| \sum_{i=n}^{\infty} a_i x_i \| : \sum_{i=n}^{\infty} |a_i| = 1 \right\}.$$

Έχουμε $c \leq \lambda_n \leq C$ $\forall n$ και η ακολουθία $(\lambda_n)_n$ είναι αύξουσα, άρα $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$, με $c \leq \lambda \leq C$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\lambda(1-\varepsilon) < \lambda_n \leq \lambda$, για κάθε $n \geq n_0$. Επιλέγουμε μία ακολουθία φυσικών $(k_n)_n$ και μία block ακολουθία $(y_n)_n$ της $(x_n)_n$, τέτοιες ώστε $n_0 \leq k_1 < k_2 < \dots$ και, για κάθε n, $y_n = \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}-1} a_i x_i$ με $\sum_{i=k_n}^{k_{n+1}-1} |a_i| = 1$ και $\|y_n\| < \lambda_{k_n}(1+\varepsilon) \leq \lambda(1+\varepsilon)$.

Τότε, για κάθε $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ με $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| = 1$, από τον ορισμό του λ_n και την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε

$$\lambda(1-\varepsilon) < \lambda_{n_0} \leq \|\sum b_n y_n\| \leq \sup\|y_n\| \leq \lambda(1+\varepsilon).$$

Έπεται ότι η ακολουθία $(\frac{1}{\lambda}y_n)_n$ είναι $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ - ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1.

(2) Η απόδειξη για την περίπτωση του c_0 είναι ανάλογη. Θέτουμε

$$\mu_n = \sup\left\{\|\sum_{i=n}^{\infty} a_i x_i\| : (a_i)_i \in c_0,\ \max_{i\in\mathbb{N}}|a_i| = 1\right\},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία $(\mu_n)_n$ είναι φθίνουσα και για το $\mu = \lim_n \mu_n$ έχουμε $c \leq \mu \leq C$. Οπως πριν, μπορούμε να επιλέξουμε block ακολουθία $(y_n)_n$ της $(x_n)_n$, τέτοια ώστε $\mu(1-\varepsilon) < \|y_n\|$ και

$$\|\sum b_n y_n\| < \mu(1+\varepsilon),$$

για κάθε $(b_n)_n \in c_0$ με $\max|b_n| = 1$.

Για την κάτω εκτίμηση της $\|\sum b_n y_n\|$ έχουμε: Έστω n_0 με $|b_{n_0}| = \max|b_n| = 1$. Τότε

$$\begin{aligned}\|\sum b_n y_n\| &\geq 2\|b_{n_0}y_{n_0}\| - \|\sum_{n\neq n_0} b_n y_n - b_{n_0}y_{n_0}\| \\ &> 2\mu(1-\varepsilon) - \mu(1+\varepsilon) = \mu(1-3\varepsilon).\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(\frac{1}{\mu}y_n)_n$ είναι $\frac{1+\varepsilon}{1-3\varepsilon}$ - ισοδύναμη με την κανονική βάση του c_0. □

Το ερώτημα αν το ανάλογο αποτέλεσμα είναι σωστό σε κάθε χώρο ℓ_p, $1 < p < \infty$, έμεινε ανοικτό για αρκετές δεκαετίες και ήταν γνωστό με το όνομα distortion problem. Το 1993 οι Odell και Schlumprecht [OS] έδωσαν αρνητική απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Απέδειξαν μάλιστα ότι, αν $1 < p < \infty$, τότε, για κάθε $C > 1$, υπάρχει χώρος Banach X ισόμορφος με τον ℓ_p με την ακόλουθη ιδιότητα: Κάθε υπόχωρος Y του X άπειρης διάστασης έχει απόσταση Banach - Mazur από τον ℓ_p μεγαλύτερη του C.

(γ) Η έννοια του spreading model και το Θεώρημα των Brunel και Sucheston.

Το Θεώρημα των Brunel και Sucheston που παρουσιάζουμε σε αυτήν την παράγραφο βασίζεται σε ένα κλασικό συνδυαστικό αποτέλεσμα: Το Θεώρημα του Ramsey.

Για κάθε άπειρο σύνολο $M \subseteq \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $[M]_k$ το σύνολο των υποσυνόλων του M που έχουν k στοιχεία.

Θεώρημα 3 (Ramsey) [Ra]. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $A, B \subseteq [\mathbb{N}]_k$ ώστε $[\mathbb{N}]_k = A \cup B$. Τότε υπάρχει άπειρο υποσύνολο M του $\mathbb{N}$ ώστε είτε $[M]_k \subseteq A$ είτε $[M]_k \subseteq B$.*

Απόδειξη. Δίνουμε πρώτα την απόδειξη για την περίπτωση $k = 2$. Έστω $\mathbb{N} = A \cup B$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap B = \emptyset$.

Έστω $m_1 \in \mathbb{N}$. Χωρίζουμε το $\mathbb{N} \setminus \{m_1\}$ στα δύο σύνολα $\{n \in \mathbb{N} : \{m_1, n\} \in A\}$ και $\{n \in \mathbb{N} : \{m_1, n\} \in B\}$. Ενα από αυτά τα σύνολα είναι άπειρο, δηλαδή υπάρχει άπειρο υποσύνολο M_1 του $\mathbb{N}$ ώστε

$$\text{είτε } \forall m \in M_1\ \{m_1, m\} \in A \quad \text{είτε } \forall m \in M_1\ \{m_1, m\} \in B.$$

Λέμε ότι το ζευγάρι (m_1, M_1) είναι *καλό* αν ισχύει η πρώτη περίπτωση, ενώ το (m_1, M_1) είναι *κακό* αν ισχύει η δεύτερη περίπτωση.

Επιλέγουμε $m_2 \in M_1$ με $m_2 > m_1$. Θεωρούμε τα σύνολα $\{n \in M_1 : \{m_2, n\} \in A\}$ και $\{n \in M_1 : \{m_2, n\} \in B\}$. Αφού το M_1 είναι άπειρο, ένα από τα δύο αυτά σύνολα είναι άπειρο, δηλαδή υπάρχει άπειρο υποσύνολο M_2 του M_1 ώστε

$$\text{είτε } \forall m \in M_2\ \{m_2, m\} \in A \quad \text{είτε } \forall m \in M_2\ \{m_2, m\} \in B.$$

Οπως πριν, ονομάζουμε το ζευγάρι (m_2, M_2) *καλό* στην πρώτη περίπτωση και *κακό* στη δεύτερη περίπτωση.

Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία ζευγαριών (m_n, M_n), $n = 1, 2, \ldots$, με $m_1 < m_2 < \ldots$, $\mathbb{N} \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ και $\forall n\ m_{n+1} \in M_n$, ώστε κάθε ζευγάρι (m_n, M_n) να είναι καλό ή κακό με την παραπάνω έννοια. Ενα από τα σύνολα

$$L_1 = \{n \in \mathbb{N} : \text{το } (m_n, M_n) \text{ είναι καλό}\}, \quad L_2 = \{n \in \mathbb{N} : \text{το } (m_n, M_n) \text{ είναι κακό}\}$$

είναι άπειρο. Αν το L_1 είναι άπειρο, θέτουμε $M = \{m_l : l \in L_1\}$ και είναι φανερό ότι $[M]_2 \subseteq A$. Αν το L_2 είναι άπειρο, θέτουμε $M = \{m_l : l \in L_2\}$ και είναι φανερό ότι $[M]_2 \subseteq B$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη για την περίπτωση $k = 2$.

Με επαγωγή το αποτέλεσμα γενικεύεται για κάθε k. Η απόδειξη του επαγωγικού βήματος είναι τελείως ανάλογη με αυτήν της περίπτωσης $k = 2$ και την παραλείπουμε. □

Ορισμός. *Έστω $(x_n)_n$ μία ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Μία αναλλοίωτη ως προς διασπορά ακολουθία $(z_i)_i$ σε εναν χώρο Banach Z λέγεται spreading model για την $(x_n)_n$, αν ισχύει το εξής:*
Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n ώστε, αν $n < n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, τότε

$$(1 - \varepsilon)\|\sum_{i=1}^{m} a_i z_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{m} a_i x_{n_i}\| \leq (1 + \varepsilon)\|\sum_{i=1}^{m} a_i z_i\|,$$

για κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^m$.

Παρατηρήσεις. 1. Είναι φανερό ότι αν η ακολουθία $(z_n)_n$ είναι spreading model για μία υπακολουθία της $(y_n)_n$, τότε η $(z_n)_n$ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στην $(y_n)_n$.
2. Υποθέτουμε ότι $\|y_n\| = 1\ \forall n$ και ότι, για κάθε k και για κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^k$, το

$$\lim_{n \to \infty,\ n < n_1 < \ldots < n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\|$$

υπάρχει και ικανοποιεί τη σχέση

$$(*) \qquad \max_{i=1,\ldots,k} |a_i| \leq \lim_{n\to\infty,\, n<n_1<\ldots<n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\|.$$

Έστω $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ η κανονική βάση του c_{00}. Ορίζουμε

$$(**) \qquad |||\sum_{i=1}^{k} a_i z_i||| = \lim_{n\to\infty,\, n<n_1<\ldots<n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\|.$$

Τότε η $|||\cdot|||$ είναι νόρμα στον c_{00} και η ακολουθία $(z_i)_i$ στο χώρο $(c_{00}, |||\cdot|||)$ είναι spreading model για την $(y_n)_n$.

Πράγματι. Είναι φανερό από τις $(*)$ και $(**)$ ότι η $|||\cdot|||$ είναι νόρμα και ότι η ακολουθία $(z_i)_i$ είναι αναλλοίωτη ως προς διασπορά στο χώρο $(c_{00}, |||\cdot|||)$. Επιπλέον, η ανισότητα

$$\big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\| - \|\sum_{i=1}^{k} b_i y_{n_i}\|\big| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i - b_i|$$

εξασφαλίζει ότι, για κάθε k, το

$$\lim_{n\to\infty,\, n<n_1<\ldots<n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\|$$

είναι ομοιόμορφο στο σύνολο $\{(a_i)_{i=1}^{k} : \sum_{i=1}^{k} |a_i| \leq 1\}$. Έπεται ότι, για κάθε k και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n ώστε, αν $n < n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, τότε

$$(1-\varepsilon)|||\sum_{i=1}^{k} a_i z_i||| \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n_i}\| \leq (1+\varepsilon)|||\sum_{i=1}^{k} a_i z_i|||,$$

για κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^{k}$.

Θεώρημα 4 (Brunel - Sucheston) [BS1,2]. *Έστω X χώρος Banach και $(v_n)_n$ μία ασθενώς μηδενική ακολουθία στον X με $\|v_n\| = 1$ για κάθε n. Τότε υπάρχει μία 2 - unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά ακολουθία $(z_n)_n$ που είναι spreading model για μία υπακολουθία $(v'_n)_n$ της $(v_n)_n$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(v'_n)_n$ της $(v_n)_n$ τέτοια ώστε, για κάθε k και κάθε $(a_i)_{i=1}^{k}$, να υπάρχει το

$$\lim_{n\to\infty,\, n<n_1<\ldots<n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i v'_{n_i}\|.$$

Παρατηρούμε ότι αρκεί να βρούμε υπακολουθία $(v'_n)_n$ της $(v_n)_n$ ώστε το

$$\lim_{n\to\infty,\, n<n_1<\ldots<n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i v'_{n_i}\|$$

να υπάρχει για κάθε k και κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^k$ με $a_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, k$ και $\sum_{i=1}^k |a_i| = 1$. Θεωρούμε λοιπόν μία αρίθμηση $\{b_i : i = 1, 2, \ldots\}$ του συνόλου

$$\left\{ (a_i)_{i=1}^k : k \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Q},\ \sum_{i=1}^k |a_i| = 1 \right\}.$$

Έστω $b_1 = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1)$. Τότε $0 \leq \| \sum_{i=1}^k a_i^1 v_{n_i} \| \leq 1$, για κάθε $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_1 = \left\{ \{n_1, \ldots, n_k\} : n_1 < n_2 < \ldots < n_k,\ \| \sum_{i=1}^k a_i^1 v_{n_i} \| \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\},$$

$$B_1 = \left\{ \{n_1, \ldots, n_k\} : n_1 < n_2 < \ldots < n_k,\ \| \sum_{i=1}^k a_i^1 v_{n_i} \| \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Ramsey παίρνουμε ένα άπειρο σύνολο $M_1 \subseteq \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε είτε $[M_1]_k \subseteq A_1$ είτε $[M_1]_k \subseteq B_1$. Ας υποθέσουμε ότι $[M_1]_k \subseteq A_1$. Χωρίζουμε το $[M_1]_k$ στα δύο σύνολα

$$A_2 = \left\{ \{n_1, \ldots, n_k\} \subset M_1 : n_1 < n_2 < \ldots < n_k,\ \| \sum_{i=1}^k a_i^1 v_{n_i} \| \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \right\},$$

$$B_2 = \left\{ \{n_1, \ldots, n_k\} \subset M_1 : n_1 < n_2 < \ldots < n_k,\ \| \sum_{i=1}^k a_i^1 v_{n_i} \| \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \right\}$$

και βρίσκουμε ένα άπειρο σύνολο $M_2 \subseteq M_1$ τέτοιο ώστε είτε $[M_2]_k \subseteq A_2$ είτε $[M_2]_k \subseteq B_2$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μία ακολουθία $(J_i)_{i=1}^\infty$ κιβωτισμένων διαστημάτων της μορφής $J_i = [\frac{s_i}{2^i}, \frac{s_i+1}{2^i}]$, όπου $0 \leq s_i \leq 2^i - 1$, και μία φθίνουσα ακολουθία $(M_i)_{i=1}^\infty$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, τέτοιες ώστε, για κάθε i και κάθε $n_1 < \ldots < n_k$ στο M_i, να ισχύει $\| \sum_{j=1}^k a_j^1 v_{n_j} \| \in J_i$.

Επιλέγουμε τώρα μία διαγώνια ακολουθία $(m_i)_{i=1}^\infty$, δηλαδή $m_i \in M_i$ $\forall i$ και $m_1 < m_2 < \ldots$ και θέτουμε $L_1 = \{m_i : i = 1, 2, \ldots\}$. Είναι φανερό ότι το

$$\lim_{\substack{n \to \infty,\ n < n_1 < \ldots < n_k \\ n_1, \ldots, n_k \in L_1}} \| \sum_{j=1}^k a_j^1 v_{n_j} \|$$

υπάρχει.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για την ακολουθία $(v_n)_{n \in L_1}$ και την ακολουθία συντελεστών $b_2 = (a_j^2)_{j=1}^l$ και βρίσκουμε $L_2 \subseteq L_1$ ώστε το

$$\lim_{\substack{n \to \infty,\ n < n_1 < \ldots < n_l \\ n_1, \ldots, n_k \in L_2}} \| \sum_{j=1}^l a_j^2 v_{n_j} \|$$

να υπάρχει. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μία φθίνουσα ακολουθία $(L_i)_{i=1}^{\infty}$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, ώστε, για κάθε i, για την ακολουθία συντελεστών $b_i = (a_j^i)_{j=1}^{k_i}$, το

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\ n<n_1<\ldots<n_{k_i}\\ n_1,\ldots,n_k\in L_i}} \|\sum_{j=1}^{k_i} a_j^i v_{n_j}\|$$

να υπάρχει. Τέλος επιλέγουμε μία διαγώνια ακολουθία $(l_i)_{i=1}^{\infty}$, δηλαδή $l_i \in L_i$ $\forall i$ και $l_1 < l_2 < \ldots$. Θέτουμε $v_i' := v_{l_i}$, $i = 1, 2, \ldots$ και έχουμε τη ζητούμενη υπακολουθία.

Έστω $(z_i)_i$ η κανονική βάση του c_{00}. Ορίζουμε

$$|||\sum_{i=1}^{k} a_i z_i||| = \lim_{n\to\infty,\ n<n_1<\ldots<n_k} \|\sum_{i=1}^{k} a_i v_{n_i}'\|.$$

Θα δείξουμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, για κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^{k}$ και για κάθε $F \subseteq \{1, \ldots, k\}$, ισχύει η σχέση

$$(*)\qquad |||\sum_{i\in F} a_i z_i||| \le |||\sum_{i=1}^{k} a_i z_i|||.$$

Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 2 βλέπουμε ότι η $(z_i)_i$ είναι spreading model για την $(v_n')_n$. Επιπλέον, από την $(*)$ και την Πρόταση 1.1 έπεται ότι η ακολουθία $(z_i)_i$ είναι 2 - unconditional.

Απόδειξη της $(*)$*:* Έστω $(a_i)_{i=1}^{k}$ και $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$|||\sum_{\substack{i=1\\ i\ne i_0}}^{k} a_i z_i||| \le |||\sum_{i=1}^{k} a_i z_i|||.$$

Αφού η ακολουθία $(v_n')_n$ τείνει ασθενώς στο 0, υπάρχει block ακολουθία κυρτών συνδυασμών u_m της $(v_n')_n$ με $\lim_m \|u_m\| = 0$. Έστω

$$u_m = \sum_{i=p_m+1}^{p_{m+1}} \lambda_i^m v_i',$$

όπου $p_1 < p_2 < \ldots$, $\lambda_i^m \ge 0$ $\forall m$, $\forall i$ και $\sum_{i=p_m+1}^{p_{m+1}} \lambda_i^m = 1$ $\forall m$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, αν $n_0 < n_1 < \ldots < n_k$, τότε

$$(1)\qquad \left| \|\sum_{i=1}^{k} a_i v_{n_i}'\| - |||\sum_{i=1}^{k} a_i z_i||| \right| < \varepsilon$$

και

$$(2)\qquad \left| \|\sum_{\substack{i=1\\ i\ne i_0}}^{k} a_i v_{n_i}'\| - |||\sum_{\substack{i=1\\ i\ne i_0}}^{k} a_i z_i||| \right| < \varepsilon.$$

Επιλέγουμε $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_0 + i_0 < p_m$ και $\|u_m\| < \varepsilon$. Για κάθε $j = p_m + 1, \dots, p_{m+1}$, ορίζουμε

$$w_j = \sum_{i=1}^{i_0-1} a_i v'_{n_0+i} + a_{i_0} v'_j + \sum_{i=i_0+1}^{k} a_i v'_{p_{m+1}+i}.$$

Έχουμε

$$\sum_{j=p_m+1}^{p_{m+1}} \lambda_j^m w_j = \sum_{i=1}^{i_0-1} a_i v'_{n_0+i} + a_{i_0} u_m + \sum_{i=i_0+1}^{k} a_i v'_{p_{m+1}+i}.$$

Από τη σχέση (1) παίρνουμε ότι $\|w_j\| < ||| \sum_{i=1}^{k} a_i z_i ||| + \varepsilon$, για κάθε j, οπότε

$$\| \sum_{j=p_m+1}^{p_{m+1}} \lambda_j^m w_j \| < ||| \sum_{i=1}^{k} a_i z_i ||| + \varepsilon.$$

Από τη σχέση (2) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \| \sum_{j=p_m+1}^{p_{m+1}} \lambda_j^m w_j \| &\geq \| \sum_{i=1}^{i_0-1} a_i v'_{n_0+i} + \sum_{i=i_0+1}^{k} a_i v'_{p_{m+1}+i} \| - |a_{i_0}| \|u_m\| \\ &> ||| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{k} a_i z_i ||| - \varepsilon - |a_{i_0}| \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα,

$$||| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{k} a_i z_i ||| < ||| \sum_{i=1}^{k} a_i z_i ||| + 2\varepsilon + |a_{i_0}| \varepsilon$$

και, αφού το ε ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$||| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{k} a_i z_i ||| \leq ||| \sum_{i=1}^{k} a_i z_i |||. \quad \square$$

(δ) Δύο λήμματα του Krivine.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Α χρειαζόμαστε ακόμα ένα λήμμα, το οποίο οφείλεται στον Krivine [Kr] και μας επιτρέπει να περνάμε από μία C - unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά ακολουθία $(z_n)_n$ σε μία 1 - unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά ακολουθία $(e_n)_n$ (Λήμμα 2).

Το πρώτο λήμμα αυτής της παραγράφου εξασφαλίζει ότι, κάτω από αρκετά γενικές προϋποθέσεις, μπορούμε να περάσουμε από μία ακολουθία $\hat{u}_n$, $n \in \mathbb{N}$, block ακολουθιών $\hat{u}_n = (u_i^n)_{i=1}^{k_n}$ της $(x_n)_n$ σε μία οριακή ακολουθία $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ που είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στη $(x_n)_n$. Την τεχνική αυτή θα τη χρησιμοποιήσουμε τόσο στην απόδειξη του Λήμματος 2 όσο και στην απόδειξη του Θεωρήματος Β.

Λήμμα 1. *Έστω $k_n \in \mathbb{N}$, $n = 1, 2, \ldots$, με $k_n \longrightarrow \infty$ και ακολουθίες $(u_i^n)_{i=1}^{k_n}$ σε έναν χώρο Banach X με $\|u_i^n\| = 1$ για κάθε n και $i \leq k_n$, και με την ακόλουθη ιδιότητα: Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$\delta \max |a_i| \leq \| \sum_{i=1}^{k_n} a_i u_i^n \|,$$

για κάθε n και για κάθε $(a_i)_{i=1}^{k_n}$ Τότε, υπάρχει ακολουθία $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ ώστε για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $(a_i)_{i=1}^m$ με $a_i \in \mathbb{R}$, να υπάρχει το $\lim_k \| \sum_{i=1}^m a_i u_i^{n_k} \|$. Επιπλέον, η σχέση

$$\|(a_i)_i\| := \lim_k \| \sum a_i u_i^{n_k} \|$$

ορίζει νόρμα στον c_{00}.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο των ακολουθιών που οι όροι τους είναι ρητοί και μόνο πεπερασμένοι το πλήθος είναι διάφοροι του μηδενός. Θεωρούμε μία αρίθμηση $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ αυτού του συνόλου.

Έστω $b_1 = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{m_1}^1, 0, \ldots)$, $b_2 = (a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{m_2}^2, 0, \ldots)$, ... Έχουμε

$$0 \leq \| \sum_{i=1}^{m_1} a_i^1 u_i^n \| \leq \sum_{i=1}^{m_1} |a_i^1|$$

για κάθε n, άρα η ακολουθία $\left(\| \sum_{i=1}^{m_1} a_i^1 u_i^n \|\right)_n$ είναι φραγμένη, οπότε έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δηλαδή υπάρχει άπειρο σύνολο $N_1 \subset \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το $\lim_{n \in N_1} \| \sum_{i=1}^{m_1} a_i^1 u_i^n \|$ να υπάρχει.

Τώρα η ακολουθία $\left(\| \sum_{i=1}^{m_2} a_i^2 u_i^n \|\right)_{n \in N_1}$ είναι φραγμένη, οπότε έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δηλαδή υπάρχει άπειρο σύνολο $N_2 \subset N_1$ τέτοιο ώστε το $\lim_{n \in N_2} \| \sum_{i=1}^{m_2} a_i^2 u_i^n \|$ να υπάρχει. Συνεχίζουμε επαγωγικά και δημιουργούμε μια φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων των φυσικών $N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_k \supset \ldots$ τέτοια ώστε το $\lim_{n \in N_k} \| \sum_{i=1}^{m_k} a_i^k u_i^n \|$ να υπάρχει, για κάθε k.

Έστω $N_1 = \{n_1^1, n_2^1, n_3^1, \ldots\}$, $N_2 = \{n_1^2, n_2^2, n_3^2, \ldots\}$, ... Θέτουμε $n_k = n_k^k$ και η $(n_k)_k$ είναι η ζητούμενη. Έτσι έχουμε το αποτέλεσμα για ρητούς a_i.

Θεωρούμε τώρα $(a_i)_{i=1}^m$ με $a_i \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $(q_i)_{i=1}^m$ με $q_i \in \mathbb{Q}$ και $\sum_{i=1}^m |a_i - q_i| < \varepsilon$. Τότε

$$\left| \| \sum_{i=1}^m a_i u_i^n \| - \| \sum_{i=1}^m a_i u_i^p \| \right| \leq \left| \| \sum_{i=1}^m a_i u_i^n \| - \| \sum_{i=1}^m q_i u_i^n \| \right| +$$

$$+ \left| \| \sum_{i=1}^m q_i u_i^n \| - \| \sum_{i=1}^m q_i u_i^p \| \right| + \left| \| \sum_{i=1}^m q_i u_i^p \| - \| \sum_{i=1}^m a_i u_i^p \| \right|$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{m}|a_i-q_i| + \left| \|\sum_{i=1}^{m} q_i u_i^n\| - \|\sum_{i=1}^{m} q_i u_i^p\| \right| < 2\varepsilon + \left| \|\sum_{i=1}^{m} q_i u_i^n\| - \|\sum_{i=1}^{m} q_i u_i^p\| \right|.$$

Λόγω του ότι η $(\|\sum_{i=1}^{m} q_i u_i^{n_k}\|)_k$ είναι *Cauchy* παίρνουμε ότι και η $(\|\sum_{i=1}^{m} a_i u_i^{n_k}\|)_k$ είναι *Cauchy*, άρα συγκλίνει.

Τέλος, από τη σχέση $\delta \max_{i=1,\ldots,k_n} |a_i| \leq \|\sum_{i=1}^{k_n} a_i u_i^n\|$, έπεται ότι

$$\delta \max |a_i| \leq \lim_n \|\sum a_i u_i^n\|$$

για κάθε $(a_i)_i \in c_{00}$, άρα η σχέση $\|(a_i)_i\| := \lim_k \|\sum_i a_i u_i^{n_k}\|$ ορίζει νόρμα στον c_{00}.
□

Παρατήρηση. Υποθέτουμε ότι η $(x_j)_j$ είναι μία ακολουθία στον X και ότι, για κάθε n, η $(u_i^n)_{i=1}^{k_n}$ του προηγούμενου λήμματος είναι block ακολουθία της $(x_j)_j$. Έστω $(e_i)_i$ η κανονική βάση του c_{00}. Τότε η $(e_i)_i$ στον χώρο c_{00} με νόρμα την $\|(a_i)_i\| = \lim_k \|\sum a_i u_i^{n_k}\|$ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στη $(x_j)_j$.

Πράγματι. Από τη σχέση

$$\|\sum (a_i - b_i) u_i^n\| \leq \sum |a_i - b_i|,$$

έπεται ότι, για κάθε m, το $\lim_k \|\sum_{i=1}^{m} u_i^{n_k}\|$ είναι ομοιόμορφο στο σύνολο

$$\{(a_i)_{i=1}^m : \sum_{i=1}^{m} |a_i| = 1\}.$$

Άρα, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_l ώστε

$$(1-\varepsilon)\|\sum_{i=1}^{m} a_i u_i^{n_l}\| \leq \lim_k \|\sum_{i=1}^{m} a_i u_i^{n_k}\| = \|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\| \leq (1+\varepsilon)\|\sum_{i=1}^{m} a_i u_i^{n_l}\|,$$

για κάθε ακολουθία συνελεστών $(a_i)_{i=1}^m$.

Λήμμα 2. *Έστω $C > 1$ και $(z_n)_n$ μία C - unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά ακολουθία σε έναν χώρο Banach με $\|z_n\| = 1$ $\forall n$. Υπάρχει τότε μία 1 - unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά ακολουθία $(e_n)_n$ η οποία είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στην $(z_n)_n$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $d_n = \|\sum_{i=1}^{n} z_i\|$, $n = 1, 2, \ldots$. Εχουμε δύο περιπτώσεις:

1η Περίπτωση. Η ακολουθία $(d_n)_n$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|\sum_{i=1}^{n} z_i\| \leq M$ $\forall n$.

Αφού η $(z_i)_i$ είναι C - unconditional, έχουμε

$$\frac{1}{C}\max_{i=1,\ldots,n}|a_i| \leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\| \leq C \max_{i=1,\ldots,n}|a_i| \|\sum_{i=1}^{n} z_i\| \leq CM \max_{i=1,\ldots,n}|a_i|,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $(a_i)_{i=1}^n$. Έπεται ότι η $(z_i)_i$ είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του c_0. Από το θεώρημα του James για τον c_0 παίρνουμε τώρα ότι η κανονική βάση $(e_i)_i$ του c_0 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στη $(z_i)_i$.

2η Περίπτωση. Η ακολουθία $(d_n)_n$ δεν είναι φραγμένη. Τότε $d_n \to \infty$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $i = 1, \dots, n$, ορίζουμε

$$x_i^n = \frac{1}{d_n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j z_{i(n+1)+j}.$$

Αφού η $(z_i)_i$ είναι αναλλοίωτη ως προς διασπορά, ισχύει $\|x_1^n\| = \|x_2^n\| = \cdots = \|x_n^n\|$. Επιπλέον,

$$\frac{1}{C} \leq \|x_i^n\| \leq C \ \ \forall i = 1, \dots, n.$$

Η οικογένεια $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N},\, i=1,\dots,n}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 1, άρα υπάρχει ακολουθία $(k_n)_n$ ώστε το $\lim_{n\to\infty} \| \sum_{i=1}^m a_i x_i^{k_n} \|$ να υπάρχει, για κάθε πεπερασμένη ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^m$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το $\lim_{n\to\infty} \| \sum_{i=1}^m a_i x_i^n \|$ υπάρχει, και ορίζουμε

$$\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \| = \lim_{n\to\infty} \| \sum_{i=1}^m a_i x_i^n \|,$$

για κάθε $(a_i)_{i=1}^m$, όπου $(e_i)_i$ είναι η κανονική βάση του c_{00}.

Αφού η $(z_i)_i$ είναι αναλλοίωτη ως προς διασπορά και, για κάθε n σταθερό, τα διανύσματα x_i^n, $i = 1, \dots, n$ είναι ισοκατανεμημένα ως προς την $(z_i)_i$, έπεται ότι η ακολουθία $(e_i)_i$ είναι επίσης αναλλοίωτη ως προς διασπορά. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(e_i)_i$ είναι 1 - unconditional. Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι το διάνυσμα x_i^n διαφέρει από ένα διάνυσμα που έχει την ίδια κατανομή με το $-x_i^n$ κατά έναν όρο με νόρμα της τάξης του $\frac{1}{d_n}$.

Συγκεκριμμένα, έστω $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $i = 1, \dots, n$, ορίζουμε

$$y_i^n = \frac{1}{d_n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j z_{i(n+1)+j}.$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $i = 1, \dots, n$, το y_i^n εχει την ίδια κατανομή με το $-x_i^n$. Άρα, για κάθε u, v με $u \in [z_j]_{j=1}^{i(n+1)-1}$ και $v \in [z_j]_{j=(i+1)(n+1)}^{\infty}$, ισχύει

$$\|u - x_i^n + v\| = \|u + y_i^n + v\|. \tag{1}$$

Επίσης έχουμε

$$\|x_i^n - y_i^n\| \leq \frac{1}{d_n} \left(\|z_{i(n+1)}\| + \|z_{i(n+1)+n}\| \right) \leq \frac{2}{d_n}. \tag{2}$$

Θεωρούμε ένα $m \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία πραγματικών συντελεστών $(a_i)_{i=1}^m$ και μία ακολουθία προσήμων $(\varepsilon_i)_{i=1}^m$. Θέτουμε $F_1 = \{i \in \{1, \dots, m\} : \varepsilon_i = 1\}$ και $F_2 =$

$\{i \in \{1, \ldots, m\} : \varepsilon_i = -1\}$. Χρησιμοποιώντας την (1), έχουμε

$$\|\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_i x_i^n\| = \|\sum_{i \in F_1} a_i x_i^n + \sum_{i \in F_2} a_i(-x_i^n)\| = \|\sum_{i \in F_1} a_i x_i^n + \sum_{i \in F_2} a_i y_i^n\|.$$

Χρησιμοποιώντας την (2), παίρνουμε λοιπόν,

$$\left| \|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^n\| - \|\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_i x_i^n\| \right| \leq \|\sum_{i \in F_2} a_i(x_i^n - y_i^n)\| \leq \frac{2}{d_n} \sum_{i=1}^{m} |a_i|.$$

Παίρνοντας $n \to \infty$, συμπεραίνουμε ότι

$$\|\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_i e_i\| = \|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\|. \ \square$$

(ε) Απόδειξη του Θεωρήματος Α.

Θεώρημα Α. *Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στον X. Τότε υπάρχει μία 1 - unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά ακολουθία $(z_i)_{i=1}^{\infty}$, η οποία είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στην $(x_n)_n$.*

Απόδειξη: Κατ' αρχάς περνάμε σε *block* ακολουθία $(y_n)_n$ της $(x_n)_n$ με $\|y_n\| = 1$ ώστε $\|y_n - y_m\| \geq 1 \ \forall n, m, \ n \neq m$. Η επιλογή των y_n γίνεται με επαγωγή, ως εξής:

Ορίζουμε $y_1 := x_1$. Υποθέτουμε ότι έχουμε επιλέξει τα $y_1, y_2, \ldots, y_n$ block της $(x_n)_n$, με τις παραπάνω ιδιότητες. Έστω $p \in \mathbb{N}$ ώστε $y_i \in [x_k]_{k=1}^{p}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Διαλέγουμε $y_1^*, \ldots, y_n^*$ στον X^* τέτοια ώστε $\|y_i^*\| = 1$ και $y_i^*(y_i) = \|y_i\| = 1$. Τότε υπάρχει $y_{n+1} \in [x_k]_{k=p+1}^{\infty}$ τέτοιο ώστε $\|y_{n+1}\| = 1$ και $y_i^*(y_{n+1}) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$.

Για κάθε $m \leq n$ ισχύει

$$\|y_{n+1} - y_m\| \geq |y_m^*(y_{n+1} - y_m)| = |y_m^*(y_{n+1}) - y_m^*(y_m)| = y_m^*(y_m) = 1.$$

Άρα, για κάθε $m \leq n$, $\|y_{n+1} - y_m\| \geq 1$.

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα του Rosenthal στην ακολουθία $(y_n)_n$. Εχουμε δύο περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: Υπάρχει υπακολουθία $(y'_n)_n$ της $(y_n)_n$ που είναι ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_1. Από το θεώρημα του James παίρνουμε τότε ότι ο ℓ_1 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος κατά block στην (y'_n), άρα και στην (x_n).

2η Περίπτωση: Υπάρχει υπακολουθία $(y'_n)_n$ της $(y_n)_n$ που είναι w - Cauchy. Ορίζουμε τότε

$$u_n = \frac{y'_{2n+1} - y'_{2n}}{\|y'_{2n+1} - y'_{2n}\|}, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Η ακολουθία (u_n) τείνει ασθενώς στο 0 και $\|u_n\| = 1\ \forall n$. Από το θεώρημα Brunel - Sucheston έπεται ότι υπάρχει μία 2 - unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά ακολουθία (v_n) η οποία είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στην (u_n). Τέλος χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2 για να περάσουμε σε μία 1 - unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά ακολουθία (z_n) η οποία είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμη κατά block στην (v_n), άρα και στην (x_n). □

2.4 Απόδειξη του Θεωρήματος B

Ακολουθούμε την απόδειξη του Lemberg [L]. Ο Lemberg απλοποίησε την απόδειξη του Krivine χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο ζευγάρι τελεστών. Κλειδί για την απόδειξη του Lemberg είναι η Πρόταση 1, στην οποία αποδεικνύεται ότι αν ο X είναι μιγαδικός χώρος Banach και οι $T,\ S \in \mathcal{L}(X)$ είναι ένα ζευγάρι τελεστών που αντιμετατίθενται, τότε υπάρχουν κατά προσέγγιση ιδιοτιμές λ του T και μ του S στις οποίες αντιστοιχεί μία κοινή ακολουθία κατά προσέγγιση ιδιοδιανυσμάτων $(v_n)_n$.

Το Λήμμα 1 είναι ένα γνωστό αποτέλεσμα της θεωρίας τελεστών, που λέει ότι κάθε τελεστής $T \in \mathcal{L}(X)$, (X μιγαδικός χώρος Banach) έχει μία κατά προσέγγιση ιδιοτιμή. Τέλος, χρησιμοποιούμε ένα επίσης γνωστό αποτέλεσμα της θεωρίας αριθμών: Το σύνολο των αριθμών της μορφής $2^k/3^l,\ k,l \in \mathbb{N}$, είναι πυκνό στο $\mathbb{R}^+$ (Λήμμα 2).

Λήμμα 1. *Έστω X μιγαδικός χώρος Banach και $T : X \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, και έστω $\lambda \in \partial\sigma(T)$. Τοτε το λ είναι κατά προσέγγιση ιδιοτιμή του T.*

Απόδειξη: Αφού $\lambda \in \partial\sigma(T)$, υπάρχει $(\lambda_n)_n \in \mathbb{C}\backslash\sigma(T)$ τέτοια ώστε $\lambda_n \to \lambda$. Ισχυριζόμαστε ότι $\|(T-\lambda_n I)^{-1}\| \to \infty$.

Εστω ότι η ακολουθία $\|(T-\lambda_n I)^{-1}\|$ δεν τείνει στο άπειρο. Τότε υπάρχει $M > 0$ και υπακολουθία (λ_{k_n}) της (λ_n) τέτοια ώστε $\|(T-\lambda_{k_n} I)^{-1}\| \leq M$. Έπεται ότι

$$\|(T-\lambda_{k_n} I)^{-1}\||\lambda_{k_n} - \lambda| \to 0,$$

άρα για μεγάλα n έχουμε ότι $\|(T-\lambda_{k_n} I)^{-1}\||\lambda_{k_n} - \lambda| \leq \frac{1}{2}$. Ισχύει ότι αν $A \in \mathcal{L}(X)$ και $\|A\| < 1$ τότε ο $I - A$ είναι αντιστρέψιμος. Εχουμε

$$\|(T-\lambda_{k_n} I)^{-1}(T-\lambda_{k_n} I - T + \lambda I)\| = \|(T-\lambda_{k_n} I)^{-1}(\lambda_{k_n} - \lambda)\|$$

$$= \|(T-\lambda_{k_n} I)^{-1}\||\lambda_{k_n} - \lambda| < 1$$

άρα ο $I - (T-\lambda_{k_n} I)^{-1}(T-\lambda_{k_n} I - T + \lambda I)$ αντιστρέφεται, δηλαδή ο $(T-\lambda_{k_n} I)^{-1}(T - \lambda I)$ αντιστρέφεται, δηλαδή ο $T - \lambda I$ αντιστρέφεται. Αυτό είναι άτοπο, αφού $\lambda \in \sigma(T)$.

Άρα $\|(T-\lambda_n)^{-1} I\| \to \infty$, δηλαδή υπάρχει ακολουθία $(v_n)_n$ στον X με $\|v_n\| = 1$ τέτοια ώστε

$$\|(T-\lambda_n I)^{-1}(v_n)\| \to \infty.$$

Ορίζουμε $y_n = (T - \lambda_n)^{-1}(v_n)$. Τότε, $(T - \lambda_n I)(y_n) = v_n$, $\|y_n\| \to \infty$ και $\|(T - \lambda_n I)(y_n)\| = 1$. Ορίζουμε $u_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. Τότε $\|u_n\| = 1$ και

$$\|(T - \lambda_n I)u_n\| = \frac{\|(T - \lambda_n I)(y_n)\|}{\|y_n\|} \to 0.$$

Για την $(u_n)_n$ ισχύει ότι

$$\|(T-\lambda I)(u_n)\| = \|Tu_n - \lambda_n u_n + \lambda_n u_n - \lambda u_n\| \leq \|Tu_n - \lambda_n u_n\| + |\lambda_n - \lambda|\|u_n\| \to 0,$$

άρα το λ είναι κατά προσέγγιση ιδιοτιμή του T . $\square$

Πρόταση 1. *Έστω X μιγαδικός χώρος Banach και έστω $T, S : X \to X$ δύο φραγμένοι γραμμικοί τελεστές με $TS = ST$. Έστω λ μια κατά προσέγγιση ιδιοτιμη του T. Τότε υπάρχουν $\mu \in \sigma(S)$ και ακολουθία $(v_n)_n$ στον X, τέτοια ώστε $\|v_n\| = 1$ και $\|Tv_n - \lambda v_n\| \to 0$ και $\|Sv_n - \mu v_n\| \to 0$.*

Απόδειξη : Θεωρούμε ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον ℓ_∞, το οποίο συμβολίζουμε με LIM και έχει την ιδιότητα

$$(*) \qquad \liminf a_n \leq LIM((a_n)_n) \leq \limsup a_n \ \ \forall (a_n)_n \in \ell_\infty.$$

Ενα τέτοιο συναρτησοειδές λέγεται Banach limit και βρίσκεται θεωρώντας στο χώρο c των συγκλινουσών ακολουθιών το συναρτησοειδές f με $f((a_n)_n) = \lim a_n \ \ \forall (a_n)_n \in c$. Μετά εφαρμόζουμε το θεώρημα Hahn - Banach για να επεκτείνουμε το f σε ένα συναρτησοειδές LIM στον ℓ_∞ που ικανοποιεί την ανισότητα $(*)$.

Παρατηρούμε ότι $\|LIM\| = 1$ και ότι το LIM είναι θετικό συναρτησοειδές, δηλαδή αν $a_n \geq 0 \ \forall n$ τότε $\liminf a_n \geq 0$ άρα $LIM((a_n)_n) \geq 0$. Επίσης, αν η $(a_n)_n$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία, τότε $LIM((a_n)_n) = \lim a_n$.

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο
$$(\textstyle\sum \oplus X)_\infty = \{(x_n)_n : x_n \in X \ \forall n \text{ και } (\|x_n\|)_n \text{ φραγμένη } \}.$$
Στο χώρο αυτό ορίζουμε την ημινόρμα

$$|||(x_n)_{n=1}^\infty||| = LIM\left((\|x_n\|)_n\right),$$

όπου $(x_n)_{n=1}^\infty \in (\sum \oplus X)_\infty$. Θεωρούμε τον υπόχωρο $N = \{(x_n)_n : LIM\|x_n\| = 0\}$ και ορίζουμε το χώρο
$$Z = (\sum \oplus X)_\infty \Big/ N.$$

Στο χώρο αυτό η ημινόρμα που ορίσαμε προηγουμένως επάγει μία νόρμα, την οποία συμβολίζουμε πάλι με $\|\cdot\|$. Έστω $\overline{Z}$ η πλήρωση του Z. Ορίζουμε $\overline{T} : (\sum \oplus X)_\infty \to (\sum \oplus X)_\infty$ ώς εξής:
$$\overline{T}(x_1, x_2, \ldots) = (Tx_1, Tx_2, \ldots).$$

Ο $\overline{T}$ είναι γραμμικός τελεστής. Ο $\overline{T}$ επάγει έναν τελεστή $\overline{T} : Z \to Z$ γιατί, αν $LIM\|x_n\| = 0$, τότε από τη θετικότητα του T έχουμε ότι

$$|||\overline{T}((x_n)_n)||| = LIM\|T(x_n)\| \leq LIM(\|T\|\|x_n\|) = \|T\|LIM\|x_n\|$$

άρα $|||\overline{T}((x_n)_n)||| = 0$.

Ο $\overline{T}$ είναι γραμμικός και φραγμένος τελεστής, σύμφωνα με την προηγούμενη ανισότητα, άρα επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε φραγμένο τελεστή στην πλήρωση του Z. Ομοίως ορίζουμε $\overline{S} : (\sum \oplus X)_\infty \to (\sum \oplus X)_\infty$ με

$$\overline{S}(x_1, x_2, \ldots) = (Sx_1, Sx_2, \ldots)$$

και τον επεκτείνουμε με τον ίδιο τρόπο στον $\overline{Z}$.

Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι η λ είναι κατά προσέγγιση ιδιοτιμή του T, άρα υπάρχει ακολουθία $(u_n)_n$ τέτοια ώστε $\|u_n\| = 1$ και $\lim \|Tu_n - \lambda u_n\| = 0$. Οπότε $LIM\|Tu_n - \lambda u_n\| = 0$, δηλαδή $|||(Tu_n - \lambda u_n)_n||| = 0$. Θέτοντας $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots)$ έχουμε ότι $|||\overline{T}\overline{u} - \lambda\overline{u}||| = 0$, άρα $\overline{T}\overline{u} = \lambda\overline{u}$. Άρα το λ είναι ιδιοτιμή του $\overline{T}$ και το $\overline{u} = (u_n)_n$ είναι ιδιοδιάνυσμα του.

Έστω $Y \subseteq Z$ ο ιδιόχωρος του $\overline{T}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Αφού $\overline{T}\,\overline{S} = \overline{S}\,\overline{T}$, παίρνουμε ότι $\overline{S}(Y) \subseteq Y$. Πράγματι. Έστω $\overline{v} \in Y$. Τότε, από τον ορισμό του Y, έχουμε ότι $\overline{T}\overline{v} = \lambda\overline{v}$. Άρα,

$$\overline{T}(\overline{S}\overline{v}) = \overline{S}(\overline{T}\overline{v}) = \overline{S}(\lambda\overline{v}) = \lambda(\overline{S}\overline{v}).$$

Δηλαδή, $\overline{S}\overline{v} \in Y$.

Θεωρούμε τον περιορισμό του $\overline{S}$ στον Y. Το φάσμα του τελεστή $(\overline{S}|Y)$ είναι μη κενό, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα μ τέτοιο ώστε $\mu \in \partial\sigma(\overline{S}|Y)$. Τότε, εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα, έχουμε ότι το μ είναι κατά προσέγγιση ιδιοτιμή του $\overline{S}|Y$.

Έστω $(\overline{u}_i)_i$ μία ακολουθία κατά προσέγγιση ιδιοδιανυσμάτων του $\overline{S}|Y$που αντιστοιχεί στο μ, δηλαδή $|||\overline{S}\overline{u_i} - \mu\overline{u_i}||| \to 0$.

Αν $\overline{u}_i = (u_{i,n})_n$, έχουμε $\lim_i |||\overline{S}(u_{i,1}, u_{i,2}, ...) - \mu(u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots)||| = 0$, δηλαδή

$$\lim_i LIM_n \|Su_{i,n} - \mu u_{i,n}\| = 0.$$

Τα $\overline{u_i}$ είναι στοιχεία του Y, οπότε έχουμε ότι $\|\overline{T}\overline{u_i} - \lambda\overline{u_i}\| = 0$, δηλαδή

$$LIM_n \|Tu_{i,n} - \lambda u_{i,n}\| = 0 \ \ \forall i.$$

Αφού $\lim_i LIM_n \|Su_{i,n} - \mu u_{i,n}\| = 0$, έχουμε ότι υπάρχει i_1 τέτοιο ώστε $LIM\|Su_{i_1,n} - \mu u_{i_1,n}\| < 1$, και για κάθε i ισχύει ότι $LIM_n\|Tu_{i,n} - \lambda u_{i,n}\| = 0$. Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$LIM_n(\|Tu_{i_1,n} - \lambda u_{i_1,n}\| + \|Su_{i_1,n} - \mu u_{i_1,n}\|) < 1.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} &\liminf\left(\|Tu_{i_1,n} - \lambda u_{i_1,n}\| + \|Su_{i_1,n} - \mu u_{i_1,n}\|\right) \\ &\leq LIM\left(\|Tu_{i_1,n} - \lambda u_{i_1,n}\| + \|Su_{i_1,n} - \mu u_{i_1,n}\|\right) < 1. \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε

$$\|Tu_{i_1,n_1} - \lambda u_{i_1,n_1}\| + \|Su_{i_1,n_1} - \mu u_{i_1,n_1}\| < 1.$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και δημιουργούμε ακολουθία $(u_{i_k,n_k})_{k=1}^{\infty}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\|Tu_{i_k,n_k} - \lambda u_{i_k,n_k}\| + \|Su_{i_k,n_k} - \mu u_{i_k,n_k}\| < \frac{1}{k}.$$

Άρα $\lim_k \|Tu_{i_k,n_k} - \lambda u_{i_k,n_k}\| = 0$ και $\lim_k \|Su_{i_k,n_k} - \mu u_{i_k,n_k}\| = 0$.

Ορίζουμε $v_k = u_{i_k,n_k}$, οπότε έχουμε ότι
$\lim_k \|Tv_k - \lambda v_k\| = 0$ και $\lim_k \|Sv_k - \mu v_k\| = 0$. $\square$

Λήμμα 2. *Έστω τ θετικός άρρητος. Το σύνολο $\{n\tau - m : n, m \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε πρώτα τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 < n\tau - [n\tau] < \varepsilon$.
[*Απόδειξη του ισχυρισμού:* Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει n ώστε

$$0 < n\tau - [n\tau] < \frac{\tau}{2}.$$

Μετά, επαγωγικά, δείχνουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει n τέτοιο ώστε $0 < n\tau - [n\tau] < \frac{\tau}{2^m}$.

Υποθέτουμε ότι $0 < \tau < 1$. Διαφορετικά δουλεύουμε με το $\tau - [\tau]$. Έστω n_0 τέτοιο ώστε $n_0\tau < 1 < (n_0+1)\tau$. Αν ισχύει ότι $(n_0+1)\tau - 1 < \frac{\tau}{2}$, τότε έχουμε τελειώσει. Διαφορετικά, αν δεν ισχύει το παραπάνω, έχουμε ότι $1 - n_0\tau < \frac{\tau}{2}$. Ορίζουμε $\theta = 1 - n_0\tau$, οπότε έχουμε ότι $\theta < \frac{\tau}{2}$ και ότι

$$\frac{\tau}{2} < \tau - \theta = (n_0+1)\tau - 1.$$

Έστω k ο μικρότερος φυσικός ώστε $0 < \tau - k\theta < \frac{\tau}{2}$. Τότε ισχύει ότι

$$0 < (kn_0+1)\tau - k < \frac{\tau}{2},$$

οπότε έχουμε τελειώσει, αφού για $m := kn_0 + 1$, έχουμε ότι $0 < m\tau - [m\tau] < \frac{\tau}{2}$.]

Η πυκνότητα αποδεικνύεται τώρα ως εξής: Έστω x, y δύο πραγματικοί αριθμοί με $0 < x < y$. Θέτουμε $\varepsilon := y - x$. Τότε υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $0 < n\tau - m < \varepsilon$. Ισχύει ότι $(n\tau - m)k \xrightarrow{k} \infty$, οπότε θεωρούμε το μικρότερο k για το οποίο $x < (n\tau - m)k$. Τότε $(n\tau - m)(k-1) \le x$, άρα

$$x < (n\tau - m)k \le x + (n\tau - m) < x + \varepsilon = y,$$

δηλαδή $x < kn\tau - km < y$.

Άρα, οι αριθμοί της μορφής $n\tau - m,\ \ n, m \in \mathbb{N}$ είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}^+$. Είναι τώρα φανερό ότι είναι πυκνοί και στο $\mathbb{R}$. $\square$

Θεώρημα B. *Έστω X χώρος Banach και $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X, η οποία είναι 1-unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά με $x_j \neq 0\ \ \forall j$. Τότε υπάρχει p με $1 \le p \le \infty$ με την ακόλουθη ιδιότητα:*

Για κάθε $\varepsilon > 0$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχουν* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *block των* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *τέτοια ώστε*

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} \leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\| \leq (1+\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p},$$

για κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^{n}$.

Απόδειξη: Μεταφερόμαστε κατ' αρχάς από την ακολουθία $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ σε μία ακολουθία $(e_r)_{r\in Q}$ αριθμημένη από το σύνολο Q των θετικών ρητών με τον ακόλουθο τρόπο:

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο Y όλων των συναρτήσεων $a : Q \to \mathbb{R}$, οι οποίες έχουν πεπερασμένο φορέα. Συμβολίζουμε με $(a_r)_{r\in Q}$ μία τέτοια συνάρτηση και με $\mathrm{supp}((a_r)_{r\in Q})$ το φορέα της, δηλαδή $\mathrm{supp}((a_r)_{r\in Q}) = \{r \in Q : a_r \neq 0\}$.

Έστω $(e_r)_r \in Q$ η αλγεβρική βάση του Y με $e_r(q) = 1$ όταν $q = r$ και $e_r(q) = 0$ όταν $q \neq r$. Ορίζουμε μία νόρμα $\|\cdot\|$ στον Y ως εξής:

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_{r_i}\| = \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|,$$

για κάθε $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ στο Q και για κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_i)_{i=1}^{n}$. Ο ορισμός της νόρμας είναι συνεπής αφού η $(x_i)_i$ είναι αναλλοίωτη ως προς διασπορά.

Έπεται ότι κάθε πεπερασμένη ακολουθία $(e_{r_i})_{i=1}^{n}$ με $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$, είναι 1-ισοδύναμη με την $(x_i)_{i=1}^{n}$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει p ώστε ο ℓ_p να είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος κατά block στην $(e_r)_{r\in Q}$. Επιπλέον, αφού η $(x_i)_i$ είναι αναλλοίωτη ως προς διασπορά και 1-unconditional, έπεται ότι η $(e_r)_r$ είναι αναλλοίωτη ως προς διασπορά και 1-unconditional, δηλαδή, αν $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ και $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$,

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_{r_i}\| = \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i e_{s_i}\|$$

για οποιαδήποτε επιλογή συντελεστών $(a_i)_{i=1}^{n}$ και προσήμων $(\varepsilon_i)_{i=1}^{n}$. Θα λέμε ότι τα διανύσματα $x, y \in Y$ είναι ισοκατανεμημένα, αν $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_{r_i}$ και $y = \sum_{i=1}^{n} a_i e_{s_i}$, όπου $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$, $s_1 < s_2 < \ldots s_n$ και $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Θεωρούμε τήν πλήρωση $\overline{Y}$ του Y. Επεκτείνουμε τους Y και $\overline{Y}$ σε μιγαδικούς χώρους ορίζοντας $\|\sum_{r\in Q} a_r e_r\| = \|\sum_{r\in Q} |a_r| e_r\|$ όπου $a_r \in \mathbb{C}$.

Ορίζουμε τώρα δύο γραμμικούς τελεστές T και S στον Y ως εξής:

Για κάθε $j = 0, 1, \ldots$ και για $q \in Q \cap [j, j+1)$ με $q = j + r$, $0 \leq r < 1$, θέτουμε

$$T(e_q) = T(e_{j+r}) = e_{j+\frac{r}{2}} + e_{j+\frac{r+1}{2}}$$

και

$$S(e_q) = S(e_{j+r}) = e_{j+\frac{r}{3}} + e_{j+\frac{r+1}{3}} + e_{j+\frac{r+2}{3}}.$$

Παρατηρούμε ότι οι T και S είναι φραγμένοι τελεστές. Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $(e_r)_r$ είναι 1-unconditional και αναλλοίωτη ως προς διασπορά, έχουμε ότι

$$\|x\| \leq \|Tx\| \leq 2\|x\|$$

και

$$\|x\| \leq \|Sx\| \leq 3\|x\|.$$

Οι T και S επεκτείνονται μοναδικά σε φραγμένους τελεστές στην πλήρωση του Y. Ακόμα, αποδεικνύεται εύκολα ότι $TS = ST$.

Θεωρούμε τώρα τον υπόχωρο Y_0 του Y, όπου

$$Y_0 = [e_r]_{r \in Q \cap [0,1)}.$$

Συμβολίζουμε με T_1 και S_1 αντίστοιχα τον περιορισμό του T και του S στον $\overline{Y_0}$.

Έστω λ μία κατά προσέγγιση ιδιοτιμή του T_1. Τέτοια υπάρχει τουλάχιστον μία, αφού $\partial\sigma(T_1) \neq \emptyset$ και κάθε $\lambda \in \partial\sigma(T_1)$, σύμφωνα με το Λήμμα 1, είναι κατά προσέγγιση ιδιοτιμή του T_1. Έχουμε λοιπόν ένα χώρο Banach $\overline{Y_0}$, δύο φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T_1, S_1 \ : \ \overline{Y_0} \to \overline{Y_0}$, και μία κατά προσέγγιση ιδιοτιμή λ του T_1. Επιπλέον, οι T_1 και S_1 συνδέονται με τη σχέση $T_1S_1 = S_1T_1$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 1 έχουμε ότι υπάρχουν $\mu \in \sigma(S_1)$ και ακολουθία $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε: $y_n \in \overline{Y}_0$, $\|y_n\| = 1$, $\lim_n \|T_1y_n - \lambda y_n\| = 0$ και $\lim_n \|S_1y_n - \mu y_n\| = 0$. Άρα γι' αυτήν την $(y_n)_n$ ισχύει ότι

$$\lim_n \|Ty_n - \lambda y_n\| = 0 \text{ και } \lim_n \|Sy_n - \mu y_n\| = 0.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $(y_n)_n \subseteq Y_0$, αφού αν $(y_n)_n \subseteq \overline{Y_0}$, τότε υπάρχει $(x_n)_n \subseteq Y_0$ τέτοια ώστε $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$, οπότε γι' αυτή τη $(x_n)_n$ ισχύει ότι $\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0$ και ότι $\|Sx_n - \mu x_n\| \to 0$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, τόσο ο λ, όσο και οι συντεταγμένες του κάθε y_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι θετικοί αριθμοί.

Πράγματι. Έστω $y_n = \sum a_q e_q$. Τότε $Ty_n = \sum a_q e_{\frac{q}{2}} \ + \ \sum a_q e_{\frac{q+1}{2}}$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|Ty_n - \lambda y_n\| &= \|\sum a_q e_{\frac{q}{2}} \ + \ \sum a_q e_{\frac{q+1}{2}} - \lambda \sum a_q e_q\| \\ &\geq \|\sum |a_q| e_{\frac{q}{2}} \ + \ \sum |a_q| e_{\frac{q+1}{2}} - |\lambda| \sum |a_q| e_q\| \\ &= \|T\left(\sum |a_q| e_q\right) - |\lambda| \sum |a_q| e_q\|. \end{aligned}$$

Για τον ίδιο λόγο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο μ είναι θετικός αριθμός.

Λόγω της σχέσης $\|y_n\| \leq \|Ty_n\| \leq 2\|y_n\|$ και του ότι $\|Ty_n - \lambda y_n\| \to 0$, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$1 \leq \lambda \leq 2.$$

Ομοίως, λόγω της σχέσης $\|y_n\| \leq \|Sy_n\| \leq 3\|y_n\|$ και του ότι $\|Sy_n - \mu y_n\| \to 0$, αποδεικνύεται ότι

$$1 \leq \mu \leq 3.$$

Αναλύουμε κάθε y_n ως προς τη βάση $(e_r)_r$. Έστω $y_n = \sum_{k=1}^{m_n} a_k^n e_{q_k^n}$, όπου $\{q_1^n, \ldots, q_{m_n}^n\} \subset [0,1)$. Ορίζουμε, για κάθε $j = 1, 2, \ldots$,

$$u_j^n = \sum_{k=1}^{m_n} a_k^n e_{j + q_k^n}.$$

Παρατηρούμε ότι $\|u_j^n\| = 1\ \ \forall j, \forall n$. Επιπλέον, για κάθε j ισχύει ότι

$$\|Ty_n - \lambda y_n\| = \|Tu_j^n - \lambda u_j^n\|,$$

αφού τα δύο διανύσματα μέσα στις νόρμες έχουν την ίδια κατανομή και η $(e_r)_{r\in Q}$ είναι αναλλοίωτη ως προς διασπορά. Για τον ίδιο λόγο, $\|Sy_n - \mu y_n\| = \|Su_j^n - \mu u_j^n\|$.

Έπεται ότι, για κάθε j, η $(u_j^n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία κατά προσέγγιση ιδιοδιανυσμάτων του T που αντιστοιχεί στο λ και ταυτοχρόνως είναι ακολουθία κατά προσέγγιση ιδιοδιανυσμάτων του S, που αντιστοιχεί στο μ.

Έστω $i \in \mathbb{N}$. Επειδή τα διανύσματα $u_i^n + u_{i+1}^n$ και Tu_i^n είναι ισοκατανεμημένα, έπεται ότι, για κάθε u, v τέτοια ώστε $\text{supp}(u) \subset [0, i)$ και $\text{supp}(v) \subset [i+2, \infty]$ και για κάθε n, ισχύει ότι

$$\|u + u_i^n + u_{i+1}^n + v\| = \|u + Tu_i^n + v\|.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$\|u + Tu_i^n + v\| - \|u + \lambda u_i^n + v\| \to 0.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$\|u + u_i^n + u_{i+1}^n + v\| - \|u + \lambda u_i^n + v\| \to 0.$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1, υπάρχει υπακολουθία (n_k) τέτοια ώστε για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $(a_i)_{i=1}^m$ να υπάρχει το $\lim_k \|\sum_{i=1}^m a_i u_i^{n_k}\|$ και η συνάρτηση $\|(a_i)_{i=1}^m\| = \lim_k \|\sum_{i=1}^m a_i u_i^{n_k}\|$ να είναι νόρμα στον c_{00}. Θεωρούμε το χώρο των τελικά μηδενικών ακολουθιών με αυτήν τη νόρμα. Έστω $(z_i)_i$ η κανονική βάση αυτού του χώρου, οπότε, για κάθε $(a_i)_i \in c_{00}$,

$$\|\sum_i a_i z_i\| = \|(a_i)_i\| = \lim_k \|\sum_i a_i u_i^{n_k}\|.$$

Παρατηρούμε ότι $\|z_i\| = 1$. Η $(z_i)_i$ είναι αναλλοίωτη ως προς διασπορά και 1-unconditional, αφού η $(e_r)_r$ είναι αναλλοίωτη ως προς διασπορά και 1-unconditional και, για κάθε n και $i \neq j$, τα διανύσματα u_i^n και u_j^n έχουν ξένους φορείς και είναι ισοκατανεμημένα.

Έχουμε δείξει ότι $\forall i \in \mathbb{N}$ και $u = \sum_{k=1}^{i-1} b_k u_k^n$ και $v = \sum_{k=i+2}^{m} c_k u_k^n$ ισχύει ότι

$$\|\sum_{k=1}^{i-1} b_k u_k^n + u_i^n + u_{i+1}^n + \sum_{k=i+2}^{m} c_k u_k^n\| - \|\sum_{k=1}^{i-1} b_k u_k^n + \lambda u_i^n + \sum_{k=i+2}^{m} c_k u_k^n\| \to 0$$

άρα,

$$\lim_p \|\sum_{k=1}^{i-1} b_k u_k^{n_p} + u_i^{n_p} + u_{i+1}^{n_p} + \sum_{k=i+2}^{m} c_k u_k^{n_p}\| = \lim_{n_p} \|\sum_{k=1}^{i-1} b_k u_k^{n_p} + \lambda u_i^{n_p} + \sum_{k=i+2}^{m} c_k u_k^{n_p}\|.$$

Έπεται ότι

$$\|\sum_{k=1}^{i-1} b_k z_k + z_i + z_{i+1} + \sum_{k=i+2}^{m} c_k z_k\| = \|\sum_{k=1}^{i-1} b_k z_k + \lambda z_i + \sum_{k=i+2}^{m} c_k z_k\|.$$

Με επαγωγή παίρνουμε ότι, για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$, και $u, v \in Z$ με $u \in [z_i]_{i=1}^n$ και $v \in [z_i]_{i=n+2^k+1}^{\infty}$,

$$\|u + \sum_{i=n+1}^{n+2^k} z_i + v\| = \|u + \lambda^k z_{n+1} + v\|.$$

Τελείως ανάλογα, παίρνουμε ότι, για κάθε l, $n \in \mathbb{N}$, και u, $v \in Z$ με $u \in [z_i]_{i=1}^n$ και $v \in [z_i]_{i=n+3^l+1}^{\infty}$,

$$\|u + \sum_{i=n+1}^{n+3^l} z_i + v\| = \|u + \mu^l z_{n+1} + v\|.$$

Ειδικότερα, έχουμε, για κάθε k και l,

$$\|\sum_{i=1}^{2^k} z_i\| = \lambda^k$$

$$\|\sum_{i=1}^{3^l} z_i\| = \mu^l$$

$$\|\sum_{i=1}^{2^k 3^l} z_i\| = \lambda^k \mu^l.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η $(z_i)_i$ είναι 1- ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_p για κάποιο p με $1 \leq p < \infty$ ή με τη βάση του c_0.

1η Περίπτωση: $\lambda = 1$, δηλαδή $\|\sum_{i=1}^{2^k} z_i\| = 1 \; \forall k$.

Τότε, για $n \leq 2^k$, λόγω του ότι η $(z_i)_i$ είναι 1-unconditional έχουμε ότι

$$1 = \max \|z_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{n} z_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{2^k} z_i\| = 1$$

άρα $\|\sum_{i=1}^n z_i\| = 1$ για $n \leq 2^k$ $\;,\forall k \in \mathbb{N}$, άρα $\|\sum_{i=1}^n z_i\| = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Από την Πρόταση 1.2, αφού η (z_i) είναι 1 - unconditional, έπεται τώρα ότι για κάθε n ισχύει $\|\sum_{i=1}^n a_i z_i\| = \max |a_i|$. Άρα η $(z_i)_i$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0.

2η Περίπτωση: $\lambda \neq 1$.

Ισχυρισμός. Τότε $\mu \neq 1$ και $\frac{log2}{log3} = \frac{\log\lambda}{\log\mu}$.

[*Απόδειξη του Ισχυρισμού:* Αρκεί οι ρητοί που είναι μικρότεροι από το $\frac{\log 2}{\log 3}$ να είναι ακριβώς εκείνοι που είναι μικρότεροι από το $\frac{\log\lambda}{\log\mu}$. Θέλουμε δηλαδή να δείξουμε ότι, για κάθε $k,\ l \in \mathbb{N}$,

$$\frac{l}{k} \le \frac{\log 2}{\log 3} \Leftrightarrow \frac{l}{k} \le \frac{\log\lambda}{\log\mu},$$

ή ισοδύναμα,

$$3^l \le 2^k \Leftrightarrow \mu^l \le \lambda^k.$$

Έστω ότι $3^l \le 2^k$. Τότε

$$\mu^l = \|\sum_{i=1}^{3^l} z_i\| \le \|\sum_{i=1}^{2^k} z_i\| = \lambda^k.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $3^l > 2^k$. Παίρνοντας m ώστε $2^{mk+1} < 3^{ml}$, έχουμε

$$\lambda^{mk+1} = \|\sum_{i=1}^{2^{mk+1}} z_i\| \le \|\sum_{i=1}^{3^{ml}} z_i\| = \mu^{ml},$$

και αφού $\lambda \neq 1$, παίρνουμε $\lambda^k < \mu^l$.]

Θέτουμε $p = \frac{\log 2}{\log\lambda} = \frac{\log 3}{\log\mu}$, οπότε $\lambda = 2^{1/p}$ και $\mu = 3^{1/p}$. Γι' αυτό το p, θα δείξουμε ότι η $(z_i)_i$ είναι 1-ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_p, δηλαδή ότι, για κάθε n και για οποιουσδήποτε συντελεστές $(a_i)_{i=1}^n$,

$$(*) \qquad \|\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p}.$$

Ήδη ξέρουμε ότι για κάθε $k, l \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\|\sum_{i=1}^{2^k 3^l} z_i\| = (2^k 3^l)^{1/p}.$$

Για να περάσουμε στη γενική περίπτωση χρησιμοποιούμε την ακόλουθη πρόταση:

Το σύνολο $\{\frac{2^k}{3^l} \mid k, l \in \mathbb{N}\}$ *είναι πυκνό στο* $\mathbb{R}^+$.

Η πρόταση αυτή είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 2. Σύμφωνα με το λήμμα, το σύνολο $\{k\frac{\log 2}{\log 3} - l : k, l \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Έπεται ότι το σύνολο $\{\log\frac{2^k}{3^l} : k, l \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Άρα, το σύνολο $\{\frac{2^k}{3^l} : k, l \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}^+$.

Αποδεικνύουμε τώρα την $(*)$ σε τρία βήματα:

Βήμα 1. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\sum_{i=1}^{k} z_i\| = k^{\frac{1}{p}}.$$

Έστω $l \in \mathbb{N}$. Λόγω της πυκνότητας των αριθμών της μορφής $\frac{2^n}{3^m}$ στο $\mathbb{R}^+$, υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\frac{2^n}{3^m} \leq k < \frac{2^n}{3^m}(1+3^{-l})$, δηλαδή

$$2^n 3^l \leq k 3^{l+m} \leq 2^n 3^l + 2^n.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\left(2^n 3^l\right)^{\frac{1}{p}} &= \|\sum_{i=1}^{2^n 3^l} z_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{k3^{l+m}} z_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{2^n 3^l + 2^n} z_i\| \\ &\leq \|\sum_{i=1}^{2^n 3^l} z_i\| + \|\sum_{i=1}^{2^n} z_i\| = \left(2^n 3^l\right)^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{n}{p}}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\left(2^n 3^l\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\sum_{i=1}^{k3^{l+m}} z_i\| \leq \left(2^n 3^l\right)^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{n}{p}}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\|\sum_{k=1}^{i} b_k z_k + \sum_{k=i+1}^{i+3^n} z_k + \sum_{k=i+3^n+1}^{m} c_k z_k\| = \|\sum_{k=1}^{i} b_k z_k + \mu^n z_{i+1} + \sum_{k=i+3^n+1}^{m} c_k z_k\|$$

και το ότι η $(z_i)_i$ είναι αναλλοίωτη ως προς διασπορά έχουμε ότι

$$2^{\frac{n}{p}} 3^{\frac{l}{p}} \leq 3^{\frac{l+m}{p}} \|\sum_{i=1}^{k} z_i\| \leq 2^{\frac{n}{p}} 3^{\frac{l}{p}} + 2^{\frac{n}{p}}$$

Κάνοντας πράξεις παίρνουμε ότι

$$\left(\frac{k}{1+3^{-l}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{2^n}{3^m}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\sum_{i=1}^{k} z_i\| \leq \left(\frac{2^n}{3^m}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1 + \frac{1}{3^{\frac{l}{p}}}\right) \leq k^{\frac{1}{p}} \left(1 + 3^{-\frac{l}{p}}\right).$$

Παίρνοντας $l \to \infty$ έχουμε ότι

$$\|\sum_{i=1}^{k} z_i\| = k^{\frac{1}{p}}.$$

Βήμα 2. Αν τα a_i, $i = 1, \ldots, l$, είναι της μορφής $a_i = \frac{2^{\frac{n_i}{p}}}{3^{\frac{m_i}{p}}}$, τότε

$$\|\sum_{i=1}^{l} a_i z_i\| = \left(\sum_{i=1}^{l} |a_i|^p\right)^{1/p}.$$

Θέτουμε $M = \max m_i$. Έχουμε

$$\|\sum_{i=1}^{l} a_i z_i\| = \frac{1}{3^{\frac{M}{p}}}\|\sum_{i=1}^{l} 2^{\frac{n_i}{p}} 3^{\frac{M-m_i}{p}} z_i\| = \frac{1}{3^{\frac{M}{p}}}\|\sum_{i=1}^{N} z_i\| = \frac{1}{3^{\frac{M}{p}}} N^{\frac{1}{p}},$$

όπου $N = \sum_{i=1}^{l} 2^{n_i} 3^{M-m_i}$. Άρα,

$$\|\sum_{i=1}^{l} a_i z_i\| = \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{2^{n_i} 3^{M-m_i}}{3^M}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{2^{n_i}}{3^{m_i}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{l} {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Βήμα 3.

$$\|\sum_{i=1}^{l} a_i z_i\| = \left(\sum_{i=1}^{l} |a_i|^p\right)^{1/p},$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, k$.

Επειδή η ακολουθία (z_i) είναι 1 - unconditional, αρκεί να θεωρήσουμε $(a_i)_{i=1}^k$ με $a_i \geq 0$. Υπάρχουν $(b_l^i)_l$ της μορφής $b_l^i = \frac{2^{n_l^i}}{3^{m_l^i}}$ τέτοια ώστε $\lim_l b_l^i = a_i^p$, για κάθε $i = 1, \dots, k$. Τότε,

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i z_i\| = \lim_l \|\sum_{i=1}^{k} (b_l^i)^{\frac{1}{p}} z_i\| = \lim_l \left(\sum_{i=1}^{k} b_l^i\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \ \square$$

Βιβλιογραφία

[ABV] J. Arias-de-Reyna, K. Ball and R. Villa, *Concentration of the distance in finite dimensional normed spaces*, Mathematika (to appear).

[Ba] K.M. Ball, *Ellipsoids of maximal volume in convex bodies*, Geom. Dedicata **41** (1992), 241-250.

[BS1] A. Brunel and L. Sucheston, *On B-convex Banach spaces*, Math. Systems Th. **7** (1974), 294-299.

[BS2] A. Brunel and L. Sucheston, *On J-convexity and some ergodic super-properties of Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **204** (1975), 79-90.

[D] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics **92** (1984), Springer Verlag (Chapter XI).

[Do] W.F. Donoghue Jr., *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, (1969).

[Dv1] A. Dvoretzky, *A theorem on convex bodies and applications to Banach spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A **45** (1959), 223-226.

[Dv2] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*, in Proc. Sympos. Linear Spaces, Jerusalem (1961), 123-160.

[DR] A. Dvoretzky and C.A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A **36** (1950), 192-197.

[F] J. Farahat, *Espaces de Banach contenant ℓ_1 d'après H.P. Rosenthal*, Sem. Maurey-Schwartz, Ecole Polytechnique, 1973-74.

[FLM] T. Figiel, J. Lindenstrauss and V.D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), 53-94.

[Gar] R.J. Gardner, *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, New York, 1995.

[Gl] E.D. Gluskin, *The diameter of the Minkowski compactum is approximately equal to n*, Funct. Anal. Appl. **15** (1981), 72-73.

[Go] Y. Gordon, *Gaussian processes and almost spherical sections of convex bodies*, Ann. Probab. **16** (1988), 180-188.

[Gr] A. Grothendieck, *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le theoreme de Dvoretzky-Rogers*, Bol. Soc. Math. Sao Paulo **8** (1956), 81-110.

[J] R.C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math. **80** (1964), 542-550.

[Jo] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187-204.

[Ka] B.S. Kashin, *Sections of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **41** (1977), 334-351.

[Kr] J.L. Krivine, *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Ann. of Math. **104** (1976), 1-29.

[Le] P. Lévy, *Problèmes Concrets d'Analyse Fonctionelle*, Gauthier-Villars, Paris (1951).

[Lem] H. Lemberg, *Nouvelle démonstration d'un théorème de J.L. Krivine sur la finie représentation de ℓ_p dans un espace de Banach*, Israel J. of Math. **39** (1981), 341-348.

[LT] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Vol. 23 Springer, Berlin (1991).

[Mi] V.D. Milman, *New proof of the theorem of Dvoretzky on sections of convex bodies*, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 28-37.

[MS] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200** (1986), Springer, Berlin.

[O] E. Odell, *Applications of Ramsey theorems to Banach space theory*, Notes in Banach spaces (H.E. Lacey, ed.), University of Texas Press (1980), 379-404.

[OS] E. Odell and T. Schlumprecht, *The distortion problem*, Acta Math. **173** (1994), 259-281.

[Pi] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[Ra] F.P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. (2), **30** (1929), 264-286.

[R1] H.P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing ℓ_1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A **71** (1974), 2411-2413.

[R2] H.P. Rosenthal, *On a theorem of J.L. Krivine concerning finite representability of ℓ_p in general Banach spaces*, J. Funct. Anal. **28** (1978), 197-225.

[Sc] G. Schechtman, *A remark concerning the dependence on ε in Dvoretzky's theorem*, Lecture Notes in Mathematics **1376** (1989), 274-277.

[Sch] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[Sz] S.J. Szarek, *On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of ℓ_1^n*, Bull. Acad. Polon. Sci. **26** (1978), 691-694.

[STJ] S.J. Szarek and N. Tomczak-Jaegermann, *On nearly Euclidean decompositions of some classes of Banach spaces*, Compositio Math. **40** (1980), 367-385.

[T] B.S. Tsirelson, *Not every Banach space contains ℓ_p or c_0*, Funct. Anal. Appl. **8** (1974), 138-141.

[Z] C. Zong, *Strange phenomena in convex and discrete geometry*, Universitext, Springer (1996).