Η εικασία του Komlós

Νικος Δαφνης

Διπλωματικη Εργασια

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων
Ιουνιος 2000

.

Η διπλωματική αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Ιούνιο του 2000. Επιβλέπων ήταν ο Α. Γιαννόπουλος.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Α. Γιαννόπουλος, Μ. Κατσοπρινάκης και Μ. Παπαδημητράκης.

.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Προβλήματα εξισορρόπησης διανυσμάτων

1.1 Κυρτά σώματα

(α) Ορισμοί

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο έχουμε εφοδιάσει με το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και την Ευκλείδεια νόρμα $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ που επάγεται από αυτό. Γράφουμε D_n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και S^{n-1} για την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα. Με $D(x, r)$ συμβολίζουμε την κλειστή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα $r > 0$.

Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, που έχει μη κενό εσωτερικό. Θα λέμε ότι το κυρτό σώμα K είναι **συμμετρικό** με κέντρο συμμετρίας το o, αν για κάθε $x \in K$ έχουμε και $-x \in K$.

Σε μερικές περιπτώσεις, θα χρειαστεί να μιλήσουμε για **ανοικτά κυρτά σώματα**. Αυτά είναι τα εσωτερικά των κυρτών σωμάτων. Ισχύει ότι: αν K είναι ένα κυρτό σώμα, τότε το K συμπίπτει με την κλειστή θήκη του εσωτερικού του.

Το **άθροισμα κατά Minkowski** δύο μη κενών υποσυνόλων A και B του $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι αν τα A και B είναι συμπαγή (αντίστοιχα, κυρτά), τότε και το άθροισμά τους $A + B$ είναι συμπαγές (αντίστοιχα, κυρτό). Ειδικότερα, το άθροισμα δύο κυρτών σωμάτων είναι κυρτό σώμα.

Με τον όρο **στοιχειώδες σύνολο** αναφερόμαστε σε μία πεπερασμένη ένωση ορθογωνίων που έχουν τις ακμές τους παράλληλες πρός τους άξονες συντεταγμένων (τις διευθύνσεις των ορθοκανονικών διανυσμάτων e_j), και έχουν ξένα εσωτερικά. Συμβολίζουμε με $\mathcal{I}$ την κλάση όλων των στοιχειωδών συνόλων.

Αν I είναι ένα τέτοιο ορθογώνιο, με μήκη ακμών $a_1, \dots, a_n > 0$, τότε ορίζουμε τον **όγκο** του να ισούται με

$$|I| = a_1 \dots a_n.$$

Αν $J = \cup_{k=1}^m I_k$ είναι ένα στοιχειώδες σύνολο, τότε ορίζουμε

$$|J| = \sum_{k=1}^m |I_k|.$$

Έστω τώρα A ένα μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τον **εσωτερικό όγκο** του A μέσω της

$$\underline{|A|} = \sup\{|J| : J \subseteq A, J \in \mathcal{I}\},$$

και τον **εξωτερικό όγκο** του A μέσω της

$$\overline{|A|} = \inf\{|J| : A \subseteq J, J \in \mathcal{I}\}.$$

Θα λέμε ότι το A **έχει όγκο** (είναι Jordan μετρήσιμο), και θα τον συμβολίζουμε με $|A|$, αν $\underline{|A|} = \overline{|A|}$. Μπορεί κανείς να δείξει ότι

Κάθε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ έχει όγκο.

Οι ιδιότητες του όγκου που χρησιμοποιούμε συχνά στη συνέχεια είναι τελείως φυσιολογικές:

(α) Ο όγκος παραμένει αναλλοίωτος ως προς στροφές και μεταφορές.

(β) Αν T είναι ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$, τότε γιά κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$|T(K)| = |\mathrm{det}T| \cdot |K|.$$

(γ) Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $s \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$N_s = \left| \frac{1}{s}\mathbb{Z}^n \cap K \right|.$$

Θεωρούμε το θεμελιώδες ορθογώνιο $Q = [0, 1/s)^n$ του $(1/s)\mathbb{Z}^n$, και την ένωση

$$\bigcup_{z \in N_s} (z + Q).$$

Ο όγκος της είναι ίσος με N_s/s^n. Είναι λογικό να υποθέσουμε (και μπορούμε να αποδείξουμε) ότι καθώς το $s \to +\infty$, παίρνουμε όλο και καλύτερη προσέγγιση του όγκου του K. Δηλαδή, ισχύει το εξής:

$$\lim_{s \to \infty} \frac{N_s}{|K| s^n} = 1.$$

(β) Συμμετρικά κυρτά σώματα

Θεωρούμε μία νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η μοναδιαία μπάλα $B_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ του χώρου με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το γεγονός ότι η B_X είναι συμπαγές σύνολο και έχει μη κενό εσωτερικό, οφείλεται στο ότι η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδεια νόρμα. Δηλαδή, υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοια ώστε

$$a|x| \leq \|x\| \leq b|x|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ισοδύναμα,

$$(1/b)D_n \subseteq B_X \subseteq (1/a)D_n,$$

το οποίο δείχνει ότι η B_X είναι φραγμένο σύνολο και περιέχει μία ανοικτή μπάλα με κέντρο το o. Η B_X είναι κλειστό σύνολο, γιατί είναι κλειστή ως προς την $\|\cdot\|$, και, από την ισοδυναμία των νορμών, κάθε κλειστό σύνολο ως προς την $\|\cdot\|$ είναι κλειστό ως προς την Ευκλείδεια μετρική. Τέλος, η κυρτότητα και η συμμετρία της B_X είναι απλές συνέπειες των ιδιοτήτων της νόρμας: η $\|\cdot\|$ είναι άρτια, θετικά ομογενής συνάρτηση, και ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο Minkowski όρισε την συνάρτηση

$$\|x\|_K = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\},$$

και απέδειξε ότι είναι νόρμα, για την οποία ισχύει $\|x\|_K \leq 1$ αν και μόνο αν $x \in K$. Η ύπαρξη του λεγόμενου *συναρτησοειδούς του Minkowski* δείχνει ότι, με μία έννοια, η μελέτη των συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμη με τη μελέτη των νορμών πάνω στον $\mathbb{R}^n$:

Πρόταση 1.1.1 *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα. Τότε, το συναρτησοειδές του Minkowski*

$$\|x\|_K = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}$$

είναι νόρμα, και

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_K \leq 1\}.$$

Απόδειξη: Το K περιέχει μία μπάλα με κέντρο το o. Πράγματι, αφού το K έχει μη κενό εσωτερικό, υπάρχουν $x \in K$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $D(x,r) \subseteq K$. Λόγω συμμετρίας έχουμε $D(-x,r) \subseteq K$, και λόγω κυρτότητας, $D(o,r) = [D(x,r) + D(-x,r)]/2 \subseteq K$.

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Υπάρχει $\lambda > 0$ αρκετά μεγάλο, ώστε $(1/\lambda)x \in D(o,r) \subseteq K$, άρα, $x \in \lambda K$. Αυτό δείχνει ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, το σύνολο $\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}$ είναι μη κενό, άρα ορίζεται το

$$\inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}.$$

Θεωρούμε μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία $\lambda_s \to \lambda$. Υπάρχουν $y_s \in K$ τέτοια ώστε $x = \lambda_s y_s$, και λόγω της συμπάγειας του K μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y_s \to y \in K$. Τότε, $x = \lambda y \in K$. Άρα το infimum είναι minimum, και η $\|x\|_K$ είναι καλά ορισμένη.

Επίσης, είναι τώρα φανερό ότι $\|x\|_K \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και $\|x\|_K = 0$ αν και μόνο αν $x = o$.

Από τη συμμετρία του K ως προς το o, έχουμε $x \in \lambda K$ αν και μόνο αν $-x \in \lambda K$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\|-x\|_K = \min\{\lambda \geq 0 : -x \in \lambda K\} = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\} = \|x\|_K.$$

Επίσης, αν $t > 0$, τότε

$$\begin{aligned} \|tx\|_K &= \min\{\lambda \geq 0 : tx \in \lambda K\} = \min\{\lambda \geq 0 : x \in (\lambda/t)K\} \\ &= \min\{t\mu : \mu \geq 0, x \in \mu K\} = t\min\{\mu \geq 0 : x \in \mu K\} \\ &= t\|x\|_K. \end{aligned}$$

Οι δύο προηγούμενες σχέσεις αποδεικνύουν ότι $\|tx\|_K = |t| \cdot \|x\|_K$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Για την τριγωνική ανισότητα, παρατηρούμε ότι $x \in \|x\|_K K$ και $y \in \|y\|_K K$, οπότε η κυρτότητα του K μάς εξασφαλίζει ότι $x + y \in (\|x\|_K + \|y\|_K)K$, δηλαδή

$$\|x + y\|_K \leq \|x\|_K + \|y\|_K, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Τέλος, $x \in K$ αν και μόνο αν $\min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\} \leq 1$, δηλαδή $\|x\|_K \leq 1$. $\square$

1.2 Το θεώρημα των Beck και Fiala

Το γενικό πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε σε αυτήν την εργασία είναι το εξής. Μάς δίνουν δύο νόρμες $\|\cdot\|_A$ και $\|\cdot\|_B$ στον $\mathbb{R}^n$, και έναν φυσικό αριθμό m. Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη μικρότερη σταθερά $C = C(A, B, m, n) > 0$ για την οποία ικανοποιείται το εξής:

Αν $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\|_A \leq 1$, τότε υπάρχουν πρόσημα $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_m u_m\|_B \leq C.$$

Ισοδύναμα, αν A, B είναι συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ (τα οποία επάγουν στον $\mathbb{R}^n$ τις νόρμες $\|\cdot\|_A$ και $\|\cdot\|_B$ αντίστοιχα), ζητάμε τη μικρότερη σταθερά $C = C(A, B, m, n) > 0$ για την οποία:

Αν $u_1, \ldots, u_m \in A$, τότε υπάρχουν πρόσημα $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_m u_m \in CB.$$

Στην παράγραφο αυτή, θα δώσουμε ένα πρώτο παράδειγμα αποτελέσματος αυτού του είδους. Είναι το Θεώρημα των Beck και Fiala [BF], το οποίο αποδείχθηκε το 1980:

Θεώρημα 1.2.1 *Αν* $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ *με* $\|u_j\|_1 \leq 1$, *τότε υπάρχουν πρόσημα* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ *τέτοια ώστε*

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_m u_m\|_\infty \leq 2.$$

Απόδειξη: Γράφουμε $u_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$, $j = 1, \ldots, m$, και θεωρούμε τον $n \times m$ πίνακα $A = (a_{ij})$ που έχει σαν στήλες τα διανύσματα u_j. Η υπόθεσή μας είναι ότι, για κάθε $j = 1, \ldots, m$,

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|u_j\|_1 \leq 1.$$

Θα ορίσουμε m-άδες $(p_1^{(k)}, \ldots, p_m^{(k)}) \in [-1, 1]^m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, διαδοχικά. Σε κάθε βήμα, ορίζουμε

$$J_k = \{j \leq m : p_j^{(k)} \neq \pm 1\}.$$

(α) Αν $j \notin J_k$, τότε λέμε ότι η j-στήλη είναι **τελική**. Αλλιώς, λέγεται **προσωρινή**.

(β) Αν για κάποιο k και κάποιο i έχουμε

$$\sum_{j \in J_k} |a_{ij}| > 1,$$

τότε η i-γραμμή λέγεται k-**ενεργή**. Αλλιώς, την **αγνοούμε**. Συμβολίζουμε με I_k το σύνολο δεικτών των k-ενεργών γραμμών.

Με αυτήν την ορολογία, η βασική παρατήρηση είναι η εξής:

Λήμμα 1.2.1 *Σε κάθε βήμα, το πλήθος των ενεργών γραμμών είναι μικρότερο από το πλήθος των προσωρινών στηλών.*

Απόδειξη: Από τον ορισμό της ενεργής γραμμής,

$$|I_k| = \sum_{i \in I_k} 1 < \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in J_k} |a_{ij}|.$$

Όμως, για κάθε j,

$$\sum_{i \in I_k} |a_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq 1.$$

Άρα,

$$|I_k| < \sum_{j \in J_k} \sum_{i \in I_k} |a_{ij}| \leq \sum_{j \in J_k} 1 = |J_k|. \quad \square$$

Ακολουθούμε τον εξής αλγόριθμο. Στο 0-βήμα, θέτουμε $p_1^{(0)} = \ldots = p_m^{(0)} = 0$. Θεωρούμε το σύστημα

$$\sum_{j \in J_0} t_j a_{ij} = 0, \quad i \in I_0.$$

Αφού $|I_0| < |J_0|$, το σύστημα αυτό έχει μη τετριμμένη λύση $(t_j)_{j\in J_0}$. Επιλέγουμε $\lambda > 0$ με την ιδιότητα: $p'_j := p_j^{(0)} + \lambda t_j \in [-1, 1]$ για κάθε $j \in J_0$, και τουλάχιστον ένα $p'_j \in \{-1, 1\}$. Ορίζουμε

$$p_j^{(1)} = \begin{cases} p_j^{(0)} & , j \notin J_0, \\ \\ p'_j & , \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Στο βήμα αυτό έχουμε βέβαια $p_j^{(1)} = p'_j$ για κάθε $j \leq m$. Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^{(1)} a_{ij} = 0, \quad i \in I_0.$$

Συνεχίζουμε τη διαδικασία με τον ίδιο τρόπο: Στο k-βήμα, θεωρούμε το σύστημα

$$\sum_{j\in J_k} t_j a_{ij} = 0, \quad i \in I_k.$$

Αφού $|I_k| < |J_k|$, το σύστημα αυτό έχει μη τετριμμένη λύση $(t_j)_{j\in J_k}$. Επιλέγουμε $\lambda > 0$ με την ιδιότητα: $p'_j := p_j^{(k)} + \lambda t_j \in [-1, 1]$ για κάθε $j \in J_k$, και τουλάχιστον ένα $p'_j \in \{-1, 1\}$. Ορίζουμε

$$p_j^{(k+1)} = \begin{cases} p_j^{(k)} & , j \notin J_k, \\ \\ p'_j & , \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Παρατηρούμε πάλι ότι

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^{(k+1)} a_{ij} = 0, \quad i \in I_k.$$

Η ακολουθία $|J_k|$, $k \geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα, μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων θα έχουμε $p_j^{(k_0)} = \varepsilon_j = \pm 1$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Θα δείξουμε ότι αυτή η επιλογή προσήμων ικανοποιεί το ζητούμενο.

Θεωρούμε την i-γραμμή: Αν παραμένει ενεργή ως το k-βήμα, έχει την ιδιότητα

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^{(k)} a_{ij} = 0.$$

Αν αγνοήθηκε (για πρώτη φορά) στο k-βήμα, αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{j\in J_k} |a_{ij}| \leq 1.$$

Όμως τότε,

$$
\begin{aligned}
|\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j a_{ij}| &= |\sum_{j\notin J_k} \varepsilon_j a_{ij} + \sum_{j\in J_k} \varepsilon_j a_{ij}| \\
&= |\sum_{j\notin J_k} p_j^{(k)} a_{ij} + \sum_{j\in J_k} \varepsilon_j a_{ij}| \\
&= |\sum_{j=1}^{m} p_j^{(k)} a_{ij} + \sum_{j\in J_k} (\varepsilon_j - p_j^{(k)}) a_{ij}| \\
&= |\sum_{j\in J_k} (\varepsilon_j - p_j^{(k)}) a_{ij}| \\
&\leq \sum_{j\in J_k} |\varepsilon_j - p_j^{(k)}| \cdot |a_{ij}| \\
&\leq 2 \sum_{j\in J_k} |a_{ij}| \leq 2.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή,

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_m u_m\|_\infty \leq 2. \quad \square$$

1.3 Το θεώρημα των Bárány και Grinberg

Το δεύτερο θεώρημα «εξισορρόπησης» που θα παρουσιάσουμε, είναι το θεώρημα των Bárány και Grinberg [BG], το οποίο αποδείχθηκε το 1980:

Θεώρημα 1.3.1 *Έστω $\|\cdot\|$* ***τυχούσα*** *νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, και $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\| \leq 1$, $j = 1, \ldots, m$. Τότε, υπάρχει επιλογή προσήμων $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ για την οποία*

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_m u_m\| \leq 2n.$$

Παρατηρήστε ότι $\|\cdot\|_A = \|\cdot\|_B$ στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Το Θεώρημα όμως ισχύει για οποιαδήποτε νόρμα και οποιοδήποτε πλήθος διανυσμάτων. Το βασικό λήμμα των Bárány και Grinberg είναι το εξής:

Λήμμα 1.3.1 *Αν $m > n$ και $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$, τότε υπάρχουν $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ με $|t_j| \leq 1$, τα οποία ικανοποιούν τις*

$$t_1 u_1 + \ldots + t_m u_m = o$$

και $|\{j \leq m : t_j \neq \pm 1\}| \leq n$.

Απόδειξη: Αρχικά παίρνουμε $J_0 = \{1, \ldots, m\}$ και $t_1^{(0)} = \ldots = t_m^{(0)} = 0$. Προφανώς $|t_j^{(0)}| = 0 < 1$, αλλά $|\{j \leq m : t_j^{(0)} \neq \pm 1\}| = m > n$. Το σύστημα

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j = o$$

έχει n εξισώσεις και $m > n$ αγνώστους, άρα έχει μη μηδενική λύση $(\beta_j)_{j \leq m}$. Αφού $|t_j^{(0)}| < 1$ για κάθε $j \leq m$, μπορούμε να βρούμε $\rho_1 > 0$ τέτοιο ώστε οι

$$t_j^{(1)} = t_j^{(0)} + \rho_1 \beta_j$$

να είναι όλοι απολύτως μικρότεροι ή ίσοι του 1, και τουλάχιστον ένας από αυτούς να είναι ± 1. Θέτουμε $J_1 = \{j \leq m : |t_j^{(1)}| < 1\}$, και κρατάμε τους $t_j := t_j^{(1)}$, $j \notin J_1$. Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{j=1}^{m} t_j^{(1)} u_j = o.$$

Αν $|J_1| > n$, θεωρούμε το σύστημα

$$\sum_{j \in J_1} \lambda_j u_j = o,$$

το οποίο έχει n εξισώσεις και $|J_1| > n$ αγνώστους, άρα έχει μη μηδενική λύση $(\beta_j)_{j \in J_1}$. Αφού $|t_j^{(1)}| < 1$ για κάθε $j \in J_1$, μπορούμε να βρούμε $\rho_2 > 0$ τέτοιο ώστε οι

$$t_j^{(2)} = t_j^{(1)} + \rho_2 \beta_j$$

να είναι όλοι απολύτως μικρότεροι ή ίσοι του 1, και τουλάχιστον ένας από αυτούς να είναι ± 1. Θέτουμε $J_2 = \{j \in J_1 : |t_j^{(2)}| < 1\}$, και κρατάμε τους $t_j := t_j^{(2)}$, $j \in J_1 \backslash J_2$. Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{j \notin J_1} t_j^{(1)} u_j + \sum_{j \in J_1} t_j^{(2)} u_j = o.$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Σε k βήματα, έχουμε ορίσει τα ξένα σύνολα

$$J_0 \backslash J_1, J_1 \backslash J_2, \ldots, J_{k-1} \backslash J_k$$

και τα πρόσημα $t_j^{(s)} \in J_{s-1} \backslash J_s$, έτσι ώστε

$$(*) \qquad \sum_{s=1}^{k} \sum_{j \in J_{s-1} \backslash J_s} t_j^{(s)} u_j + \sum_{j \in J_k} t_j^{(k+1)} u_j = o.$$

Όμως, η ακολουθία $|J_k|$ είναι γνησίως φθίνουσα (όσο $|J_k| > n$). Άρα, κάποια στιγμή θα έχουμε $|J_k| \leq n$ για πρώτη φορά. Γι' αυτό το k, οι συντελεστές των u_j στην $(*)$ ικανοποιούν τις απαιτήσεις του Λήμματος. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1: Δίνονται $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\| \leq 1$. Αν $m \leq n$, τότε το αποτέλεσμα ισχύει προφανώς: παίρνουμε $\varepsilon_j = 1$, και από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|u_1 + \ldots + u_m\| \leq m \leq n.$$

Έστω λοιπόν ότι $m > n$. Από το Λήμμα 1.3.1, αλλάζοντας αν χρειαστεί την αρίθμηση των u_j, μπορούμε να βρούμε $r \leq n$, $t_1, \ldots, t_r \in [-1, 1]$ και $\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$, τέτοια ώστε

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{r} t_j u_j + \sum_{j=r+1}^{m} \varepsilon_j u_j = o.$$

Επιλέγουμε $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_r = 1$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j u_j\| &= \|\sum_{j=1}^{r}(1 - t_j)u_j + \sum_{j=1}^{r} t_j u_j + \sum_{j=r+1}^{m} \varepsilon_j u_j\| \\ &= \|\sum_{j=1}^{r}(1 - t_j)u_j\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{r} |1 - t_j| \cdot \|u_j\| \\ &\leq 2r \leq 2n, \end{aligned}$$

από την $(*)$ και το γεγονός ότι $r \leq n$, $\|u_j\| \leq 1$, και $|1 - t_j| \leq 2$, $j = 1, \ldots, r$. $\square$

1.4 Αναγωγή του προβλήματος στα n διανύσματα

Το γενικό μας πρόβλημα διατυπώθηκε για οσαδήποτε διανύσματα $u_1, \ldots, u_m$. Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε ότι μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι $m \leq n$:

Θεώρημα 1.4.1 *Έστω A και B δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά σ τέτοια ώστε: αν $r \leq n$ και $u_1, \ldots, u_r \in A$, τότε υπάρχουν $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \{-1, 1\}$ για τα οποία $\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_r u_r \in \sigma B$. Τότε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $u_1, \ldots, u_m \in A$ υπάρχουν $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j u_j \in (2\sigma)B.$$

Για την απόδειξη, θα χρειαστούμε κάποιο συμβολισμό: Αν $r \leq n$ και $u_1, \ldots, u_r \in A$, θέτουμε

$$P = \{t_1 u_1 + \ldots + t_r u_r : 0 \leq t_j \leq 1, j = 1, \ldots, r\},$$

και

$$P^k = \{t_1u_1 + \ldots + t_ru_r : t_j = l/2^k, l = 0,1,\ldots,2^k, j = 1,\ldots,r\}, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.1 θα βασιστεί στο Λήμμα 1.3.1 και τα εξής δύο λήμματα:

Λήμμα 1.4.1 *Για κάθε* $k = 0,1,2,\ldots$, *έχουμε*

$$P^{k+1} \subseteq P^k + \frac{\sigma}{2^{k+1}}B.$$

Απόδειξη: Έστω $x \in P^{k+1}$. Το x γράφεται στη μορφή

$$x = \frac{m_1}{2^{k+1}}u_1 + \ldots + \frac{m_r}{2^{k+1}}u_r,$$

όπου $m_j \in \{0,1,\ldots,2^{k+1}\}$. Ορίζουμε $I = \{j \leq r : m_j \in 2\mathbb{N} - 1\}$. Τότε, εύκολα ελέγχουμε ότι

$$x = \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j\in I} u_j + y$$

για κάποιο $y \in P^k$. Αφού $|I| \leq r \leq n$, υπάρχουν $\varepsilon_j \in \{-1,1\}$, $j \in I$, τέτοια ώστε

$$(*) \qquad \sum_{j\in I}\varepsilon_j u_j \in \sigma B.$$

Παρατηρούμε ότι

$$z := x + \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j\in I}\varepsilon_j u_j = \sum_{j\notin I}\frac{m_j}{2^{k+1}}u_j + \sum_{j\in I}\frac{m_j \pm 1}{2^{k+1}}u_j \in P^k,$$

γιατί m_j άρτιος αν $j \notin I$, και $m_j \pm 1$ άρτιος αν $j \in I$. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του B και την $(*)$, συμπεραίνουμε ότι

$$x = z + \frac{1}{2^{k+1}}\left(-\sum_{j\in I}\varepsilon_j u_j\right) \in P^k + \frac{\sigma}{2^{k+1}}B.$$

Αφού το $x \in P^{k+1}$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο. □

Λήμμα 1.4.2 *Με τον προηγούμενο συμβολισμό,* $P \subseteq P^0 + \sigma B$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι η (αύξουσα) ένωση των P^k, $k \geq 0$ είναι πυκνή στο P: περιέχει όλα τα σημεία $q_1u_1 + \ldots + q_ru_r$ με $0 \leq q_j \leq 1$, $q_j \in \{l/2^k : k \in \mathbb{N}, l \leq 2^k\}$.

Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας την κυρτότητα του B, βλέπουμε επαγωγικά ότι

$$\begin{aligned} P^k &\subseteq P^{k-1} + \frac{\sigma}{2^k}B \\ &\subseteq P^{k-2} + \frac{\sigma}{2^{k-1}}B + \frac{\sigma}{2^k}B \\ &\subseteq \dots \\ &\subseteq P^0 + \frac{\sigma}{2}B + \dots + \frac{\sigma}{2^k}B \\ &= P^0 + \sigma\left(\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2}\right)B \\ &\subseteq P^0 + \sigma B \end{aligned}$$

για κάθε $k \geq 1$. Άρα, $P \subseteq P^0 + \sigma B$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.1: Έστω $m > n$ και $u_1, \dots, u_m \in A$. Από το Λήμμα 1.3.1, αλλάζοντας αν χρειαστεί την αρίθμηση των u_j, μπορούμε να βρούμε $r \leq n$, $t_1, \dots, t_r \in [-1, 1]$ και $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$, τέτοια ώστε

$$t_1u_1 + \dots + t_ru_r + \varepsilon_{r+1}u_{r+1} + \dots + \varepsilon_m u_m = o.$$

Το διάνυσμα

$$w = \frac{t_1 + 1}{2}u_1 + \dots + \frac{t_r + 1}{2}u_r \in P,$$

γιατί $0 \leq t_i + 1 \leq 2$, $i = 1, \dots, r$. Από το Λήμμα 1.4.2, $w \in P^0 + \sigma B$. Κάθε $z \in P^0$ όμως γράφεται στη μορφή

$$z = \frac{\varepsilon_1 + 1}{2}u_1 + \dots + \frac{\varepsilon_r + 1}{2}u_r$$

για κατάλληλα πρόσημα $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \{-1, 1\}$. Δηλαδή,

$$\frac{t_1 + 1}{2}u_1 + \dots + \frac{t_r + 1}{2}u_r = \frac{\varepsilon_1 + 1}{2}u_1 + \dots + \frac{\varepsilon_r + 1}{2}u_r + v,$$

για κάποιο $v \in \sigma B$. Έπεται ότι

$$\sum_{j=1}^{r} t_ju_j - \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_ju_j = 2v \in 2\sigma B.$$

Όμως τότε,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_ju_j &= \sum_{j=1}^{r} t_ju_j + \sum_{j=r+1}^{m} \varepsilon_ju_j - \left(\sum_{j=1}^{r} t_ju_j - \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_ju_j\right) \\ &= o - \left(\sum_{j=1}^{r} t_ju_j - \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_ju_j\right) \\ &\in 2\sigma B. \quad \square \end{aligned}$$

1.5 Η εικασία του Komlós και το θεώρημα του Spencer

Συμβολίζουμε με $|\cdot|$ την Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο J. Komlós διατύπωσε την εξής εικασία:

Εικασία του Komlós *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leq 1$, υπάρχουν $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_m u_m\|_\infty \leq C.$$

Από το Θεώρημα 1.4.1 είναι σαφές ότι αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $m = n$. Αξίζει τον κόπο να δούμε πρώτα την περίπτωση που τα $u_1, \ldots, u_n$ σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε, τα σημεία $\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_n u_n$ είναι οι κορυφές του κύβου $U(Q)$, όπου $Q = [-1, 1]^n$ και U ο ορθογώνιος μετασχηματισμός που ορίζεται από τις $U(e_i) = u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Αν η εικασία του Komlós είναι σωστή, τότε αυτό σημαίνει ότι, όπως κι αν «στρίψουμε» τον κύβο Q, μία από τις κορυφές του θα έχει «μικρή $\|\cdot\|_\infty$-νόρμα». Δηλαδή, θα έχει **όλες** τις συντεταγμένες της φραγμένες από απόλυτη σταθερά.

Ακόμα και σε αυτήν την ειδική περίπτωση (η οποία όμως μπορεί να είναι και η χειρότερη), η εικασία του Komlós παραμένει ανοικτή. Ισχύει όμως το εξής:

Θεώρημα 1.5.1 *Έστω $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Υπάρχουν πρόσημα $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_n u_n\|_\infty \leq c\sqrt{\log n},$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. □

Για την ακρίβεια, ο **μέσος όρος** της $\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_n u_n\|_\infty$ πάνω από όλες τις επιλογές προσήμων $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ είναι της τάξης της $\sqrt{\log n}$ (η απόδειξη παραλείπεται).

Η εικασία του Komlós είναι ανοικτή. Το 1986, ο Spencer [Sp1] απέδειξε ότι: Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leq 1$, υπάρχουν $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$(*) \qquad \|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_m u_m\|_\infty \leq c \log n.$$

Στα Κεφάλαια 2 και 3 περιγράφουμε δύο μεθόδους που οδηγούν σε αυτό το αποτέλεσμα: τη μέθοδο του όγκου και τη μέθοδο του μέτρου Gauss. Το 1997, ο Banaszczyk [Ban] έδωσε καλύτερο άνω φράγμα για το πρόβλημα, αντικαθιστώντας τον $\log n$ με $\sqrt{\log n}$ στην $(*)$.

Θεώρημα 1.5.2 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leq 1$, υπάρχουν $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_m u_m\|_\infty \leq c\sqrt{\log n}.$$

Θα δούμε την απόδειξη αυτού του Θεωρήματος στο Κεφάλαιο 4. Η απόδειξή του βασίζεται στην ανισότητα του Ehrhard [Eh1,2] για το μέτρο του Gauss. Το Θεώρημα του Banaszczyk είναι το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα μέχρι σήμερα.

Το **Θεώρημα του Spencer** αφορά το γενικό μας πρόβλημα στην περίπτωση $\|\cdot\|_A = \|\cdot\|_B = \|\cdot\|_\infty$:

Θεώρημα 1.5.3 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\|_\infty \leq 1$, υπάρχουν $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_m u_m\|_\infty \leq C\sqrt{n}.$$

Θα αποδείξουμε αυτό το θεώρημα στο Κεφάλαιο 3. Παρατηρήστε ότι το θεώρημα του Spencer θα ήταν άμεση συνέπεια της εικασίας του Komlós: Αν $\|u_j\|_\infty \leq 1$, τότε $|u_j| \leq \sqrt{n}$, και αν η εικασία του Komlós ισχύει, μπορούμε να βρούμε πρόσημα $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\|\varepsilon_1 \frac{u_1}{\sqrt{n}} + \ldots + \varepsilon_m \frac{u_m}{\sqrt{n}}\|_\infty \leq C,$$

δηλαδή,

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_m u_m\|_\infty \leq C\sqrt{n}.$$

Η παράλληλη μελέτη των δύο προβλημάτων στο Κεφάλαιο 3 δείχνει καθαρά γιατί το πρόβλημα του Komlós είναι δυσκολότερο: αν $|u_j| \leq 1$, δεν έχουμε ικανοποιητική πληροφορία για το μέγεθος των συντεταγμένων του.

Κεφάλαιο 2

Η μέθοδος του όγκου

2.1 Περιγραφή της μεθόδου

Στο Κεφάλαιο αυτό δίνουμε μία πρώτη εκτίμηση για την εικασία του Komlós:

Θεώρημα 2.1.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε επιλογή διανυσμάτων $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leq 1$, μπορούμε να βρούμε πρόσημα $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_n u_n\|_\infty \leq C \log n.$$

Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε χρησιμοποιεί ακριβή αποτελέσματα για τον όγκο τομών συμμετρικών λωρίδων στον $\mathbb{R}^r$. Η βασική ιδέα είναι η εξής: Υποθέτουμε ότι $r \leq n$ και $u_1, \ldots, u_r$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, με $|u_j| \leq 1$. Γράφουμε $u_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ και $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ir})$, $j \leq r$, $i \leq n$. Παρατηρούμε ότι $\|x_1 u_1 + \ldots + x_r u_r\|_\infty \leq \beta$ αν και μόνο αν $|\langle x, a_i \rangle| \leq \beta$ για κάθε $i \leq n$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_r)$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε το συμμετρικό κυρτό σύνολο

$$K = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i \rangle| \leq 1, i = 1, \ldots, n\},$$

τότε

$$\|x_1 u_1 + \ldots + x_r u_r\|_\infty \leq \beta \Longleftrightarrow x \in \beta K.$$

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 2.1.2 *Μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \{-1, 0, 1\}$ που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) $|\{j \leq r : \varepsilon_j = 0\}| \leq \delta r$,

και

(β) $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \beta K$,

όπου $\delta \in (0, 1)$ και $\beta > 0$ απόλυτες σταθερές.

Το Θεώρημα 2.1.1 προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.2 με μία απλή επαναληπτική διαδικασία. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2, χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Vaaler:

Θεώρημα 2.1.3 *Έστω $w_1, \ldots, w_n$ διανύσματα που παράγουν τον $\mathbb{R}^r$. Θεωρούμε το συμμετρικό κυρτό σώμα*

$$W = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, w_i \rangle| \leq 1, i = 1, \ldots, n\}.$$

Τότε,

$$|W|^{1/r} \geq 2\sqrt{\frac{r}{\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2}}.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Vaaler για το συμμετρικό κυρτό σώμα

$$W = \beta K \cap (2-\theta)[-1,1]^r.$$

Με κατάλληλη επιλογή των απόλυτων σταθερών $\beta > 0$ και $\theta \in (0,1)$, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $|W| > 2^r 2^{r/2}$. Από ένα θεώρημα του van der Corput που γενικεύει το πρώτο θεώρημα του Minkowski, στο W μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον $2^{r/2}$ διακεκριμένα ζευγάρια ακεραίων σημείων. Όμως, $W \subseteq (2-\theta)[-1,1]^r$, άρα όλα αυτά τα ακέραια σημεία σχηματίζουν ένα σύνολο

$$A \subseteq \{-1, 0, 1\}^r.$$

Αφού $|A| > 2^{r/2}$, υπάρχουν $\delta \in (0,1)$ και $\varepsilon \in A$ με

$$|\{j \leq r : \varepsilon_j = 0\}| \leq \delta r.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος.

Η απόδειξη του θεωρήματος του van der Corput παρουσιάζεται στην επόμενη παράγραφο, ενώ στις παραγράφους 2.3-2.5 δίνουμε την απόδειξη της ανισότητας του Vaaler. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν πολλά άλλα αποτελέσματα που δίνουν ακριβή κάτω φράγματα για τον όγκο τομής συμμετρικών λωρίδων (βλέπε [Gl], [BP]). Χρησιμοποιώντας την ίδια περίπου ιδέα, μπορεί κανείς να δώσει απόδειξη και για το θεώρημα του Spencer. Όπως όμως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας το μέτρο του Gauss (Λήμμα του Sidák), μπορούμε να δώσουμε συντομότερες και απλούστερες αποδείξεις και των δύο αποτελεσμάτων. Για το λόγο αυτό, στο παρόν κεφάλαιο περιοριζόμαστε στο πρόβλημα του Komlós.

2.2 Το θεώρημα του Minkowski

Το Θεώρημα του Minkowski εξασφαλίζει την ύπαρξη μη μηδενικού ακεραίου σημείου σε κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^r$ που έχει όγκο μεγαλύτερο από 2^r:

Θεώρημα 2.2.1 *Έστω K ανοικτό, συμμετρικό ως προς το o, κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^r$. Αν $|K| > 2^r$, τότε το K περιέχει τουλάχιστον ένα $u \in \mathbb{Z}^r \setminus \{o\}$.*

Το αποτέλεσμα αυτό είναι βέλτιστο. Αν θεωρήσουμε τον κύβο $Q = \{x : |x_i| < 1, i = 1, \ldots, r\}$, τότε $|Q| = 2^r$, αλλά $Q \cap \mathbb{Z}^r = \{o\}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε μία επέκταση του θεωρήματος του Minkowski, η οποία οφείλεται στον van der Corput. Η απόδειξη βασίζεται σε ένα λήμμα του Mordell:

Λήμμα 2.2.1 *Έστω $k \in \mathbb{N}$, και M Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^r$ με $|M| > k$. Τότε, υπάρχει $z \in \mathbb{R}^r$ τέτοιο ώστε το $M+z$ να περιέχει τουλάχιστον $k+1$ διακεκριμένα ακέραια σημεία.*

Απόδειξη: Για κάθε $s \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το πλέγμα $(1/s)\mathbb{Z}^r$. Συμβολίζουμε με N_s τον πληθάριθμο του συνόλου $M \cap (1/s)\mathbb{Z}^r$. Έχουμε

$$\lim_{s \to \infty} \frac{|M|}{N_s (1/s)^r} = 1,$$

δηλαδή, για μεγάλα s ισχύει η ανισότητα

$$N_s > s^r k.$$

Παίρνουμε ένα τέτοιο $s \in \mathbb{N}$, και θεωρούμε το σύνολο

$$A_s = \{u \in \mathbb{Z}^r : (1/s)u \in M\}.$$

Το A_s έχει πληθάριθμο $N_s > s^r k$, και τα σημεία του ανήκουν σε s^r το πολύ κλάσεις υπολοίπων mod s. Επομένως, μπορούμε να βρούμε $u^1, \ldots, u^{k+1} \in A_s$ τα οποία ανήκουν στην ίδια κλάση mod s. Τότε, τα σημεία $\frac{u^1}{s}, \ldots, \frac{u^{k+1}}{s}$ ανήκουν στο M, και τα

$$x_i = \frac{u^i - u^1}{s} \in \mathbb{Z}^r, \quad i = 1, \ldots, k+1.$$

Άρα, αν θέσουμε $z = (1/s)u^1$, το $M + z$ περιέχει $k+1$ ακέραια σημεία. $\square$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Mordell, ο van der Corput γενίκευσε το πρώτο θεώρημα του Minkowski ως εξής:

Θεώρημα 2.2.2 *Έστω $k \in \mathbb{N}$, και K ένα ανοικτό, συμμετρικό ως προς το o, κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^r$, με όγκο $|K| > 2^r k$. Τότε, το K περιέχει τουλάχιστον k ζευγάρια ακεραίων σημείων $\pm u^i \neq o$.*

Απόδειξη: Το $K/2$ έχει όγκο μεγαλύτερο από k. Από το Λήμμα του Mordell, υπάρχουν $z \in \mathbb{R}^r$ και $v^1, \ldots, v^{k+1}$ διακεκριμένα ακέραια σημεία, τέτοια ώστε

$$z + v^i \in \frac{1}{2}K, \quad i = 1, \ldots, k+1.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα v^i είναι **διατεταγμένα λεξικογραφικά**. Δηλαδή, αν $i < i'$ τότε $v_s^i < v_s^{i'}$, όπου s είναι ο πρώτος δείκτης για τον οποίο $v_s^i \neq v_s^{i'}$. Τότε, για κάθε $i = 1, \ldots, k$ έχουμε

$$u^i := v^{i+1} - v^1 = (z + v^{i+1}) - (z + v^1) \in \left(\frac{1}{2}K - \frac{1}{2}K\right) \cap \mathbb{Z}^r \backslash \{o\} = K \cap (\mathbb{Z}^r \backslash \{o\}),$$

και, τα ζευγάρια $\pm u^i$, $i = 1, \ldots, k$, είναι διακεκριμένα, γιατί κάθε u^i έχει θετική την πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του (οπότε, δεν μπορεί να συμβεί $u^i = -u^j$ αν $i \neq j$). $\square$

2.3 Η ανισότητα των Prékopa και Leindler

Η κλασική ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο στον $\mathbb{R}^r$:

Θεώρημα 2.3.1 *Έστω K και T δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^r$. Τότε,*

$$|K + T|^{1/r} \geq |K|^{1/r} + |T|^{1/r}.$$

Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα, ισότητα στο Θεώρημα 2.3.1 μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά.

Η ανισότητα Brunn-Minkowski εκφράζει με μία έννοια το γεγονός οτι ο όγκος είναι *κοίλη* συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^r$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/r} \geq \lambda |K|^{1/r} + (1-\lambda)|T|^{1/r}.$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανισότητα και την ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$(*) \qquad |\lambda K + (1-\lambda)T| \geq |K|^{\lambda} |T|^{1-\lambda}.$$

Η ασθενέστερη αυτή μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski έχει το πλεονέκτημα οτι είναι ανεξάρτητη της διάστασης.

Η ανισότητα των Prékopa και Leindler [Pis] είναι η «συναρτησιακή έκδοση» της ανισότητας Brunn-Minkowski.

Θεώρημα 2.3.2 *(**Ανισότητα Prékopa-Leindler**) Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^+$ τρεις μετρήσιμες συναρτήσεις, και $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε οτι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, και οτι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^r$*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}.$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^r} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^r} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^r} g\right)^{1-\lambda}.$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς την διάσταση r.

(α) $r=1$: Μπορούμε να υποθέσουμε οτι οι f και g είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ιδέα της μεταφοράς του μέτρου.

Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t \int f \quad , \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t \int g.$$

Με βάση τις υποθέσεις μας οι x, y είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t) f(x(t)) = \int f \quad , \quad y'(t) g(y(t)) = \int g.$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t).$$

Οι x και y είναι γνήσια αύξουσες. Επεται οτι η z είναι κι αυτή γνήσια αύξουσα και, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda) y'(t) \geq (x'(t))^{\lambda} (y'(t))^{1-\lambda}.$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της h κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$:

$$\begin{aligned}
\int h &= \int_0^1 h(z(t)) z'(t) dt \\
&\geq \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda) y(t)) (x'(t))^{\lambda} (y'(t))^{1-\lambda} dt \\
&\geq \int_0^1 f^{\lambda}(x(t)) g^{1-\lambda}(y(t)) \left(\frac{\int f}{f(x(t))} \right)^{\lambda} \left(\frac{\int g}{g(y(t))} \right)^{1-\lambda} dt \\
&= \left(\int f \right)^{\lambda} \left(\int g \right)^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε οτι $r \geq 2$ και οτι το Θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1, \ldots, r-1\}$. Εστω f, g, h όπως στο Θεώρημα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s : \mathbb{R}^{r-1} \to \mathbb{R}^+$ με $h_s(w) = h(w, s)$, και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s, g_s : \mathbb{R}^{r-1} \to \mathbb{R}^+$. Από την υπόθεσή μας για τις f, g, h έπεται οτι, αν $x, y \in \mathbb{R}^{r-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda) s_0}(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq f_{s_1}(x)^{\lambda} g_{s_0}(y)^{1-\lambda},$$

και η επαγωγική υπόθεση μάς δίνει

$$\begin{aligned}
H(\lambda s_1 + (1-\lambda) s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{r-1}} h_{\lambda s_1 + (1-\lambda) s_0} \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}^{r-1}} f_{s_1} \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{r-1}} g_{s_0} \right)^{1-\lambda} =: F^{\lambda}(s_1) G^{1-\lambda}(s_0).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $r=1$ στις συναρτήσεις F, G και H, παίρνουμε

$$\int h = \int_{\mathbb{R}} H \geq \left(\int_{\mathbb{R}} F\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} G\right)^{1-\lambda} = \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda}. \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1: Εστω K, T συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^r$, και $\lambda \in (0,1)$. Ορίζουμε $f = \chi_K$, $g = \chi_T$, και $h = \chi_{\lambda K + (1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε οτι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.2, οπότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| = \int h \geq \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda} = |K|^{\lambda} |T|^{1-\lambda}.$$

Αυτό αποδεικνύει την $(*)$ για κάθε τριάδα K, T, λ. Για να πάρουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski, θεωρούμε K και T με $|K| > 0$, $|T| > 0$, και ορίζουμε

$$K_1 = |K|^{-1/r} K \quad , \quad T_1 = |T|^{-1/r} T \quad , \quad \lambda = \frac{|K|^{1/r}}{|K|^{1/r} + |T|^{1/r}}.$$

Τα K_1 και T_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την $(*)$ παίρνουμε

$$|\lambda K_1 + (1-\lambda) T_1| \geq 1.$$

Ομως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda) T_1 = \frac{K+T}{|K|^{1/r} + |T|^{1/r}},$$

επομένως,

$$|K+T| \geq \left(|K|^{1/r} + |T|^{1/r}\right)^{r}. \quad \square$$

2.4 Σύγκριση λογαριθμικά κοίλων μέτρων

Ορισμός Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^+$ λέγεται **λογαριθμικά κοίλη** αν, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^r$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq [f(x)]^{\lambda} [f(y)]^{1-\lambda}.$$

Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{M}_r$ όλων των Borel μέτρων πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^r$, που έχουν τη μορφή

$$\mu(A) = \int_A f_\mu(x)\,dx,$$

όπου $f_\mu : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^+$ άρτια, λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, με

$$\int_{\mathbb{R}^r} f_\mu(x)\,dx = 1.$$

Λέμε ότι η f_μ είναι η **πυκνότητα** του μ. Ορίζουμε μία μερική διάταξη στην $\mathcal{M}_r$ ως εξής: Αν $\mu, \nu \in \mathcal{M}_r$, λέμε ότι «το μ είναι μεγαλύτερο από το ν», και γράφουμε $\mu \succ \nu$, αν

$$\mu(A) \geq \nu(A)$$

για κάθε συμμετρικό και κυρτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^r$.

Παραδείγματα μέτρων στην $\mathcal{M}_r$

(α) Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^r$, με όγκο $|K| = 1$. Ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_K στον $\mathbb{R}^r$, θέτοντας

$$\mu_K(A) = |K \cap A| = \int_A \chi_K(x)dx$$

για κάθε Borel $A \subseteq \mathbb{R}^r$. Λόγω της κυρτότητας και της συμμετρίας του K, η χ_K είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, άρα $\mu_K \in \mathcal{M}_r$.

(β) Για κάθε $c > 0$, η συνάρτηση $f_c(x) = \exp(-c|x|^2)$ είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^r$: Παρατηρούμε ότι η Ευκλείδεια νόρμα είναι κυρτή συνάρτηση, και η $t \mapsto ct^2$ είναι επίσης κυρτή. Άρα η σύνθεσή τους

$$c|x|^2 = -\log f(x)$$

είναι μία άρτια, κυρτή συνάρτηση.

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $c > 0$, το μέτρο

$$\gamma_{r,c}(A) = \frac{1}{I(c)} \int_A \exp(-c|x|^2)dx$$

όπου $I(c) = \int_{\mathbb{R}^r} \exp(-c|x|^2)dx$, ανήκει στην κλάση $\mathcal{M}_r$.

Ορισμός Ένα Borel μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^r$ λέγεται συμμετρικό και λογαριθμικά κοίλο, αν για κάθε A, B μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^r$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$, ισχύουν οι

$$\mu(-A) = \mu(A)$$

και

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq [\mu(A)]^\lambda [\mu(B)]^{1-\lambda}.$$

Η Πρόταση που ακολουθεί δείχνει ότι η κλάση $\mathcal{M}_r$ αποτελείται από μέτρα που έχουν αυτές τις ιδιότητες:

Πρόταση 2.4.1 *Αν $\mu \in \mathcal{M}_r$, τότε το μ είναι συμμετρικό και λογαριθμικά κοίλο.*

Απόδειξη: Αφού $\mu \in \mathcal{M}_r$, υπάρχει $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^+$ άρτια και λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx.$$

Αφού η f είναι άρτια, παίρνουμε

$$\mu(-A) = \int_{-A} f(x)dx = \int_A f(-x)dx = \int_A f(x)dx = \mu(A),$$

δηλαδή το μ είναι συμμετρικό. Έστω $\lambda \in (0,1)$ και A, B μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^r$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu(\lambda A + (1-\lambda)B) &= \int_{\mathbb{R}^r} \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}(x) f(x) dx \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^r} \chi_A(x) f(x) dx \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^r} \chi_B(x) f(x) dx \right)^{1-\lambda} \\ &= [\mu(A)]^{\lambda} [\mu(B)]^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε $w(x) = \chi_A(x) f(x)$, $g(x) = \chi_B(x) f(x)$, και $h(x) = \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}(x) f(x)$. Θα δείξουμε ότι αυτή η τριάδα συναρτήσεων ικανοποιεί τις υποθέσεις της ανισότητας Prékopa - Leindler: για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^r$,

$$(*) \qquad h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq [w(x)]^{\lambda} [g(y)]^{1-\lambda}.$$

Πράγματι, αν $x \notin A$ ή $y \notin B$, τότε το δεξιό μέλος της $(*)$ γίνεται ίσο με μηδέν, οπότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Αν πάλι $x \in A$ και $y \in B$, τότε $\lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda A + (1-\lambda)B$, και η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq [f(x)]^{\lambda} [f(y)]^{1-\lambda},$$

η οποία ισχύει, γιατί η f είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Από την ανισότητα Prékopa-Leindler, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^r} h(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^r} w(x) dx \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^r} g(x) dx \right)^{1-\lambda},$$

το οποίο είναι ακριβώς το ζητούμενο. □

Το επόμενο λήμμα θα χρησιμοποιηθεί αρκετές φορές στη συνέχεια:

Λήμμα 2.4.1 *Έστω $\mu \in \mathcal{M}_r$, με πυκνότητα τη συνάρτηση f. Αν $h : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμη, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^r} h(x) f(x) dx = \int_0^{\infty} \mu(x : h(x) \geq t) dt.$$

Απόδειξη: Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^r} h(x) f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_0^{h(x)} 1 dt \right) f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\{x : h(x) \geq t\}} f(x) dx dt \\ &= \int_0^{\infty} \mu(x : h(x) \geq t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

Ορισμός Έστω $\mu_1 \in \mathcal{M}_{k_1}$ και $\mu_2 \in \mathcal{M}_{k_2}$, με πυκνότητες f_1 και f_2 αντίστοιχα. Το **γινόμενο** $\mu_1 \otimes \mu_2$ των μ_1 και μ_2 ορίζεται στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^{k_1+k_2}$, από την

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(\Gamma) = \int\int_{\Gamma} f_1(x) f_2(y) dx dy,$$

όπου γράφουμε (x, y) για το τυχόν σημείο του $\mathbb{R}^{k_1+k_2}$, εννοώντας προφανώς ότι $x \in \mathbb{R}^{k_1}$ και $y \in \mathbb{R}^{k_2}$.

Για κάθε $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{k_1+k_2}$ και κάθε $y \in \mathbb{R}^{k_2}$, ορίζουμε

$$\Gamma(y) = \{x \in \mathbb{R}^{k_1} : (x, y) \in \Gamma\}.$$

Τότε, μπορούμε να γράψουμε το $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\Gamma)$ στη μορφή

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^{k_2}} \left(\int_{\Gamma(y)} f_1(x) dx \right) f_2(y) dy.$$

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι αν $\mu_i, \nu_i \in \mathcal{M}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, m$, με $\mu_i \succ \nu_i$ για κάθε $i \leq m$, τότε $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_m \succ \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_m$ στην $\mathcal{M}_{k_1+\ldots+k_m}$. Για το σκοπό αυτό, θα χρειαστούμε μία σειρά από λήμματα.

Λήμμα 2.4.2 *Έστω Γ συμμετρικό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{k_1+k_2}$. Η συνάρτηση $h : \mathbb{R}^{k_2} \to \mathbb{R}^+$, με*

$$h(y) = \int_{\Gamma(y)} f_1(x) dx$$

είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη.

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι $\Gamma(-y) = -\Gamma(y)$, $y \in \mathbb{R}^{k_2}$. Πράγματι, αν $x \in \Gamma(-y)$ τότε $(x, -y) \in \Gamma$, άρα $(-x, y) \in \Gamma$, δηλαδή $-x \in \Gamma(y)$. Αυτό δείχνει ότι $\Gamma(-y) \subseteq -\Gamma(y)$, και ο αντίστροφος εγκλεισμός αποδεικνύεται όμοια. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} h(-y) &= \int_{\Gamma(-y)} f_1(x) dx = \int_{-\Gamma(y)} f_1(x) dx = \int_{\Gamma(y)} f_1(-z) dz \\ &= \int_{\Gamma(y)} f_1(z) dz = h(y), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f_1 είναι άρτια.

Για να δείξουμε ότι η h είναι λογαριθμικά κοίλη, θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} h(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) &= \int_{\Gamma(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)} f_1(x) dx = \int_{\mathbb{R}^r} \chi_{\Gamma(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)}(x) f_1(x) dx \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^r} \chi_{\Gamma(y_1)}(x) f_1(x) dx \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^r} \chi_{\Gamma(y_2)}(x) f_1(x) dx \right)^{1-\lambda} \\ &= \left(\int_{\Gamma(y_1)} f_1(x) dx \right)^{\lambda} \left(\int_{\Gamma(y_2)} f_1(x) dx \right)^{1-\lambda} \\ &= [h(y_1)]^{\lambda} [h(y_2)]^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε τρείς συναρτήσεις: τις $F(x) = \chi_{\Gamma(y_1)}(x) f_1(x)$, $G(x) = \chi_{\Gamma(y_2)}(x) f_1(x)$, και $H(x) = \chi_{\Gamma(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)}(x) f_1(x)$. Θα δείξουμε ότι αυτή η τριάδα συναρτήσεων ικανοποιεί τις υποθέσεις της ανισότητας Prékopa - Leindler: για κάθε $x, z \in \mathbb{R}^{k_1}$,

$$(*) \qquad H(\lambda x + (1-\lambda) z) \geq [F(x)]^{\lambda} [G(z)]^{1-\lambda}.$$

Πράγματι, αν $x \notin \Gamma(y_1)$ ή $z \notin \Gamma(y_2)$, τότε το δεξιό μέλος της $(*)$ γίνεται ίσο με μηδέν, οπότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Αν πάλι $x \in \Gamma(y_1)$ και $z \in \Gamma(y_2)$, τότε $\lambda x + (1-\lambda) z \in \Gamma(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)$, γιατί από την κυρτότητα του Γ,

$$\Gamma(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \supseteq \lambda \Gamma(y_1) + (1-\lambda) \Gamma(y_2).$$

[Αν $x_i \in \Gamma(y_i)$, τότε $(x_i, y_i) \in \Gamma$, άρα $\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \in \Gamma$, δηλαδή, $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \Gamma(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)$.]
Τότε, η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$f_1(\lambda x + (1-\lambda) z) \geq [f_1(x)]^{\lambda} [f_1(z)]^{1-\lambda},$$

η οποία ισχύει, γιατί η f_1 είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Από την ανισότητα Prékopa-Leindler, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^{k_1}} H(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{k_1}} F(x) dx \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{k_1}} G(x) dx \right)^{1-\lambda},$$

το οποίο είναι ακριβώς το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 2.4.3 *Έστω $h : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^+$ μία άρτια, λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $t \geq 0$, το σύνολο $H_t = \{x \in \mathbb{R}^r : h(x) \geq t\}$ είναι συμμετρικό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^r$.*

Απόδειξη: Η συμμετρία του H_t έπεται από το ότι η h είναι άρτια. Έχουμε $y \in H_t$ αν και μόνο αν $h(-y) = h(y) \geq t$, δηλαδή $-y \in H_t$.

Η κυρτότητα του H_t έπεται από το ότι η h είναι λογαριθμικά κοίλη. Έστω $x, y \in H_t$ και $\lambda \in (0, 1)$. Τότε,

$$h(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq [h(x)]^{\lambda} [h(y)]^{1-\lambda} \geq t^{\lambda} t^{1-\lambda} = t,$$

δηλαδή, $\lambda x + (1-\lambda) y \in H_t$. $\square$

Λήμμα 2.4.4 *Αν $\mu_1 \in \mathcal{M}_{k_1}$ και $\mu_2 \in \mathcal{M}_{k_2}$, τότε $\mu_1 \otimes \mu_2 \in \mathcal{M}_{k_1+k_2}$.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^{k_1+k_2}$. Όμως αυτό είναι άμεση συνέπεια των αντίστοιχων ιδιοτήτων των f_1 και f_2. $\square$

Λήμμα 2.4.5 *Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{M}_r$, και $h : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^+$ μία άρτια, λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Αν $\mu \succ \nu$, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^r} h(x) f_{\mu}(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^r} h(x) f_{\nu}(x) dx.$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\mu \succ \nu$ και τα Λήμματα 2.4.1 και 2.4.3, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^r} h(x) f_\mu(x) dx &= \int_0^\infty \mu(x : h(x) \geq t) dt = \int_0^\infty \mu(H_t) dt \\
&\geq \int_0^\infty \nu(H_t) dt = \int_0^\infty \nu(x : h(x) \geq t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^r} h(x) f_\nu(x) dx. \quad \square
\end{aligned}$$

Πρόταση 2.4.2 *Αν $\mu_1 \succ \nu_1$ στην $\mathcal{M}_{k_1}$ και $\mu_2 \succ \nu_2$ στην $\mathcal{M}_{k_2}$, τότε $\mu_1 \otimes \mu_2 \succ \nu_1 \otimes \nu_2$ στην $\mathcal{M}_{k_1+k_2}$.*

Απόδειξη: Έστω Γ ένα συμμετρικό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{k_1+k_2}$. Γράφουμε

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^{k_2}} \left(\int_{\Gamma(y)} f_{\mu_1}(x) dx \right) f_{\mu_2}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{k_2}} h(y) f_{\mu_2}(y) dy,$$

και, από το Λήμμα 2.4.2, η h είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^{k_2}$. Από το Λήμμα 2.4.5, αφού $\mu_2 \succ \nu_2$, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^{k_2}} h(y) f_{\mu_2}(y) dy \geq \int_{\mathbb{R}^{k_2}} h(y) f_{\nu_2}(y) dy.$$

Όμως,

$$(\mu_1 \otimes \nu_2)(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^{k_2}} \left(\int_{\Gamma(y)} f_{\mu_1}(x) dx \right) f_{\nu_2}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{k_2}} h(y) f_{\nu_2}(y) dy,$$

άρα,

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(\Gamma) \geq (\mu_1 \otimes \nu_2)(\Gamma).$$

Αλλάζοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης, και χρησιμοποιώντας την $\mu_1 \succ \nu_1$, παίρνουμε

$$(\mu_1 \otimes \nu_2)(\Gamma) \geq (\nu_1 \otimes \nu_2)(\Gamma).$$

Έπεται ότι

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(\Gamma) \geq (\nu_1 \otimes \nu_2)(\Gamma),$$

και αφού το Γ ήταν τυχόν, $\mu_1 \otimes \mu_2 \succ \nu_1 \otimes \nu_2$. $\square$

Επαγωγικά, από την Πρόταση 2.4.2 παίρνουμε:

Θεώρημα 2.4.1 *Έστω $\mu_i, \nu_i \in \mathcal{M}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, m$, με $\mu_i \succ \nu_i$ για κάθε $i \leq m$. Τότε, $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_m \succ \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_m$.* $\square$

Το Θεώρημα 2.4.1 μάς επιτρέπει να συγκρίνουμε λογαριθμικά κοίλα μέτρα γινόμενα με αναγωγή στη μονοδιάστατη περίπτωση. Ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής της τεχνικής, το οποίο θα χρειαστούμε στην επόμενη παράγραφο, είναι το εξής:

Παράδειγμα [Va] Θεωρούμε τον κύβο $Q_n = [-1/2, 1/2]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Το μ_{Q_n} είναι ένα συμμετρικό, λογαριθμικά κοίλο μέτρο, και

$$\mu_{Q_n} = \mu_{Q_1} \otimes \ldots \otimes \mu_{Q_1}.$$

Πράγματι, αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε

$$\mu_{Q_n}(A) = |Q_n \cap A| = \int_A \chi_{Q_n}(x)dx = \int_A \prod_{i=1}^n \chi_{Q_1}(x_i)dx = (\mu_{Q_1} \otimes \ldots \otimes \mu_{Q_1})(A).$$

Ομοίως, το $\gamma_{n,\pi}$ είναι άρτιο, λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, και ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι $I(\pi) = 1$. Αφού

$$f_\pi(x) = \frac{1}{I(\pi)} \exp(-\pi|x|^2) = \prod_{i=1}^n \exp(-\pi x_i^2),$$

βλέπουμε ότι

$$\gamma_{n,\pi} = \gamma_{1,\pi} \otimes \ldots \otimes \gamma_{1,\pi}.$$

Θα δείξουμε ότι $\mu_{Q_n} \succ \gamma_{n,\pi}$, και, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.1, αρκεί να αποδείξουμε το εξής:

Λήμμα 2.4.6 *Για κάθε συμμετρικό διάστημα $J_a = [-a, a]$, $a > 0$ ισχύει $\mu_{Q_1}(J_a) \geq \gamma_{1,\pi}(J_a)$.*

Απόδειξη: Αν $a \geq 1/2$, τότε $\mu_{Q_1}(J_a) = |Q_1| = 1 \geq \gamma_{1,\pi}(J_a)$, αφού το $\gamma_{1,\pi}$ είναι μέτρο πιθανότητας. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < a < 1/2$. Τότε,

$$\mu_{Q_1}(J_a) = |J_a| = 2a,$$

ενώ,

$$\gamma_{1,\pi}(J_a) = \int_{-a}^{a} \exp(-\pi t^2)dt \leq \int_{-a}^{a} 1dt = 2a.$$

Άρα, $\gamma_{1,\pi}(J_a) \leq \mu_{Q_1}(J_a)$. □

Από το Λήμμα έπεται ότι $\mu_{Q_1} \succ \gamma_{1,\pi}$, και από το Θεώρημα 2.4.1 έχουμε:

Θεώρημα 2.4.2 *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mu_{Q_n} \succ \gamma_{n,\pi}$.* □

2.5 Η ανισότητα του Vaaler

Η ανισότητα του Vaaler [Va] μάς δίνει κάτω φράγμα για τον όγκο της τομής n συμμετρικών λωρίδων

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, w_i\rangle| \leq 1\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

συναρτήσει του «μέσου μήκους» $\sum_{i=1}^n |w_i|^2$ των διανυσμάτων w_i:

Θεώρημα 2.5.1 *Έστω $w_1, \ldots, w_n$ διανύσματα που παράγουν τον $\mathbb{R}^r$. Θεωρούμε το συμμετρικό κυρτό σώμα*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, w_i\rangle| \leq 1, i = 1, \ldots, n\}.$$

Τότε,

$$|K|^{1/r} \geq 2\sqrt{\frac{r}{\sum_{i=1}^n |w_i|^2}}.$$

Θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι $\mu_{Q_n} \succ \gamma_{n,\pi}$ για να αποδείξουμε την εξής:

Πρόταση 2.5.1 *Αν $n \geq r$ και A ένας $n \times r$ πίνακας με τάξη r, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^r} \chi_{Q_n}(Ax)dx \geq \int_{\mathbb{R}^r} \exp(-\pi|Ax|^2)dx.$$

Παρατηρήστε ότι, στην περίπτωση $n = r$, η ανισότητα της Πρότασης 2.5.1 ισχύει σαν ισότητα: δεν έχουμε παρά να κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $z = Ax$ και να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα μ_{Q_n} και $\gamma_{n,\pi}$ είναι μέτρα πιθανότητας.

Απόδειξη: Θεωρούμε τον υπόχωρο F που παράγουν οι στήλες του A, και έναν $n \times (n-r)$ πίνακα B που έχει σαν στήλες μία ορθοκανονική βάση του $F^{\perp}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, ορίζουμε τον $n \times n$ πίνακα $T_\varepsilon = [A \mid \varepsilon B]$. Θεωρούμε το

$$\mathbb{R}^r \times Q_{n-r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^r, y \in Q_{n-r}\},$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.4.2 για το συμμετρικό κυρτό σύνολο $T_\varepsilon(\mathbb{R}^r \times Q_{n-r})$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^r}\int_{Q_{n-r}} e^{-\pi|Ax+\varepsilon By|^2}dydx &= \int_{\mathbb{R}^r\times Q_{n-r}} e^{-\pi|T_\varepsilon z|^2}dz \\
&= \frac{1}{|\det T_\varepsilon|}\int_{T_\varepsilon(\mathbb{R}^r\times Q_{n-r})} e^{-\pi|w|^2}dw \\
&\leq \frac{1}{|\det T_\varepsilon|}\int_{T_\varepsilon(\mathbb{R}^r\times Q_{n-r})} \chi_{Q_n}(w)dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^r\times Q_{n-r}} \chi_{Q_n}(T_\varepsilon z)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^r}\int_{Q_{n-r}} \chi_{Q_n}(Ax+\varepsilon By)dydx.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \to 0^+$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^r}\int_{Q_{n-r}} e^{-\pi|Ax+\varepsilon By|^2}dydx &\to \int_{\mathbb{R}^r}\int_{Q_{n-r}} e^{-\pi|Ax|^2}dydx\\ &= |Q_{n-r}|\int_{\mathbb{R}^r} e^{-\pi|Ax|^2}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^r} e^{-\pi|Ax|^2}dx.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε (x,y) ισχύει

$$\chi_{Q_n}(Ax+\varepsilon By)\to \chi_{Q_n}(Ax)$$

καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Άρα, όπως παραπάνω,

$$\int_{\mathbb{R}^r}\int_{Q_{n-r}} \chi_{Q_n}(Ax+\varepsilon By)dydx \longrightarrow |Q_{n-r}|\int_{\mathbb{R}^r}\chi_{Q_n}(Ax)dx.$$

Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^r}\chi_{Q_n}(Ax)dx \geq \int_{\mathbb{R}^r}\exp(-\pi|Ax|^2)dx. \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1: Παρατηρούμε πρώτα ότι $x\in K$ αν και μόνο αν $Ax\in 2Q_n$, όπου A ο $n\times r$ πίνακας που έχει γραμμές τα w_i, $i\leq n$. Άρα,

$$|K| = \int_{\mathbb{R}^r}\chi_{2Q_n}(Ax)dx = 2^r\int_{\mathbb{R}^r}\chi_{Q_n}(Ax)dx.$$

Από την Πρόταση 2.5.1, παίρνουμε

$$\frac{|K|}{2^r} \geq \int_{\mathbb{R}^r} e^{-\pi|Ax|^2}dx = \int_{\mathbb{R}^r} e^{-\pi\langle A^*Ax,x\rangle}dx.$$

Ο A^*A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος $r\times r$ πίνακας, άρα υπάρχει συμμετρικός και θετικά ορισμένος $r\times r$ πίνακας B τέτοιος ώστε $B^2=A^*A$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}\frac{|K|}{2^r} &\geq \int_{\mathbb{R}^r} e^{-\pi|Bx|^2}dx = \frac{1}{\det B}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(A^*A)}}.\end{aligned}$$

Πρέπει λοιπόν να βρούμε άνω φράγμα για την $\det(A^*A)$. Παρατηρούμε ότι $(A^*A)_{ii} = \sum_{k=1}^n w_{ki}^2$, άρα

$$\mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^r (A^*A)_{ii} = \sum_{i=1}^r\sum_{k=1}^n w_{ki}^2 = \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^r w_{ki}^2 = \sum_{k=1}^n |w_k|^2.$$

Η ορίζουσα του A^*A είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών του, ενώ το $\mathrm{tr}(A^*A)$ είναι το άθροισμά τους. Αφού ο A^*A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, οι ιδιοτιμές του είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$\det(A^*A) \leq \left(\frac{\mathrm{tr}(A^*A)}{r}\right)^r = \left(\frac{\sum_{k=1}^n |w_k|^2}{r}\right)^r.$$

Δηλαδή,

$$\frac{|K|}{2^r} \geq \left(\frac{r}{\sum_{i=1}^n |w_i|^2}\right)^{r/2},$$

και το Θεώρημα αποδείχθηκε. □

2.6 Άνω φράγμα για την εικασία του Komlós

Υποθέτουμε ότι $r \leq n$ και $u_1, \ldots, u_r$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, με $|u_j| \leq 1$. Γράφουμε $u_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ και $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ir})$, $j \leq r$, $i \leq n$. Παρατηρούμε ότι $\|x_1u_1 + \ldots + x_ru_r\|_\infty \leq \beta$ αν και μόνο αν $|\langle x, a_i\rangle| \leq \beta$ για κάθε $i \leq n$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_r)$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε το συμμετρικό κυρτό σύνολο

$$K = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i\rangle| \leq 1, i = 1, \ldots, n\},$$

τότε

$$\|x_1u_1 + \ldots + x_ru_r\|_\infty \leq \beta \Longleftrightarrow x \in \beta K.$$

[Αν τα u_j είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε το K είναι κυρτό σώμα.] Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 2.6.1 *Μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \{-1, 0, 1\}$ που ικανοποιούν τα εξής:*

(a) $|\{j \leq r : \varepsilon_j = 0\}| \leq \delta r$,

και

(β) $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \beta K$,

όπου $\delta \in (0,1)$ και $\beta > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Το σημείο που ψάχνουμε μέσα στο βK έχει ακέραιες συντεταγμένες ίσες με $-1, 0$ ή 1. Θεωρούμε λοιπόν το κυρτό σώμα

$$W = \beta K \cap (2-\theta)[-1,1]^r = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i\rangle| \leq \beta, |\langle x, e_j\rangle| \leq 2-\theta, i \leq n, j \leq r\}.$$

Το W είναι τομή συμμετρικών λωρίδων που ορίζονται από τα διανύσματα a_i/β που ικανοποιούν την

$$\sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^2}{\beta^2} = \sum_{j=1}^r \frac{|u_j|^2}{\beta^2} \leq \frac{r}{\beta^2},$$

και τα $e_j/(2-\theta)$ που έχουν μήκος μικρότερο από $1/(2-\theta)$. Από το Θεώρημα 2.5.1, έχουμε ένα κάτω φράγμα για τον όγκο του:

$$\begin{aligned} |W|^{1/r} &\geq 2\sqrt{\frac{r}{\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|^2}{\beta^2}+\sum_{j=1}^{r}\frac{|e_j|^2}{(2-\theta)^2}}} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{r}{\frac{r}{\beta^2}+\frac{r}{(2-\theta)^2}}} \\ &= \frac{2\beta(2-\theta)}{\sqrt{\beta^2+(2-\theta)^2}}. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$|W| \geq 2^r\left(\frac{\beta(2-\theta)}{\sqrt{\beta^2+(2-\theta)^2}}\right)^r.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε $\theta > 0$ αρκετά μικρό και $\beta > 0$ αρκετά μεγάλο, ώστε

$$\frac{\beta(2-\theta)}{\sqrt{\beta^2+(2-\theta)^2}} > \sqrt{2}.$$

[Το όριο αυτής της ποσότητας καθώς $\beta \to \infty$, είναι ίσο με $2-\theta$.] Επιλέγουμε λοιπόν έτσι την (απόλυτη) σταθερά β, και έχουμε

$$|W| > 2^r 2^{r/2}.$$

Από το Θεώρημα του van der Corput, στο W μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον $2^{r/2}$ ζευγάρια ακεραίων σημείων. Από τον ορισμό του W όμως, έχουμε $W \subseteq (2-\theta)[-1,1]^r$. Άρα, όλα αυτά τα ακέραια σημεία ανήκουν στο $\{-1,0,1\}^r$. Αφού $W \subseteq \beta K$, έχουμε

$$|\beta K \cap \{-1,0,1\}^r| > 2^{r/2}.$$

Ορίζουμε $A = \beta K \cap \{-1,0,1\}^r$.

Λήμμα 2.6.1 *Αν $1 \leq k \leq r/2$ και $p = k/r$, τότε*

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{r}{j} \leq 2^{c\sqrt{p}r}.$$

Απόδειξη Έχουμε

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{r}{j} \leq (k+1)\binom{r}{k} = (k+1)\frac{r!}{k!(r-k)!}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$k! \geq \frac{k^k}{e^{k-1}},$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}(k+1)\frac{r!}{k!(r-k)!} &= (k+1)\frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!} \leq e^{k+1}\frac{e^{k-1}r^k}{k^k} \\ &\leq \left(\frac{e^2 r}{k}\right)^k \\ &= \left(\frac{e^2}{p}\right)^{pr}.\end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι $\sqrt{p}\log(1/p) \to 0$ καθώς $p \to 0^+$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\left(\frac{e^2}{p}\right)^{pr} \leq 2^{c\sqrt{p}r}. \quad \square$$

Λήμμα 2.6.2 *Υπάρχει $\delta \in (0,1)$ με την εξής ιδιότητα: αν $A \subseteq \{-1,0,1\}^r$ και $|A| \geq 2^{r/2}$, τότε υπάρχει $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) \in A$ τέτοιο ώστε*

$$|\{j \leq r : \varepsilon_j = 0\}| \leq \delta r.$$

Απόδειξη: Το πλήθος των $\varepsilon \in \{-1,0,1\}^r$ που έχουν ακριβώς s μηδενικές συντεταγμένες, είναι $\binom{r}{s}2^{r-s}$. Άρα, το πλήθος αυτών που έχουν περισσότερες από δr μηδενικές συντεταγμένες, είναι

$$\sum_{s=\delta r}^{r}\binom{r}{s}2^{r-s} \leq 2^{(1-\delta)r}\sum_{s=\delta r}^{r}\binom{r}{s} = 2^{(1-\delta)r}\sum_{s=0}^{(1-\delta)r}\binom{r}{s}.$$

Από το προηγούμενο λήμμα, η ποσότητα αυτή είναι μικρότερη από

$$2^{(1-\delta)r}2^{c_1\sqrt{1-\delta}r} \leq 2^{c_2\sqrt{1-\delta}r} < 2^{r/2},$$

αν το δ είναι αρκετά κοντά στο 1 (ανεξάρτητα όμως από το r). Έπεται ότι υπάρχει $\varepsilon \in A$ με $|\{j \leq r : \varepsilon_j = 0\}| \leq \delta r$. $\square$

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.1. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.6.2 για το $A = \beta K \cap \{-1,0,1\}^r$, βρίσκουμε $\varepsilon \in \{-1,0,1\}^r$ που ικανοποιεί τα (α) και (β). $\square$

Θεώρημα 2.6.2 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε επιλογή διανυσμάτων $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leq 1$, μπορούμε να βρούμε πρόσημα $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n \in \{-1,1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_n u_n\|_\infty \leq C\log n.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\sigma_0 = \{1, \ldots, r\}$. Από το Θεώρημα 2.6.1, υπάρχουν $\varepsilon_1^1, \ldots, \varepsilon_r^1 \in \{-1, 0, 1\}$ τέτοια ώστε: αν $\sigma_1 = \{j \leq r : \varepsilon_j^1 = 0\}$, τότε $|\sigma_1| \leq \delta r$, και

$$\| \sum_{j \in \sigma_0 \setminus \sigma_1} \varepsilon_j^1 u_j \|_\infty = \|\varepsilon_1^1 u_1 + \ldots + \varepsilon_r^1 u_r\|_\infty \leq \beta.$$

Κρατάμε τα ε_j^1, $j \in \sigma_0 \setminus \sigma_1$, και θεωρούμε τα διανύσματα u_j, $j \in \sigma_1$. Αυτά έχουν πλήθος $|\sigma_1| \leq \delta r$ και νόρμα $|u_j| \leq 1$, οπότε εφαρμόζεται πάλι το Θεώρημα 2.6.1. Υπάρχουν $\varepsilon_j^2 \in \{-1, 0, 1\}$ τέτοια ώστε: αν $\sigma_2 = \{j \in \sigma_1 : \varepsilon_j^2 = 0\}$, τότε $|\sigma_2| \leq \delta |\sigma_1| \leq \delta^2 r$, και

$$\| \sum_{j \in \sigma_1 \setminus \sigma_2} \varepsilon_j^2 u_j \|_\infty = \| \sum_{j \in \sigma_1} \varepsilon_j^2 u_j \|_\infty \leq \beta.$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, μέχρι τον φυσικό k_0 για τον οποίο θα έχουμε $|\sigma_{k_0}| \leq 2$. Τέτοιος φυσικός υπάρχει, γιατί $\delta \in (0,1)$ άρα $|\sigma_k| \leq \delta^k r \to 0$. Επιπλέον, $k_0 \leq c(\delta) \log n$. Σε κάθε βήμα, ικανοποιείται η

$$\| \sum_{j \in \sigma_{k-1} \setminus \sigma_k} \varepsilon_j^k u_j \|_\infty \leq \beta,$$

όπου ε_j^k τα πρόσημα που επιλέχθηκαν στο k-βήμα. Για κάθε $j \in \sigma_{k-1} \setminus \sigma_k$ θέτουμε $\varepsilon_j = \varepsilon_j^k$, ενώ αν $j \in \sigma_{k_0}$ θέτουμε $\varepsilon_j = 1$. Έχουμε έτσι μία επιλογή προσήμων $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \{-1, 1\}$, για την οποία

$$\begin{aligned}
\| \sum_{j=1}^r \varepsilon_j u_j \|_\infty &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \| \sum_{j \in \sigma_{k-1} \setminus \sigma_k} \varepsilon_j u_j \|_\infty + \| \sum_{j \in \sigma_{k_0}} u_j \|_\infty \\
&\leq k_0 \beta + 2 \leq 2 + c(\delta) \beta \log n \\
&\leq C \log n,
\end{aligned}$$

και η σταθερά C είναι απόλυτη, αφού οι β, δ είναι απόλυτες σταθερές. $\square$

Κεφάλαιο 3

Η μέθοδος του μέτρου Gauss

3.1 Περιγραφή της μεθόδου

Θεωρούμε το r-διάστατο μέτρο του Gauss γ_r, το οποίο ορίζεται από την

$$\gamma_r(A) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \int_A e^{-|x|^2/2} dx.$$

Το γ_r έχει πολλές καλές ιδιότητες, τις οποίες θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα:

(α) Το γ_r είναι λογαριθμικά κοίλο: αν A, B είναι Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^r$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\gamma_r(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq [\gamma_r(A)]^{\lambda} [\gamma_r(B)]^{1-\lambda}.$$

(β) Το γ_r είναι μέτρο γινόμενο (βλέπε Κεφάλαιο 2):

$$\gamma_r = \gamma_1 \otimes \ldots \otimes \gamma_1.$$

(γ) Το γ_r είναι αναλλοίωτο ως προς στροφές: αν U είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^r$, τότε

$$\gamma_r(U(A)) = \gamma_r(A).$$

Υποθέτουμε ότι $r \leq n$ και $u_1, \ldots, u_r$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, με $|u_j| \leq 1$ ή $\|u_j\|_\infty \leq 1$. Γράφουμε $u_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ και $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ir})$, $j \leq r$, $i \leq n$. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, θεωρούμε το συμμετρικό κυρτό σύνολο

$$K = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i \rangle| \leq 1, i = 1, \ldots, n\}.$$

Από τη συμμετρία του K και τις ιδιότητες της πυκνότητας του γ_r, έπεται ότι

$$\gamma_r(\varepsilon + \beta K) \geq e^{-\frac{|\varepsilon|^2}{2}} \gamma_r(\beta K) = e^{-r/2} \gamma_r(\beta K)$$

για κάθε $\beta > 0$. Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε το Λήμμα του Sidák [Sid] για να δώσουμε κάτω φράγμα για το $\gamma_r(\beta K)$:

Λήμμα του Sidák *Αν* $P_1, \ldots, P_n$ *είναι συμμετρικές λωρίδες στον* $\mathbb{R}^r$*, τότε*

$$\gamma_r(P_1 \cap \ldots \cap P_n) \geq \gamma_r(P_1) \ldots \gamma_r(P_n).$$

Το βK είναι τομή συμμετρικών λωρίδων, άρα το Λήμμα του Sidák εφαρμόζεται γι' αυτό. Για κατάλληλη επιλογή της σταθεράς β, μπορούμε να δείξουμε ότι $\gamma_r(\beta K) \geq 2^{-pr}$, για κάποια απόλυτη σταθερά $p \in (0,1)$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^r} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^r} \chi_{\varepsilon + \beta K}(x) \gamma_r(dx) = \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^r} \gamma_r(\varepsilon + \beta K) \geq 2^{p_1 r},$$

για κάποια άλλη σταθερά $p_1 \in (0,1)$, άρα υπάρχει $A \subseteq \{-1,1\}^r$ με $|A| > 2^{p_1 r}$, τέτοιο ώστε

$$\bigcap_{\varepsilon \in A} (\varepsilon + \beta K) \neq \emptyset.$$

Αφού $|A| > 2^{p_1 r}$, υπάρχουν $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)} \in A$ με

$$|\{j \leq r : \varepsilon_j^{(1)} = \varepsilon_j^{(2)}\}| \leq \delta r.$$

Από την $(\varepsilon^{(1)} + \beta K) \cap (\varepsilon^{(2)} + \beta K) \neq \emptyset$ και τη συμμετρία του K, έπεται ότι

$$\varepsilon := \frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{2} \in \beta K,$$

δηλαδή,

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_r u_r\|_\infty \leq \beta,$$

και $|\{j \leq r : \varepsilon_j = 0\}| \leq \delta r$. Η απόδειξη του θεωρήματος του Spencer και της «$\log n$-εκτίμησης» για την εικασία του Komlós, ολοκληρώνονται με επαναληπτικές διαδικασίες ανάλογες αυτής του Κεφαλαίου 2.

Θα αποδείξουμε το Λήμμα του Sidák στην επόμενη παράγραφο, και θα δώσουμε πλήρεις αποδείξεις των παραπάνω βημάτων στις παραγράφους 3.3 και 3.4.

3.2 Το λήμμα του Sidák

Θεωρούμε n συμμετρικές λωρίδες

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, w_i \rangle| \leq t_i\}, \quad i = 1, \ldots, n$$

στον $\mathbb{R}^r$, όπου $w_i \in S^{r-1}$ και $t_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Το Λήμμα του Sidák δίνει κάτω φράγμα για το r-διάστατο μέτρο Gauss της τομής τους:

Θεώρημα 3.2.1 *Αν $P_1,\ldots,P_n$ είναι συμμετρικές λωρίδες στον $\mathbb{R}^r$, τότε*

$$\gamma_r(P_1\cap\ldots\cap P_n)\geq \gamma_r(P_1)\ldots\gamma_r(P_n).$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς το πλήθος των λωρίδων, η οποία βασίζεται στο εξής:

Θεώρημα 3.2.2 *Έστω K συμμετρικό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^r$, και P συμμετρική λωρίδα στον $\mathbb{R}^r$. Τότε,*

$$\gamma_r(K\cap P)\geq \gamma_r(K)\gamma_r(P).$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2, θα χρησιμοποιήσουμε μερικές απλές παρατηρήσεις:

(α) Έστω K συμμετρικό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^r$. Για κάθε $s\in\mathbb{R}$, ορίζουμε

$$K_s=\{x\in\mathbb{R}^{r-1}:(x,s)\in K\}.$$

Αν $J_K=\{s\in\mathbb{R}:K_s\neq\emptyset\}$, τότε για κάθε $s_1,s_2\in J_K$ και κάθε $\lambda\in(0,1)$, έχουμε

$$K_{\lambda s_1+(1-\lambda)s_2}\supseteq \lambda K_{s_1}+(1-\lambda)K_{s_2}.$$

Αυτός ο εγκλεισμός προκύπτει άμεσα από την κυρτότητα του K. Μία πρώτη συνέπειά του είναι ότι το J_K είναι ένα συμμετρικό **διάστημα**.

(β) Το γ_{r-1} είναι λογαριθμικά κοίλο, άρα

$$\gamma_{r-1}(K_{\lambda s_1+(1-\lambda)s_2})\geq [\gamma_{r-1}(K_{s_1})]^{\lambda}[\gamma_{r-1}(K_{s_2})]^{1-\lambda}$$

για κάθε $s_1,s_2\in J_K$ και κάθε $\lambda\in(0,1)$. Ορίζουμε $f:J_K\to\mathbb{R}$ με $f(s)=\gamma_{r-1}(K_s)$. Η f είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη. Επομένως, το σύνολο

$$I_K(z):=\{s\in J_K:f(s)\geq z\}$$

είναι ένα συμμετρικό (ίσως κενό) υποδιάστημα του J_K, για κάθε $z\geq 0$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς τη διάσταση. Αν $r=1$, τότε τα K,P είναι συμμετρικά διαστήματα στο $\mathbb{R}$, άρα το $K\cap P$ είναι ένα από τα K,P. Αφού το γ_1 είναι μέτρο πιθανότητας,

$$\gamma_1(K\cap P)=\min\{\gamma_1(K),\gamma_1(P)\}\geq \gamma_1(K)\gamma_1(P).$$

Υποθέτουμε ότι το θεώρημα έχει αποδειχθεί αν $1\leq r'<r$. Έστω K συμμετρικό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^r$, και P συμμετρική λωρίδα στον $\mathbb{R}^r$. Αφού το γ_r είναι αναλλοίωτο ως προς στροφές, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P=\{x\in\mathbb{R}^r:|x_r|\leq t\}$ για κάποιο $t>0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\gamma_r(K\cap P) &= \int_{-t}^{t}\gamma_{r-1}(K_s)\gamma_1(ds)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-t,t]}(s)f(s)\gamma_1(ds)\\ &= \int_0^{\infty}\gamma_1(s:f(s)\geq z, s\in[-t,t])dz\end{aligned}$$

από το Λήμμα 2.4.1. Όμως, αφού το Θεώρημα έχει αποδειχθεί στην περίπτωση $r' = 1$, έχουμε

$$\gamma_1(s : f(s) \geq z, s \in [-t,t]) = \gamma_1(I_K(z) \cap [-t,t]) \geq \gamma_1([-t,t])\gamma_1(I_K(z)),$$

γιατί κάθε $I_K(z)$ είναι συμμετρικό διάστημα. Άρα,

$$\begin{aligned}
\gamma_r(K \cap P) &\geq \gamma_1([-t,t]) \int_0^\infty \gamma_1(I_K(z))dz \\
&= \gamma_1([-t,t]) \int_0^\infty \gamma_1(s \in \mathbb{R} : f(s) \geq z)dz \\
&= \gamma_1([-t,t]) \int_{-\infty}^\infty \gamma_{r-1}(K_s)ds \\
&= \gamma_1([-t,t])\gamma_r(K).
\end{aligned}$$

Τέλος,

$$\gamma_r(P) = \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \int_{-t}^t \gamma_1(ds)\gamma_{r-1}(dx) = \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \gamma_1([-t,t])\gamma_{r-1}(dx) = \gamma_1([-t,t]).$$

Άρα, $\gamma_r(K \cap P) \geq \gamma_r(K)\gamma_r(P)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1: Υποθέτουμε ότι το Θεώρημα έχει αποδειχθεί αν το πλήθος των λωρίδων είναι μικρότερο από n. Έστω $P_1, \ldots, P_n$ συμμετρικές λωρίδες στον $\mathbb{R}^r$. Το $K = P_1 \cap \ldots \cap P_{n-1}$ είναι συμμετρικό, κλειστό και κυρτό, άρα

$$\gamma_r(P_1 \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap P_n) \geq \gamma_r(P_1 \cap \ldots \cap P_{n-1})\gamma_r(P_n),$$

από το Θεώρημα 3.2.2. Τώρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση για τις $P_1, \ldots, P_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
\gamma_r(P_1 \cap \ldots \cap P_n) &\geq \gamma_r(P_1 \cap \ldots \cap P_{n-1})\gamma_r(P_n) \\
&\geq \gamma_r(P_1) \ldots \gamma_r(P_{n-1})\gamma_r(P_n). \quad \square
\end{aligned}$$

Ένα πολύ γνωστό σχετικό πρόβλημα (που παραμένει ανοικτό) είναι η λεγόμενη «εικασία της θετικής συσχέτισης» για συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^r$:

Εικασία: Αν K_1 και K_2 είναι συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^r$, τότε

$$\gamma_r(K_1 \cap K_2) \geq \gamma_r(K_1)\gamma_r(K_2).$$

Η εικασία αυτή έχει αποδειχθεί από τον Pitt [Pi] στην περίπτωση $r = 2$, καθώς και για ορισμένες ειδικές κλάσεις σωμάτων στον $\mathbb{R}^r$, $r > 2$ (βλέπε [SSZ]).

3.3 Απόδειξη του θεωρήματος του Spencer

Το θεώρημα του Spencer είναι σχεδόν άμεση συνέπεια του εξής αποτελέσματος:

Θεώρημα 3.3.1 *Υπάρχουν $\beta > 0$ και $0 < \delta < 1$, τέτοια ώστε: Αν $r \leq n$ και $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\|_\infty \leq 1$, τότε μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \{-1, 0, 1\}$ που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) $|\{j \leq r : \varepsilon_j = 0\}| < \delta r$.

(β) $\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_r u_r\|_\infty \leq \beta\sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τον $n \times r$ πίνακα A που έχει σαν στήλες τα u_j, και γράφουμε a_i, $i = 1, \ldots, n$ για τις γραμμές του A. Αν $x = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, τότε

$$\|x_1 u_1 + \ldots + x_r u_r\|_\infty \leq M \Longleftrightarrow x \in K = K(M),$$

όπου

$$K(M) = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i \rangle| \leq M, i = 1, \ldots, n\}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο απλά λήμματα:

Λήμμα 3.3.1 *Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^r$ και $z \in \mathbb{R}^r$, τότε*

$$\gamma_r(z + K) \geq e^{-\frac{|z|^2}{2}} \gamma_r(K).$$

Απόδειξη: Γράφουμε

$$\gamma_r(z + K) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \int_{z+K} e^{-|x|^2/2} dx = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \int_K e^{-|z+x|^2/2} dx.$$

Λόγω συμμετρίας του K, έχουμε και την

$$\gamma_r(z + K) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \int_K e^{-|z-x|^2/2} dx,$$

και προσθέτοντας τις δύο ισότητες παίρνουμε

$$\gamma_r(z + K) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \int_K \frac{e^{-|z-x|^2/2} + e^{-|z-x|^2/2}}{2} dx.$$

Από την κυρτότητα της εκθετικής συνάρτησης έπεται ότι

$$\gamma_r(z + K) \geq \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \int_K e^{-(|z+x|^2 + |z-x|^2)/4} dx,$$

και με τη βοήθεια του κανόνα του παραλληλογράμμου, καταλήγουμε στην

$$\gamma_r(z + K) \geq \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \int_K e^{-|z|^2/2} e^{-|x|^2/2} dx = e^{-|z|^2/2} \gamma_r(K). \quad \square$$

Λήμμα 3.3.2 *(α) Για κάθε* $s > 0$,

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^s e^{-t^2/2}dt \geq 1 - e^{-s^2/2}.$$

(β) Αν $s \geq 2$, *τότε* $1 - e^{-s^2/2} \geq \exp\left(-2e^{-s^2/2}\right)$.

Απόδειξη: (α) Με απλή αλλαγή μεταβλητής, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_s^{+\infty} e^{-t^2/2}dt &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-(s+t)^2/2}dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2}\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{-t^2/2}dt \\ &\leq e^{-s^2/2}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = e^{-s^2/2}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^s e^{-t^2/2}dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_s^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \geq 1 - e^{-s^2/2}.$$

(β) Θέτουμε $z = e^{-s^2/2}$. Τότε, η ζητούμενη ανισότητα γίνεται $1 - z \geq e^{-2z}$. Όμως,

$$e^{-2z} \leq \frac{1}{1+2z} \leq 1 - z$$

αν $0 \leq z \leq 1/2$, το οποίο ικανοποιείται στην περίπτωσή μας. □

Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, ορίζουμε

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i\rangle| \leq M\}.$$

Κάθε P_i είναι συμμετρική λωρίδα με πλάτος $M/|a_i|$. Όμως, $|a_i| \leq \sqrt{r}$ γιατί κάθε a_i έχει όλες τις συντεταγμένες του απολύτως μικρότερες ή ίσες του 1 (αυτό προκύπτει από την υπόθεσή μας ότι $\|u_j\|_\infty \leq 1$). Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3.2(α), βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\gamma_r(P_i) &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-M/\sqrt{r}}^{M/\sqrt{r}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{r-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t^2/2}e^{-|y|^2/2}dydt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-M/\sqrt{r}}^{M/\sqrt{r}} e^{-t^2/2}dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{M/\sqrt{r}} e^{-t^2/2}dt \\ &\geq 1 - \exp(-M^2/2r).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας και το Λήμμα του Sidák, καταλήγουμε σε ένα κάτω φράγμα για το $\gamma_r(K)$:

Πρόταση 3.3.1 *Για κάθε* $p \in (0,1)$, *υπάρχει* $\beta = \beta(p) > 0$ *με την ιδιότητα: Αν*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i \rangle| \leq \beta\sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})}, i \leq n\},$$

τότε $\gamma_r(K) \geq 2^{-pr}$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι, αν πάρουμε $M = \beta\sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})}$, τότε

$$\frac{M}{\sqrt{r}} = \beta\sqrt{\log(\frac{2n}{r})} \geq \beta\sqrt{\log 2} \geq 2,$$

αρκεί το β να είναι αρκετά μεγάλο. Τότε, από τον προηγούμενο υπολογισμό και το Λήμμα 3.3.2(β), βλέπουμε ότι

$$\gamma_r(P_i) \geq 1 - \exp(-M^2/2r) \geq \exp(-2e^{-\beta^2 \log(2n/r)/2}).$$

Από τον ορισμό του K και το Λήμμα του Sidák,

$$\begin{aligned} \gamma_r(K) &= \gamma_r(P_1 \cap \ldots \cap P_n) \geq \prod_{i=1}^n \gamma_r(P_i) \\ &\geq \prod_{i=1}^n \left(1 - \exp(-M^2/2r)\right) \geq \exp\left(-2ne^{-M^2/2r}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2n}{\exp(\beta^2 \log(2n/r)/2)}\right). \end{aligned}$$

Ζητάμε $\gamma_r(K) \geq 2^{-pr}$, δηλαδή αρκεί να βρούμε $\beta > 0$ που να ικανοποιεί την

$$\frac{2n}{\exp(\beta^2 \log(2n/r)/2)} \leq pr \log 2.$$

Ισοδύναμα, ζητάμε

$$(*) \qquad \beta^2 \log(\frac{2n}{r}) \geq \log(\frac{2n}{pr \log 2}).$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η $(*)$ ικανοποιείται αν επιλέξουμε $\beta > c\sqrt{\log(1/p)}$. Με αυτήν την επιλογή ικανοποιούνται και οι προηγούμενοι περιορισμοί που θέσαμε, οπότε η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Λήμμα 3.3.3 *Υπάρχει* $\gamma \in (0,1)$*: αν το* β *είναι αρκετά μεγάλο, και*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i \rangle| \leq \beta\sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})}, i \leq n\},$$

τότε υπάρχει $A \subseteq \{-1,1\}^r$ *με πληθάριθμο* $|A| > 2^{\gamma r}$, *τέτοιο ώστε*

$$\bigcap_{\varepsilon \in A} (\varepsilon + K) \neq \emptyset.$$

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε $p, \beta(p)$ και $M(p)$ όπως στην Πρόταση 3.3.1. Χρησιμοποιώντας και το Λήμμα 3.3.1, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} \chi_{\varepsilon+K}(x)\gamma_r(dx) &= \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} \gamma_r(\varepsilon+K) \\ &\geq \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} e^{-|\varepsilon|^2/2}\gamma_r(K) \\ &\geq 2^r e^{-r/2} 2^{-pr} \\ &= 2^{(1-\frac{1}{2\log 2}-p)r}.\end{aligned}$$

Επιλέγουμε τώρα $p_0 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2\log 2}\right)$, κι αυτό ορίζει το $\beta=\beta(p_0)$ και το K. Για το συγκεκριμένο K, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} \chi_{\varepsilon+K}(x)\gamma_r(dx) \geq 2^{p_0 r},$$

άρα υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}^n$ με

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} \chi_{\varepsilon+K}(x_0) \geq 2^{p_0 r},$$

και αν θέσουμε $A=\{\varepsilon : x_0\in\varepsilon+K\}$, τότε $|A|>2^{p_0 r}$ και

$$\bigcap_{\varepsilon\in A}(\varepsilon+K)\neq\emptyset.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη με $\gamma = p_0 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2\log 2}\right)$. $\square$

Συνεχίζουμε ακριβώς όπως στην Παράγραφο 2.6. Υπάρχει $\delta=\delta(\gamma)\in(0,1)$ με την ιδιότητα

$$\sum_{s=0}^{[\delta r]+1}\binom{r}{s} < 2^{\gamma r}.$$

Σταθεροποιούμε $\varepsilon^{(1)}\in A$. Αφού $|A|>2^{\gamma r}$, υπάρχει $\varepsilon^{(2)}\in A$ με

$$|\{j\leq r : \varepsilon_j^{(1)}=\varepsilon_j^{(2)}\}|\leq \delta r.$$

Από την $(\varepsilon^{(1)}+K)\cap(\varepsilon^{(2)}+K)\neq\emptyset$ και τη συμμετρία του K, έπεται ότι

$$\varepsilon := \frac{\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}}{2}\in K,$$

δηλαδή,

$$\|\varepsilon_1 u_1+\ldots+\varepsilon_r u_r\|_\infty \leq \beta\sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})}.$$

Επιπλέον $\varepsilon\in\{-1,0,1\}^r$, και $|\{j\leq r : \varepsilon_j=0\}|\leq\delta r$. Άρα, η απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 είναι πλήρης. $\square$

Χωρίς πολύ κόπο, μπορούμε τώρα να δείξουμε κάτι ισχυρότερο:

Θεώρημα 3.3.2 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: Αν $r \leq n$ και $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\|_\infty \leq 1$, τότε μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_r u_r\|_\infty \leq C\sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\sigma_0 = \{1, \ldots, r\}$. Από το Θεώρημα 3.3.1, υπάρχουν $\varepsilon_1^1, \ldots, \varepsilon_r^1 \in \{-1, 0, 1\}$ τέτοια ώστε: αν $\sigma_1 = \{j \leq r : \varepsilon_j^1 = 0\}$, τότε $|\sigma_1| \leq \delta r$, και

$$\|\sum_{j\in\sigma_0\setminus\sigma_1} \varepsilon_j^1 u_j\|_\infty = \|\varepsilon_1^1 u_1 + \ldots + \varepsilon_r^1 u_r\|_\infty \leq \beta\sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})}.$$

Κρατάμε τα ε_j^1, $j \in \sigma_0\setminus\sigma_1$, και θεωρούμε τα διανύσματα u_j, $j \in \sigma_1$. Αυτά έχουν πλήθος $|\sigma_1| \leq \delta r$ και νόρμα $\|u_j\|_\infty \leq 1$, οπότε εφαρμόζεται πάλι το Θεώρημα 3.3.1. Υπάρχουν $\varepsilon_j^2 \in \{-1, 0, 1\}$ τέτοια ώστε: αν $\sigma_2 = \{j \in \sigma_1 : \varepsilon_j^2 = 0\}$, τότε $|\sigma_2| \leq \delta|\sigma_1| \leq \delta^2 r$, και

$$\|\sum_{j\in\sigma_1\setminus\sigma_2} \varepsilon_j^2 u_j\|_\infty = \|\sum_{j\in\sigma_1} \varepsilon_j^2 u_j\|_\infty \leq \beta\sqrt{\delta r}\sqrt{\log(\frac{2n}{\delta r})}.$$

[Η συνάρτηση $t \mapsto \sqrt{t}\sqrt{\log(2n/t)}$ είναι αύξουσα στο διάστημα που δουλεύουμε]. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, μέχρι τον φυσικό k_0 για τον οποίο θα έχουμε $|\sigma_{k_0}| \leq \sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})}$. Τέτοιος φυσικός υπάρχει, γιατί $\delta \in (0, 1)$ άρα $|\sigma_k| \leq \delta^k r \to 0$. Σε κάθε βήμα, ικανοποιείται η

$$\|\sum_{j\in\sigma_{k-1}\setminus\sigma_k} \varepsilon_j^k u_j\|_\infty \leq \beta\sqrt{\delta^{k-1}r}\sqrt{\log(\frac{2n}{\delta^{k-1}r})},$$

όπου ε_j^k τα πρόσημα που επιλέχθηκαν στο k-βήμα. Για κάθε $j \in \sigma_{k-1}\setminus\sigma_k$ θέτουμε $\varepsilon_j = \varepsilon_j^k$, ενώ αν $j \in \sigma_{k_0}$ θέτουμε $\varepsilon_j = 1$. Έχουμε έτσι μία επιλογή προσήμων $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \{-1, 1\}$, για την οποία

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^r \varepsilon_j u_j\|_\infty &\leq \sum_{k=1}^{k_0}\|\sum_{j\in\sigma_{k-1}\setminus\sigma_k} \varepsilon_j u_j\|_\infty + \|\sum_{j\in\sigma_{k_0}} u_j\|_\infty \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \beta\sqrt{\delta^k r}\sqrt{\log(\frac{2n}{\delta^k r})} + \sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})} \\
&\leq (\beta+1)\sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{k/2} + \beta\sqrt{r}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{k/2}\sqrt{\log(\delta^{-k})}.
\end{aligned}$$

Οι δύο αυτές σειρές συγκλίνουν, άρα

$$\|\sum_{j=1}^r \varepsilon_j u_j\|_\infty \quad \leq \quad (\beta+1)A(\delta)\sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})} + \beta B(\delta)\sqrt{r}$$

$$\leq \quad C(\beta,\delta)\sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})}.$$

Οι β και δ ήταν απόλυτες σταθερές, άρα το ίδιο ισχύει και για την C. $\square$

Παίρνοντας $r = n$ στο Θεώρημα 3.3.2, παίρνουμε το Θεώρημα του Spencer:

Πόρισμα 3.3.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε: Αν $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\|_\infty \leq 1$, τότε μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ με*

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_n u_n\|_\infty \leq C\sqrt{n}. \quad \square$$

3.4 Άνω φράγμα για την εικασία του Komlós

Υποθέτουμε ότι $r \leq n$ και $u_1, \ldots, u_r$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, με $|u_j| \leq 1$. Γράφουμε $u_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ και $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ir})$, $j \leq r$, $i \leq n$. Ανάλογα με την προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε το συμμετρικό κυρτό σύνολο

$$K = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i\rangle| \leq 1, i = 1, \ldots, n\}.$$

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 3.4.1 *Μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \{-1, 0, 1\}$ που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) $|\{j \leq r : \varepsilon_j = 0\}| \leq \delta r$,

και

(β) $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \beta K$,

όπου $\delta \in (0, 1)$ και $\beta > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε $\beta > 0$, και για κάθε $\varepsilon \in \{-1, 1\}^r$ θεωρούμε το $\varepsilon + \beta K$. Από το Λήμμα, για κάθε ε έχουμε

$$\gamma_r(\varepsilon + \beta K) \geq e^{-r/2}\gamma_r(\beta K).$$

Θα δώσουμε κάτω φράγμα για το $\gamma_r(K)$, χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Sidák: Παρατηρούμε ότι το βK είναι η τομή των συμμετρικών λωρίδων

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, \frac{1}{\beta} a_i\rangle| \leq 1\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Από το Λήμμα του Sidák,

$$\gamma_r(\beta K) \geq \prod_{i=1}^{n} \gamma_r(P_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\beta/|a_i|} e^{-s^2/2} ds\right).$$

Ορίζουμε $l_i = |a_i|/\beta$. Γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \sum_{j=1}^{r} |u_j|^2 \leq r,$$

επομένως,

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 =: M \leq \frac{r}{\beta^2}.$$

Λήμμα 3.4.1 *Υπάρχει απόλυτη θετική σταθερά c με την ιδιότητα: αν $l_1, \ldots, l_n > 0$ και $\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = M$, τότε*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/l_i} e^{-s^2/2} ds \right) \geq c^M.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε τα σύνολα

$$A = \{i \leq n : l_i < \frac{1}{2}\},$$

$$B = \{i \leq n : \frac{1}{2} \leq l_i < 1\},$$

και

$$C_\rho = \{i \leq n : 2^\rho \leq l_i < 2^{\rho+1}\}, \quad \rho = 0, 1, 2, \ldots.$$

Παρατηρούμε ότι

$$|C_\rho| 2^{2\rho} \leq \sum_{i \in C_\rho} l_i^2 \leq M,$$

άρα $|C_\rho| \leq M/2^{2\rho}$. Ομοίως, $|B| \leq 4M$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3.2, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\prod_{i \in A} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/l_i} e^{-s^2/2} ds \right) &\geq \prod_{i \in A} e^{-2\exp(-1/2l_i^2)} \\
&\geq \prod_{i \in A} e^{-4l_i^2} = e^{-4\sum_{i \in A} l_i^2} \\
&\geq e^{-4M}.
\end{aligned}$$

Τελείως ανάλογα, για το B έχουμε

$$\begin{aligned}
\prod_{i \in B} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/l_i} e^{-s^2/2} ds \right) &\geq \prod_{i \in B} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1} e^{-s^2/2} ds \right) \\
&\geq \left(\sqrt{\frac{2}{\pi e}} \right)^{|B|} \geq \left(\frac{2}{\pi e} \right)^{2M},
\end{aligned}$$

και για κάθε $\rho = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned}\prod_{i\in C_\rho}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1/l_i} e^{-s^2/2}ds\right) &\geq \prod_{i\in C_\rho}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi e}}\frac{1}{l_i}\right)\\ &\geq \left(\frac{2}{\pi e}\right)^{\frac{|C_\rho|}{2}}\left(\frac{1}{2^{\rho+1}}\right)^{|C_\rho|}\\ &\geq \left(\frac{2}{\pi e}\right)^{\frac{M}{2^{2\rho+1}}}\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{\rho+1}{2^{2\rho}}M}.\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1/l_i} e^{-s^2/2}ds\right) \geq c^M.$$

όπου

$$c = \frac{1}{e^4}\left(\frac{2}{\pi e}\right)^{2+\sum_{\rho=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2\rho+1}}}\left(\frac{1}{e}\right)^{\sum_{\rho=0}^{\infty}\frac{\rho+1}{2^{2\rho}}}. \quad \square$$

Λήμμα 3.4.2 *Μπορούμε να βρούμε $A \subseteq \{-1,1\}^r$ με $|A| \geq 2^{pr}$, τέτοιο ώστε*

$$\bigcap_{\varepsilon\in A}(\varepsilon + \beta K) \neq \emptyset,$$

όπου $p \in (0,1)$ και $\beta > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Επιλέγουμε $p \in (0,1)$ με την ιδιότητα $2^p < 2/\sqrt{e}$, και $\beta = \beta(p) > 0$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$\frac{2c^{1/\beta^2}}{\sqrt{e}} > 2^p,$$

όπου c η σταθερά του προηγούμενου Λήμματος. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^r}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r}\chi_{\varepsilon+\beta K}(x)\gamma_r(dx) &= \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r}\gamma_r(\varepsilon+\beta K)\\ &\geq 2^r e^{-r/2}c^{r/\beta^2}\\ &= \left(\frac{2c^{1/\beta^2}}{\sqrt{e}}\right)^r > 2^{pr}.\end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^r$ τέτοιο ώστε $\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r}\gamma_r(\varepsilon+\beta K) > 2^{pr}$. Θέτουμε $A = \{\varepsilon \in \{-1,1\}^r : x_0 \in \varepsilon + \beta K\}$. Το A ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας. $\square$

Αφού $|A| > 2^{pr}$, υπάρχουν $\delta = \delta(p) \in (0,1)$ και $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)} \in A$ με

$$|\{j \leq r : \varepsilon_j^{(1)} = \varepsilon_j^{(2)}\}| \leq \delta r.$$

Από την $(\varepsilon^{(1)}+\beta K)\cap(\varepsilon^{(2)}+\beta K)\neq\emptyset$ και τη συμμετρία του βK, έπεται ότι

$$\varepsilon := \frac{\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}}{2} \in \beta K.$$

Επιπλέον $\varepsilon \in \{-1,0,1\}^r$, και $|\{j \leq r : \varepsilon_j = 0\}| \leq \delta r$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μία εκτίμηση για το πρόβλημα του Komlós:

Θεώρημα 3.4.2 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε επιλογή διανυσμάτων $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leq 1$, μπορούμε να βρούμε πρόσημα $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{-1,1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_n u_n\|_\infty \leq C\log n.$$

Η απόδειξη είναι ακριβώς όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.2.

Κεφάλαιο 4

Η εικασία του Komlós

4.1 Η ανισότητα του Ehrhard

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι το μέτρο του Gauss γ_n είναι λογαριθμικά κοίλο. Δηλαδή, αν A, B είναι Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$(*) \qquad \gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq [\gamma_n(A)]^{\lambda}[\gamma_n(B)]^{1-\lambda}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση κατανομής

$$\Phi(x) = \gamma_1((-\infty, x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Η $\Phi : \mathbb{R} \to (0,1)$ είναι γνησίως αύξουσα, και επί. Η ανισότητα του Ehrhard [Eh1,2] είναι μία ισχυρότερη έκδοση της $(*)$, για κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 4.1.1 *Αν A, B είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, και $\lambda \in (0,1)$, τότε*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geq \lambda \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)).$$

Είναι άγνωστο αν το Θεώρημα 4.1.1 ισχύει για τυχόντα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ (ισχύει πάντως αν ένα από τα A και B είναι κυρτό, βλέπε [La]). Δείχνουμε πρώτα ότι έχει σαν συνέπεια το ότι το γ_n είναι λογαριθμικά κοίλο, αν περιοριστούμε στην κλάση των κυρτών συνόλων.

Πρόταση 4.1.1 *Η ανισότητα του Ehrhard είναι ισχυρότερη από την $(*)$.*

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι η $\log \Phi$ είναι κοίλη. Πράγματι,

$$(\log \Phi)'(x) = \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)},$$

άρα

$$(\log \Phi)''(x) = \frac{\Phi''(x)\Phi(x) - [\Phi'(x)]^2}{\Phi^2(x)},$$

αρκεί επομένως να ελέγξουμε την $\Phi''(x)\Phi(x) \leq [\Phi'(x)]^2$, η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$g(x) = e^{-x^2/2} + x\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παραγωγίζοντας την g, παίρνουμε

$$g'(x) = -xe^{-x^2/2} + xe^{-x^2/2} + \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt > 0,$$

δηλαδή, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L'Hospital, βλέπουμε ότι $g(x) \to 0$ όταν $x \to -\infty$. Άρα, $g > 0$ και η $\log \Phi$ είναι κοίλη.

Έστω τώρα A, B κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, και $\lambda \in (0,1)$. Από την

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geq \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)),$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η Φ είναι αύξουσα, παίρνουμε

$$\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \Phi(\lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B))).$$

Όμως η Φ είναι λογαριθμικά κοίλη, άρα

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B))) &\geq [\Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)))]^{\lambda}[\Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(B)))]^{1-\lambda} \\ &= [\gamma_n(A)]^{\lambda}[\gamma_n(B)]^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Δηλαδή, η $(*)$ ισχύει για κυρτά σύνολα. □

Το πλαίσιο στο οποίο πρόκειται να εφαρμόσουμε την ανισότητα του Ehrhard, είναι το εξής. Θεωρούμε ένα κυρτό $V \subseteq \mathbb{R}^n$, και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$V_x = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in V\}.$$

Τότε, δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι:

Λήμμα 4.1.1 *Αν $V_x \neq \emptyset$, τότε το V_x είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n-1}$. Επίσης, αν $V_{x_1}, V_{x_2} \neq \emptyset$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε*

$$\lambda V_{x_1} + (1-\lambda)V_{x_2} \subseteq V_{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}. \quad \square$$

Άμεση συνέπεια του Λήμματος είναι η ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 4.1.2 *Έστω V κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $I = \{x \in \mathbb{R} : V_x \neq \emptyset\}$. Τότε, η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, που ορίζεται από την*

$$f(x) = \Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(V_x)),$$

είναι κοίλη.

Απόδειξη: Αν $x_1, x_2 \in I$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε $V_{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2} \supseteq \lambda V_{x_1} + (1-\lambda)V_{x_2}$, άρα

$$\gamma_{n-1}(V_{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}) \geq \gamma_{n-1}(\lambda V_{x_1} + (1-\lambda)V_{x_2}).$$

Η Φ^{-1} είναι αύξουσα, επομένως

$$\Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(V_{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2})) \geq \Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(\lambda V_{x_1} + (1-\lambda)V_{x_2})).$$

Από την ανισότητα του Ehrhard παίρνουμε

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= \Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(V_{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2})) \\ &\geq \Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(\lambda V_{x_1} + (1-\lambda)V_{x_2})) \\ &\geq \lambda\Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(V_{x_1})) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(V_{x_2})) \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Έχοντας στη διάθεσή μας την κοίλη συνάρτηση f, ορίζουμε

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \leq f(x)\}.$$

Αφού η f είναι κοίλη, το W είναι κυρτό υποσύνολο του επιπέδου. Επιπλέον, $\gamma_2(W) = \gamma_n(V)$:

Θεώρημα 4.1.2 *Έστω V κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $f(x) = \Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(V_x))$, για εκείνα τα x που ικανοποιούν την $V_x = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in V\} \neq \emptyset$. Αν $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \leq f(x)\}$, τότε, το W είναι κυρτό, και*

$$\gamma_2(W) = \gamma_n(V).$$

Απόδειξη: Από τη μία πλευρά,

$$\begin{aligned} \gamma_2(W) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_W(x,y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{f(x)} e^{-y^2/2}dy\right) e^{-x^2/2}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \gamma_{n-1}(V_x)e^{-x^2/2}dx. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned} \gamma_n(V) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_V(x,y) e^{-\frac{x^2+|y|^2}{2}} dxdy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int_{V_x} e^{-|y|^2/2}dy\right) e^{-x^2/2}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \gamma_{n-1}(V_x)e^{-x^2/2}dx. \end{aligned}$$

Άρα, $\gamma_2(W) = \gamma_n(V)$. Η κυρτότητα του W είναι συνέπεια του ότι η f είναι κοίλη. □

4.2 Η εικασία των Banaszczyk και Szarek

Ορισμός Έστω V συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$\beta(V) = \inf\left\{\rho > 0 : \forall u_1, \dots, u_n \in D_n \ \exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\} : \sum \varepsilon_i u_i \in \rho V\right\}.$$

Οι Banaszczyk και Szarek [BSz] προσπάθησαν να δώσουν άνω φράγμα για το $\beta(V)$ συναρτήσει του $\gamma_n(V)$. Το αποτέλεσμά τους δεν σχετίζεται άμεσα με το παραπάνω ερώτημα, είναι όμως το πρώτο του είδους:

Θεώρημα 4.2.1 *Υπάρχει $\theta > 0$, $\theta \simeq 1.3489795$, με την εξής ιδιότητα: Έστω V κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(V) \geq 1/2$, και $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leq \theta$. Αν θεωρήσουμε το πλέγμα*

$$L = L(u_1, \dots, u_n) = \left\{\sum m_j u_j : m_j \in \mathbb{Z}\right\},$$

που παράγεται από τα u_j, τότε: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(x + L) \cap V \neq \emptyset.$$

Για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος, θα χρειαστούμε ένα λήμμα:

Λήμμα 4.2.1 *Έστω V κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(V) \geq 1/2$. Αν F είναι k-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n-1$, τότε*

$$\gamma_k(F \cap V) \geq 1/2.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα στην περίπτωση $k = n - 1$ (κατόπιν, προχωράμε με επαγωγή). Επιλέγουμε ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ του F, την οποία επεκτείνουμε σε ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Ταυτίζουμε δηλαδή τον F με τον $\mathbb{R}^{n-1}$ (αυτό είναι δυνατό, αφού το γ_n είναι ανεξάρτητο της επιλογής ορθοκανονικής βάσης).

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $\gamma_{n-1}(F \cap V) < 1/2$. Θεωρούμε τα $V_x \subseteq F$ όπως στην προηγούμενη παράγραφο, και ορίζουμε

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\},$$

όπου $f(x) = \Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(V_x))$. Παρατηρούμε ότι $V_0 = F \cap V$, άρα

$$f(0) = \Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(V_0)) < \Phi^{-1}(1/2) = 0.$$

Από τον ορισμό του W έπεται ότι $(0, 0) \notin W$. Όμως το W είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του επιπέδου, και αφού δεν περιέχει το $(0, 0)$ διαχωρίζεται γνήσια από αυτό με μία ευθεία. Δηλαδή, υπάρχει ημιεπίπεδο H που δεν περιέχει το $(0, 0)$, τέτοιο ώστε $W \subseteq H$. Τότε όμως, από το Θεώρημα 4.1.2,

$$\gamma_n(V) = \gamma_2(W) \leq \gamma_2(H) < 1/2,$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεσή μας για το V. $\square$

Απόδειξη του θεωρήματος: Ορίζουμε $\theta > 0$ από την εξίσωση

$$\gamma_1([-\theta/2, \theta/2]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}.$$

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή ως προς τη διάσταση n. Στην περίπτωση $k = 1$, έχουμε ένα διάνυσμα $u_1 \in \mathbb{R}$ με $|u_1| \leq \theta$, και κάποιο $x \in \mathbb{R}$, το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε ότι ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $[0, u_1]$. Το V είναι κυρτό και κλειστό, δηλαδή διάστημα στην πραγματική ευθεία. Αν ήταν $(x + L(u_1)) \cap V = \emptyset$, το μήκος του V θα έπρεπε να είναι μικρότερο από $|u_1|$. Όμως, αν το μήκος του V είναι $2l < |u_1|$, τότε

$$\gamma_1(V) \leq \gamma_1([-l, l]) < \gamma_1([-\theta/2, \theta/2]) = 1/2,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $(x + L) \cap V \neq \emptyset$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για $k = 1, \ldots, n-1$, θεωρούμε V κλειστό και κυρτό στον $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(V) \geq 1/2$, γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leq \theta$, και υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $(x + L) \cap V = \emptyset$.

Θεωρούμε τον υπόχωρο $F = \langle u_1, \ldots, u_{n-1} \rangle$, και «προβάλλουμε» το $x + L$, παράλληλα προς τον F, στην ευθεία $\langle u_n \rangle$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας (για ευκολία στο συμβολισμό), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $F = \mathbb{R}^{n-1}$ (δεν θα χρησιμοποιήσουμε καθετότητα, πουθενά στο επιχείρημα). Αν $x = (\tilde{x}, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ ως προς τη βάση $\{u_j\}$, τότε η προβολή του $x + L$ στην $\langle u_n \rangle$ είναι το

$$M = \{(m + x_n)u_n : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Για κάθε $z \in \langle u_n \rangle$ ορίζουμε $V_z = \{w \in F : w + z \in V\}$ και

$$W = \{(v, z) \in \mathbb{R}^2 : v \leq \Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(V_z))\}.$$

Τότε, $V_z \cap (\tilde{x} + L \cap F) = \emptyset$ για κάθε $z \in M$, άρα $\gamma_{n-1}(V_z) < 1/2$. Αυτό σημαίνει ότι $(0, z) \notin W$, $z \in M$.

Από την άλλη όμως πλευρά, έχουμε $\gamma_2(W) = \gamma_n(V) \geq 1/2$, άρα

$$\gamma_1(W \cap \langle u_n \rangle) \geq 1/2$$

από το Λήμμα 4.2.1. Έπεται ότι τα $W \cap \langle u_n \rangle$ και $M = x_n u_n + L(u_n)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος, και αφού βρισκόμαστε στη μονοδιάστατη περίπτωση, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $z_0 \in M$ με την ιδιότητα

$$(z_0 \cap (W \cap \langle u_n \rangle)) \neq \emptyset,$$

δηλαδή $(0, z_0) \in W$. Αυτό το άτοπο συμπληρώνει την απόδειξη. $\square$

Παρατήρηση Το Θεώρημα των Banaszczyk και Szarek δίνει το εξής: αν $\gamma_n(V) \geq 1/2$, τότε για κάθε επιλογή διανυσμάτων $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leq \theta$, υπάρχουν περιττοί ακέραιοι $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ τέτοιοι ώστε $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n \in 2V$. Πράγματι, αν θέσουμε $x = \sum_j u_j/2$, υπάρχει $w = t_1 u_1 + \ldots + t_n u_n$, $t_i \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} u_j + \sum_{j=1}^{n} t_j u_j \in V.$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας, με $\lambda_j = 2t_j + 1$, $j = 1, \ldots, n$.

Με βάση τον ορισμό του $\beta(V)$, η εικασία του Komlós είναι ο εξής ισχυρισμός: υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ιδιότητα $\beta(Q_n) \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι Banaszczyk και Szarek προχώρησαν σε μία γενικότερη εικασία, η οποία είναι ασθενέστερη από την εικασία του Komlós στην περίπτωση του κύβου:

Εικασία των Banaszczyk και Szarek *Υπάρχει φθίνουσα συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}^+$ με την ιδιότητα*

$$\beta(V) \leq f(\gamma_n(V))$$

για κάθε κλειστό και κυρτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, αν $\gamma_n(V) \geq 1/2$, τότε $\beta(V) \leq C$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Το δεύτερο μέρος της εικασίας προκύπτει από το πρώτο, γιατί αν $\gamma_n(V) \geq 1/2$, τότε

$$\beta(V) \leq f(\gamma_n(V)) \leq f(1/2) =: C.$$

Σκοπός μας εδώ είναι να δείξουμε την ακόλουθη Πρόταση [Gi]:

Πρόταση 4.2.1 *Αν V είναι συμμετρικό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(V) \geq 1/2$, τότε $\beta(V) \leq C \log n$.*

Η απόδειξη της Πρότασης θα βασιστεί σε δύο λήμματα:

Λήμμα 4.2.2 *Υποθέτουμε ότι $7 \leq r \leq n$. Αν $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leq 1$, τότε υπάρχουν $\sigma \subseteq \{1, \ldots, r\}$ με $|\sigma| \geq r/2$ και $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j \in \sigma$, τέτοια ώστε $\sum_{j\in\sigma} \varepsilon_j u_j \in 4V$.*

Απόδειξη: Για κάθε $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \{-1, 1\}^r$, ορίζουμε

$$L(\varepsilon) = \varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_r u_r \in \mathbb{R}^n.$$

Το πλήθος αυτών των διανυσμάτων είναι 2^r. Για καθένα από αυτά, θεωρούμε τη μεταφορά του V κατά $L(\varepsilon)/4$. Δηλαδή, θεωρούμε 2^r n-διάστατα «αντίγραφα» του V, με κέντρα τα $L(\varepsilon)/4$. Στο Κεφάλαιο 3 είδαμε ότι

$$\gamma_n\left(\frac{L(\varepsilon)}{4} + V\right) \geq e^{-\frac{|L(\varepsilon)|^2}{16\cdot 2}} \gamma_n(V).$$

[Το μέγεθος του $\gamma_n(z + V)$ εξαρτάται μόνο από τα $|z|$ και $\gamma_n(V)$.] Από την άλλη πλευρά, ο κανόνας του παραλληλογράμμου μάς δίνει

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} |L(\varepsilon)|^2 = \frac{1}{2^r} \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} |\varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_r u_r|^2 = \sum_{i=1}^r |u_i|^2 \leq r.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και την κυρτότητα της εκθετικής συνάρτησης, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} \gamma_n\left(\frac{L(\varepsilon)}{4} + V\right) &\geq \left(\frac{1}{2^r} \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} e^{-\frac{|L(\varepsilon)|^2}{32}}\right) 2^r \gamma_n(V) \\
&\geq 2^r \gamma_n(V) \exp\left(-\frac{1}{2^r} \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} \frac{|L(\varepsilon)|^2}{32}\right) \\
&= 2^r \gamma_n(V) \exp\left(-\frac{1}{32} \sum_{i=1}^r |u_i|^2\right) \\
&\geq 2^{r-1} e^{-\frac{r}{32}} \\
&\geq 2^{\alpha r},
\end{aligned}$$

όπου $\alpha = 1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{32\ln 2}$. Όμως,

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} \gamma_n\left(\frac{L(\varepsilon)}{4} + V\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} \chi_{\frac{L(\varepsilon)}{4}+V}(x) \gamma_n(dx).$$

Άρα, υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^r} \chi_{\frac{L(\varepsilon)}{4}+V}(x) \geq 2^{\alpha r},$$

δηλαδή, υπάρχει $A \subseteq \{-1,1\}^r$ με $|A| \geq 2^{\alpha r}$, τέτοιο ώστε

$$\bigcap_{\varepsilon \in A} \left(\frac{L(\varepsilon)}{4} + V \right) \neq \emptyset.$$

Σύμφωνα με την επιλογή των παραμέτρων (που οδηγεί στο συγκεκριμένο α), το επιχείρημα του Λήμματος 3.3.3 δείχνει ότι υπάρχουν $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)} \in A$ τέτοια ώστε το $\sigma = \{j \leq r : \varepsilon_j^{(1)} \neq \varepsilon_j^{(2)}\}$ να έχει πληθάριθμο $|\sigma| \geq r/2$. Ακόμα,

$$\frac{1}{4} \sum_{j \in \sigma} 2\varepsilon_j^{(1)} u_j = \frac{L(\varepsilon^{(1)})}{4} - \frac{L(\varepsilon^{(2)})}{4} \in 2V$$

από την κυρτότητα και τη συμμετρία του V, δηλαδή,

$$\sum_{j \in \sigma} \varepsilon_j^{(1)} u_j \in 4V.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη, με $\varepsilon_j = \varepsilon_j^{(1)}$, $j \in \sigma$. □

Λήμμα 4.2.3 *Αν $\gamma_n(V) \geq 1/2$, τότε το V περιέχει τη μπάλα ρD_n για κάποιο $\rho >$* $1/2$.

Απόδειξη: Το V είναι συμμετρικό και κυρτό, με $\gamma_n(V) \geq 1/2$, άρα περιέχει κάποια μπάλα με κέντρο το o. Έστω ρD_n η εγγεγραμμένη μπάλα στο V. Θεωρούμε τη λωρίδα $P = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, \theta \rangle| \leq \rho\}$, όπου $\theta \in S^{n-1}$ μία διεύθυνση στην οποία η ρD_n «ακουμπάει» το V. Τότε, $V \subseteq P$, άρα

$$\frac{1}{2} \leq \gamma_n(V) \leq \gamma_n(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\rho}^{\rho} e^{-s^2/2} ds \leq \frac{2\rho}{\sqrt{2\pi}}.$$

Αυτό δείχνει ότι $\rho \geq \sqrt{2\pi}/4 > 1/2$. □

Απόδειξη της Πρότασης: Δίνονται $u_1, \ldots, u_n \in D_n$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geq 7$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.2 για $r = n$, βρίσκουμε $\sigma_1 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ με $|\sigma_1| \geq n/2$, και $\varepsilon_j = \pm 1$, $j \in \sigma_1$, τέτοια ώστε $\sum_{j \in \sigma_1} \varepsilon_j u_j \in 4V$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τα u_j, $j \notin \sigma_1$. Αν $|\sigma_1^c| \geq 7$ εφαρμόζουμε πάλι το Λήμμα 4.2.2 με $r = |\sigma_1^c|$ και βρίσκουμε $\sigma_2 \subseteq \sigma_1^c$ με $|\sigma_2| \geq |\sigma_1^c|/2$ και ε_j, $j \in \sigma_2$ τέτοια ώστε $\sum_{j \in \sigma_2} \varepsilon_j u_j \in 4V$. Παρατηρούμε ότι $|(\sigma_1 \cup \sigma_2)^c| \leq n/2^2$.

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: όσο η διαδικασία επιτρέπεται βρίσκουμε ξένα $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ με $|(\cup_{i \leq k} \sigma_i)^c| \leq n/2^k$, και $\varepsilon_j = \pm 1$, $j \in \sigma_i$ τέτοια ώστε

$$\sum_{j \in \sigma_i} \varepsilon_j u_j \in 4V, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Σταματάμε στο πρώτο k_0 για το οποίο $|(\cup_{i \leq k_0} \sigma_i)^c| \leq 6$. Από τον τρόπο ορισμού των σ_i έχουμε $7 \cdot 2^{k_0 - 1} \leq n$, άρα

$$k_0 \leq c_1 \log n$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$. Έχουν μείνει $s \leq 6$ διανύσματα $u_{i_1}, \ldots, u_{i_s}$ για τα οποία δεν έχουμε προσδιορίσει πρόσημα. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon}\Big|\sum_{l=1}^{s}\varepsilon_l u_{i_l}\Big|^2 = \sum_{l=1}^{s}|u_{i_l}|^2 \leq s \leq 6,$$

άρα, με τη βοήθεια και του Λήμματος 4.2.3, εξασφαλίζουμε επιλογή προσήμων τέτοια ώστε

$$\sum_{l=1}^{s}\varepsilon_l u_{i_l} \in \sqrt{6}D_n \subseteq 2\sqrt{6}V.$$

Για την επιλογή προσήμων ε_j, $j \leq n$ που περιγράψαμε, ισχύει

$$\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j u_j \in 4k_0V + 2\sqrt{6}V \subseteq c\log nV,$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά, δηλαδή το ζητούμενο. $\square$

Το αποτέλεσμα αυτό δίνει μία πρώτη εκτίμηση για το $\beta(V)$ με την υπόθεση $\gamma_n(V) \geq 1/2$. Το δεύτερο μέρος της εικασίας των Banaszczyk και Szarek αποδείχθηκε από τον Banaszczyk. Το θεώρημα αυτό θα μελετηθεί στην επόμενη παράγραφο. Προς το παρόν, θα δούμε ποιά είναι η συνέπειά του για την εικασία του Komlós:

Θεώρημα 4.2.2 *$\beta(Q_n) \leq c\sqrt{\log n}$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη: Έστω $r > 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\gamma_n(rQ_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{rQ_n} e^{-|x|^2/2}dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r} e^{-t^2/2}dt\right)^n \\ &\geq \left(1 - e^{-r^2/2}\right)^n.\end{aligned}$$

Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, και αν επιλέξουμε $r = 2\sqrt{\log n}$, τότε

$$\gamma_n(2\sqrt{\log n}Q_n) \geq (1 - n^{-2})^n \geq \frac{1}{2},$$

άρα, αν δεχτούμε την εικασία των Banaszczyk και Szarek, $\beta(2\sqrt{\log n}Q_n) \leq C$. Όμως αυτό σημαίνει ότι

$$\beta(Q_n) \leq 2C\sqrt{\log n} \leq c'\sqrt{\log n}. \quad \square$$

Αυτή είναι η καλύτερη γνωστή εκτίμηση σχετικά με την εικασία του Komlós. Δεν είναι γνωστό αν η εικασία ισχύει ή όχι.

4.3 Το Θεώρημα του Banaszczyk

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι η εικασία των Banaszczyk και Szarek είναι σωστή [Ban]:

Θεώρημα 4.3.1 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με $\gamma_n(K) \geq 1/2$. Τότε, $\beta(K) \leq c$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος θα γίνει με επαγωγή, η οποία βασίζεται στο εξής:

Θεώρημα 4.3.2 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(K) \geq 1/2$, και $u \in \mathbb{R}^n$ με $|u| \leq 1/5$. Τότε, το $(K+u) \cup (K-u)$ περιέχει ένα κυρτό σώμα K' με $\gamma_n(K') \geq 1/2$.*

Με δεδομένο το Θεώρημα 4.3.2, η απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 είναι πολύ απλή:

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι, αν $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ και $|u_j| \leq 1/5$, τότε υπάρχουν $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^m \varepsilon_j u_j \in K$.

Έστω ότι $\gamma_n(K) \geq 1/2$, αλλά το παραπάνω δεν ισχύει. Υπάρχουν δηλαδή $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leq 1/5$, τα οποία έχουν την ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$,

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j u_j \notin K.$$

Από το Θεώρημα 4.3.2, υπάρχει κυρτό σώμα $K_1 \subseteq (K+u_m) \cup (K-u_m)$ με $\gamma_n(K_1) \geq 1/2$. Τότε, για κάθε $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1} \in \{-1, 1\}$,

$$\sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_j u_j \notin K_1.$$

Πράγματι, αν για κάποια $\varepsilon_j^* \in \{-1, 1\}$, $j \leq m-1$, είχαμε $v = \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_j^* u_j \in K_1$, τότε θα ήταν: είτε $v \in K + u_m$ οπότε $v - u_m \in K$, είτε $v \in K - u_m$ οπότε $v + u_m \in K$. Σε κάθε περίπτωση, αυτό είναι άτοπο από την υπόθεσή μας.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, ορίζουμε ακολουθία κυρτών σωμάτων K_s, $s = 1, 2, \ldots$, με $\gamma_n(K_s) \geq 1/2$ και

$$\sum_{j=1}^{m-s} \varepsilon_j u_j \notin K_s$$

για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-s} \in \{-1, 1\}$. Στο βήμα $s = m-1$, προκύπτει κυρτό σώμα K_{m-1} με $\gamma_n(K_{m-1}) \geq 1/2$, και $\pm u_1 \notin K_{m-1}$. Όμως τότε, υπάρχει κυρτό σώμα $K_m = W \subseteq (K_{m-1} + u_1) \cup (K_{m-1} - u_1)$, τέτοιο ώστε: $\gamma_n(W) \geq 1/2$ και $o \notin W$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί το W πρέπει να διαχωρίζεται γνήσια από το o, δηλαδή να περιέχεται γνήσια σε έναν ημίχωρο H με $\gamma_n(H) < 1/2$. $\square$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.3.2. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u = re_n$. Θεωρούμε τον κύλινδρο Z που αποτελείται από όλες τις ευθείες l που είναι παράλληλες προς το u και έχουν την ιδιότητα το μήκος του $K \cap l$ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $2r$.

Ορίζουμε

$$K * u := [(K+u) \cup (K-u)] \cap Z.$$

Από τον τρόπο ορισμού του Z, προκύπτει ότι $K * u = K \cap Z + \{tu : |t| \leq 1\}$, άρα το $K * u$ είναι κυρτό (βλέπε σχήμα), και $K * u \subseteq (K+u) \cup (K-u)$. Αυτό που θα δείξουμε είναι ότι:

Θεώρημα 4.3.3 *Αν $\gamma_n(K) \geq 1/2$ και $r \leq 1/5$, τότε $\gamma_n(K * u) \geq \gamma_n(K) \geq 1/2$.*

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, γράφουμε $\psi(K)$ για την προβολή του K στον $\mathbb{R}^{n-1}$. Τότε, υπάρχουν συναρτήσεις $h_1, h_2 : \psi(K) \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε

$$K = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^n : x \in \psi(K), h_1(x) \leq x_n \leq h_2(x)\},$$

όπου h_1 κυρτή, h_2 κοίλη, και $h_1 \leq h_2$ στο $\psi(K)$. Θέτουμε $A = \mathrm{int}(\psi(K))$, και ορίζουμε $h_3 : A \to \mathbb{R}$ μέσω της

$$\int_{-\infty}^{h_3(x)} e^{-t^2/2} dt = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} e^{-t^2/2} dt, \quad x \in A.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Ehrhard για $n = 2$, βλέπουμε ότι η h_3 είναι κοίλη στο A. Επομένως, το

$$U = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^n : x \in A, x_n < h_3(x)\}$$

είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\gamma_n(U) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A\int_{-\infty}^{h_3(x)} e^{-t^2/2}dt\gamma_{n-1}(dx)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\psi(K)}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} e^{-t^2/2}dt\gamma_{n-1}(dx)\\ &= \gamma_n(K).\end{aligned}$$

Ορίζουμε $\alpha = \sup\{h_3(x) : x \in A\}$. Από την $\gamma_n(U) = \gamma_n(K) \geq 1/2$ έπεται ότι $\alpha > 0$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$B = \{x \in \psi(K) : h_2(x) - h_1(x) \geq 2r\}$$

και

$$C = \{x \in A : h_3(x) > -p\},$$

όπου p ο αριθμός που ορίζεται από τη σχέση

$$\int_p^\infty e^{-t^2/2}dt = 2\int_0^r e^{-t^2/2}dt.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε διάφορα λήμματα που προκύπτουν από στοιχειώδεις ιδιότητες της συνάρτησης $e^{-t^2/2}$:

Λήμμα 4.3.1 *Αν $r \leq 1/5$, τότε $p > 1$. Ειδικότερα, $p > r/2$.* □

Λήμμα 4.3.2 *Έστω $r > 0$. Η συνάρτηση*

$$x \mapsto \int_x^{x+r} e^{-t^2/2} dt$$

είναι αύξουσα στο $(-\infty, -r/2]$ και φθίνουσα στο $[r/2, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$,

$$\int_x^{x+r} e^{-t^2/2} dt \leq \int_{x-r}^{x} e^{-t^2/2} dt. \quad \square$$

Λήμμα 4.3.3 *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Τότε,*

$$\int_a^b e^{-t^2/2} dt \leq 2 \int_0^{(b-a)/2} e^{-t^2/2} dt. \quad \square$$

Λήμμα 4.3.4 *Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν την*

$$\int_a^b e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^{c} e^{-t^2/2} dt.$$

Τότε, για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\int_{a-r}^{b+r} e^{-t^2/2} dt > \int_{-\infty}^{c+r} e^{-t^2/2} dt. \quad \square$$

Έχουμε $B = \psi(K) \cap Z$, και το C είναι μη κενό, γιατί $\alpha = \sup h_3 > 0$. Επίσης, το C είναι κυρτό, γιατί η h_3 είναι κοίλη. Θα δείξουμε ότι $C \subseteq B$: Έστω $x \in C$. Τότε,

$$\begin{aligned} 2\int_0^r e^{-t^2/2} dt &= \int_p^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^{-p} e^{-t^2/2} dt \\ &< \int_{-\infty}^{h_3(x)} e^{-t^2/2} dt = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} e^{-t^2/2} dt \\ &\leq 2\int_0^{\frac{h_2(x)-h_1(x)}{2}} e^{-t^2/2} dt. \end{aligned}$$

Άρα, $h_2(x) - h_1(x) \geq 2r$, δηλαδή $x \in B$.

Ερχόμαστε στο $K * u$. Έχουμε

$$K * u = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^n : x \in B, h_1(x) - r \leq x_n \leq h_2(x) + r\},$$

και, αν θεωρήσουμε το

$$V = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^n : x \in C, x_n < h_3(x) + r\},$$

τότε,

$$\begin{aligned}\gamma_n(V) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_C\int_{-\infty}^{h_3(x)+r} e^{-t^2/2}dt\gamma_{n-1}(dx)\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_B\int_{h_1(x)-r}^{h_2(x)+r} e^{-t^2/2}dt\gamma_{n-1}(dx)\\ &= \gamma_n(K*u),\end{aligned}$$

γιατί, $C\subseteq B$ όπως είδαμε, και από την

$$\int_{-\infty}^{h_3(x)} e^{-t^2/2}dt = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} e^{-t^2/2}dt$$

έπεται η

$$\int_{-\infty}^{h_3(x)+r} e^{-t^2/2}dt \leq \int_{h_1(x)-r}^{h_2(x)+r} e^{-t^2/2}dt$$

για κάθε $r>0$ (Λήμμα 4.3.4). Βλέπουμε λοιπόν ότι το Θεώρημα θα αποδειχθεί αν ισχύει το εξής:

Πρόταση 4.3.1 $\gamma_n(V)\geq\gamma_n(U)$.

Απόδειξη: Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ ορίζουμε $H_t=\{(x,x_n): x_n=t\}$, και μία συνάρτηση $f:(-\infty,\alpha)\to\mathbb{R}$ μέσω της

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{f(t)} e^{-s^2/2}ds = \gamma_{n-1}(\psi(U\cap H_t)).$$

Από την ανισότητα του Ehrhard, η f είναι κοίλη. Εύκολα ελέγχουμε ότι είναι και φθίνουσα (βλέπε σχήμα). Επίσης,

$$\gamma_n(K) = \gamma_n(U) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\alpha}\int_{-\infty}^{f(t)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} dsdt.$$

Ακριβώς όπως για το U, ορίζουμε για το V συνάρτηση $g : (-\infty, \alpha + r) \to \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί την

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{g(t)} e^{-s^2/2} ds = \gamma_{n-1}(\psi(V \cap H_t)), \quad -\infty < t < \alpha + r.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την g συναρτήσει της f:

$$g(t) = \begin{cases} f(-p) & , -\infty < t \leq -p + r, \\ \\ f(t-r) & , -p + r \leq t < \alpha + r. \end{cases}$$

Με τη βοήθεια της g, το $\gamma_n(V)$ γράφεται στη μορφή

$$\gamma_n(V) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\alpha+r}\int_{-\infty}^{g(t)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} dsdt.$$

Αυτό λοιπόν που ζητάμε να δείξουμε είναι η ανισότητα

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{-p+r}\int_{-\infty}^{f(-p)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} dsdt + \int_{-p+r}^{\alpha+r}\int_{-\infty}^{f(t-r)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} dsdt \geq \int_{-\infty}^{\alpha}\int_{-\infty}^{f(t)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} dsdt,$$

έχοντας εξασφαλίσει τις εξής προϋποθέσεις: (α) το r είναι θετικό, και αρκετά μικρό.

(β) $\int_p^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \int_{-r}^{r} e^{-t^2/2}dt$, και αν $r \leq 1/5$ τότε $p \geq 1$ (Λήμμα 4.3.1).

(γ) $\alpha > 0$.

(δ) Η $f : (-\infty, \alpha) \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα, κοίλη, με $f(0) \geq 0$.

Αυτές είναι οι μόνες υποθέσεις που θα χρειαστούμε από δώ και πέρα.

Λήμμα 4.3.5 *Ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{2p}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq \int_p^{p+r} e^{-t^2/2}dt.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε

$$\Psi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt,$$

και ζητάμε την $\Psi(2p) \leq \Psi(p) - \Psi(p+r)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $p \mapsto \Psi(p+r)/\Psi(p)$ είναι φθίνουσα. Πράγματι, εύκολα ελέγχουμε ότι η $\log\Psi$ είναι φθίνουσα, και αυτό μάς εξασφαλίζει ότι

$$\left(\log\frac{\Psi(p+r)}{\Psi(p)}\right)'(p) = \frac{\Psi'(p+r)}{\Psi(p+r)} - \frac{\Psi'(p)}{\Psi(p)} < 0.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και τον ορισμό του p παίρνουμε

$$\frac{\Psi(p)-\Psi(p+r)}{\Psi(p)} > \frac{\Psi(0)-\Psi(r)}{\Psi(0)} = \frac{\Psi(p)}{2\Psi(0)},$$

δηλαδή,

$$\frac{\Psi(p)-\Psi(p+r)}{\Psi(2p)} > \frac{1}{2\Psi(0)}\frac{\Psi^2(p)}{\Psi(2p)}.$$

Ομοίως, η συνάρτηση $p \mapsto \Psi^2(p)/\Psi(2p)$ είναι αύξουσα, γιατί

$$\left(\log \frac{\Psi^2(p)}{\Psi(2p)}\right)'(p) = \frac{2\Psi'(p)}{\Psi(p)} - \frac{2\Psi'(2p)}{\Psi(2p)} > 0,$$

άρα,

$$\frac{\Psi(p) - \Psi(p+r)}{\Psi(2p)} > \frac{1}{2\Psi(0)} \frac{\Psi^2(p)}{\Psi(2p)} \geq \frac{1}{2\Psi(0)} \frac{\Psi^2(1)}{\Psi(2)},$$

το οποίο μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ξεπερνάει το 1. Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 4.3.6 *Έστω $r > 0$ και $q \geq 0$. Τότε, η συνάρτηση*

$$y \mapsto \frac{\Psi(y) - \Psi(y+r)}{\Psi(y+q)}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του y.

Απόδειξη: Στην απόδειξη του προηγούμενου Λήμματος είδαμε ότι η συνάρτηση $\Psi(y+r)/\Psi(y)$ είναι φθίνουσα. Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι η $\Psi(y+q)/\Psi(y)$ είναι επίσης φθίνουσα. Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{\Psi(y) - \Psi(y+r)}{\Psi(y+q)} = \left(1 - \frac{\Psi(y+r)}{\Psi(y)}\right) \cdot \frac{\Psi(y)}{\Psi(y+q)}. \quad \square$$

Απόδειξη της $(*)$: Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και $\lim_{t\to a} f(t) = -\infty$. Γράφουμε $b = \lim_{t\to -\infty} f(t)$ και θεωρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f, $h : (-\infty, b) \to (-\infty, a)$. Η h είναι κοίλη, γνησίως φθίνουσα, $h(0) \geq 0$, και η $(*)$ παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$(**) \qquad \int_{f(-p)}^{b} \int_{-\infty}^{h(s)} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} dt ds \leq \int_{-\infty}^{f(-p)} \int_{h(s)}^{h(s)+r} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} dt ds.$$

Γράφουμε $u = f(-p)$ και $v = f(-r/2)$. Από το Λήμμα 4.3.1, $p > r/2$ άρα $u > v$. Έστω l η γραμμική συνάρτηση με $l(u) = -p$ και $l(v) = -r/2$ (η l συμπίπτει με την

h στα u και v). Η l είναι γνησίως φθίνουσα.

Ισχυρισμός: Ισχύουν οι ανισότητες

$$\int_u^{+\infty}\int_{-\infty}^{l(s)} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}}dtds \geq \int_u^b \int_{-\infty}^{h(s)} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}}dtds, \tag{1}$$

και

$$\int_{-\infty}^u \int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}}dtds \leq \int_{-\infty}^u \int_{h(s)}^{h(s)+r} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}}dtds. \tag{2}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού: Η h είναι κοίλη και ταυτίζεται με την l στα u και v. Άρα,

$$l(s) \geq h(s), \quad -\infty < s \leq v, \tag{3}$$

$$l(s) \leq h(s), \quad v < s \leq u, \tag{4}$$

$$l(s) \geq h(s), \quad u < s \leq b. \tag{5}$$

Η ανισότητα (1) είναι άμεση συνέπεια της (5). Από τις (3), (4) και το γεγονός ότι η $x \mapsto \int_x^{x+r} e^{-t^2/2}dt$ είναι αύξουσα στο $(-\infty, -r/2]$ (Λήμμα 4.3.2), παίρνουμε

$$\int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-t^2/2}dt \leq \int_{h(s)}^{h(s)+r} e^{-t^2/2}dt$$

για κάθε $s \leq u$ (εξετάζουμε χωριστά τις περιπτώσεις $s \leq v$ και $s \geq v$). Αυτό αποδεικνύει την (2). $\square$

Με βάση τον ισχυρισμό, για την απόδειξη της (**) αρκεί να αποδείξουμε την

$$\int_{u}^{+\infty}\int_{-\infty}^{l(s)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds \le \int_{-\infty}^{u}\int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds. \tag{6}$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα, $f(0) \ge 0$, και $-r/2 < 0$, άρα $v = f(-r/2) > 0$. Θέτοντας $s = 0$ στην (3), παίρνουμε $l(0) \ge h(0) \ge 0$. Γράφουμε $w = l^{-1}(0)$, οπότε $w \ge 0$. Αφού $l(u) = -p < 0$, έπεται ότι $w < u$. Ορίζουμε $d = u - w$. Για την απόδειξη της (6), αρκεί να δείξουμε τις ακόλουθες τρείς ανισότητες:

$$\frac{1}{2}\int_{u}^{u+d}\int_{-\infty}^{l(s)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds \le \int_{w}^{u}\int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\int_{u}^{u+d}\int_{-\infty}^{l(s)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds \le \int_{w-d}^{w}\int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds, \tag{8}$$

$$\int_{u+d}^{+\infty}\int_{-\infty}^{l(s)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds \le \int_{-\infty}^{w-d}\int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds. \tag{9}$$

Αφού $0 \le w < u$, έχουμε

$$e^{-(s+u)^2/2} < e^{-(s\pm w)^2/2} \tag{10}$$

για κάθε $s \ge 0$. Η l είναι γνησίως φθίνουσα και $l(w) = 0$, άρα

$$l(s) = -m \cdot (s - w)$$

για κάποιον συντελεστή $m > 0$. Η συνθήκη $l(u) = -p$ δίνει $-m \cdot (u - w) = -p$, δηλαδή $m \cdot d = p$. Οι ανισότητες (7) και (8) γράφονται

$$\frac{1}{2} \int_0^d \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-\frac{(s+u)^2+t^2}{2}} dtds \leq \int_0^d \int_{l(s+w)}^{l(s+w)+r} e^{-\frac{(s+w)^2+t^2}{2}} dtds \tag{11}$$

και

$$\frac{1}{2} \int_0^d \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-\frac{(s+u)^2+t^2}{2}} dtds \leq \int_0^d \int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-\frac{(w-s)^2+t^2}{2}} dtds \tag{12}$$

αντίστοιχα. Σταθεροποιούμε $s \in (0, d)$. Με βάση τους ορισμούς μας, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt &= \int_{-\infty}^{-m\cdot(s+u-w)} e^{-t^2/2} dt = \int_{m\cdot(s+d)}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &= \int_{p+m\cdot s}^{\infty} e^{-t^2/2} dt. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του p και το Λήμμα 4.3.6,

$$\frac{\int_{m\cdot s}^{m\cdot s+r} e^{-t^2/2} dt}{\int_{p+m\cdot s}^{\infty} e^{-t^2/2} dt} > \frac{\int_0^r e^{-t^2/2} dt}{\int_p^{\infty} e^{-t^2/2} dt} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, από το Λήμμα 4.3.2,

$$\frac{1}{2} \int_{p+m\cdot s}^{\infty} e^{-t^2/2} dt < \int_{m\cdot s}^{m\cdot s+r} e^{-t^2/2} dt \leq \int_{m\cdot s-r}^{m\cdot s} e^{-t^2/2} dt.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt &< \int_{m\cdot s-r}^{m\cdot s} e^{-t^2/2} dt = \int_{-m\cdot s}^{-m\cdot s+r} e^{-t^2/2} dt \\ &= \int_{l(s+w)}^{l(s+w)+r} e^{-t^2/2} dt, \end{aligned}$$

και

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt < \int_{m\cdot s}^{m\cdot s+r} e^{-t^2/2} dt = \int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-t^2/2} dt.$$

Χρησιμοποιώντας την (10), γράφουμε

$$\frac{1}{2} e^{-(s+u)^2/2} \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt < e^{-(s+w)^2/2} \int_{l(s+w)}^{l(s+w)+r} e^{-t^2/2} dt,$$

και

$$\frac{1}{2} e^{-(s+u)^2/2} \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt < e^{-(w-s)^2/2} \int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-t^2/2} dt,$$

και ολοκληρώνοντας αυτές τις ανισότητες ως προς $s \in (0, d)$, παίρνουμε τις (11) και (12) αντίστοιχα.

Η (9) είναι ισοδύναμη με την

$$\int_d^{+\infty} \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-\frac{(s+u)^2+t^2}{2}} dt ds \leq \int_d^{+\infty} \int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-\frac{(w-s)^2+t^2}{2}} dt ds.$$

Σταθεροποιούμε $s \in (d, +\infty)$. Τότε, $m \cdot s > m \cdot d = p$. Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 4.3.5 και 4.3.6, παίρνουμε

$$\frac{\int_{m\cdot s}^{m\cdot s+r} e^{-t^2/2} dt}{\int_{p+m\cdot s}^{\infty} e^{-t^2/2} dt} > \frac{\int_p^{p+r} e^{-t^2/2} dt}{\int_{2p}^{\infty} e^{-t^2/2} dt} \geq 1.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt &= \int_{-\infty}^{-m\cdot(s+u-w)} e^{-t^2/2} dt = \int_{m\cdot(s+d)}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \\
&= \int_{p+m\cdot s}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \int_{m\cdot s}^{m\cdot s+r} e^{-t^2/2} dt \\
&= \int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-t^2/2} dt.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας υπ' όψιν και την (10), έχουμε

$$e^{-(s+u)^2/2} \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt < e^{-(w-s)^2/2} \int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-t^2/2} dt,$$

και ολοκληρώνοντας ως προς $s \in (d, +\infty)$ παίρνουμε την (9). $\square$

Βιβλιογραφία

[Ban] W. Banaszczyk, *Balancing vectors and Gaussian measures of n-dimensional convex bodies*, Random Structures Algorithms **12** (1998), 351-360.

[BF] J. Beck and T. Fiala, *Integer-making theorems*, Discrete Appl. Math. **3** (1981), 1-8.

[BG] I. Bárány and V.S. Grinberg, *On some combinatorial questions in finite dimensional spaces*, Linear Algebra Appl. **41** (1981), 1-9.

[BP] K. Ball and A. Pajor, *Convex bodies with few faces*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 225-231.

[BSz] W. Banaszczyk and S.J. Szarek, *Lattice coverings and Gaussian measures of n-dimensional convex bodies*, Discrete and Computational Geometry (to appear).

[Eh1] A. Ehrhard, *Symétrisation dans l'espace de Gauss*, Math. Scand. **53** (1983), 281-301.

[Eh2] A. Ehrhard, *Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes*, Ann. Inst. H. Poincaré **22** (1986), 317-332.

[Gi] A. Giannopoulos, On some vector balancing problems, Studia Math. **122** (1997), 225-234.

[Gl] E.D. Gluskin, *Extremal properties of orthogonal parallelepipeds and their applications to the geometry of Banach spaces*, Math. USSR Sbornik **64** (1989), 85-96.

[La] R. Latala, *A note on the Ehrhard inequality*, Studia Math. **118** (1996), 169-174.

[Pis] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[Pi] L.D. Pitt, *A Gaussian correlation inequality for symmetric convex sets*, Ann. Probab. **5** (1977), 470-474.

[Sid] Z. Sidák, *On multivariate normal probabilities of rectangles: their dependence on correlation*, Ann. Math. Statist. **39** (1968), 1425-1434.

[Sp1] J. Spencer, *Six standard deviations suffice*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1985), 679-706.

[Sp2] J. Spencer, *Ten Lectures on the Probabilistic Method*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Penn. 1994.

[SSZ] G. Schechtman, T. Schlumprecht and J. Zinn, *On the Gaussian measure of the intersection*, Ann. Probab. **26** (1998), 346-357.

[Va] J.D. Vaaler, *A geometric inequality with applications to linear forms*, Pacific J. Math. **83** (1979), 543-553.