Λογαριθμικές εκτιμήσεις για την εικασία Kannan-Lovász-Simonovits και την ισοτροπική σταθερά

Διπλωματική Εργασία

Σωτήρης Αρμενιάκος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2023

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Απόστολος Γιαννόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Παντελής Δοδός, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Αριστείδης Κατάβολος, Ομότιμος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Περιεχόμενα

Συμβολισμός και Ορισμοί

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n)$, και $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Με $(e_i)_{i=1}^n$ συμβολίζουμε τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$, και με $0 = (0, \dots, 0)$ το μηδέν του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ με $\vartheta^\perp$ συμβολίζουμε το κεντρικό υπερεπίπεδο που είναι κάθετο στο ϑ. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την Ευκλείδεια νόρμα $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, και γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Με τον όρο όγκος του A, αναφερόμαστε στο n-διάστατο μέτρο Lebesgue ενός (πλήρους διάστασης) μετρήσιμου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε τον όγκο ενός τέτοιου συνόλου A με $\mathrm{vol}_n(A)$. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n. Για ευκολία στο συμβολισμό γράφουμε $\overline{A}$ για την ομοιοθετική εικόνα όγκου 1 ενός $A \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(A) > 0$, δηλαδή $\overline{A} := \mathrm{vol}_n(A)^{-1/n} A$.

Η Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} είναι εφοδιασμένη με ένα αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας, το οποίο συμβολίζουμε με σ: ένας τρόπος ορισμού αυτού του μέτρου είναι να θέσουμε

$$\sigma(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(C(A))}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)},$$

για κάθε Borel $A \subseteq S^{n-1}$, όπου $C(A) = \{tx : x \in A, t \in [0, 1]\}$.

Γράφουμε $GL(n)$ για το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, και $SL(n) = \{T \in GL(n) : |\det(T)| = 1\}$ είναι το υποσύνολο των $T \in GL(n)$ που διατηρούν τον όγκο. Με $O(n)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών στον $\mathbb{R}^n$. Η ορθογώνια ομάδα $O(n)$ είναι εφοδιασμένη με ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας (μέτρο Haar) το οποίο συμβολίζουμε με ν_n. Σταθεροποιώντας τυχόν $x_0 \in S^{n-1}$ έχουμε, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq S^{n-1}$, την ταυτότητα

$$\sigma(A) := \nu_n\left(\{U \in O(n) : U(x_0) \in A\}\right).$$

Για κάθε φυσικό $k < n$, με $G_{n,k}$ συμβολίζουμε την πολλαπλότητα Grassmann, το σύνολο των k-διάστατων υπόχωρων του $\mathbb{R}^n$. Η $G_{n,k}$ είναι επίσης εφοδιασμένη με ένα μέτρο Haar πιθανότητας που συμβολίζουμε με $\nu_{n,k}$, και ορίζεται μέσω του μέτρου στην $O(n)$: Για κάθε μετρήσιμο $S \subseteq G_{n,k}$,

$$\nu_{n,k}(S) := \nu_n\left(\{U \in O(n) : U(\mathbb{R}^k) \in S\}\right).$$

Για έναν υπόχωρο $F \in G_{n,k}$, συμβολίζουμε με P_F την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ επί του F.

Τα γράμματα $c, c', \overline{c}, c_1, c_2$ κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές που η τιμή τους μπορεί να αλλάζει από γραμμή σε γραμμή. Όταν γράφουμε $a \lesssim b$, εννοούμε ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά

$c > 0$ τέτοια ώστε $a \leqslant cb$. Γράφουμε επίσης $a \approx b$ αν $a \lesssim b$ και $b \lesssim a$. Όμοια, αν $K, T \subseteq \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K \approx T$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 K \subseteq T \subseteq c_2 K$. Συμβολίζουμε τέλος με $|A|$ τον πληθάριθμο ενός πεπερασμένου συνόλου A, και συχνά χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Βασικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσουμε αποτελέσματα των Klartag, Lehec, Chen, Jambulapati, Vempala και Lee που δίνουν εκτιμήσεις για την ισοπεριμετρική σταθερά ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Η εργασία ουσιαστικά αποτελείται από δύο κομμάτια, ένα με χροιά συναρτησιακής ανάλυσης και ένα που χρησιμοιεί εργαλεία στοχαστικού λογισμού.

1.1 Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα

Το κλασικό ισοπεριμετρικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: από όλες τις καμπύλες στο επίπεδο που περικλείουν σταθερό εμβαδόν, ποιά είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την περιφέρεια; Είναι γνωστό ότι την απάντηση δίνει ο κύκλος. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί σε γενικότερο πλαίσιο, αφού πρώτα ορίσουμε κατάλληλη δομή.

Ορισμός 1.1.1. Μετρικός χώρος μέτρου είναι μια τριάδα (X, d, μ) όπου το ζεύγος (X, d) είναι μετρικός χώρος και το μ είναι ένα μέτρο Borel στον X. Στην περίπτωση όπου το μ είναι μέτρο πιθανότητας, η τριάδα (X, d, μ) λέγεται μετρικός χώρος πιθανότητας.

Συνεπώς, έχουμε ένα μέτρο που μας επιτρέπει να μετρήσουμε «πόσο μεγάλα» είναι τα υποσύνολα του X, ενώ η μετρική μας δίνει έναν τρόπο να ορίσουμε και να μετρήσουμε την «περιφέρεια» των υποσυνόλων του X.

Ορισμός 1.1.2. Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος μέτρου. Για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ ορίζουμε την t-επέκταση του A μέσω της μετρικής d ως το σύνολο

$$A_t = \{x \in X : d(x, A) < t\}.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε το περιεχόμενο του A κατά Minkowski ως προς το μέτρο μ ως εξής:

$$\mu^+(A) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}.$$

Ουσιαστικά το περιεχόμενο κατά Minkowski μετράει σε γενικότερο πλαίσιο πόσο μεγάλη είναι η περιφέρεια ενός συνόλου. Με αυτούς τους ορισμούς το ισοπεριμετρικό πρόβλημα διατυπώνεται εύκολα:

Ορισμός 1.1.3 (ισοπεριμετρικό πρόβλημα). Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος μέτρου. Για δοθέν $t > 0$, από όλα τα σύνολα $A \in \mathcal{B}(X)$ με $\mu(A) = t$, ποιό είναι το

$$\inf_A \mu^+(A)\,;$$

Με άλλα λόγια, θέλουμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση

$$I_\mu(t) = \inf\{\mu^+(A) : A\,\text{Borel}, \mu(A) = t\},$$

η οποία καλείται ισοπεριμετρικό προφίλ του μ.

Σε ορισμένες περιπτώσεις έχουμε ακριβή αποτελέσματα:

(i) Στον $(\mathbb{R}^n, d, \lambda)$, όπου d είναι η Ευκλείδεια μετρική και λ είναι το μέτρο Lebesgue, η λύση του προβλήματος είναι η Ευκλείδεια μπάλα, κατ' αναλογία με τις δύο διαστάσεις.

(ii) Στον $(\mathbb{R}^n, d, \gamma_n)$, όπου d είναι η Ευκλείδεια μετρική και γ_n είναι το n-διάστατο μέτρο Gauss, η λύση του προβλήματος είναι οι ημίχωροι. Το αποτέλεσμα αυτό αποδείκτηκε από τους Tsirelson-Sudakov, και αργότερα ανεξάρτητα από τον Borell, οι οποίοι βασίστηκαν στη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα του Lévy. Αξίζει να σημειώσουμε ότι επεκτάσεις αυτού του αποτελέσματος που οφείλονται στον Bobkov, αποδείχθηκαν από τους Bakry-Ledoux με χρήση μεθόδων ημιομάδων τελεστών, και αργότερα από τους Barthe-Maurey μέσω της κίνησης Brown.

(iii) Στον $\mathbb{R}^2$, στην περίπτωση όπου το $X = K$ είναι κυρτό σώμα, d είναι η Ευκλείδεια μετρική και μ είναι το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας, η λύση του προβλήματος είναι τα υποσύνολα του K των οποίων το σύνορο είναι είτε τμήμα κύκλου που τέμνει κάθετα το σύνορο ∂K του K είτε ευθύγραμμο τμήμα.

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα για μετρικούς χώρους πιθανότητας, όπως διατυπώθηκε παραπάνω, ουσιαστικά ζητάει κάτω φράγμα για τη σταθερά Cheeger

$$\chi_\mu = \inf_{0<t\leqslant 1/2} \frac{\min\{I_\mu(t), I_\mu(1-t)\}}{t},$$

ή ισοδύναμα, άνω φράγμα για την αντίστροφη σταθερά Cheeger (ή ισοπεριμετρική σταθερά):

$$\psi_\mu := \frac{1}{\chi_\mu}.$$

Η περίπτωση που θα μας απασχολήσει είναι όταν το μέτρο που μελετάμε είναι μέτρο πιθανότητας, και ειδικότερα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Η κυρτότητα είναι πολύ σημαντική στη μελέτη αυτού του ισοπεριμετρικού προβλήματος, όπως θα δούμε παρακάτω.

1.2 Ισοπεριμετρικό πρόβλημα και κυρτότητα

Θα μας απασχολήσουν οι περιπτώσεις όπου το μέτρο πιθανότητας μ είναι είτε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας σε ένα κυρτό σώμα K είτε ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας.

Υπενθυμίζουμε ότι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Στο **Κεφάλαιο 2** δίνουμε αρχικά τους απαραίτητους ορισμούς και παρουσιάζουμε βασικά αποτελέσματα για τη γεωμετρία των κυρτών σωμάτων. Στη συνέχεια εισάγουμε την κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

Ορισμός 1.2.1. Ένα μέτρο πιθανότητας μ, απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, λέγεται *λογαριθμικά κοίλο* αν για κάθε ζεύγος συμπαγών συνόλων A, B στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$ ισχύει

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}.$$

Το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας σε ένα κυρτό σώμα είναι λογαριθμικά κοίλο: αυτό είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Prékopa-Leindler. Δίνουμε περαιτέρω ορισμούς και ιδιότητες αυτών των μέτρων πιθανότητας. Σε σχέση με το ισοπεριμετρικό πρόβλημα, πολύ σημαντικό είναι το παρακάτω αποτέλεσμα των Sternberg-Zumbrun (1999) στην περίπτωση των κυρτών σωμάτων και του E. Milman (2009) στη γενική περίπτωση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

Θεώρημα 1.2.2. *Το ισοπεριμετρικό προφίλ $I_\mu(t)$ ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας μ είναι κοίλη συνάρτηση και συμετρική γύρω από το* $1/2$.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος χρησιμοποιεί πληθώρα παλιότερων σχετικών αποτελεσμάτων και τεχνικές από τη γεωμετρία Riemann και τη γεωμετρική θεωρία μέτρου, οπότε δεν θα την συζητήσουμε στην παρούσα εργασία. Ένα πόρισμα του Θεωρήματος 1.2.2 είναι ότι για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ ισχύει ότι

$$I_\mu(t) \geqslant 2I_\mu\left(\frac{1}{2}\right)\min\{t, 1-t\},$$

και συνεπώς αρκεί να θεωρήσουμε σύνολα μέτρου $\frac{1}{2}$ όταν μελετάμε το ισοπεριμετρικό πρόβλημα. Έτσι, προκύπτει το ερώτημα με ποιον τρόπο πρέπει να κόψουμε ένα κυρτό σώμα στη μέση, ούτως ώστε να έχουμε την ελάχιστη δυνατή περιφέρεια για τα δύο μέρη. Αυτό είναι ακριβώς το περιεχόμενο της εικασίας των Kannan-Lovász-Simonovits, ότι έως μια απόλυτη σταθερά αρκεί να κόψουμε με ένα υπερεπίπεδο. Ειδικότερα η εικασία διατυπώνεται ως εξής.

Εικασία 1.2.3. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, ισχύει ότι

$$\chi_\mu \geqslant c \cdot \inf_{H \subseteq \mathbb{R}^n} \frac{\mu^+(H)}{\min\{\mu(H), 1-\mu(H)\}},$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλους τους ημιχώρους $H \subseteq \mathbb{R}^n$.

Με τη βοήθεια αποτελεσμάτων του Hensley (1980) και του Fradelizi (1999) μπορούμε να δούμε ότι το δεξιό μέλος στην ανισότητα της εικασίας είναι ισοδύναμο (έως απόλυτη σταθερά) με την ποσότητα

$$\frac{1}{\sqrt{\|\mathrm{Cov}(\mu)\|_{\mathrm{op}}}},$$

όπου $\mathrm{Cov}(\mu) = C_{ij}$ είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του μέτρου μ με συντεταγμένες

$$C_{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} x_i \, d\mu \cdot \int_{\mathbb{R}^n} x_j \, d\mu.$$

Συνεπώς, η Εικασία 1.2.3 ανάγεται στην ακόλουθη:

Εικασία KLS. Για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$\chi_\mu \geqslant \frac{c}{\|\mathrm{Cov}(\mu)\|_{\mathrm{op}}},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το μέτρο μ λέγεται ισοτροπικό αν έχει βαρύκεντρο το 0 και $\mathrm{Cov}(\mu) = I_n$. Καθώς η διατύπωση της εικασίας σχετίζεται με τον πίνακα συνδιακυμάνσεων του μ, και μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού κάθε μέτρο με κέντρο βάρους το 0 απεικονίζεται σε ισοτροπικό μέτρο, αρκεί να μελετήσουμε την εικασία για ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο, απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, θέλουμε για κάθε τέτοιο μέτρο να ισχύει

$$\chi_\mu \geq c$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, ή ισοδύναμα,

$$\psi_\mu \leqslant C$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$.

Στο **Κεφάλαιο 2** συζητάμε περαιτέρω ιδιότητες των ισοτροπικών μέτρων πιθανότητας και, ειδικότερα, ορίζουμε τα ισοτροπικά κυρτά σώματα. Διατυπώνουμε επίσης περαιτέρω εικασίες για τέτοιου τύπου μέτρα:

Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$,*

$$L_n := \max\{\|f\|_\infty^{\frac{1}{n}} : f \text{ ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C.$$

Εικασία του λεπτού φλοιού. Για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\sigma_\mu^2 := \mathbb{E}_\mu(\|x\|_2 - \sqrt{n})^2$$

και στη συνέχεια θεωρούμε τη σταθερά

$$\sigma_n^2 := \sup_\mu \sigma_\mu^2,$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλα τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Η εικασία του λεπτού φλοιού ισχυρίζεται ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$ να ισχύει ότι

$$\sigma_n \leqslant C.$$

Οι δύο αυτές εικασίες συνδέονται στενά: Οι Eldan και Klartag [42] απέδειξαν ότι η εικασία του λεπτού φλοιού είναι ισχυρότερη από την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. Κλείνουμε το Κεφάλαιο 2 με την απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 1.2.4 (Eldan-Klartag). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$,*

$$L_n \leqslant C\sigma_n.$$

1.3 Ο τελεστής Laplace-Beltrami και η σταθερά Poincaré

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύνδεση ανάμεσα στη σταθερά Cheeger και τη σταθερά Poincaré ενός μέτρου πιθανότητας. Η σταθερά Poincaré ορίζεται να είναι η βέλτιστη σταθερά $\vartheta > 0$ για την οποία ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \vartheta^2 \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu,$$

για όλες τις τοπικά Lipschitz συναρτήσεις f στον $\mathbb{R}^n$ οι οποίες είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες.

Στο **Κεφάλαιο 3** αποδεικνύουμε ότι η σταθερά Poincaré και η αντίστροφη σταθερά Cheeger είναι ισοδύναμες στην κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας, καθώς έχουμε τα παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρημα 1.3.1 (Maz'ya, Cheeger). *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με αντίστροφη σταθερά Cheeger ψ_μ. Τότε,*

$$\vartheta_\mu \leqslant 2\psi_\mu. \tag{1.3.1}$$

Θεώρημα 1.3.2 (Buser, Ledoux). *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\psi_\mu \leqslant C\vartheta_\mu,$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Συζητάμε επίσης κλασικά αποτελέσματα για τη σχέση της ανισότητας Poincaré με τις ιδιοτιμές του τελεστή Laplace-Beltrami

$$\Delta(f) = \mathrm{div}(\nabla f).$$

Είναι γνωστό ότι οι ιδιοτιμές του $-\Delta$ είναι μη-αρνητικές και σχηματίζουν ένα διακριτό σύνολο, οπότε, μπορούν να γραφούν σε αύξουσα διάταξη ως $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$, αφού ο Δ μηδενίζεται μόνο στις σταθερές συναρτήσεις. Στην περίπτωση που το μ είναι μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $e^{-\varphi(x)}$, όπου φ είναι μια C^1-συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, ο τελεστής Laplace-Beltrami γράφεται στη μορφή

$$L_\mu f = \Delta f - \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle$$

και ισχύει ότι $\vartheta_\mu^{-2} = \lambda_1$, όπου λ_1 είναι η πρώτη μη μηδενική ιδιοτιμή του διαφορικού τελεστή $-L_\mu$.

Κλείνουμε το Κεφάλαιο 3 με μια πρώτη εκτίμηση για την εικασία KLS. Ισχύει ότι

$$\psi_n := \sup\{\psi_\mu : \mu \text{ ισοτροπικό, λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C\sqrt{n}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το φράγμα αυτό αποδείχτηκε αρχικά από τους Kannan-Lovász-Simonovits. Παρουσιάζουμε ένα επιχείρημα του Bobkov που οδηγεί στο ίδιο φράγμα.

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\chi_\mu \geqslant \frac{c}{\|f\|_{L_2(\mu)}},$$

όπου $\mathrm{bar}(\mu)$ είναι το βαρύκεντρο του μ, $f(x) = \|x - \mathrm{bar}(\mu)\|_2$ και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Καθώς στην ισοτροπική περίπτωση η συνάρτηση $f(x) = \|x - \mathrm{bar}(\mu)\|_2$ ικανοποιεί την $\|f\|_{L_2(\mu)} = \sqrt{n}$

το αποτέλεσμα του Bobkov δείχνει ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε $\psi_\mu \leqslant c\sqrt{n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

1.4 Η ροή της θερμότητας και το μέτρο του Gauss

Το μέτρο του Gauss παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη της εικασίας KLS, όπως φαίνεται από το ακόλουθο αποτέλεσμα των Bakry-Ledoux (1996).

Θεώρημα 1.4.1 (Bakry-Ledoux). *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα του μ είναι της μορφής $\frac{d\mu}{dx} = e^{-\rho}$, όπου $\mathrm{Hess}(\rho)(x) \geqslant tI_n$ για κάποιον $t > 0$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\chi_\mu \geqslant \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{t}}.$$

Το δεξιό μέλος στην ανισότητα του θεωρήματος είναι ακριβώς η σταθερά Cheeger του μέτρου του Gauss με πίνακα συνδιακυμάνσεων $t \cdot I_n$. Συνεπώς, διαισθητικά, το θεώρημα μας λέει ότι αν το μέτρο πιθανότητας είναι περισσότερο λογαριθμικά κοίλο από κάποιο μέτρο του Gauss, τότε έχει και μεγαλύτερη σταθερά Cheeger.

Αυτό υποδεικνύει ότι, πέρα από την υπόθεση ότι έχουμε ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας, είναι χρήσιμο να μπορούμε να συγκρίνουμε αυτό το μέτρο με το μέτρο του Gauss, που αποτελεί και το βασικό πρότυπο ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας με μη φραγμένο φορέα. Στο **Κεφάλαιο** 4 περιγράφουμε πώς μπορούμε να τροποποιήσουμε, με συνεχή τρόπο, το τυχόν μέτρο πιθανότητας ώστε να το κάνουμε περισσότερο λογαριθμικά κοίλο, με την βοήθεια του τελεστή θερμότητας.

Για κάθε $s > 0$ συμβολίζουμε με γ_s την πυκνότητα ενός Gaussian τυχαίου διανύσματος με μέσο 0 και πίνακα συνδιακυμάνσεων $s \cdot I_n$ στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$\mu_s = \mu * \gamma_s$$

τη συνέλιξη των μ και γ_s, και θέτουμε $\mu_0 = \mu$. Ο τελεστής θερμότητας $P_s f = f * \gamma_s$ είναι συστολή από τον $L^2(\mu_s)$ στον $L^2(\mu)$. Ο συζυγής τελεστής $Q_s := P_s^* : L^2(\mu) \to L^2(\mu_s)$ ικανοποιεί την

$$Q_s\varphi = \frac{P_s(\varphi\varrho)}{P_s\varrho}$$

όπου ϱ είναι η λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα του μ. Ορίζουμε την $Q_s\varphi$ μέσω της παραπάνω εξίσωσης για κάθε $s > 0$ και $\varphi \in L^1(\mu)$. Ορίζουμε επίσης $P_0 = I_n$ και $Q_0 = I_n$.

Το s διαισθητικά παίζει τον ρόλο του χρόνου και θα δούμε ότι καθώς εφαρμόζουμε αυτόν τον τελεστή στο μέτρο μ πετυχαίνουμε όλο και περισσότερο λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας. Συνεπώς, αν καταφέρουμε να βρούμε το πώς μεταβάλλονται οι σταθερές που μας ενδιαφέρουν μέσω της δράσης αυτού του τελεστή, μπορούμε άμεσα να βγάλουμε συμπεράσματα για τις αρχικές σταθερές αφού ήδη από το αποτέλεσμα των Bakry-Ledoux μπορούμε να δούμε τι συμβαίνει μετά από κάποιο χρονικό διάστημα.

Στενά συνδεδεμένο με την ανισότητα του Poincaré και τις εικασίες που μας ενδιαφέρουν είναι το φασματικό μέτρο μιας συνάρτησης f, το ν_f, το οποίο ορίζουμε αυστηρά στο Κεφάλαιο 4 και στη συνέχεια δείχνουμε ότι

$$\sigma_\mu^2 \leqslant \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\nu_{x_i}(\lambda)}{\lambda} = 4\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{F(\lambda)}{\lambda^2}\,d\lambda,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει με ολοκλήρωση κατά μέρη, και

$$F(\lambda) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \nu_{x_i}([0,\lambda]) \in [0,1]$$

είναι η μέση φασματική μάζα των συναρτήσεων συντεταγμένων κάτω από το επίπεδο λ.

Συνεπώς, για να εκτιμήσουμε τη σταθερά λεπτού φλοιού, αρκεί να μελετήσουμε τη συνάρτηση $F(\lambda)$. Μελετώντας ιδιότητες του τελεστή θερμότητας στο Κεφάλαιο 4, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα ανάγεται ακριβώς στην μελέτη αυτού του τελεστή (για την ακρίβεια του συζυγούς του) μέσω της εκτίμησης

$$F(\lambda) \leqslant C\left(\frac{1}{n}\|Q_s x\|^2_{L^2(\mu_s)} + \lambda s\right).$$

1.5 Στοχαστική τοπικοποίηση

Η δεύτερη βασική τεχνική για την αντιμετώπιση του προβλήματος είναι η διαδικασία της στοχαστικής τοπικοποίησης. Η ιδέα είναι ότι ξεκινώντας από ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ με λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα p_0, μεταβάλλουμε την πυκνότητα μέσω της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dp_t(x) = p_t(x)\langle x - a_t, dW_t\rangle, \tag{1.5.1}$$

με αρχική συνθήκη p_0, όπου $a_t = \int_{\mathbb{R}^n} xp_t(x)$ είναι το βαρύκεντρο της p_t και $(W_t)_{t\geqslant 0}$ είναι συνήθης κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^n$ με $W_0 = 0$.

Η σύνδεση με τα προηγούμενα είναι ότι αν μεταβάλουμε την πυκνότητα του μέτρου κατ' αυτόν τον τρόπο, τότε

$$\mathbb{E}\|a_t\|_2^2 = \|Q_s x\|^2_{L^2(\mu_s)}.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα φράγματα του Κεφαλαίου 4, μπορούμε να δώσουμε άνω φράγμα για τη σταθερά σ_μ αν μελετήσουμε ποσοτικά τι συμβαίνει με το κέντρο βάρους του μέτρου που έχει πυκνότητα p_t.

Στο **Κεφάλαιο 5** δίνουμε κάποια βασικά στοιχεία στοχαστικού λογισμού και στο **Κεφάλαιο 6** αναπτύσσουμε διάφορες ιδιότητες της παραπάνω στοχαστικής διαδικασίας. Ορίζουμε επίσης μία ακόμα παράμετρο που είναι ασθενέστερη της αντίστροφης ισοπεριμετρικής σταθεράς ψ_μ αλλά ισχυρότερη της σταθεράς του λεπτού φλοιού, την κ_μ μέσω της

$$\kappa_\mu^2 = \sup_{\vartheta\in S^{n-1}}\left\{\|\mathbb{E}_\mu\langle x,\vartheta\rangle(x\otimes x)\|_2^2\right\},$$

όπου αν $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$ είναι διάνυσμα στήλη έχουμε $x\otimes x = x\cdot x^T = (x_i x_j)_{i,j=1}^n$.

Θεωρώντας τις παραμέτρους $\psi_n = \sup_\mu \psi_\mu$ και $\kappa_n = \sup_\mu \kappa_\mu$, όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλα τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, αποδεικνύουμε την ανισότητα του Eldan.

Θεώρημα 1.5.1. *Οι σταθερές ψ_n, σ_n και κ_n ικανοποιούν τις*

$$\psi_n^2 \leqslant C(\log n)\kappa_n \leqslant \tilde{C}(\log n)^2\sigma_n^2,$$

όπου $C, \tilde{C} > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στο τέλος του Κεφαλαίου 6 αποδεικνύουμε την εκτίμηση των Klartag-Lehec

$$\sigma_n \leqslant c(\log n)^4,$$

από την οποία έπεται το λογαριθμικό ως προς τη διάσταση άνω φράγμα

$$\psi_n \leqslant c(\log n)^5$$

για την αντίστροφη ισοπεριμετρική σταθερά. Στο **Κεφάλαιο 7**, χρησιμοποιώντας παρόμοιες τεχνικές, και βελτιώνοντας κάποιες από τις εκτιμήσεις στα βήματα της απόδειξης, αποδεικνύουμε το πιο πρόσφατο φράγμα των Jambulapati-Vempala-Lee:

$$\sigma_n \leqslant C(\log n)^{\eta}$$

όπου $\eta \leqslant \frac{1}{8}\left(1 + 7\sqrt{2} + \sqrt{53 - 4\sqrt{2}}\right)$, το οποίο έχει ως συνέπεια το καλύτερο μέχρι στιγμής γνωστό άνω φράγμα για την ψ_n.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

2.1 Κυρτά σώματα

Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}_n$ την κλάση όλων των μη κενών συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το K είναι συμμετρικό αν $K = -K$, δηλαδή αν ισχύει ότι $x \in K$ αν και μόνο αν $-x \in K$. Λέμε ότι το K έχει κέντρο βάρους το 0 αν το βαρύκεντρό του $\frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)} \int_K x\, dx$ είναι το 0. Ισοδύναμα, αν

$$\int_K \langle x, \vartheta \rangle \, dx = 0$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$.

Ένα συμπαγές σύνολο K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται αστρόμορφο (στο 0) αν περιέχει το 0 στο εσωτερικό του και κάθε ημιευθεία με αρχή το το 0 τέμνει το K σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Για κάθε τέτοιο σύνολο, η ακτινική συνάρτηση ρ_K ορίζεται στην S^{n-1} από την

$$\rho_K(\vartheta) = \max\{t > 0 : t\vartheta \in K\}, \qquad \vartheta \in S^{n-1}. \tag{2.1.1}$$

Αν η ρ_K είναι συνεχής, λέμε ότι το K είναι αστρόμορφο σώμα. Τότε, ο όγκος του K σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από την

$$\mathrm{vol}_n(K) = \omega_n \int_{S^{n-1}} \rho_K^n(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta). \tag{2.1.2}$$

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε την ακτινική συνάρτηση ρ_K στον $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ μέσω της $\rho_K(x) = \max\{t > 0 : tx \in K\}$. Τότε, η ρ_K είναι θετικά ομογενής βαθμού -1, δηλαδή $\rho_K(ax) = a^{-1}\rho_K(x)$ για κάθε $a > 0$.

Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_K$ το συναρτησοειδές Minkowski του K,

$$\|x\|_K = \min\{t \geqslant 0 : x \in tK\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.3}$$

Σημειώνουμε ότι $\rho_K(\vartheta) = \|\vartheta\|_K^{-1}$ για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Στην περίπτωση που το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα, το συναρτησοειδές Minkowski $\|\cdot\|_K$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, για την οποία ισχύει $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_K \leqslant 1\}$. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα, η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X, $B_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα. Με αυτήν την έννοια, η κλάση των n-διάστατων χώρων με νόρμα ταυτίζεται με την κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$.

Η ακτίνα όγκου ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ είναι η ποσότητα

$$\text{(2.1.4)} \qquad \mathrm{vrad}(K) = \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n}.$$

Από την (2.1.2) βλέπουμε ότι αν το 0 είναι εσωτερικό σημείο του K τότε η ακτίνα όγκου του K είναι ίση με

$$\text{(2.1.5)} \qquad \mathrm{vrad}(K) = \left(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|_K^{-n}\, d\sigma(\vartheta)\right)^{1/n}.$$

Η συνάρτηση στήριξης ενός κυρτού σώματος K ορίζεται από την

$$\text{(2.1.6)} \qquad h_K(x) = \max\{\langle x, y\rangle : y \in K\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Η συνάρτηση στήριξης χαρακτηρίζει το σώμα: Έχουμε $h_K \leqslant h_L$ αν και μόνο αν $K \subseteq L$. Γεωμετρικά, για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$, η ποσότητα $h_K(\vartheta)$ είναι η (προσημασμένη) απόσταση του υπερεπιπέδου στήριξης του K στη διεύθυνση ϑ από το 0, η δε ποσότητα $h_K(\vartheta) + h_K(-\vartheta)$ μετράει το «πλάτος» του σώματος K στη διεύθυνση $\vartheta \in S^{n-1}$. Θεωρώντας τη μέση τιμή αυτού του πλάτους στην S^{n-1} (και διαιρώντας με 2) παίρνουμε το μέσο πλάτος του K,

$$\text{(2.1.7)} \qquad w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta).$$

Το συναρτησοειδές h_K είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές. Λόγω της θετικής ομογένειας μάλιστα, είναι συνηθισμένο να θεωρούμε την h_K ορισμένη μόνο στη σφαίρα S^{n-1}, αντί για ολόκληρον τον $\mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε επίσης ότι η h_K είναι άρτια αν και μόνο αν το K είναι συμμετρικό, και θετική αν και μόνο αν $0 \in \mathrm{int}(K)$. Όταν ισχύουν τα παραπάνω, η h_K είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Η κλειστή μοναδιαία μπάλα αυτής της νόρμας είναι το λεγόμενο πολικό σώμα του K, το οποίο μπορεί να οριστεί και χωρίς την υπόθεση της συμμετρίας: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $0 \in \mathrm{int}(K)$, ορίζουμε

$$\text{(2.1.8)} \qquad K^\circ := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \max_{y\in K}\langle x, y\rangle \leqslant 1\right\}.$$

Στην περίπτωση που το K είναι συμμετρικό, και $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$, έχουμε $K^\circ = B_{X^*}$, δηλαδή το πολικό σώμα K° είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του δυϊκού χώρου X^*. Σημειώνουμε επίσης ότι $(K^\circ)^\circ = K$ και $h_K(\cdot) = \|\cdot\|_{K^\circ}$ για κάθε κυρτό σώμα K με $0 \in \mathrm{int}(K)$.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μερικές βασικές γεωμετρικές ανισότητες που θα χρησιμοποιούμε συχνά.

Θεώρημα 2.1.1 (ανισότητα Brunn-Minkowski). *Έστω K και L δύο μη-κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\text{(2.1.9)} \qquad \mathrm{vol}_n(K+L)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(L)^{1/n}.$$

Αν τα K και L είναι κυρτά σώματα, τότε ισότητα στην (2.1.9) *ισχύει αν και μόνον αν τα K και L είναι ομοιοθετικά.*

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει τον όγκο με το άθροισμα Minkowski. Μια ισοδύναμη διατύπωση είναι ότι για κάθε $\lambda \in (0,1)$, και κάθε ζεύγος μη-κενών, συμπαγών υποσυνόλων K, L του $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)L)^{1/n} \geqslant \lambda \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}_n(L)^{1/n}. \tag{2.1.10}$$

Η ανισότητα αυτή είναι επίσης ισοδύναμη με την

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)L) \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{\lambda}\mathrm{vol}_n(L)^{1-\lambda}. \tag{2.1.11}$$

για κάθε K, L και $\lambda \in (0,1)$. Η συναρτησιακή εκδοχή της ανισότητας Brunn-Minkowski είναι η ανισότητα Prékopa-Leindler: Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}. \tag{2.1.12}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx\right)^{1-\lambda}. \tag{2.1.13}$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα Brunn-Minkowski έπεται άμεσα από την ανισότητα Prékopa-Leindler, αν θεωρήσουμε τις $f = \mathbf{1}_K$, $g = \mathbf{1}_L$ και $h = \mathbf{1}_{\lambda K + (1-\lambda)L}$.

Μια κλασική ανισότητα που προκύπτει άπό την ανισότητα Brunn-Minkowski σε συνδυασμό με τη μέθοδο της συμμετρικοποίησης κατά Steiner (για μια απόδειξη, βλέπε [2, Θεώρημα 1.5.11]) είναι η ανισότητα του Urysohn.

Θεώρημα 2.1.2 (ανισότητα Urysohn). *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε*

$$w(K) \geqslant \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n}. \tag{2.1.14}$$

Παρατηρήστε ότι το δεξιό μέλος της (2.1.14) ισούται με την ακτίνα όγκου του K. Μπορούμε λοιπόν να την διατυπώσουμε στην ισοδύναμη μορφή

$$w(K) \geqslant \mathrm{vrad}(K). \tag{2.1.15}$$

Μια βασική ανισότητα που συνδέει τον όγκο ενός κυρτού σώματος με τον όγκο του πολικού του είναι η ανισότητα Blaschke-Santaló.

Θεώρημα 2.1.3 (ανισότητα Blaschke-Santaló). *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^{\circ}) \leqslant \omega_n^2. \tag{2.1.16}$$

Η παραπάνω ανισότητα στην ουσία λέει ότι το γινόμενο όγκων $\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^{\circ})$ μεγιστοποιείται στην περίπτωση που το K είναι ελλειψοειδές. Όπως με την ανισότητα του Urysohn, μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα Blaschke-Santaló χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski και συμμετρικοποίηση κατά Steiner (βλέπε [2, Παράγραφος 1.5.4])

Δεδομένου ότι $\omega_n^{1/n} \approx n^{-1/2}$, η ανισότητα Blaschke-Santaló μας δίνει

$$(\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ))^{1/n} \leqslant \frac{c}{n} \tag{2.1.17}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ένα μεταγενέστερο αποτέλεσμα των Bourgain και Milman εξασφαλίζει ότι στην ουσία η ανισότητα αυτή αντιστρέφεται. Γι' αυτό το λόγο, το επόμενο θεώρημα αναφέρεται και ως «αντίστροφη ανισότητα Santaló».

Θεώρημα 2.1.4 (ανισότητα Bourgain-Milman). *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε $0 \in \mathrm{int}(K)$. Τότε,*

$$(\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ))^{1/n} \geqslant \frac{c}{n} \tag{2.1.18}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατηρήστε ότι από τις ανισότητες Blaschke-Santaló και Bourgain-Milman έπεται ότι

$$\mathrm{vrad}(K)\mathrm{vrad}(K^\circ) \approx 1,$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη θεωρία των κυρτών σωμάτων παραπέμπουμε στα βιβλία [88], [49] και [27].

2.2 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_n$ την κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Η πυκνότητα ενός μέτρου $\mu \in \mathcal{P}_n$ συμβολίζεται με f_μ.

Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$. Λέμε ότι το μ έχει βαρύκεντρο το $x_0 \in \mathbb{R}^n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta\rangle \, d\mu(x) = \langle x_0, \vartheta\rangle$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Ισοδύναμα, αν

$$x_0 = \int_{\mathbb{R}^n} x \, d\mu(x).$$

Η υποκλάση $C\mathcal{P}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα *κεντραρισμένα* $\mu \in \mathcal{P}_n$. Αυτά είναι τα μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$ που έχουν βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων. Δηλαδή, $\mu \in C\mathcal{P}_n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta\rangle d\mu(x) = 0$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$.

Η υποκλάση $S\mathcal{P}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα άρτια (συμμετρικά) μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$: το μ λέγεται άρτιο αν $\mu(A) = \mu(-A)$ για κάθε σύνολο Borel A στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Όπως στην περίπτωση των μέτρων, το βαρύκεντρο της f ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{bar}(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx}.$$

Ειδικότερα, η f έχει βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta\rangle f(x)\,dx = 0$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Τότε λέμε και ότι η f είναι *κεντραρισμένη*.

Ορισμός 2.2.1. Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλο* αν για κάθε ζεύγος συμπαγών συνόλων A, B στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$ ισχύει

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}.$$

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλη* αν

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $0 < \lambda < 1$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1$ (τότε λέμε ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη *πυκνότητα*). Από την ανισότητα Prékopa-Leindler έπεται ότι το μέτρο μ που έχει πυκνότητα την f είναι λογαριθμικά κοίλο: για να το δούμε αυτό, θεωρούμε δύο συμπαγή σύνολα A, B στον $\mathbb{R}^n$ και τυχόν $\lambda \in (0, 1)$. Τότε, οι συναρτήσεις $w = \mathbb{1}_A f$, $g = \mathbb{1}_B f$ και $h = \mathbb{1}_{(1-\lambda)A+\lambda B} f$ ικανοποιούν την

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant w(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, συνεπώς, η ανισότητα Prékopa-Leindler δείχνει ότι

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) = \int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} w\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{\lambda} = \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}.$$

Το επόμενο θεώρημα του Borell [20] δείχνει ότι, αντίστροφα, κάθε μη εκφυλισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_n$ και έχει λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H. Τότε, το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και έχει μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f, δηλαδή $d\mu(x) = f(x)\,dx$.*

Παράδειγμα 2.2.3. Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_K στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\mu_K(A) = \mathrm{vol}_n(K \cap A) = \int_A \mathbb{1}_K(x)dx$$

για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Από την κυρτότητα του K έπεται ότι η $\mathbb{1}_K$ είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, άρα το μ_K είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας.

Παρατήρηση 2.2.4. Βασικές ιδιότητες της κλάσης των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας είναι οι εξής:

(α) Αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι ένας αφφινικός μετασχηματισμός, τότε το $\mu \circ T^{-1}$ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^m$.

(β) Αν κάθε μ_i είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, k$, τότε το $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k$ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k}$.

(γ) Αν τα μ και ν είναι λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε η συνέλιξή τους $\mu * \nu$ (που ορίζεται από την

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, d(\mu * \nu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} h(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

για κάθε μη αρνητική Borel μετρήσιμη συνάρτηση h στον $\mathbb{R}^n$) είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό φαίνεται αν παρατηρήσουμε ότι το $\mu * \nu$ είναι η εικόνα του $\mu \times \nu$ μέσω του αφφινικού μετασχηματισμού $T(x, y) = x + y$.

(δ) Αν $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο μ, τότε το μ είναι επίσης λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι κάθε ολοκληρώσιμη λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι τιμές $f(x)$ της f φθίνουν εκθετικά καθώς $\|x\|_2 \to \infty$.

Λήμμα 2.2.5. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, υπάρχουν σταθερές $A, B > 0$ ώστε $f(x) \leqslant Ae^{-B\|x\|_2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, η f έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης.*

Απόδειξη. Εφόσον $\int f > 0$, υπάρχει $t \in (0, 1)$ ώστε το σύνολο $C := \{x : f(x) > t\}$ να έχει θετικό μέτρο Lebesgue. Παρατηρούμε ότι το C είναι κυρτό αφού η f είναι λογαριθμικά κοίλη, και έχει μη κενό εσωτερικό. Πράγματι, αφού το C έχει θετικό μέτρο, η αφφινική του θήκη έχει διάσταση n, άρα το C περιέχει ένα αφφινικά ανεξάρτητο σύνολο $\{x_i\}_{i \leqslant n+1}$. Λόγω κυρτότητας, το C περιέχει το simplex $S = \mathrm{conv}\{x_i\}_{i \leqslant n+1}$. Ειδικότερα, το C έχει μη κενό εσωτερικό. Έστω $x_0 \in C$ και $r > 0$ ώστε $x_0 + rB_2^n \subseteq C$. Θεωρώντας την $f_1(\cdot) = f(\cdot + x_0)$ αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $rB_2^n \subseteq C$.

Ορίζουμε $K = \{x : f(x) > t/e\}$. Τότε, από την ανισότητα του Markov και τη μονοτονία του όγκου έχουμε $0 < \mathrm{vol}_n(K) < \infty$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το K είναι κυρτό, έχει πεπερασμένο όγκο και περιέχει την rB_2^n, συμπεραίνουμε ότι το K είναι φραγμένο. Επομένως, υπάρχει $R > 0$ ώστε $K \subset RB_2^n$. Τότε, για κάθε $\|x\|_2 > R$ έχουμε $R\frac{x}{\|x\|_2} \notin K$, οπότε $f(R/\|x\|_2 x) \leqslant t/e$, ενώ $r\frac{x}{\|x\|_2} \in C$, το οποίο αποδεικνύει ότι $f(r\frac{x}{\|x\|_2}) \geqslant t$. Επιπλέον, μπορούμε να γράψουμε

$$R\frac{x}{\|x\|_2} = \frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}\frac{rx}{\|x\|_2} + \frac{R - r}{\|x\|_2 - r}\, x.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη παίρνουμε:

$$\frac{t}{e} \geqslant f\left(R\frac{x}{\|x\|_2}\right) \geqslant f\left(r\frac{x}{\|x\|_2}\right)^{\frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}} f(x)^{\frac{R-r}{\|x\|_2 - r}} \geqslant t^{\frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}} f(x)^{\frac{R-r}{\|x\|_2 - r}}.$$

Έπεται ότι

$$f(x) \leqslant te^{-\frac{\|x\|_2 - r}{R - r}} < e^{-\|x\|_2/R},$$

για κάθε $\|x\|_2 > R$. Από την άλλη πλευρά, για κάθε $x \in RB_2^n$ και για κάθε $y \in \frac{x}{2} + \frac{r}{2}B_2^n$ έχουμε (λόγω του ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη)

$$f(y) \geqslant \sqrt{f(x)f(2y-x)} \geqslant \sqrt{t}\,\sqrt{f(x)}.$$

Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $f(x) \leqslant M$ για κάθε $x \in RB_2^n$. Τώρα είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε δύο σταθερές $A, B > 0$, οι οποίες εξαρτώνται από την f, έτσι ώστε $f(x) \leqslant Ae^{-B\|x\|_2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. □

Θα χρειαστούμε επίσης ένα αποτέλεσμα του Fradelizi [48], το οποίο δείχνει ότι η τιμή μιάς λογαριθμικά κοίλης συνάρτησης στο βαρύκεντρό της είναι συγκρίσιμη με τη μέγιστη τιμή της (με τη σταθερά σύγκρισης να εξαρτάται – εκθετικά – μόνο από τη διάσταση). Παρατηρήστε ότι αν η f υποτεθεί άρτια, τότε $f(0) = \|f\|_\infty$.

Θεώρημα 2.2.6. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\mathrm{bar}(f) = 0$. Τότε,*

$$f(0) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(0).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy = 1$. Από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\log f\left(\int_{\mathbb{R}^n} yf(y)dy\right) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy. \tag{2.2.1}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη, έχουμε

$$-\log f(x) \geqslant -\log f(y) + \langle x-y, \nabla(-\log f)(y)\rangle. \tag{2.2.2}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας με $f(y)$, και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας ως προς y, παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\log f(x) &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} \langle x-y, -\nabla f(y)\rangle\, dy \\ &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy - n, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει αν ολοκληρώσουμε κατά μέρη (και χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι τιμές $f(y)$ της f φθίνουν εκθετικά καθώς $\|y\|_2 \to \infty$). Συνδυάζοντας τις (2.2.1) και (2.2.3) βλέπουμε ότι

$$\log f(0) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dx \geqslant \log f(x) - n,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Παίρνοντας το supremum πάνω από όλα τα x έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 2.2.7. Το παραπάνω θεώρημα ισχύει ακόμη και στη περίπτωση που η f δεν έχει βαρύκεντρο το 0. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η f είναι πυκνότητα και έχει βαρύκεντρο το $\mathrm{bar}(f) = b$. Τότε η $g(x) := f(x+b)$ είναι επίσης πυκνότητα με κέντρο βάρους το 0, συνεπώς ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.6. Τότε,

$$g(0) \leqslant \|g\|_\infty \leqslant e^n g(0).$$

Ισοδύναμα, αφού $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$, έχουμε ότι

$$f(b) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(b).$$

Το επόμενο λήμμα είναι το *λήμμα του Borell* στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

Λήμμα 2.2.8 (Borell). *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στην κλάση $\mathcal{P}_n$. Για κάθε συμμετρικό κλειστό κυρτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) = \alpha \in (0,1)$ και για κάθε $t > 1$ έχουμε*

$$1 - \mu(tA) \leqslant \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{t+1}{2}}. \tag{2.2.4}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία και την κυρτότητα του A ελέγχουμε ότι

$$\frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus (tA)) + \frac{t-1}{t+1}A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A.$$

για κάθε $t > 1$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το μ είναι λογαριθμικά κοίλο, παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Σημείωση. Το δεξιό μέλος της (2.2.4) γράφεται στη μορφή

$$\frac{(1-\alpha)^{\frac{t+1}{2}}}{\alpha^{\frac{t-1}{2}}} < \frac{(1-\alpha)^{\frac{t-1}{2}}}{\alpha^{\frac{t-1}{2}}} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^{\frac{t-1}{2}}. \tag{2.2.5}$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Borell θα δούμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι ψ_1-μέτρο (σε κάθε διεύθυνση) με μια απόλυτη σταθερά.

Θεώρημα 2.2.9. *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ λογαριθμικά κοίλο. Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι ημινόρμα τότε για κάθε $q > p \geqslant 1$ έχουμε*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Γράφουμε $\|f\|_p^p := \int |f|^p \, d\mu$. Τότε, το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3\|f\|_p\}$$

είναι συμμετρικό, κλειστό και κυρτό. Επίσης, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$tA = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3t\|f\|_p\},$$

και $\mu(A) \geqslant 1 - 3^{-p}$. Συνεπώς, $\frac{1}{\alpha} - 1 \leqslant \frac{3^{-p}}{1-3^{-p}} \leqslant e^{-p/2}$. Από την (2.2.5) βλέπουμε ότι

$$\mu(x : |f(x)| \geqslant 3t\|f\|_p) \leqslant e^{-c_1 p(t-1)}$$

για κάθε $t > 1$, όπου $c_1 = \frac{1}{4}$. Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, d\mu &= \int_0^\infty q s^{q-1} \mu(\{x : |f(x)| \geqslant s\}) \, ds \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + (3\|f\|_p)^q \int_1^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p(t-1)} \, dt \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + e^{c_1 p} (3\|f\|_p)^q \int_0^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p t} \, dt \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + e^{c_1 p} \left(\frac{3\|f\|_p}{c_1 p} \right)^q \Gamma(q+1).\end{aligned}$$

Από τον τύπο του Stirling και από το γεγονός ότι $(a+b)^{1/q} \leqslant a^{1/q} + b^{1/q}$ για κάθε $a, b > 0$ και $q \geqslant 1$, συμπεραίνουμε ότι $\|f\|_{L_q(\mu)} \leqslant c\frac{q}{p} \|f\|_{L_p(\mu)}$. □

Παρατήρηση 2.2.10. Οι συναρτήσεις $x \mapsto |\langle x, \vartheta \rangle|$, $x \in \mathbb{R}^n$, ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.9. Συνεπώς,

$$\|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_q \leqslant cq \|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_1$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ και $q \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_{\psi_1} \leqslant c \|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_1$$

για $\vartheta \in S^{n-1}$.

2.3 Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Ορίζουμε αρχικά την ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος K και την ισοτροπική σταθερά L_K σαν μια αναλλοίωτη της αφφινικής κλάσης του K. Στη συνέχεια δίνουμε έναν πιο γενικό ορισμό στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

Ορισμός 2.3.1. Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει όγκο $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, είναι κεντραρισμένο (δηλαδή έχει βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων), και υπάρχει μια σταθερά $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_K \langle x, y \rangle^2 dx = \alpha^2 \|y\|_2^2 \tag{2.3.1}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι αν το K ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη (2.3.1) τότε

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = \sum_{i=1}^n \int \langle x, e_i \rangle^2 dx = n\alpha^2,$$

όπου $x_j = \langle x, e_j \rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε το $U(K)$ είναι επίσης ισοτροπικό για κάθε $U \in O(n)$.

Παρατήρηση 2.3.2. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι η *ισοτροπική συνθήκη* (2.3.1) είναι ισοδύναμη με καθεμία από τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Για κάθε $i, j = 1, \dots, n$,

$$\int_K x_i x_j dx = \alpha^2 \delta_{ij}, \tag{2.3.2}$$

όπου $x_j = \langle x, e_j \rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$.

(ii) Για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_K \langle x, Tx \rangle dx = \alpha^2 (\mathrm{tr} T). \tag{2.3.3}$$

Για να το δούμε, υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ισοτροπικό, και θέτοντας $y = e_i$, $y = e_j$ και $y = e_i + e_j$ στην (2.3.1) παίρνουμε την (2.3.2). Παρατηρώντας ότι αν $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ τότε $\langle x, T(x) \rangle = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} x_i x_j$, βλέπουμε αμέσως ότι η (2.3.2) συνεπάγεται την (2.3.3). Τέλος, παρατηρήστε ότι αν εφαρμόσουμε την (2.3.3) για την $T(x) = \langle x, y \rangle y$ παίρνουμε την ισοτροπική συνθήκη (2.3.1).

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα έχει μια γραμμική εικόνα που ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε το $T(K)$ να είναι ισοτροπικό.*

Απόδειξη. Ο τελεστής $M \in L(\mathbb{R}^n)$ που ορίζεται μέσω της $M(y) = \int_K \langle x, y \rangle x dx$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Συνεπώς, έχει μια συμμετρική και θετική τετραγωνική ρίζα S. Θεωρούμε τη γραμμική εικόνα $\tilde{K} = S^{-1}(K)$ του K. Τότε, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{K}} \langle x, y \rangle^2 dx &= |\mathrm{det} S|^{-1} \int_K \langle S^{-1}x, y \rangle^2 dx \\
&= |\mathrm{det} S|^{-1} \int_K \langle x, S^{-1}y \rangle^2 dx \\
&= |\mathrm{det} S|^{-1} \langle \int_K \langle x, S^{-1}y \rangle x dx, S^{-1}y \rangle \\
&= |\mathrm{det} S|^{-1} \langle M S^{-1}y, S^{-1}y \rangle = |\mathrm{det} S|^{-1} \|y\|_2^2.
\end{aligned}$$

Κανονικοποιώντας τον όγκο του $\tilde{K}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Σημείωση 2.3.4. Στη περίπτωση που το κυρτό σώμα K δεν είναι κεντραρισμένο, θεωρώντας αρχικά τη μεταφορά του σε θέση τέτοια ώστε να έχει κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων και χρησιμοποιώντας στη συνέχεια την Πρόταση 2.3.3, συμπεραίνουμε ότι έχει αφφινική εικόνα που ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη.

Η Πρόταση 2.3.3 δείχνει ότι κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια *θέση* $\tilde{K}$ που είναι ισοτροπική. Λέμε ότι το $\tilde{K}$ είναι μια *ισοτροπική θέση* του K. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος είναι μονοσήμαντα ορισμένη (αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς) και ότι προκύπτει σαν λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$B(K) = \inf \left\{ \int_{TK} \|x\|_2^2 dx : T \in SL(n) \right\}. \tag{2.3.4}$$

Τότε, μια θέση K_1 του K είναι ισοτροπική αν και μόνο αν

$$\int_{K_1} \|x\|_2^2 dx = B(K). \tag{2.3.5}$$

Αν K_1 και K_2 είναι δύο ισοτροπικές θέσεις του K τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε $K_2 = U(K_1)$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μια ισοτροπική θέση K_1 του K. Η Παρατήρηση 2.3.2 δείχνει ότι υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_{K_1} \langle x, Tx\rangle dx = \alpha^2(\mathrm{tr}T)$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για κάθε $T \in SL(n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{TK_1} \|x\|_2^2 dx &= \int_{K_1} \|Tx\|_2^2 dx = \int_{K_1} \langle x, T^*Tx\rangle dx \\ &= \alpha^2 \mathrm{tr}(T^*T) \geqslant n\alpha^2 = \int_{K_1} \|x\|_2^2 dx,\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στη μορφή

$$\mathrm{tr}(T^*T) \geqslant n[\det(T^*T)]^{1/n}.$$

Αυτό δείχνει ότι το K_1 ικανοποιεί την (2.3.5). Ειδικότερα, το infimum στην (2.3.4) είναι minimum.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν έχουμε ισότητα στην (2.3.6) τότε $T^*T = I_n$, άρα $T \in O(n)$. Αυτό δείχνει ότι κάθε άλλη θέση $\tilde{K}$ του K που ικανοποιεί την (2.3.5) είναι ορθογώνια εικόνα του K_1, άρα είναι ισοτροπική.

Τέλος, αν K_2 είναι κάποια άλλη ισοτροπική θέση του K τότε το πρώτο μέρος της απόδειξης δείχνει ότι το K_2 ικανοποιεί την (2.3.5). Από το προηγούμενο βήμα πρέπει να έχουμε $K_2 = U(K_1)$ για κάποιον $U \in O(n)$. □

Παρατήρηση 2.3.6. Ένας άλλος τρόπος για να δούμε ότι αν το K είναι λύση του παραπάνω προβλήματος ελαχιστοποίησης τότε το K είναι ισοτροπικό, είναι ο εξής. Θεωρούμε τυχόντα $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Για μικρά $\varepsilon > 0$, ο $I_n + \varepsilon T$ είναι αντιστρέψιμος, άρα ο $(I_n + \varepsilon T)/[\det(I_n + \varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους. Συνεπώς,

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_K \frac{\|x + \varepsilon Tx\|_2^2}{[\det(I_n + \varepsilon T)]^{2/n}} dx.$$

Παρατηρούμε ότι $\|x + \varepsilon Tx\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\varepsilon\langle x, Tx\rangle + O_{T,K}(\varepsilon^2)$ και $[\det(I_n + \varepsilon T)]^{2/n} = 1 + 2\varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n} + O_T(\varepsilon^2)$. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ βλέπουμε ότι

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n} \int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_K \langle x, Tx\rangle dx.$$

Αφού ο T ήταν τυχών, η ίδια ανισότητα ισχύει αν αντικαταστήσουμε τον T με τον $-T$, άρα

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n} \int_K \|x\|_2^2 dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Έχουμε ήδη δεί ότι αυτή η συνθήκη εξασφαλίζει ότι το K είναι ισοτροπικό.

Ορισμός 2.3.7. Η προηγούμενη συζήτηση δείχνει ότι, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n}\min\left\{\frac{1}{\mathrm{vol}_n(TK)^{1+\frac{2}{n}}}\int_{TK}\|x\|_2^2 dx \;\middle|\; T \in GL(n)\right\}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από τη γραμμική κλάση του K. Επίσης, αν το K είναι ισοτροπικό τότε για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_K \langle x, \vartheta\rangle^2 dx = L_K^2.$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται *ισοτροπική σταθερά* του K.

Ορισμός 2.3.8. Γενικεύοντας τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος λέμε ότι ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι *ισοτροπικό* αν έχει βαρύκεντρο το 0 και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta\rangle^2 \, d\mu(x) = 1$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αν το $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει βαρύκεντρο το 0 τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Το μ είναι ισοτροπικό.

(β) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle \, d\mu(x) = \mathrm{tr}(T).$$

(γ) Ισχύουν οι $\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu(x) = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Παρατήρηση 2.3.9. Αν το μ είναι ισοτροπικό, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 \, d\mu(x) = n.$$

Επίσης, για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tx\|_2^2 \, d\mu(x) = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2,$$

όπου $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \left(\sum_{j=1}^n \|T(e_j)\|_2^2\right)^{1/2}$ (για τυχούσα ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$) είναι η Hilbert-Schmidt νόρμα του T.

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι κάθε μη εκφυλισμένο κεντραρισμένο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει μια ισοτροπική εικόνα $\nu = \mu \circ S$, όπου $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, ακολουθώντας την απόδειξη της Πρότασης 2.3.3. Ορίζουμε έναν τελεστή $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$Ty = \int \langle x, y\rangle x \, d\mu(x),$$

παρατηρούμε ότι ο T είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, και θέτουμε $\nu = \mu \circ S$ όπου ο S είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος στην $GL(n)$ και ικανοποιεί την $T = S^2$. Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int \langle x, y\rangle^2 \, d\nu(x) = \|y\|_2^2.$$

Επιπλέον, αφού το μ είναι κεντραρισμένο βλέπουμε ότι και το ν έχει την ίδια ιδιότητα.

Ορισμός 2.3.10. Έστω f μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Δηλαδή, η f έχει βαρύκεντρο το 0, είναι λογαριθμικά κοίλη και $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$. Τότε, η f λέγεται *ισοτροπική* αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta\rangle^2 f(x)\, dx = 1$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Όπως πριν, ελέγχουμε εύκολα ότι η f είναι ισοτροπική αν και μόνο αν ισχύει κάποιο από τα παρακάτω:

(i) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle f(x)\, dx = \mathrm{tr}(T).$$

(ii) Ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\, dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Πάλι, αν η f είναι ισοτροπική, τότε $\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 f(x)\, dx = n$, και γενικότερα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tx\|_2^2 f(x)\, dx = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2$$

για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Εύκολα ελεγχουμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα έχει μια ισοτροπική εικόνα: μπορούμε να βρούμε έναν αφφινικό ισομορφισμό $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και έναν θετικό αριθμό a ώστε η $af \circ S$ να είναι ισοτροπική.

Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο δεν φέρεται από υπερεπίπεδο είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η πυκνότητά του f_μ είναι ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Παρατήρηση 2.3.11. Αξίζει τον κόπο να συγκρίνουμε τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος (Ορισμός 2.3.1) με τον ορισμό του ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας. Παρατηρήστε ότι ένα κυρτό σώμα K με όγκο 1 και βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η συνάρτηση $L_K^n \mathbb{1}_{\frac{1}{L_K}K}$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Ορισμός 2.3.12 (γενικός ορισμός της ισοτροπικής σταθεράς). Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε τον *πίνακα αδρανείας* – ή *πίνακα συνδιακυμάνσεων* – $\mathrm{Cov}(f)$ της f ως τον πίνακα με συντεταγμένες

$$[\mathrm{Cov}(f)]_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx}.$$

Παρατηρήστε ότι αν η f είναι ισοτροπική τότε ο $\mathrm{Cov}(f)$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Αν f είναι μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα, η *ισοτροπική σταθερά* της ορίζεται από την:

$$L_f := \left(\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}}. \tag{2.3.7}$$

Επίσης, αν μ είναι ένα μη εκφυλισμένο πεπερασμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την f_μ ως προς το μέτρο Lebesgue, τότε ορίζουμε την ισοτροπική του σταθερά θέτοντας $L_\mu := L_{f_\mu}$, δηλαδή

$$L_\mu := \left(\frac{\|\mu\|_\infty}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)dx} \right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}, \tag{2.3.8}$$

όπου

$$\|\mu\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)$$

και $\mathrm{Cov}(\mu) := \mathrm{Cov}(f_\mu)$.

Με βάση αυτόν τον ορισμό μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η ισοτροπική σταθερά L_μ είναι αφφινικά αναλλοίωτη: έχουμε $L_\mu = L_{a\mu\circ A}$ και $L_f = L_{af\circ A}$ για κάθε αντιστρέψιμο αφφινικό μετασχηματισμό A του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε θετικό αριθμό a. Παρατηρούμε επίσης ότι:

(i) Ο Ορισμός 2.3.12 συμφωνεί με τον προηγούμενο ορισμό (Ορισμός 2.3.7) που είχαμε δώσει για την ισοτροπική σταθερά ενός κυρτού σώματος, με την έννοια ότι $L_{\mathbb{1}_K} = L_K$. Ένας απλός τρόπος για να το δούμε είναι να υποθέσουμε ότι το K είναι στην ισοτροπική θέση και μετά να παρατηρήσουμε ότι $\|\mathbb{1}_K\|_\infty = 1$, $\int \mathbb{1}_K(x)\,dx = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_K) = L_K^2 I_n$.

(ii) Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ τότε $\int f_\mu = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mu) = I_n$, απ' όπου έπεται ότι $L_\mu = \|\mu\|_\infty^{1/n}$. Επιπλέον, αφού το μ έχει εξ ορισμού βαρύκεντρο το 0, από το Θεώρημα 2.2.6 έχουμε ότι $L_\mu \simeq (f_\mu(0))^{1/n}$. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα αυτή την παρατήρηση.

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε έναν χαρακτηρισμό της ισοτροπικής σταθεράς, τελείως αντίστοιχο με εκείνον του Θεωρήματος 2.3.5: αν $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε

$$nL_f^2 = \inf_{\substack{T\in SL(n)\\ y\in\mathbb{R}^n}} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\right)^{2/n} \int_{\mathbb{R}^n} \|Tx+y\|_2^2 f(x)\,dx.$$

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι οι ισοτροπικές σταθερές όλων των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας είναι ομοιόμορφα φραγμένες από κάτω, από μια σταθερά $c > 0$ που είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση.

Πρόταση 2.3.13. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Τότε,*

$$L_f = \|f\|_\infty^{1/n} \geqslant c,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αφού η f είναι ισοτροπική, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} n = \int \|x\|_2^2 f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{\|x\|_2^2} \mathbb{1}\,dt\right) f(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{x:\|x\|_2^2\geqslant t\}}(x) f(x)\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n\setminus\sqrt{t}B_2^n} f(x)\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty \left(1-\int_{\sqrt{t}B_2^n} f(x)dx\right) dt \\ &\geqslant \int_0^{(\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n}} [1-\omega_n\|f\|_\infty t^{n/2}]\,dt \\ &= (\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n}\frac{n}{n+2}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $\omega_n^{-1/n} \approx \sqrt{n}$ καταλήγουμε στην $\|f\|_\infty^{1/n} \geqslant c$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. □

2.4 Εικασίες για τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα διανύσματα

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας. Ένα *τυχαίο διάνυσμα* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν η κατανομή του

$$\mu(A) := \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$$

είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το X είναι ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα αν το μ είναι ισοτροπικό και θα γράφουμε τις ισοτροπικές συνθήκες στη μορφή

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X \otimes X) = I_n.$$

Η πρώτη ισότητα είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι το μ είναι κεντραρισμένο και η δεύτερη είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι $\mathrm{Cov}(\mu) = I_n$.

2.4.1 Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς

Ένα από τα κεντρικά ανοικτά προβλήματα της θεωρίας των κυρτών σωμάτων είναι η εικασία του υπερεπιπέδου, η οποία ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $\max_{\vartheta\in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^\perp) \geqslant c$ για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ που έχει βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων. Το πρόβλημα τέθηκε από τον Bourgain [22] και αποδεικνύεται ότι έχει καταφατική απάντηση αν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη εικασία:

> *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $L_K \leqslant C$ για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$.*

Η εικασία μπορεί να αναδιατυπωθεί στό πλαίσιο των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας ή, ισοδύναμα, των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων τυχαίων διανυσμάτων, χωρίς το πρόβλημα να γίνει ουσιαστικά γενικότερο. Από τον γενικό ορισμό της ισοτροπικής σταθεράς (Ορισμός 2.3.12) βλέπουμε ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και f_μ είναι η πυκνότητα του, τότε

$$L_f := \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\right)^{\frac{1}{n}} = \|f_\mu\|_\infty^{\frac{1}{n}}.$$

Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$,*

$$L_n := \max\{\|f\|_\infty^{\frac{1}{n}} : f \text{ ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C.$$

Γύρω στο 1990, ο Bourgain [23] απέδειξε ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n$ και, το 2006, η εκτίμηση αυτή βελτιώθηκε από τον Klartag [59] ο οποίος έδωσε καταφατική απάντηση στην ισομορφική εκδοχή της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς.

Θεώρημα 2.4.1 (Klartag). *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\varepsilon \in (0,1)$, μπορούμε να βρούμε ένα κυρτό σώμα T στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{bar}(T) = 0$ και ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $(1+\varepsilon)^{-1}T \subseteq K + x \subseteq (1+\varepsilon)T$ και $L_T \leqslant C/\sqrt{\varepsilon}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Στην ίδια εργασία, ο Klartag έδειξε ότι

$$L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}.$$

Εκτός από το Θεώρημα 2.4.1, ένα πρόσθετο εργαλείο που χρησιμοποίησε ο Klartag για το φράγμα $O(\sqrt[4]{n})$ ήταν η ακόλουθη πολύ χρήσιμη ανισότητα του Παούρη.

Θεώρημα 2.4.2 (Παούρης). *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geqslant ct\sqrt{n}\}) \leqslant \exp\left(-t\sqrt{n}\right)$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το πρόβλημα της ισοτροπικής σταθεράς παραμένει ανοικτό και συνδέεται όπως θα δούμε με πολλά άλλα γνωστά προβλήματα της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας. Το 2020, ο Chen [36] απέδειξε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $L_n \leqslant n^\varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Το 2022, οι Klartag και Lehec [63] έδειξαν ότι η εικασία της ισοτροπικής σταθεράς, αλλά και η ισχυρότερη εικασία Kannan-Lovász-Simonovits που θα συζητήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, ισχύουν έως έναν παράγοντα που είναι λογαριθμικός ως προς τη διάσταση. Πιο συγκεκριμένα, απέδειξαν το άνω φράγμα $L_n \leqslant c(\log n)^4$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ακόμα πιο πρόσφατα, οι Jambulapati, Lee και Vempala [55] πέτυχαν μία ακόμα βελτίωση αυτής της εκτίμησης σε $L_n \leqslant c(\log n)^{2.2226}$. Στόχος μας στα επόμενα κεφάλαια είναι να περιγράψουμε λεπτομερώς όλα αυτά τα πρόσφατα αποτελέσματα.

2.4.2 Εικασία του λεπτού φλοιού

Το κεντρικό οριακό πρόβλημα (σε μια γενική μορφή) ρωτάει ποιές είναι εκείνες οι κατανομές (μεγάλης διάστασης) οι οποίες έχουν κατά προσέγγιση κανονικές περιθώριες κατανομές. Υποθέτουμε ότι $X = (X_1, \ldots, X_n)$ είναι ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή κανονικοποιημένο έτσι ώστε

$$\mathbb{E}(X_j) = 0 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X_iX_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Αποδεικνύεται ότι αν η κατανομή του X συγκεντρώνεται ισχυρά σε έναν λεπτό δακτύλιο τότε η απάντηση στο κεντρικό οριακό πρόβλημα είναι καταφατική. Ένα τυπικό αποτέλεσμα του είδους είναι το εξής.

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω X ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\|X\|_2}{\sqrt{n}} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \varepsilon \tag{2.4.1}$$

για κάποιο $\varepsilon \in (0,1)$. Τότε, για κάθε ϑ σε ένα υποσύνολο A της S^{n-1} με $\sigma(A) \geqslant 1 - \exp(-c_1\sqrt{n})$ έχουμε

$$|\mathbb{P}(\langle X, \vartheta\rangle \leqslant t) - \Phi(t)| \leqslant c_2(\varepsilon + n^{-\alpha}) \qquad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R},$$

όπου $\Phi(t)$ είναι η τυπική κανονική συνάρτηση κατανομής και $c_1, c_2, \alpha > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Αποτελέσματα αυτού του τύπου έχουν εμφανιστεί αρκετές φορές στην βιβλιογραφία (βλέπε, για παράδειγμα, Sudakov [90], Diaconis και Freedman [38], von Weizsaker [95]). Το πρόβλημα έγινε ευρέως γνωστό στο πλαίσιο των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων και γενικότερα στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων κατανομών, από μια εργασία των Anttila, Ball και Περυσινάκη [1]. Αποτελέσματα των Παούρη Klartag, Fleury, Guédon και E. Milman [60], [46], [51] δείχνουν ότι αν υποθέσουμε ότι η κατανομή είναι λογαριθμικά κοίλη τότε μπορούμε να αποδείξουμε ισχυρή συγκέντρωση σε λεπτό δακτύλιο και να δώσουμε καταφατική απάντηση στο κεντρικό οριακό πρόβλημα.

Η βέλτιστη μορφή που μπορούν να πάρουν τα παραπάνω αποτελέσματα παραμένει ανοικτό πρόβλημα. Έστω $n \geqslant 1$. Για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα X στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\sigma_X^2 := \mathbb{E}\,(\|X\|_2 - \sqrt{n})^2$$

και στη συνέχεια θεωρούμε τη σταθερά

$$\sigma_n^2 := \sup_X \mathbb{E}(\|X\|_2 - \sqrt{n})^2,$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλα τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα τυχαία διανύσματα X στον $\mathbb{R}^n$. Η εικασία του λεπτού φλοιού διατυπώνεται ως εξής.

Εικασία του λεπτού φλοιού: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει ότι*

$$\sigma_n \leqslant C.$$

2.4.3 Σύνδεση των δύο προβλημάτων

Οι Eldan και Klartag [42] απέδειξαν ότι η εικασία του λεπτού φλοιού είναι ισχυρότερη από την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς.

Θεώρημα 2.4.4 (Eldan-Klartag). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$,*

$$L_n \leqslant C\sigma_n.$$

Για την απόδειξη εισήγαγαν μια νέα παράμετρο, την

$$\sigma_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_\mu \sup_\vartheta \mathbb{E}_\mu(\langle x, \vartheta\rangle \|x\|_2^2), \tag{2.4.2}$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλα τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και όλα τα μοναδιαία διανύσματα $\vartheta \in S^{n-1}$. Στη συνέχεια, συνέκριναν τη σταθερά L_n με τη σταθερά

σ_n^*.

Θεώρημα 2.4.5 (Eldan-Klartag). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$,*

$$L_n \leqslant c_1 \sigma_n^*. \tag{2.4.3}$$

Έπεται το Θεώρημα 2.4.4, διότι μπορούμε να δείξουμε ότι $\sigma_n^* \leqslant c\sigma_n$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu(\langle x, \vartheta\rangle \|x\|_2^2) &= \mathbb{E}_\mu(\langle x, \vartheta\rangle(\|x\|_2^2 - n))\\ &\leqslant (\mathbb{E}_\mu\langle x, \vartheta\rangle^2)^{1/2}(\mathbb{E}_\mu(\|x\|_2^2 - \mathbb{E}_\mu\|x\|_2^2)^2)^{1/2}\\ &= (\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2^2))^{1/2},\end{aligned}$$

και κατόπιν, χρησιμοποιώντας το λήμμα του Borell και την ανισότητα του Παούρη, γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2^2) &= \mathbb{E}_\mu[(\|x\|_2^2 - n)^2 \mathbb{1}_{\{\|x\|_2 \leqslant c_2\sqrt{n}\}}] + \mathbb{E}_\mu[(\|x\|_2^2 - n)^2 \mathbb{1}_{\{\|x\|_2 > c_2\sqrt{n}\}}]\\ &\leqslant (c_2+1)^2 n\, \mathbb{E}_\mu(\|x\|_2 - \sqrt{n})^2 + (1 + c_2^{-4})\mathbb{E}_\mu[\|x\|_2^4\, \mathbb{1}_{\{\|x\|_2 > c_2\sqrt{n}\}}]\\ &\leqslant (c_2+1)^2 n\, \sigma_n^2 + c_3 n^2 e^{-\sqrt{n}},\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι

$$\mathbb{E}_\mu(\langle x, \vartheta\rangle \|x\|_2^2) \leqslant c_4\sqrt{n}\sigma_n,$$

αν λάβουμε υπόψιν μας το γεγονός ότι $\sigma_n \geqslant \sigma_{\gamma_n} = \sqrt{2}$.

Βασικός μας στόχος είναι λοιπόν να δείξουμε το Θεώρημα 2.4.5. Αφού η σταθερά L_n επιτυγχάνεται, αν αγνοήσουμε μια απόλυτη σταθερά, από την ισοτροπική σταθερά ενός συμμετρικού κυρτού σώματος (βλέπε [2, Θεώρημα 10.2.14 και Θεώρημα 10.2.15]), αρκεί να θεωρήσουμε ένα ισοτροπικό μέτρο πιθανότητας $\mu := \mu_K$ το οποίο φέρεται ομοιόμορφα από ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και να δείξουμε ότι

$$L_\mu = \|f_\mu\|_\infty^{1/n} = \mathrm{vol}_n(K)^{-1/n} \leqslant c\,\sigma_n^*. \tag{2.4.4}$$

Γι' αυτόν τον σκοπό θα χρησιμοποιήσουμε τον λογαριθμικό μετασχηματισμό Laplace Λ_μ του μ, ο οποίος ορίζεται από την

$$\Lambda_\mu(\xi) = \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} d\mu(x)\right).$$

Η Λ_μ είναι γνησίως κυρτή C^∞-συνάρτηση με $\Lambda_\mu(0) = \nabla\Lambda_\mu(0) = 0$. Επιπλέον, $\nabla\Lambda_\mu(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{supp}(\mu) = K$ και $\langle \nabla\Lambda_\mu(\xi), y\rangle \leqslant 1$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ και $y \in K^\circ$.

Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας μ_ξ που έχει πυκνότητα ανάλογη με την $e^{\langle \xi, x\rangle}\mathbb{1}_K(x)$. Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{bar}(\mu_\xi) = \xi$ και ότι $\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi) = \mathrm{Cov}(\mu_\xi)$ (βλέπε [2, Πρόταση 10.5.3]). Ειδικότερα,

$$\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(0) = I_n.$$

Για κάθε $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$ ορίζουμε

$$K_t = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu(2\xi) \leqslant t^2\}.$$

Η επόμενη πρόταση δίνει ένα κάτω φράγμα για τον όγκο του K_t.

Πρόταση 2.4.6. *Για κάθε $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$ έχουμε $\mathrm{vol}_n(K_t)^{1/n} \geqslant c_1 t/\sqrt{n}$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Για την απόδειξη της Πρότασης 2.4.6 εισάγουμε κάποιον συμβολισμό και αποδεικνύουμε κάποια αποτελέσματα που παρυσιάζουν ανεξάρτητο ενδιαφέρον. Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε

$$M_q(\mu) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, x\rangle|^q d\mu(x) \leqslant 1 \right\}.$$

Παρατηρήστε ότι το $M_q(\mu)$ είναι το πολικό σώμα του L_q-κεντροειδούς σώματος $Z_q(\mu)$ του μ. Έχουμε

$$Z_q(\mu) = (M_q(\mu))^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\langle v, x\rangle|^q \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, y\rangle|^q d\mu(y) \ \text{ για κάθε } v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Είναι γνωστό (βλ. [2, Θεώρημα 10.4.11]) ότι για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{bar}(\mu) = 0$ ισχύει

$$\frac{c_1}{f_\mu(0)^{1/n}} \leqslant \mathrm{vol}_n(Z_n(\mu))^{1/n} \leqslant \frac{c_2}{f_\mu(0)^{1/n}}, \tag{2.4.5}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Για να φράξουμε από κάτω τον όγκο του K_t, το αντικαθιστούμε με ένα μικρότερο σώμα, ένα ομοιόθετο του πολικού σώματος του L_q κεντροειδούς του σώματος, με $q = t^2$.

Λήμμα 2.4.7. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ακέραιο $t \geqslant 1$ έχουμε*

$$M_{t^2}(\mu) \subseteq \frac{c}{t^2} K_t,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από το λήμμα του Borell γνωρίζουμε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $\alpha > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $p \geqslant q \geqslant 2$ και κάθε $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, x\rangle|^p d\mu(x) \Big)^{1/p} \leqslant \alpha \frac{p}{q} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, x\rangle|^q d\mu(x) \Big)^{1/q}.$$

Έστω $u \in M_{t^2}(\mu)$. Θα ελέγξουμε ότι

$$\Lambda_\mu\Big(\frac{t^2 u}{2e\alpha} \Big) \leqslant t^2.$$

Σταθεροποιούμε $u \in M_{t^2}(\mu)$ και θέτουμε $\tilde{u} := \frac{t^2 u}{2e\alpha}$. Τότε, για κάθε $k \geqslant 1$ έχουμε

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \tilde{u}, x\rangle|^k d\mu(x) \Big)^{1/k} = \frac{t^2}{2e\alpha} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle u, x\rangle|^k d\mu(x) \Big)^{1/k},$$

το οποίο φράσσεται από $\frac{t^2}{2e\alpha}$ αν $k \leqslant t^2$ και από $\frac{k}{2e}$ αν $k > t^2$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \tilde{u}, x\rangle} d\mu(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} e^{|\langle \tilde{u}, x\rangle|} d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \tilde{u}, x\rangle|^k d\mu(x) \\ &\leqslant \sum_{k \leqslant t^2} \frac{1}{k!} \Big(\frac{t^2}{2e\alpha} \Big)^k + \sum_{k > t^2} \frac{1}{k!} \Big(\frac{k}{2e} \Big)^k \leqslant e^{\frac{t^2}{2e\alpha}} + 1 \leqslant e^{t^2},\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το λήμμα. □

Θα θέλαμε τώρα να φράξουμε από κάτω τον όγκο του $M_{\ell^2}(\mu)$. Γι' αυτόν τον σκοπό, φράσσουμε τον όγκο του πολικού του σώματος από πάνω, και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την αντίστροφη ανισότητα Blaschke-Santaló. Η επόμενη πρόταση δίνει ένα τέτοιο άνω φράγμα για τον όγκο των L_q-κεντροειδών σωμάτων του μ.

Πρόταση 2.4.8 (Παούρης). *Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$ έχουμε ότι*

$$\text{vol}_n(Z_q(\mu))^{1/n} \leqslant c\sqrt{q/n}. \tag{2.4.6}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε κάποια κλασικά αποτελέσματα από τη θεωρία των μεικτών όγκων κυρτών σωμάτων. Ο τύπος του Steiner ισχυρίζεται ότι για κάθε κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\text{vol}_n(C + tB_2^n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}W_k(C)t^k$$

για κάθε $t > 0$, όπου $W_k(C) = V_{n-k}(C) = V(C[n-k], B_2^n[k])$ είναι το k-οστό quermassintegral του C. Επίσης, από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel προκύπτει ότι η ακολουθία $(W_0(C), \dots, W_n(C))$ είναι λογαριθμικά κοίλη και, ειδικότερα,

$$\left(\frac{W_{n-i}(C)}{\omega_n}\right)^{1/i} \geqslant \left(\frac{W_{n-j}(C)}{\omega_n}\right)^{1/j}, \tag{2.4.7}$$

για κάθε $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τον ολοκληρωτικό τύπο του Kubota:

$$W_{n-m}(C) = \frac{\omega_n}{\omega_m}\int_{G_{n,m}} \text{vol}_m(P_F(C))\, d\nu_{n,m}(F) \quad (1 \leqslant m \leqslant n). \tag{2.4.8}$$

Αρκεί να δείξουμε την (2.4.6) για ακέραιες τιμές του $1 \leqslant q \leqslant n-1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $F \in G_{n,q}$ ισχύει

$$\text{vol}_q(P_F(Z_q(\mu)))^{1/q} = \text{vol}_q(Z_q(\pi_F(\mu)))^{1/q} \leqslant \frac{c_1}{(f_{\pi_F(\mu)}(0))^{1/q}} \leqslant c_2,$$

όπου $\pi_F(\mu)$ είναι το περιθώριο μέτρο του μ στον F που ορίζεται από την

$$\pi_F(\mu)(A) := \mu(P_F^{-1}(A))$$

για κάθε Borel υποσύνολο A του F, και έχουμε χρησιμοποιήσει την (2.4.5) για την πυκνότητα $f_{\pi_F(\mu)}$ του $\pi_F(\mu)$ και το γεγονός ότι $(f_{\pi_F(\mu)}(0))^{1/q} \approx L_{\pi_F(\mu)} \geqslant c_3$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_3 > 0$. Εφαρμόζοντας την (2.4.8) παίρνουμε

$$W_{n-q}(Z_q(\mu)) \leqslant \frac{\omega_n}{\omega_q}c_2^q.$$

Τώρα, εφαρμόζουμε την (2.4.7) για το $C = Z_q(\mu)$ με $j = n$ και $i = q$, και έχουμε

$$W_{n-q}^{1/q}(Z_q(\mu)) \geqslant \text{vol}_n(Z_q(\mu))^{1/n}\omega_n^{1/q-1/n}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(Z_q(\mu))^{1/n} \leqslant \frac{\omega_n^{1/n}}{\omega_q^{1/q}} c_2.$$

Αφού $\omega_k^{1/k} \simeq 1/\sqrt{k}$, καταλήγουμε στην (2.4.6). □

Απόδειξη της Πρότασης 2.4.6. Από το Λήμμα 2.4.7 και την ανισότητα Bourgain-Milman παίρνουμε

$$\mathrm{vrad}(K_t) \geqslant c_1 t^2 \mathrm{vrad}(M_{t^2}(\mu)) \geqslant \frac{c_2 t^2}{\mathrm{vrad}(Z_{t^2}(\mu))}.$$

Από την Πρόταση 2.4.8 βλέπουμε ότι

$$\mathrm{vrad}(Z_{t^2}(\mu)) \leqslant c_3 t.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι $\mathrm{vrad}(K_t) \geqslant c_4 t$, που είναι ακριβώς ο ισχυρισμός της πρότασης. □

Το τελευταίο προπαρασκευαστικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.5 είναι να φράξουμε την $\det(\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi))$, που είναι βασικά η ορίζουσα του πίνακα συνδιακυμάνσεων του μ_ξ, από κάτω. Το φράγμα που θα δώσουμε εξαρτάται από την σταθερά σ_n^* και την τιμή $\Lambda_\mu(2\xi)$, η οποία στο K_t είναι άνω φραγμένη από t^2.

Πρόταση 2.4.9. *Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι*

$$\det(\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi)) \geqslant c_2 e^{-\sigma_n^* \sqrt{n\Lambda_\mu(2\xi)}}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} -\log(\det(\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi))) &= -\int_0^1 \frac{d}{dt}\log(\det(\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(t\xi)))\,dt \\ &= -\int_0^1 \mathrm{tr}\Big(\frac{1}{\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(t\xi)}\frac{d}{dt}(\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(t\xi))\Big)\,dt. \end{aligned}$$

Σταθεροποιούμε $t_0 \in [0,1]$ και ορίζουμε $H_0 = \sqrt{\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(t_0\xi)^{-1}}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\Big(H_0^2 \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(t\xi)\Big) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \mathrm{tr}(H_0^2\, \mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(t\xi)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \mathrm{tr}(H_0^2\, \mathrm{Cov}(\mu_{t\xi})) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \int_{\mathbb{R}^n} \Big\| H_0(x) - \int_{\mathbb{R}^n} H_0(z)\, d\mu_{t_0\xi}(z)\Big\|_2^2 \, d\mu_{t\xi}(x). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} d\mu_{t\xi}(x) = \Big(\langle \xi, x\rangle - \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi, z\rangle\, d\mu_{t_0\xi}(z)\Big)\, d\mu_{t_0\xi}(x),$$

και αφού η $H_0(x)-\int_{\mathbb{R}^n} H_0(z)\,d\mu_{t_0\xi}(z)$ είναι ορθογώνια στις σταθερές συναρτήσεις στον $L_2(\mu_{t_0\xi})$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\Big(H_0^2\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(t\xi)\Big)\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\Big\|H_0(x)-\int_{\mathbb{R}^n}H_0(z)\,d\mu_{t_0\xi}(z)\Big\|_2^2\Big(\langle\xi,x\rangle-\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi,z\rangle\,d\mu_{t_0\xi}(z)\Big)\,d\mu_{t_0\xi}(x).\end{aligned}$$

Έστω X ένα λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα με κατανομή $\mu_{t_0\xi}$. Το τυχαίο διάνυσμα $Z=H_0(X)-\mathbb{E}_{\mu_{t_0\xi}}(H_0(X))$ είναι λογαριθμικά κοίλο και ισοτροπικό, συνεπώς

$$\begin{aligned}&-\int_{\mathbb{R}^n}\Big\|H_0(x)-\int_{\mathbb{R}^n}H_0(z)\,d\mu_{t_0\xi}(z)\Big\|_2^2\Big(\langle\xi,x\rangle-\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi,z\rangle\,d\mu_{t_0\xi}(z)\Big)\,d\mu_{t_0\xi}(x)\\&=-\mathbb{E}_{\mu_{t_0\xi}}\Big(\langle\xi,X-\mathbb{E}_{\mu_{t_0\xi}}(X)\rangle\Big\|\,H_0(X)-\mathbb{E}_{\mu_{t_0\xi}}(H_0(X))\Big\|_2^2\Big)\\&=-\mathbb{E}_{\mu_{t_0\xi}}\langle H_0^{-1}(\xi),Z\rangle\,\|Z\|_2^2=\langle H_0^{-1}(\xi),-\mathbb{E}_{\mu_{t_0\xi}}(Z)\,\|Z\|_2^2\rangle\\&\leqslant\sqrt{n}\sigma_n^*\,\|H_0^{-1}(\xi)\|_2\leqslant\sqrt{n}\sigma_n^*\sqrt{\langle\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(t_0\xi)\xi,\xi\rangle}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}-\log(\det\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi))&\leqslant\sqrt{n}\sigma_n^*\int_0^1\sqrt{\langle\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(t\xi)\xi,\xi\rangle}\,dt\\&=2\sqrt{n}\sigma_n^*\int_0^{1/2}\sqrt{\langle\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(2t\xi)\xi,\xi\rangle}\,dt.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\int_0^{1/2}\sqrt{\langle\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(2t\xi)\xi,\xi\rangle}\,dt\\&\leqslant\Big(\int_0^{1/2}(1-t)\langle\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(2t\xi)\xi,\xi\rangle\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^{1/2}\frac{1}{1-t}\,dt\Big)^{1/2}\\&\leqslant\Big(\int_0^1(1-t)\langle\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(2t\xi)\xi,\xi\rangle\,dt\Big)^{1/2},\end{aligned}$$

και αφού

$$4\int_0^1(1-t)\langle\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(2t\xi)\xi,\xi\rangle\,dt=\Lambda_\mu(2\xi)-\Lambda_\mu(0)-\langle\nabla\Lambda_\mu(0),2\xi\rangle=\Lambda_\mu(2\xi),$$

η απόδειξη της Πρότασης 2.4.9 είναι πλήρης. □

Έχουμε τώρα όλα όσα χρειαζόμαστε για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.5.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.5. Παρατηρούμε ότι, από την Πρόταση 2.4.9,

$$\mathrm{vol}_n(K)\geqslant\mathrm{vol}_n(\nabla\Lambda_\mu(K_t))=\int_{K_t}\det(\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(y))\,dy\geqslant\mathrm{vol}_n(K_t)e^{-\sqrt{n}\sigma_n^*t}.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.4.6 για να φράξουμε από κάτω τον όγκο του K_t, βλέπουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(K)^{1/n}\geqslant\frac{c_1t}{\sqrt{n}}e^{-\sigma_n^*t/\sqrt{n}}.$$

Επιλέγοντας $t\approx\sqrt{n}/\sigma_n^*$ παίρνουμε την (2.4.4), η οποία λόγω της αναγωγής της εικασίας στα ομοιόμορφα μέτρα συμμετρικών κυρτών σωμάτων αποδεικνύει την (2.4.3) και ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.5. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εικασία KLS και εικασία της ισοτροπικής σταθεράς

3.1 Ισοπεριμετρικές σταθερές

Σε αυτή την ενότητα εισάγουμε την ισοπεριμετρική σταθερά (ή σταθερά Cheeger) χ_μ και τη σταθερά Poincaré ϑ_μ ενός μέτρου Borel μ στον $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύουμε ότι στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας οι σταθερές $\psi_\mu = 1/\chi_\mu$ (η αντίστροφη σταθερά Cheeger) και ϑ_μ είναι ισοδύναμες: ισχύει ότι

$$\frac{\vartheta_\mu}{2} \leqslant \psi_\mu \leqslant C\vartheta_\mu$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, όπου $C > 0$ είναι μια αόλυτη σταθερά.

3.1.1 Η σταθερά Cheeger

Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το περιεχόμενο του A κατά *Minkowski* ως προς το μέτρο μ ως εξής:

$$\mu^+(A) = \liminf_{t\to 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}, \tag{3.1.1}$$

όπου $A_t = \{x : d(x, A) < t\}$ είναι η t-επέκταση του A ως προς την Ευκλείδεια μετρική.

Ορισμός 3.1.1 (σταθερά Cheeger). Ο *ισοπεριμετρικός λόγος* του A ως προς το μ ορίζεται ως εξής:

$$\chi_\mu(A) := \frac{\mu^+(A)}{\min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\}}.$$

Η *σταθερά Cheeger* χ_μ του μ είναι η σταθερά

$$\chi_\mu := \inf\{\chi_\mu(A) : A \text{ Borel } \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Ορίζουμε επίσης τη συνάρτηση $I_\mu : [0, 1] \to [0, +\infty]$ ως εξής:

$$I_\mu(t) = \inf\{\mu^+(A) : A \text{ Borel}, \ \mu(A) = t\}.$$

Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται *ισοπεριμετρικό προφίλ* του μ. Παρατηρούμε ότι

$$\chi_\mu = \inf_{0<t\leqslant 1/2} \frac{\min\{I_\mu(t), I_\mu(1-t)\}}{t}. \tag{3.1.2}$$

Ένα βαθύ θεώρημα από την γεωμετρική θεωρία μέτρου μας εξασφαλίζει ότι το ισοπεριμετρικό προφίλ προσδιορίζεται από την τιμή του στο $t_0 = \frac{1}{2}$.

Θεώρημα 3.1.2 (Sternberg-Zumbrun, E. Milman). *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, το ισοπεριμετρικό προφίλ I_μ του μ είναι κοίλη συνάρτηση στο $(0,1)$, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε $I_\mu(t) = I_\mu(1-t)$. Έπεται ότι*

$$\chi_\mu := \inf_{0<t<1} \frac{I_\mu(t)}{\min\{t, 1-t\}} = \inf_{0<t\leqslant 1/2} \frac{I_\mu(t)}{t} = 2I_\mu(1/2),$$

το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά Cheeger ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας μ κοιτάζοντας μόνο τα σύνολα Borel A με $\mu(A) = 1/2$.

Το Θεώρημα 3.1.2 αποδείχθηκε αρχικά από τους Sternberg και Zumbrun [89] στην περίπτωση των κυρτών σωμάτων. Απέδειξαν ότι αν $n \geqslant 2$ και K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε η I_{μ_K} είναι κοίλη στο $[0,1]$, όπου μ_K είναι το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο K. Αργότερα, ο Kuwert παρατήρησε στο [65] ότι η $I_{\mu_K}^{n/(n-1)}$ είναι επίσης κοίλη στο $[0,1]$. Αυτή είναι ακριβώς η σωστή δύναμη για το αποτέλεσμα. Το αποτέλεσμα του Kuwert επεκτάθηκε σε κυρτά χωρία σε πολλαπλότητες Riemann με μη αρνητική καμπυλότητα Ricci από τους Bayle και Rosales στο [10]. Ο E. Milman απέδειξε στο [81] ότι η I_μ εξακολουθεί να είναι κοίλη στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων στον $\mathbb{R}^n$. Στη μονοδιάστατη περίπτωση αυτό είχε ήδη αποδειχθεί από τον Bobkov.

Το επόμενο θεώρημα δίνει μια ισοδύναμη περιγραφή της σταθεράς του Cheeger.

Θεώρημα 3.1.3 (Rothaus, Cheeger, Maz'ya). *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με σταθερά Cheeger χ_μ. Τότε,*

$$\alpha_1 \leqslant \chi_\mu \leqslant 2\alpha_1,$$

όπου α_1 είναι η μεγαλύτερη σταθερά με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε ολοκληρώσιμη, τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \mathbb{E}_\mu(f)|\, d\mu(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2 d\mu(x). \tag{3.1.3}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η f καλείται τοπικά Lipschitz αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $r > 0$ έτσι ώστε ο περιορισμός της f στη μπάλα $B(x,r) := \{y : \|y - x\|_2 < r\}$ να είναι Lipschitz, δηλαδή η $\|\nabla f\|_2$ είναι φραγμένη στη $B(x,r)$, όπου

$$\|\nabla f(x)\|_2 = \limsup_{y\to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{\|y - x\|_2}. \tag{3.1.4}$$

Αν η f είναι συνεχής τότε η $\|\nabla f\|_2$ είναι Borel μετρήσιμη, και αν η f είναι διαφορίσιμη στο x τότε η $\|\nabla f(x)\|_2$ είναι το σύνηθες μήκος του ανάδελτα της f στο σημείο x. Από το θεώρημα του Rademacher έχουμε ότι αν η f είναι τοπικά Lipschitz τότε η $\|\nabla f(x)\|_2$ είναι πεπερασμένη και η f είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue. Επομένως ο ορισμός στην (3.1.4) δεν δημιουργεί σύγχυση στην περίπτωση που το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3 θα χρησιμοποιήσουμε την co-area formula.

Θεώρημα 3.1.4 (co-area formula). *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε μ-ολοκληρώσιμη τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχουμε:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2 \, d\mu(x) \geqslant \int_0^\infty \mu^+(\{x : |f(x)| > s\})\, ds. \tag{3.1.5}$$

Απόδειξη. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$f_t(x) = \sup\{|f(y)| : y \in B(x,t)\}.$$

Παρατηρούμε ότι η f_t είναι μετρήσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to 0} \frac{f_t(x) - |f(x)|}{t} &\leqslant \limsup_{y\to x} \frac{|f(y)| - |f(x)|}{\|y - x\|_2} \\ &\leqslant \limsup_{y\to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{\|y - x\|_2} = \|\nabla f(x)\|_2.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ανισότητα με το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2 d\mu(x) &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \limsup_{t\to 0} \frac{f_t(x) - |f(x)|}{t}\, d\mu(x) \\ &\geqslant \limsup_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_t(x) - |f(x)|}{t}\, d\mu(x) \\ &\geqslant \liminf_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_t(x) - |f(x)|}{t}\, d\mu(x) \\ &= \liminf_{t\to 0} \int_0^\infty \frac{1}{t}(\mu(\{f_t > s\}) - \mu(\{|f| > s\}))\, ds.\end{aligned}$$

Για κάθε $s > 0$ θέτουμε $A(s) = \{|f| > s\}$ και βλέπουμε ότι $\{f_t > s\} = (A(s))_t$ οπότε χρησιμοποιώντας ξανά το λήμμα του Fatou παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2 d\mu(x) &\geqslant \liminf_{t\to 0} \int_0^\infty \frac{\mu((A(s))_t) - \mu(A(s))}{t}\, ds \\ &\geqslant \int_0^\infty \liminf_{t\to 0} \frac{\mu((A(s))_t) - \mu(A(s))}{t}\, ds \\ &= \int_0^\infty \mu^+(A(s))\, ds\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3. Για να δείξουμε τη δεξιά ανισότητα θα δείξουμε ότι για κάθε μ-ολοκληρώσιμη, τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ισχύει

$$\frac{\chi_\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \mathbb{E}_\mu(f)|\, d\mu(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu(x).$$

Πράγματι, θεωρούμε μια ολοκληρώσιμη και τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι κάτω φραγμένη προσεγγίζοντας την με συναρτήσεις της μορφής $(f + n)\,\cdot$

$\mathbb{1}_{\{f>-n\}}-n$, αφού, από την συνέχεια της f, κάθε σύνολο $\{f > -n\}$ είναι ανοικτό και άρα η $\nabla((f+n)\cdot\mathbb{1}_{\{f>-n\}})$ ισούται με $\nabla(f+n) = \nabla f$ σε αυτό το σύνολο και επιπλέον $\|\nabla((f+n)\cdot\mathbb{1}_{\{f>-n\}})\|_2 \leqslant \|\nabla f\|_2$ στο σύνολο $\{f \leqslant -n\}$. Τέλος, προσθέτοντας κατάλληλη σταθερά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f > 0$. Από την co-area formula παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2 d\mu(x) &\geqslant \int_0^\infty \mu^+(\{x : f(x) > s\})\, ds \\ &\geqslant \chi_\mu \int_0^\infty \min\{\mu(A(s)), 1-\mu(A(s))\}\, ds,\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

όπου $A(s) = \{f > s\}$. Παρατηρώντας ότι

$$\|\mathbb{1}_B - \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_B)\|_1 = 2\mu(B)(1-\mu(B))$$

για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$ και χρησιμοποιώντας την απλή ταυτότητα

$$\mathbb{E}_\mu(f(g - \mathbb{E}_\mu(g))) = \mathbb{E}_\mu(g(f - \mathbb{E}_\mu(f))),$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2 d\mu(x) &\geqslant \chi_\mu \int_0^\infty \mu(A(s))(1-\mu(A(s)))\, ds \\ &= \frac{\chi_\mu}{2} \int_0^\infty \|\mathbb{1}_{A(s)} - \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_{A(s)})\|_1\, ds \\ &\geqslant \frac{\chi_\mu}{2} \sup\left\{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbb{1}_{A(s)} - \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_{A(s)}))g\, d\mu\, ds \;\middle|\; \|g\|_\infty \leqslant 1\right\} \\ &= \frac{\chi_\mu}{2} \sup\left\{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A(s)}(g - \mathbb{E}_\mu(g))\, d\mu\, ds \;\middle|\; \|g\|_\infty \leqslant 1\right\} \\ &= \frac{\chi_\mu}{2} \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} f(g - \mathbb{E}_\mu(g))\, d\mu \;\middle|\; \|g\|_\infty \leqslant 1\right\} \\ &= \frac{\chi_\mu}{2} \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} g(f - \mathbb{E}_\mu(f))\, d\mu \;\middle|\; \|g\|_\infty \leqslant 1\right\} \\ &= \frac{\chi_\mu}{2} \|f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_1.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $\chi_\mu \leqslant 2\alpha_1$.

Για την αριστερή ανισότητα, θεωρούμε τυχόν κλειστό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ και για αρκούντως μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f_\varepsilon(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{d(x, A_{\varepsilon^2})}{\varepsilon - \varepsilon^2}\right\}.$$

Τότε, $0 \leqslant f_\varepsilon \leqslant 1$, και πιο συγκεκριμένα

$$f_\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{στο } A_{\varepsilon^2} \supseteq A \\ 0 & \text{στο } \{x : d(x, A) > \varepsilon\} \end{cases}$$

Επιπλέον, $f_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{1}_A$ όταν $\varepsilon \to 0$. Τέλος, επειδή η f_ε είναι Lipschitz παίρνουμε

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\Big|d(x, A_{\varepsilon^2}) - d(y, A_{\varepsilon^2})\Big| \leqslant \frac{\|x-y\|_2}{\varepsilon(1-\varepsilon)},$$

οπότε

$$\|\nabla f_\varepsilon(x)\|_2 \leqslant (\varepsilon - \varepsilon^2)^{-1}.$$

Όμως ισχύει ότι $\nabla f_\varepsilon(x) = 0$ στο $C = \{x : d(x,A) > \varepsilon\} \cup \{x : d(x,A) < \varepsilon^2\}$, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f_\varepsilon(x)\|_2 d\mu(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n \setminus C} \|\nabla f_\varepsilon(x)\|_2 d\mu(x)\\ &\leqslant \frac{\mu(A_\varepsilon) - \mu(A_{\varepsilon^2})}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\\ &= \frac{1}{1-\varepsilon}\,\frac{\mu(A_\varepsilon) - \mu(A)}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\frac{\mu(A_{\varepsilon^2}) - \mu(A)}{\varepsilon^2},\end{aligned}$$

και αφού υποθέσαμε την (3.1.3) έχουμε:

$$\alpha_1 \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - \mathbb{E}_\mu(f_\varepsilon)|\, d\mu(x) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\,\frac{\mu(A_\varepsilon) - \mu(A)}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\frac{\mu(A_{\varepsilon^2}) - \mu(A)}{\varepsilon^2}.$$

Παίρνοντας $\varepsilon \to 0^+$ βλέπουμε ότι

$$\mu^+(A) \geqslant \alpha_1\|\mathbb{1}_A - \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_A)\|_1 = 2\alpha_1\mu(A)(1-\mu(A)) \geqslant \alpha_1 \min\{\mu(A), 1-\mu(A)\},$$

και το ζητούμενο έπεται. □

3.1.2 Η σταθερά Poincaré

Ορισμός 3.1.5 (σταθερά Poincaré). Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα *Poincaré* με σταθερά $\vartheta > 0$ αν

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \vartheta^2 \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2\, d\mu, \tag{3.1.7}$$

για όλες τις τοπικά Lipschitz συναρτήσεις f στον $\mathbb{R}^n$ οι οποίες είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Η σταθερά *Poincaré* ϑ_μ του μ είναι η μικρότερη σταθερά $\vartheta > 0$ για την οποία ικανοποιείται η (3.1.7).

Η κλασική ανισότητα Poincaré σχετίζεται με τις ιδιοτιμές του τελεστή Laplace-Beltrami

$$\Delta(f) = \mathrm{div}(\nabla f).$$

Είναι γνωστό ότι οι ιδιοτιμές του $-\Delta$ είναι μη-αρνητικές και σχηματίζουν ένα διακριτό σύνολο, οπότε, μπορούν να γραφούν σε αύξουσα διάταξη ως $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$, αφού ο Δ μηδενίζεται μόνο στις σταθερές συναρτήσεις. Στην περίπτωση που το μ είναι μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $e^{-\varphi(x)}$ όπου φ είναι μια C^1-συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, ο τελεστής Laplace-Beltrami ορίζεται ως εξής:

$$L_\mu f = \Delta f - \langle \nabla f, \nabla\varphi\rangle.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο τύπο του Green:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (L_\mu f) g \, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\mu, \tag{3.1.8}$$

για όλες τις λείες, φραγμένες συναρτήσεις $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι, από το θεώρημα Green έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(\Delta f - \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle) \, e^{-\varphi} &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\Delta f) \, e^{-\varphi} - \int_{\mathbb{R}^n} g \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle e^{-\varphi} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla (g e^{-\varphi}) \rangle - \int_{\mathbb{R}^n} g \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle e^{-\varphi} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g \rangle e^{-\varphi}. \end{aligned}$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι $\vartheta_\mu^{-2} = \lambda_1$, όπου λ_1 είναι η πρώτη μη μηδενική ιδιοτιμή του διαφορικού τελεστή $-L_\mu$.

Θεώρημα 3.1.6. *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $e^{-\varphi(x)}$, όπου φ είναι μια C^1-συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για όλες τις λείες συναρτήσεις f με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει:*

$$\lambda_1 \mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu. \tag{3.1.9}$$

Έχουμε ισότητα όταν η f είναι η ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην λ_1. Επομένως, $\vartheta_\mu^{-2} = \lambda_1$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ως υπόχωρο του $L_2(\mu)$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f g \, d\mu.$$

Ο τελεστής $-L_\mu$ είναι αυτοσυζυγής και θετικός, οπότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{\varphi_j\}$ του $L_2(\mu)$ η οποία αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_j. Αν $f \in L_2(\mu)$, τότε από την ταυτότητα του Parseval έχουμε:

$$f = \sum_{j=1}^\infty \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \qquad \text{και} \qquad \|f\|_{L_2(\mu)}^2 = \sum_{j=1}^\infty \langle f, \varphi_j \rangle^2.$$

Θεωρούμε την *ενέργεια*

$$\mathcal{E}(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\mu.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{E}(f) := \mathcal{E}(f, f) = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 d\mu.$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την (3.1.8) βλέπουμε ότι, για κάθε $s \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \mathcal{E}\left(f - \sum_{j=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\varphi_j, f - \sum_{j=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\varphi_j\right) \\
&= \mathcal{E}(f,f) - 2\sum_{j=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\mathcal{E}(f,\varphi_j) + \sum_{j,k=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\langle f,\varphi_k\rangle\mathcal{E}(\varphi_j,\varphi_k) \\
&= \mathcal{E}(f,f) + 2\sum_{j=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\langle f, L_\mu\varphi_j\rangle - \sum_{j,k=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\langle f,\varphi_k\rangle\langle\varphi_j, L_\mu\varphi_k\rangle \\
&= \mathcal{E}(f,f) - 2\sum_{j=1}^{s}\lambda_j\langle f,\varphi_j\rangle^2 + \sum_{j=1}^{s}\lambda_j\langle f,\varphi_j\rangle^2.
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια για κάθε s ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{s}\lambda_j\langle f,\varphi_j\rangle^2 \leqslant \mathcal{E}(f),$$

οπότε

$$\lambda_1\|f\|_{L_2(\mu)}^2 = \lambda_1\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,\varphi_j\rangle^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\langle f,\varphi_j\rangle^2 \leqslant \mathcal{E}(f).$$

Παρατηρούμε τέλος ότι

$$\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(f - \mathbb{E}_\mu(f)),$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\mathcal{E}(f) = \frac{1}{\lambda_1}\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_2^2 d\mu.$$

Έπεται ότι η ανισότητα Poincaré ικανοποιείται με σταθερά $1/\lambda_1$. □

Ο Maz'ya (βλέπε [79], [80]) και ανεξάρτητα ο Cheeger (βλέπε [34]) έδειξαν ότι η σταθερά Poincaré ϑ_μ του μ φράσσεται από την αντίστροφη σταθερά Cheeger ψ_μ του μ. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.7 (Maz'ya, Cheeger). *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με αντίστροφη σταθερά Cheeger ψ_μ. Τότε,*

$$\vartheta_\mu \leqslant 2\psi_\mu. \tag{3.1.10}$$

Απόδειξη. Από την co-area formula και τον ορισμό της σταθεράς Cheeger έχουμε ότι για κάθε θετική, λεία συνάρτηση g ισχύει:

$$\chi_\mu\int_0^\infty \min\{\mu(\{g \geqslant s\}), 1-\mu(\{g \geqslant s\})\}\,ds \leqslant \int_0^\infty \mu^+(\{g \geqslant s\})\,ds \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla g\|_2 d\mu. \tag{3.1.11}$$

Θεωρούμε μια ολοκληρώσιμη τοπικά Lipschitz συνάρτηση f και θέτουμε $m = \mathrm{med}(f)$. Τότε,

$$\mu(\{f \geqslant m\}) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \mu(\{f \leqslant m\}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε

$$f^+ = \max\{f - m, 0\} \quad \text{και} \quad f^- = -\min\{f - m, 0\}.$$

Τότε, $f-m=f^+-f^-$ και από τον ορισμό του m έχουμε ότι

$$\mu(\{(f^+)^2\geqslant s\})\leqslant\frac{1}{2}\quad\text{και}\quad\mu(\{(f^-)^2\geqslant s\})\leqslant\frac{1}{2}$$

για κάθε $s>0$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (3.1.11) με $g=(f^+)^2$ και $g=(f^-)^2$ και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\begin{aligned}\chi_\mu\int_{\mathbb{R}^n}|f-m|^2d\mu &= \chi_\mu\int_{\mathbb{R}^n}(f^+)^2d\mu+\kappa\int_{\mathbb{R}^n}(f^-)^2d\mu\\ &= \chi_\mu\int_0^\infty\mu(\{(f^+)^2\geqslant s\})\,ds+\chi_\mu\int_0^\infty\mu(\{(f^-)^2\geqslant s\})\,ds\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla((f^+)^2)\|_2d\mu+\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla((f^-)^2)\|_2d\mu\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(\|\nabla((f^+)^2)\|_2+\|\nabla((f^-)^2)\|_2)\,d\mu.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|\nabla((f^+)^2)\|_2+\|\nabla((f^-)^2)\|_2\leqslant 2|f-m|\,\|\nabla f\|_2.$$

Από τα παραπάνω και την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε:

$$\chi_\mu\int_{\mathbb{R}^n}|f-m|^2d\mu\leqslant 2\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f-m|^2d\mu\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_2^2d\mu\right)^{1/2}.$$

Έπεται ότι

$$\frac{\chi_\mu^2}{4}\int_{\mathbb{R}^n}|f-m|^2d\mu\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_2^2d\mu. \tag{3.1.12}$$

Τέλος, αφού

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f-m|^2d\mu=\min_{\alpha\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}|f-\alpha|^2d\mu\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|f-m|^2d\mu$$

και η f ήταν τυχούσα, συμπεραίνουμε ότι $\vartheta_\mu^2\leqslant 4\chi_\mu^{-2}=4\psi_\mu^2$. □

Στην περίπτωση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας, ο Buser [28] (βλέπε επίσης και Ledoux [66]) έδειξε ότι ισχύει και αντίστροφη ανισότητα, με μια σταθερά που δεν εξαρτάται από τη διάσταση.

Θεώρημα 3.1.8 (Buser, Ledoux). *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\psi_\mu\leqslant C\vartheta_\mu,$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα δώσουμε μία απόδειξη που χρησιμοποιεί μεθόδους ημιομάδων (βλέπε για παράδειγμα τις σημειώσεις [69] του Ledoux για μια παρουσίαση της σχετικής θεωρίας). Υποθέτουμε ότι $d\mu=e^{-\varphi(x)}dx$, όπου φ είναι μια κυρτή C^2 συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και θεωρούμε την ημιομάδα τελεστών που έχει γεννήτορα τον τελεστή Laplace-Beltrami,

$$L_\mu(f)=\Delta f-\langle\nabla\varphi,\nabla f\rangle.$$

Ο τελεστής αυτός είναι καλά ορισμένος στον $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και είναι γνωστό ότι υπάρχει μοναδική ημιομάδα $(P_t)_{t\geqslant 0}$ από φραγμένους γραμμικούς τελεστές στον $L_2(\mu)$ που ικανοποιούν τις

$$L_\mu f = \lim_{t\to 0}\frac{P_t f - f}{t} \tag{3.1.13}$$

και

$$\frac{d}{dt}(P_t f) = L_\mu P_t f = P_t L_\mu f \tag{3.1.14}$$

για κάθε $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Παραθέτουμε τώρα κάποιες βασικές ιδιότητες που μπορούν εύκολα να αποδειχθούν.

$$P_0 f = f,$$

$$P_{t+s} f = P_t(P_s f),$$

$$[\, P_t(fg)\,]^2 \leqslant P_t(f^2)P_t(g^2)$$

για όλες τις συναρτήσεις $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $t, s \geqslant 0$. Επιπλέον, για κάθε $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $p \geqslant 1$ ισχύει:

$$|P_t(f)|^p \leqslant P_t(|f|^p). \tag{3.1.15}$$

Το μέτρο μ είναι χρονικά αντιστρέψιμο και αναλλοίωτο ως προς τη δράση της $(P_t)_{t\geqslant 0}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $t \geqslant 0$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,(P_t g)\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} g\,(P_t f)\,d\mu \tag{3.1.16}$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_t f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu \tag{3.1.17}$$

αντίστοιχα.

Ορίζουμε μια συμμετρική διγραμμική μορφή Γ μέσω της εξίσωσης

$$\Gamma(f, g) = \langle \nabla f, \nabla g\rangle$$

για όλες τις συναρτήσεις $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Επιπλέον, θέτουμε

$$\Gamma(f) = \Gamma(f, f) = \|\, \|\nabla f\|_2\, \|_{L_2}^2.$$

Από την (3.1.13) έχουμε

$$2\Gamma(f, g) = L_\mu(fg) - fL_\mu(g) - gL_\mu(f) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[P_t(fg) - P_t(f)P_t(g)]$$

για όλες τις $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Επίσης,

$$\Gamma(h(f), g) = h'(f)\Gamma(f, g)$$

και

$$\Gamma(fg,h) = f\Gamma(g,h) + g\Gamma(f,h)$$

για όλες $f,g,h \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Στη συνέχεια ορίζουμε μια διγραμμική μορφή Γ_2 «αντικαθιστώντας» το γινόμενο συναρτήσεων με τη δράση της Γ: Θέτουμε

$$2\Gamma_2(f,g) = L_\mu\Gamma(f,g) - \Gamma(f,L_\mu g) - \Gamma(g,L_\mu f)$$

για όλες τις $f,g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Είναι άμεσο ότι

$$\Gamma_2(f) := \Gamma_2(f,f) = \langle \mathrm{Hess}(\varphi)(\nabla f), \nabla f\rangle + \|\mathrm{Hess}(f)\|_{L_2}^2 \geqslant \|\mathrm{Hess}(f)\|_{L_2}^2,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι η φ είναι κυρτή, επομένως ο $\mathrm{Hess}(\varphi)$ είναι θετικά ημιορισμένος. Συμπεραίνουμε ότι $\Gamma_2(f) \geqslant 0$. Αυτή η ιδιότητα θα αποδειχθεί χρήσιμη στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.1.9 (Bakry-Ledoux). *Για κάθε $t \geqslant 0$ και για κάθε $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ισχύει η παρακάτω κατά σημείο ανισότητα:*

$$2t\|\nabla P_t(f)\|_2^2 \leqslant P_t(f^2) - (P_t(f))^2.$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.1.10. *Για κάθε $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $t \geqslant 0$ ισχύει ότι*

$$\Gamma P_t f \leqslant P_t \Gamma f.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F που ορίζεται από την

$$F(s) = P_s(\Gamma(P_{t-s}f)) \quad \text{στο} \quad [0,t]$$

είναι αύξουσα. Πράγματι, έχουμε ότι

$$F'(s) = P_s L_\mu \Gamma(P_{t-s}f) - 2P_s\Gamma(P_{t-s}f, L_\mu P_{t-s}f) = P_s(\Gamma_2(P_{t-s}(f)))$$

από τον ορισμό του Γ_2. Επειδή όμως $h = \Gamma_2(P_{t-s}(f)) \geqslant 0$, από την (3.1.15) με $p=1$ παίρνουμε ότι $F'(s) = P_s(h) \geqslant 0$. Αφού τώρα η F είναι αύξουσα, θα έχουμε ότι

$$F(0) \leqslant F(t)$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\Gamma P_t(f) \leqslant P_t\Gamma f$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.9. Γράφουμε

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 = \int_0^t \frac{d}{ds} P_s((P_{t-s}f)^2)\, ds.$$

Με διαφόριση και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της Γ βλέπουμε ότι

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 = 2\int_0^t P_s(\Gamma(P_{t-s}f))\, ds.$$

Όμως,

$$P_s(\Gamma(P_{t-s}f)) \geqslant \Gamma P_s(P_{t-s}f) = \Gamma P_t f,$$

οπότε

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 \geqslant 2\int_0^t \Gamma(P_t f)\, ds = 2t\Gamma(P_t f),$$

που είναι και το ζητούμενο. □

Από το Θεώρημα 3.1.9 βλέπουμε ότι για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \infty$,

(3.1.18)
$$\big\| \|\nabla P_t(f)\|_2 \big\|_{L_q(\mu)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2t}} \|f\|_{L_q(\mu)}.$$

Πράγματι, αρχικά ισχύει ότι

$$(P_t(f^2))^{q/2} \leqslant P_t((f^2)^{q/2}) = P_t(|f|^q).$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1.9 στη μορφή $\|\nabla P_t f\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2t}P_t(f^2)$, γράφουμε:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla P_t f\|_2^q \, d\mu\right)^{1/q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\|\nabla P_t f\|_2^2)^{q/2}\, d\mu\right)^{1/q}\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} [P_t(f^2)]^{q/2}\, d\mu\right)^{1/q}\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} P_t(|f|^q)\, d\mu\right)^{1/q}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q\, d\mu\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Πόρισμα 3.1.11 (Ledoux). *Για κάθε $t \geqslant 0$ ισχύει:*

$$\|f - P_t(f)\|_{L_1(\mu)} \leqslant \sqrt{2t}\big\| \|\nabla f\|_2 \big\|_{L_1(\mu)}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ με $\|g\|_\infty = 1$ και γράφουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(f - P_t f)\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} g\Big(\int_0^t (L_\mu P_s f) ds\Big)\, d\mu = \int_0^t \Big(-\int_{\mathbb{R}^n} (g L_\mu P_s f)\, d\mu\Big) ds.$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^n} g(L_\mu P_s f)\, d\mu &= -\int_{\mathbb{R}^n} g(P_s L_\mu f)\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} (P_s g)(L_\mu f)\, d\mu\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla P_s(g), \nabla f\rangle\, d\mu \leqslant \big\| \|\nabla P_s(g)\|_2 \big\|_{L_\infty(\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_0^t \Big(-\int_{\mathbb{R}^n} gL_\mu P_s f\, d\mu\Big) ds &\leqslant \Big(\int_0^t \big\| \|\nabla P_s(g)\|_2 \big\|_{L_\infty(\mu)} ds\Big) \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu \\ &\leqslant \Big(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2s}} \|g\|_\infty ds\Big) \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu \\ &= \sqrt{2t}\, \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu \\ &= \sqrt{2t} \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu,\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Πορίσματος 3.1.11 για λείες συναρτήσεις που προσεγγίζουν τη δείκτρια συνάρτηση ενός ανοικτού συνόλου με λείο σύνορο, μπορούμε να δώσουμε απόδειξη για το Θεώρημα 3.1.8. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 3.1.12. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε f με $\mathbb{E}_\mu(f) = 0$ και για κάθε $t \geqslant 0$ ισχύει:*

$$\|P_t f\|_{L_2(\mu)} \leqslant e^{-t/\vartheta_\mu^2} \|f\|_{L_2(\mu)}.$$

Απόδειξη. Με παραγώγιση της συνάρτησης $G(t) = e^{2\vartheta_\mu^{-2} t} \|P_t f\|_{L_2(\mu)}^2$ παίρνουμε

$$G'(t) = 2e^{2\vartheta_\mu^{-2} t} \left(\vartheta_\mu^{-2} \|P_t f\|_{L_2(\mu)}^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla P_t f\|_2^2 \, d\mu \right) \leqslant 0,$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι βασικές ιδιότητες της ημιομάδας $(P_t)_{t\geqslant 0}$ και το γεγονός ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά ϑ_μ. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.8. Θεωρούμε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με λείο σύνορο. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\mathbb{1}_{A,\varepsilon} = \max\{1 - \frac{d(x,A)}{\varepsilon}, 0\}$$

που προσεγγίζουν τη δείκτρια συνάρτηση του A. Εύκολα βλέπουμε ότι,

$$\frac{\mu(A_\varepsilon) - \mu(A)}{\varepsilon} \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \mathbb{1}_{A,\varepsilon}\|_2 \, d\mu.$$

Παίρνοντας $\liminf$ και στα δύο μέλη και χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 3.1.11 και τις ιδιότητες (3.1.15)–(3.1.17) των τελεστών P_t γράφουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{2t}\mu^+(A) &\geqslant \int_A (1 - P_t(\mathbb{1}_A))\, d\mu + \int_{A^c} P_t(\mathbb{1}_A)\, d\mu \\ &= 2\left(\mu(A) - \int_A P_t(\mathbb{1}_A)\, d\mu \right) = 2\left(\mu(A) - \|P_{t/2}(\mathbb{1}_A)\|_{L_2(\mu)}^2 \right)\end{aligned}$$

για κάθε $t \geqslant 0$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1.12 και το γεγονός ότι $P_t(a) = a$ για όλες τις σταθερές συναρτήσεις a, γράφουμε:

$$\begin{aligned}\|P_{t/2}(\mathbb{1}_A)\|_{L_2(\mu)}^2 &= [\mu(A)]^2 + \|P_{t/2}(\mathbb{1}_A - \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_A))\|_{L_2(\mu)}^2 \\ &\leqslant [\mu(A)]^2 + e^{-t/\vartheta_\mu^2}\|\mathbb{1}_A - \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_A)\|_{L_2(\mu)}^2.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\sqrt{2t}\mu^+(A) \geqslant 2\mu(A)(1-\mu(A))(1-e^{-t/\vartheta_\mu^2}) \geqslant (1-e^{-t/\vartheta_\mu^2})\min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}$$

για κάθε $t > 0$. Οπότε,

$$\chi_\mu \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sup_{t>0}\frac{1-e^{-t/\vartheta_\mu^2}}{\sqrt{t}},$$

και επιλέγοντας $t = \vartheta_\mu^2$ βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{\psi_\mu} = \chi_\mu \geqslant \frac{1-e^{-1}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\vartheta_\mu},$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

3.2 Η εικασία και τα πρώτα κάτω φράγματα

Ερχόμαστε τώρα στην εικασία των Kannan, Lovász and Simonovits. Στο [57] ορίστηκε η *ισοπεριμετρική σταθερά* ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ ως ο μεγαλύτερος αριθμός $\chi(K)$, για τον οποίο ισχύει το εξής: για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο A του K έχουμε

$$\mu_K^+(A) \geqslant \chi(K)\frac{\mathrm{vol}_n(A)\,\mathrm{vol}_n(K\setminus A)}{\mathrm{vol}_n(K)}, \tag{3.2.1}$$

όπου μ_K είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στο K. Το ενδιαφέρον γι' αυτή την παράμετρο προέκυψε από τη μελέτη πιθανοθεωρητικών αλγορίθμων για τον υπολογισμό του όγκου κυρτών σωμάτων. Υπήρχε μάλιστα σχετική βιβλιογραφία πριν από το [57], και τα ως τότε γνωστά φράγματα για τη σταθερά $\chi(K)$ ήταν της τάξης του $1/\mathrm{diam}(K)$. Παρατηρήστε ότι αντί για την (3.2.1) μπορεί κανείς να ζητήσει φράγματα για τη μεγαλύτερη σταθερά $\chi(K)$ για την οποία ισχύει

$$\mu_K^+(A) \geqslant \chi(K)\frac{\min\{\mathrm{vol}_n(A), \mathrm{vol}_n(K\setminus A)\}}{\mathrm{vol}_n(K)} \tag{3.2.2}$$

για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο A του K, επειδή οι ποσότητες στο δεξί μέλος είναι συγκρίσιμες. Επομένως, $\chi(K) \simeq \chi_{\mu_K}$.

Το κύριο αποτέλεσμα στο [57] είναι ένα κάτω φράγμα για την $\chi(K)$ συναρτήσει της ποσότητας

$$M_1(K) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)}\int_K \|x - \mathrm{bar}(K)\|_2\,dx.$$

Θεώρημα 3.2.1 (Kannan-Lovász-Simonovits). *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\chi(K) \geqslant \frac{\log 2}{M_1(K)}. \tag{3.2.3}$$

Παρατηρούμε ότι αν το K είναι ισοτροπικό τότε $M_1(K) \leqslant \sqrt{n}L_K$, άρα η (3.2.3) παίρνει τη μορφή

$$\chi(K) \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}L_K}, \tag{3.2.4}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η εικασία των Kannan, Lovász and Simonovits είναι ότι ισχύει ένα καλύτερο φράγμα. Στη γλώσσα των κεντραρισμένων κυρτών σωμάτων, η εικασία τους είναι ότι:

$$\chi(K) \simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha(K)}}, \tag{3.2.5}$$

όπου $\alpha(K)$ είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα $M_{ij} := \int_K x_i x_j dx$. Στο [57] αποδείχθηκε ότι

$$\chi(K) \leqslant \frac{10}{\sqrt{\alpha(K)}},$$

επομένως η ερώτηση αφορά το κάτω φράγμα. Αφού $M = L_K^2 I_n$ όταν το K είναι σε ισοτροπική θέση, έχουμε ότι, σε αυτή την περίπτωση, $\alpha(K) = L_K$. Επομένως, η εικασία *KLS* μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής:

Εικασία 3.2.2 (εικασία KLS για ισοτροπικά σώματα). *Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\chi(K) \simeq \frac{1}{L_K}.$$

Είναι γνωστό ότι αν το K είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε η ποσότητα $1/L_K$ είναι (προσεγγιστικά) ίση με τον $(n-1)$-διάστατο όγκο της τομής του K με ένα οποιοδήποτε υπερεπίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων. Με άλλα λόγια,

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}) \simeq 1/L_K$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Αφού ο όγκος $\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp})$ της τομής του K με τον $\vartheta^{\perp}$ είναι το περιεχόμενο κατά Minkowski της τομής του K με τον ημίχωρο $H_\vartheta^+ = \{x : \langle x, \vartheta\rangle \geqslant 0\}$ ή τον $H_\vartheta^- = \{x \in K : \langle x, \vartheta\rangle \leqslant 0\}$, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την εικασία KLS λέγοντας ότι όταν το K είναι ισοτροπικό τότε οι ημίχωροι είναι προσεγγιστικά οι λύσεις του ισοπεριμετρικού προβλήματος για το μέτρο μ_K.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη διαφορετική κανονικοποίηση που επιλέξαμε στον ορισμό των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την εικασία KLS σε ένα γενικότερο πλαίσιο ως εξής:

Εικασία 3.2.3 (εικασία KLS για ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα). *Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\chi_\mu \geqslant c \quad \textit{ή ισοδύναμα} \quad \psi_\mu \leqslant C,$$

όπου $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Θα δώσουμε την απόδειξη μιας εκτίμησης παρόμοιας με αυτήν του Θεωρήματος 3.2.1 που οφείλεται στον Bobkov (εμφανίζεται στο [11]) και δουλεύει για τυχόν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Στο εξής υποθέτουμε ότι το μ έχει πυκνότητα (ως προς το μέτρο Lebesgue) που είναι ίση με

$$d\mu(x) = e^{-\varphi(x)}dx,$$

όπου $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή συνάρτηση.

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\chi_\mu \geqslant \frac{c}{\|f\|_{L_2(\mu)}},$$

όπου $f(x) = \|x - \mathrm{bar}(\mu)\|_2$ και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το θεώρημα του Bobkov είναι συνέπεια της παρακάτω ανισότητας που συνδέει το περιεχόμενο κατά Minkowski ενός συνόλου A με την κατανομή της Ευκλείδειας νόρμας ως προς το μ.

Θεώρημα 3.2.5. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ και κάθε $r > 0$ έχουμε*

$$2r\mu^+(A) \geqslant \mu(A)\log\frac{1}{\mu(A)} + (1-\mu(A))\log\frac{1}{1-\mu(A)} + \log\mu(rB_2^n). \tag{3.2.6}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.5 θα χρειαστούμε το συναρτησιακό του ανάλογο. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ με $\int f\log(1+f) < \infty$, η εντροπία της f ως προς μ ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\log f d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu\,\log\left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu\right). \tag{3.2.7}$$

Παρατηρούμε ότι η εντροπία είναι μη αρνητική (από την ανισότητα Jensen) και ομογενής βαθμού 1.

Πρόταση 3.2.6. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ και κάθε $r > 0$ ισχύει ότι*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) + \mathrm{Ent}_\mu(1-f) + \log\mu(rB_2^n) \leqslant 2r\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_2\,d\mu.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι λεία, σταθερή έξω από ένα συμπαγές σύνολο και $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δοθέντων $t, s \in (0,1)$ με $t + s = 1$, θέτουμε

$$f_t(z) = \sup\left\{f\left(z + \frac{s}{t}(z-x)\right) : x \in rB_2^n\right\}.$$

Ορίζουμε επίσης τις συναρτήσεις $w, u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ως εξής:

$$\begin{aligned} u(x) \equiv u_t(x) &= (f(x))^{1/t}e^{-\varphi(x)} \\ v(y) &= \mathbb{1}_{rB_2^n}(y)e^{-\varphi(y)} \\ w(z) \equiv w_t(z) &= f_t(z)e^{-\varphi(z)}. \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις $w = w_t, u = u_t, v$ ικανοποιούν την

$$w(tx + sy) \geqslant (u(x))^t(v(y))^s,$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa-Leindler παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t\,d\mu \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t}\,d\mu\right)^t (\mu(rB_2^n))^s.$$

Από το θεώρημα Taylor βλέπουμε ότι, όταν το $s = 1 - t > 0$ είναι αρκούντως μικρό, τότε

$$f_t(z) = f(z) + (r\|\nabla f\|_2 + \langle \nabla f(z), z\rangle)s + O(s^2),$$

ομοιόμορφα ως προς $z \in \mathbb{R}^n$. Από την άλλη πλευρά,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu\right)^t = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu + s\,\mathrm{Ent}_\mu(f) + O(s^2).$$

Για να το δούμε αυτό, ορίζουμε $h(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu\right)^t = \exp\left(t \log \int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu\right)$ και γράφουμε:

$$h(t) = h(1) + h'(1)(t-1) + O((t-1)^2) = h(1) - h'(1)s + O(s^2),$$

όπου

$$h'(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu\right)^t \left(\log \int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} \log f d\mu}{t \int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu}\right),$$

που μας δίνει ότι $h'(1) = -\mathrm{Ent}_\mu(f)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω και παίρνοντας $s \to 0^+$ έχουμε:

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) + \log \mu(rB_2^n) \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu \leqslant r \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(x), x\rangle\, d\mu(x).$$

Δουλεύοντας όμοια για την $1 - f$ και προσθέτοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.5. Προσεγγίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση $\mathbb{1}_A$ του A με Lipschitz συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στο $[0,1]$, και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.2.6 γι' αυτές. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.4. Υποθέτουμε ότι το μ είναι κεντραρισμένο, άρα $f(x) = \|x\|_2$. Έστω A ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) = p \in (0,1)$. Από το Θεώρημα 3.2.5 γνωρίζουμε ότι για κάθε $r > 0$,

$$\mu^+(A) \geqslant \frac{1}{2r}\left[p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p} + \log \mu(rB_2^n)\right]. \tag{3.2.8}$$

Επιλέγουμε $r_0 > 0$ έτσι ώστε $\mu(r_0 B_2^n) = \frac{2}{3}$. Τότε, από το λήμμα του Borell έχουμε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu(tr_0 B_2^n) \leqslant \frac{1}{3} 2^{-\frac{t-1}{2}}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $-\log(1-x) \leqslant \frac{x}{1-x}$ για $0 < x < 1$, παίρνουμε

$$-\log \mu(tr_0 B_2^n) \leqslant -\log\left(1 - \frac{1}{3} 2^{-\frac{t-1}{2}}\right) \leqslant 2^{-\frac{t+1}{2}}.$$

Παίρνοντας $r = tr_0$ στην (3.2.8) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu^+(A) &\geqslant \frac{1}{2tr_0}\left[p \log(1/p) + (1-p)\log(1/(1-p)) + \log \mu(tr_0 B_2^n)\right] \\ &\geqslant \frac{1}{2tr_0}\left[p \log(1/p) + (1-p)\log(1/(1-p)) - 2^{-\frac{t+1}{2}}\right]. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < p \leqslant 1/2$. Εφαρμόζουμε την (3.2.9) με $t = 3\log(1/p) \geqslant 1$ και παρατηρούμε ότι

$$(1-p)\log(1/(1-p)) \geqslant 2^{-\frac{t+1}{2}}.$$

Για την απόδειξη της τελευταίας ανισότητας θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(p) = (1-p)\log\frac{1}{1-p} - 2^{-\frac{t+1}{2}} = (1-p)\log\frac{1}{1-p} - \frac{1}{\sqrt{2}}p^{3\log 2/2}$$

στο $[0,1/2]$. Έχουμε $g(0)=0$ και ελέγχουμε ότι η g είναι κοίλη. Επιπλέον, η ανισότητα $g(1/2) \geqslant 0$ είναι ισοδύναμη με την ανισότητα

$$\frac{\log 2}{2} \geqslant 2^{-\frac{3}{4\log 2}},$$

η οποία μπορεί να επαληθευθεί εύκολα. Έπεται ότι

$$g(p) \geqslant 0 \ \text{ για κάθε } p \in [0,1/2].$$

Τώρα, από την (3.2.9) έχουμε

$$\mu^+(A) \geqslant \frac{1}{2tr_0}p\log\frac{1}{p} = \frac{p}{6r_0} \geqslant \frac{1}{6r_0}\min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}. \tag{3.2.10}$$

Παρόμοιο επιχείρημα δουλεύει αν υποθέσουμε ότι $p \geqslant 1/2$, και οδηγεί στην ίδια εκτίμηση.

Μένει λοιπόν να εκτιμήσουμε το r_0. Υπενθυμίζουμε ότι $f(x) = \|x\|_2$. Αφού

$$\mu(\{x : \|x\|_2 \geqslant \sqrt{3}\|f\|_{L_2(\mu)}\}) \leqslant \frac{1}{3},$$

από την ανισότητα Markov, η επιλογή του r_0 μας δίνει

$$r_0 \leqslant \sqrt{3}\|f\|_{L_2(\mu)}.$$

Τότε η (3.2.10) δίνει

$$\mu^+(A) \geqslant \frac{1}{6\sqrt{3}\|f\|_{L_2(\mu)}}\min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}.$$

Με άλλα λόγια, $\chi_\mu \geqslant c/\|f\|_{L_2(\mu)}$, με $c = (6\sqrt{3})^{-1}$. □

Η συνάρτηση $f(x) = \|x - \mathrm{bar}(\mu)\|_2$ ικανοποιεί την $\|f\|_{L_2(\mu)} = \sqrt{n}$ στην ισοτροπική περίπτωση. Επομένως το αποτέλεσμα που περιγράψαμε παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 3.2.7. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\psi_\mu \leqslant c\sqrt{n},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Φασματικά μέτρα και ροή θερμότητας

4.1 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα και ροή θερμότητας

Έστω μ ένα ισοτροπικό, λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με λεία, θετική πυκνότητα. Για κάθε $s > 0$ συμβολίζουμε με γ_s την πυκνότητα ενός Gaussian τυχαίου διανύσματος με μέσο 0 και πίνακα συνδιακυμάνσεων $s \cdot I_n$ στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$\mu_s = \mu * \gamma_s$$

τη συνέλιξη των μ και γ_s, και θέτουμε $\mu_0 = \mu$. Ο τελεστής θερμότητας $P_s f = f * \gamma_s$ είναι συστολή από τον $L^2(\mu_s)$ στον $L^2(\mu)$. Ο συζυγής τελεστής $Q_s := P_s^* : L^2(\mu) \to L^2(\mu_s)$ ικανοποιεί την

$$Q_s\varphi = \frac{P_s(\varphi\varrho)}{P_s\varrho} \tag{4.1.1}$$

όπου ϱ είναι η λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα του μ. Ορίζουμε την $Q_s\varphi$ μέσω της (4.1.1) για κάθε $s > 0$ και $\varphi \in L^1(\mu)$. Ορίζουμε $P_0 = I_n$ και $Q_0 = I_n$.

Ο τελεστής Laplace που αντιστοιχεί στο μ είναι ο τελεστής $L = L_\mu$ που ορίζεται αρχικά για λείες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα από τον τύπο

$$Lu = \Delta u + \nabla(\log \varrho) \cdot \nabla u.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι αν $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι δύο λείες συναρτήσεις και η μία τουλάχιστον από αυτές έχει συμπαγή φορέα, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Lu)v \, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \cdot \nabla v) \, d\mu. \tag{4.1.2}$$

Μπορεί να δείξει κανείς ότι ο L είναι ουσιωδώς αυτο-συζυγής στον $L^2(\mu)$ και αρνητικά ημι-ορισμένος. Μπορούμε λοιπόν να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού του L και στο εξής συμβολίζουμε με L την κλειστότητα στον $L^2(\mu)$ του τελεστή που συμβολίζαμε προηγουμένως με L. Ο συμπαγής τελεστής L έχει μια απλή ιδιοτιμή στο 0, η οποία αντιστοιχεί στη σταθερή ιδιοσυνάρτηση. Από το φασματικό θεώρημα μπορούμε να γράψουμε

$$-L = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda \tag{4.1.3}$$

για κάποια αύξουσα, δεξιά συνεχή οικογένεια ορθογώνιων προβολών $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ που ικανοποιεί τις $\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda = I_n$ και $\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0$ με την έννοια της ισχυρής σύγκλισης τελεστών. Ειδικότερα, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$E_0 f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu. \tag{4.1.4}$$

Για κάθε $f \in L^2(\mu)$ συμβολίζουμε με ν_f το μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την

$$\nu_f((a,b]) = \langle E_b f, f\rangle - \langle E_a f, f\rangle$$

για κάθε $a < b$, δηλαδή το φασματικό μέτρο της f. Ειδικότερα,

$$\nu_f(\mathbb{R}) = \|f\|^2_{L^2(\mu)}.$$

Η σταθερά Poincaré ϑ_μ ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ είναι πάντα πεπερασμένη, λόγω της ισοδυναμίας $\vartheta_\mu \approx \psi_\mu$ και των αποτελεσμάτων των Bobkov και Kannan-Lovász-Simonovits που συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 3. Από τον ορισμό της σταθεράς Poincaré έχουμε ότι η σταθερά

$$\lambda_1 := \frac{1}{\vartheta_\mu^2}$$

είναι το φασματικό κενό του L, με την έννοια ότι $E_\lambda = E_0$ για $\lambda < \lambda_1$. Με άλλα λόγια, αν η $f \in L^2(\mu)$ ικανοποιεί την $\int f \, d\mu = 0$ τότε

$$\nu_f([0,\lambda_1)) = 0. \tag{4.1.5}$$

Η επόμενη πρόταση δίνει άνω φράγμα για τη φασματική μάζα δοθείσας συνάρτησης f κάτω από κάποιο επίπεδο συναρτήσει της $L^2(\mu_s)$-νόρμας της $Q_s f$.

Πρόταση 4.1.1. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας με λεία θετική πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $f \in L^2(\mu)$ τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = 0$ και $\|f\|_{L^2(\mu)} = 1$. Τότε, για κάθε $s, \lambda > 0$,*

$$\langle E_\lambda f, f\rangle_{L^2(\mu)} \leqslant C(\|Q_s f\|_{L^2(\mu_s)} + s\lambda),$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η απόδειξη που θα δώσουμε δίνει $C = 4$.

Για την απόδειξη, θεωρούμε ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ με μια λεία θετική πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε $H^1(\mu)$ για τον χώρο όλων των συναρτήσεων $f \in L^2(\mu)$ των οποίων οι ασθενείς παράγωγοι $\partial^1 f, \ldots, \partial^n f$ υπάρχουν και ανήκουν στον $L^2(\mu)$. Για $f \in H^1(\mu)$ ορίζουμε

$$\|f\|^2_{\dot{H}^1(\mu)} = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu$$

και

$$\|f\|_{H^1(\mu)} = \sqrt{\|f\|^2_{L^2(\mu)} + \|f\|^2_{\dot{H}^1(\mu)}}.$$

Θα χρειαστούμε ένα βασικό αποτέλεσμα προσέγγισης των Barthe και Klartag από το [9], το οποίο εξασφαλίζει ότι οι λείες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνές στον $H^1(\mu)$ ως προς την $H^1(\mu)$-νόρμα.

Πρόταση 4.1.2. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $H^1(\mu)$.*

Για την απόδειξη, έστω Ω το εσωτερικό του φορέα του μ. Το πρόβλημα είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές, συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in \mathrm{int}(\Omega)$. Επομένως, υπάρχει $r > 0$ τέτοιος ώστε $B(0,r) \subset \Omega$. Έστω $f \in H^1(\mu)$. Θεωρούμε μια συνάρτηση $\vartheta : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις $\vartheta(x) = 1$ αν $x \in B(0,1)$ και $\vartheta(x) = 0$ αν $x \notin B(0,2)$. Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε

$$f_{|n}(x) := \vartheta(x/n)f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Η $f_{|n}$ φέρεται από την $B(0,2n)$ και ανήκει στον $L^2(\mu)$ αφού $|f_{|n}| \leqslant |f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$\|f - f_{|n}\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2(1 - \vartheta(x/n))^2 d\mu(x) \longrightarrow 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Υπολογίζουμε επίσης ότι

$$\partial_i f_{|n} = \vartheta(\cdot/n)\partial_i f + \frac{1}{n}\partial_i\vartheta(\cdot/n)f,$$

άρα

$$\|\partial_i f - \partial_i f_{|n}\|_{L^2(\mu)} \leqslant \frac{1}{n}\|f\partial_i\vartheta(\cdot/n)\|_{L^2(\mu)} + \|\partial_i f - (\partial_i f)_{|n}\|_{L^2(\mu)},$$

που επίσης τείνει στο 0 καθώς το $n \to \infty$. Πράγματι, οι συναρτήσεις $\partial_i\vartheta$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες και αυτό δείχνει ότι ο πρώτος όρος του αθροίσματος στο δεξιό μέλος τείνει στο 0, ενώ για τον δεύτερο όρο μπορούμε να αιτιολογήσουμε τη σύγκλιση των $(\partial_i f)_{|n}$ στην $\partial_i f$ στον $L^2(\mu)$ όπως παραπάνω.

Λήμμα 4.1.3. *Ο χώρος $C_c^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^2(\mu)$.*

Απόδειξη. Το προηγούμενο επιχείρημα δείχνει ότι αρκεί να προσεγγίσουμε συναρτήσεις με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $h \in L^2(\mu)$ με φορέα που περιέχεται στην $B(0,R)$ για κάποιον $R > 0$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int (f\mathbb{1}_{(1-\varepsilon)\Omega} - f)^2 d\mu = 0.$$

Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ το σύνολο $\tilde{\Omega} := (1-\varepsilon)\Omega \cap B(0,R)$ είναι σχετικά συμπαγές στο Ω, άρα υπάρχει $c > 0$ ώστε $c \leqslant \varrho(x) \leqslant \frac{1}{c}$ για κάθε $x \in \tilde{\Omega}$. Συνεπώς, η $f\mathbb{1}_{(1-\varepsilon)\Omega} \in L^2(\mu)$ ανήκει επίσης στον $L^2(\tilde{\Omega}, dx)$ στον οποίο γνωρίζουμε ότι οι λείες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνές. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε ακολουθία συναρτήσεων $g_n \in C_c^\infty(\tilde{\Omega})$ η οποία συγκλίνει στην $f\mathbb{1}_{(1-\varepsilon)\Omega}$ στην $L^2(\tilde{\Omega}, dx)$-τοπολογία. Αφού $\varrho \leqslant \frac{1}{c}$ στο $\tilde{\Omega}$ και όλες οι συναρτήσεις έχουν φορέα στο $\tilde{\Omega}$, η σύγκλιση ισχύει επίσης στην $L^2(\mu)$-τοπολογία. □

Για $f \in L^2(\mu)$ όπως παραπάνω και για $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ορίζουμε τη συνάρτηση f_δ με

$$f_\delta(x) := f((1-\delta)x), \qquad x \in \frac{1}{1-\delta}\Omega \supset \Omega.$$

Οι συναρτήσεις f_δ ορίζονται και εκτός του Ω, προσεγγίζουν όμως καλά την f για μικρές τιμές του δ όπως δείχνει το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.1.4. *Έστω $f \in L^2(\mu)$ με φραγμένο φορέα. Τότε $f_\delta \in L^2(\mu)$ για κάθε $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $f_\delta \to f$ στην $L^2(\mu)$-τοπολογία όταν $\delta \to 0$.*

Αν επιπλέον $f \in H^1(\mu)$ τότε η σύγκλιση ισχύει στην $H^1(\mu)$-τοπολογία.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο φορέας της f περιέχεται στην $B(0,R)$. Έχουμε

$$\int_\Omega f((1-\delta)x)^2 \varrho(x)dx = (1-\delta)^{-n} \int_{(1-\delta)\Omega} f(y)^2 \varrho\left(\frac{y}{1-\delta}\right)dy.$$

Η ϱ είναι λογαριθμικά κοίλη, άρα $\varrho(y) \geqslant \varrho\left(\frac{y}{1-\delta}\right)^{1-\delta} \varrho(0)^\delta$, δηλαδή

$$\varrho\left(\frac{y}{1-\delta}\right) \leqslant \varrho(y)\left(\frac{\varrho(y)}{\varrho(0)}\right)^{\frac{\delta}{1-\delta}}.$$

Η ϱ είναι άνω φραγμένη στον συμπαγή φορέα της f, άρα υπάρχει σταθερά $C_R > 0$ τέτοια ώστε

$$f(y)^2 \varrho\left(\frac{y}{1-\delta}\right) \leqslant C_R f(y)^2 \varrho(y)$$

για κάθε y. Αυτό δείχνει ότι

$$\|f_\delta\|_{L^2(\mu)} \leqslant 2^n C_R \|f\|_{L^2(\mu)}.$$

Από το Λήμμα 4.1.3 για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $g \in C_c^\infty(\Omega)$ (με φορέα στην $B(0,R)$ όπως δείχνει η απόδειξη του λήμματος) ώστε $\|f-g\|_{L^2(\mu)} \leqslant \varepsilon$. Τότε,

$$\|f - f_\delta\|_{L^2(\mu)} \leqslant \|f-g\|_{L^2(\mu)} + \|g - g_\delta\|_{L^2(\mu)} + \|g_\delta - f_\delta\|_{L^2(\mu)}.$$

Όπως είδαμε παραπάνω,

$$\|g_\delta - f_\delta\|_{L^2(\mu)} \leqslant 2^n C_R \|g-f\|_{L^2(\mu)}.$$

Επιπλέον, αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής και οι g, g_δ μηδενίζονται έξω από την $B(0,2R)$,

$$\|g_\delta - g\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_{B(0,2R)} |g(x) - g((1-\delta)x)|^2 d\mu(x) \leqslant \mu(B(0,2R))\omega_g(2R\delta)^2,$$

όπου ω_g είναι το μέτρο συνέχειας της g. Συνδυάζοντας αυτές τις εκτιμήσεις βλέπουμε ότι

$$\limsup_{\delta\to 0^+} \|f - f_\delta\|_{L^2(\mu)} \leqslant (1+2^n C_R)\varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$, το οποίο αποδεικνύει τη σύγκλιση των f_δ στην f.

Τέλος, αν $f \in H^1(\mu)$, παρατηρούμε ότι

$$\|\partial_i f - \partial_i(f_\delta)\|_{L^2(\mu)} = \|\partial_i f - (1-\delta)(\partial_i f)_\delta\|_{L^2(\mu)} \leqslant \delta\|\partial_i f\|_{L^2(\mu)} + (1-\delta)\|\partial_i f - (\partial_i f)_\delta\|_{L^2(\mu)}$$

που τείνει στο 0 όταν $\delta \to 0$: αυτό προκύπτει αν εφαρμόσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για την $\partial_i f \in L^2(\mu)$. □

Απόδειξη της Πρότασης 4.1.2. Θεωρούμε $f \in H^1(\mu)$ που ο φορέας της περιέχεται στην $B(0,R)$ για κάποιον $R>0$. Για $\delta \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ θεωρούμε την f_δ όπως παραπάνω, η οποία ορίζεται στο $(1-\delta)^{-1}\Omega$. Θα εφαρμόσουμε κανονικοποίηση με συνέλιξη: Έστω $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ συνάρτηση της κλάσης C^∞ με $\eta(x)=0$ αν $\|x\|_2 \geqslant 1$ και $\int \eta(x)dx = 1$. Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ θεωρούμε τη συνάρτηση η^ε με

$$\eta^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

και τη συνέλιξη $f_\delta * \eta^\varepsilon$. Παρατηρήστε ότι $f_\delta \in H^1_{\mathrm{loc}}((1-\delta)^{-1}\Omega, dx)$. Πράγματι, για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset (1-\delta)^{-1}\Omega$,

$$\int_K f_\delta(x)^2 dx = (1-\delta)^{-n}\int_{(1-\delta)K} f(x)^2 dx \leqslant C_K \int_{(1-\delta)K} f(x)^2 \varrho(x)dx \leqslant C_K \int f^2 d\mu < +\infty,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ϱ παίρνει θετική ελάχιστη τιμή στο συμπαγές σύνολο $(1-\delta)K \subset \Omega$. Το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται για τις μερικές παραγώγους της f. Συνεπώς, από το [45, Θεώρημα 1, Παράγραφος 5.3] βλέπουμε ότι η $f_\delta * \eta^\varepsilon$ είναι καλά ορισμένη και άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο σύνολο

$$U_\varepsilon := \{x \in (1-\delta)^{-1}\Omega : \mathrm{dist}(x, ((1-\delta)^{-1}\Omega)^c) > \varepsilon\}.$$

Επιπλέον, όταν $\varepsilon \to 0$ έχουμε ότι $f_\delta * \eta^\varepsilon \to f_\delta$ στον $H^1_{\mathrm{loc}}((1-\delta)^{-1}\Omega, dx)$.

Η κλειστή θήκη του συνόλου $\Omega \cap B(0,2R+1)$ είναι ένα συμπαγές σύνολο που περιέχεται στο ανοικτό σύνολο $(1-\delta)^{-1}\Omega$, μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι, όταν $\varepsilon \to 0$, η $f_\delta * \eta^\varepsilon$ τείνει στην f_δ στον $H^1(\Omega \cap B(0,2R+1), dx)$. Αφού οι f_δ και $f_\delta * \eta^\varepsilon$ μηδενίζονται έξω από την $B(0,2R+1)$ και η λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση ϱ είναι άνω φραγμένη στην $B(0,2R+1)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|f_\delta * \eta^\varepsilon - f_\delta\|_{H^1(\mu)} = 0.$$

Για να προσεγγίσουμε την αρχική συνάρτηση f με ακρίβεια $\alpha > 0$, γράφουμε

$$\|f_\delta * \eta^\varepsilon - f\|_{H^1(\mu)} \leqslant \|f_\delta * \eta^\varepsilon - f_\delta\|_{H^1(\mu)} + \|f_\delta - f\|_{H^1(\mu)},$$

χρησιμοποιούμε το Λήμμα 4.1.4 για να βρούμε δ για το οποίο ο τελευταίος όρος είναι μικρότερος από $\alpha/2$ και τέλος αφήνουμε το $\varepsilon \to 0$.

Αφού $B(0,r) \subset \Omega$, το σύνολο U_ε περιέχει το $\left((1-\delta)^{-1} - \frac{\varepsilon}{r}\right)\Omega$ όταν $\varepsilon < r(1-\delta)^{-1}$. Επομένως, αν $\varepsilon < \delta^2(r(1-\delta))^{-1}$ τότε $(1+\delta)\Omega \subset U_\varepsilon$. Αυτό δείχνει ότι οι προσεγγίσεις που βρήκαμε για την f είναι C^∞ σε ένα σύνολο μεγαλύτερο από το Ω. Ταυτόχρονα, μηδενίζονται έξω από την $B(0,2R+1)$, άρα μπορούμε να τις τροποποιήσουμε έξω από το Ω ώστε να πάρουμε συναρτήσεις στον $C_c^\infty(\mathbb{R}^n$. □

Στο Κεφάλαιο 6 του [37] αποδεικνύεται ότι αφού ο L είναι η επέκταση Friedrich του τελεστή που αρχικά ορίζεται στις λείες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, για κάθε $f \in H^1(\mu)$ ισχύει ότι

$$\|f\|^2_{\dot{H}^1(\mu)} = \int_0^\infty \lambda\, d\nu_f(\lambda). \tag{4.1.6}$$

Επιπλέον, ο $H^1(\mu)$ είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων στον $L^2(\mu)$ για τις οποίες συγκλίνει το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (4.1.6). Το επόμενο λήμμα εκφράζει το γεγονός, που αποδείχθηκε στο [64] ότι η συνάρτηση $s \mapsto \log\|Q_s g\|^2_{L^2(\mu)}$ είναι κυρτή, συνεπώς βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο μηδέν. Συνέπεια του λήμματος είναι το ότι ο Q_s δεν μειώνει πολύ τη νόρμα μιας συνάρτησης με χαμηλή ενέργεια.

Λήμμα 4.1.5. *Έστω $g \in H^1(\mu)$ τέτοια ώστε $\int g^2\, d\mu = 1$. Θέτουμε $E = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2 d\mu$. Τότε, για κάθε $s > 0$,*

$$\|Q_s g\|^2_{L^2(\mu_s)} \geqslant \exp(-sE). \tag{4.1.7}$$

Απόδειξη. Αφού οι λείες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνές στον $H^1(\mu)$ από το Λήμμα 2.5 του [64] αρκεί να δείξουμε την (4.1.7) για μια λεία συνάρτηση g με συμπαγή φορέα. Σύμφωνα με την Παράγραφο 2 του [64], για κάθε $s > 0$, η s-παράγωγος της συνάρτησης $-\log \|Q_s g\|^2_{L^2(\mu)}$ είναι το πηλίκο Rayleigh

$$R_g(s) = \frac{\|Q_s g\|^2_{\dot{H}^1(\mu_s)}}{\|Q_s g\|^2_{L^2(\mu_s)}},$$

το οποίο είναι συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση του $s \in [0, \infty)$, με $E = R_g(0)$. Επομένως,

$$\log \|Q_s g\|^2_{L^2(\mu_s)} = -\int_0^s R_g(x)\, dx \geqslant -sR_g(0) = -sE,$$

το οποίο αποδεικνύει την (4.1.7). □

Το Λήμμα 4.1.5 μας δίνει ένα κάτω φράγμα για την ποσότητα $\langle Ag, g\rangle_{L^2(\mu)}$ με $A = P_s Q_s = Q_s^* Q_s$ όταν η g είναι μια συνάρτηση χαμηλής ενέργειας. Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι αν, επιπλέον, η g είναι ορθογώνια προβολή μιας συνάρτησης f τότε μπορούμε από αυτό το κάτω φράγμα να πάρουμε ένα κάτω φράγμα για την ποσότητα $\langle Af, f\rangle_{L^2(\mu)}$.

Λήμμα 4.1.6. *Έστω $A : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ ένας αυτοσυζυγής, θετικά ημιορισμένος τελεστής με νόρμα το πολύ ίση με 1. Έστω $f \in L^2(\mu)$ τέτοια ώστε $\|f\|_{L^2(\mu)} = 1$. Έστω $0 < \varepsilon, \beta \leqslant 1$ και $g \in L^2(\mu)$ τέτοια ώστε*

$$\langle Ag, g\rangle_{L^2(\mu)} \geqslant (1-\varepsilon)\beta \qquad \text{και} \qquad \beta = \|g\|^2_{L^2(\mu)} = \langle f, g\rangle_{L^2(\mu)}.$$

Τότε,

$$\langle Af, f\rangle_{L^2(\mu)} \geqslant \frac{\beta}{4} - \varepsilon.$$

Απόδειξη. Στην απόδειξη που ακολουθεί, η νόρμα και το εσωτερικό γινόμενο είναι αυτά του $L^2(\mu)$. Θεωρούμε τη φασματική ανάλυση

$$A = \int_0^1 \lambda\, dF_\lambda$$

για κάποια αύξουσα οικογένεια ορθογώνιων προβολών $\{F_\lambda : \lambda \in [0,1]\}$. Για κάθε $0 \leqslant r \leqslant 1$,

$$(1-\varepsilon)\beta \leqslant \langle Ag, g\rangle \leqslant r\|F_r g\|^2 + (\|g\|^2 - \|F_r g\|^2) = \beta + (r-1)\|F_r g\|^2.$$

Θέτοντας $r = 1 - 4\varepsilon/\beta$ παίρνουμε

$$\|F_r g\| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon\beta}{1-r}} = \frac{\beta}{2}.$$

Θεωρούμε την ορθογώνια προβολή $P = I_n - F_r$. Αφού $\|F_r f\| \leqslant \|f\| = 1$, έχουμε

$$\beta = \langle f, g\rangle = \langle F_r f, F_r g\rangle + \langle Pf, Pg\rangle \leqslant \|F_r g\| + \langle Pf, Pg\rangle \leqslant \frac{\beta}{2} + \langle Pf, Pg\rangle. \tag{4.1.8}$$

Αφού $\|g\|^2 = \beta$ έχουμε $\|Pg\| \leqslant \|g\| \leqslant \sqrt{\beta}$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την (4.1.8),

$$\|Pf\| \geqslant \frac{\langle Pf, Pg\rangle}{\|Pg\|} \geqslant \frac{\beta}{2\|Pg\|} \geqslant \frac{\sqrt{\beta}}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\langle Af, f\rangle \geqslant r\|Pf\|^2 \geqslant \frac{\beta r}{4} = \frac{\beta}{4} - \varepsilon,$$

που είναι ο ισχυρισμός του λήμματος. □

Απόδειξη της Πρότασης 4.1.1. Στην απόδειξη που ακολουθεί, η νόρμα και το εσωτερικό γινόμενο είναι αυτά του $L^2(\mu)$, εκτός αν δηλώνεται κάτι διαφορετικό. Σταθεροποιούμε $\lambda \geqslant 0$ και θέτουμε $g = E_\lambda f$. Τότε

$$\beta := \|g\|^2 = \langle f, g\rangle = \langle f, E_\lambda f\rangle = \nu_f([0,\lambda]).$$

Επίσης, έχουμε $E_0 g = E_0 f = 0$. Επιπλέον, αφού το ν_g έχει φορέα το $[0,\lambda]$,

$$E := \int_0^\infty x\, d\nu_g(x) \leqslant \lambda\, \nu_g([0,\lambda]) = \lambda\, \nu_f([0,\lambda]) = \lambda\beta. \tag{4.1.9}$$

Επομένως $g \in H^1(\mu)$ και

$$E = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla g\|_2^2 d\mu.$$

Από το Λήμμα 4.1.5 και την (4.1.9),

$$\langle P_s Q_s g, g\rangle = \|Q_s g\|^2_{L^2(\mu_s)} \geqslant \beta \exp(-sE/\beta) \geqslant \beta \exp(-s\lambda) \geqslant \beta(1-\varepsilon), \tag{4.1.10}$$

όπου $\varepsilon = s\lambda$. Ο τελεστής $Q_s : L^2(\mu) \to L^2(\mu_s)$ είναι συστολή και $Q_s(1) = 1$ σύμφωνα με το [64]. Επομένως ο τελεστής $A = P_s Q_s = Q_s^* Q_s$ είναι ένας θετικά ημιορισμένος, αυτοσυζυγής τελεστής νόρμας 1 στον $L^2(\mu)$. Από την (4.1.10) έχουμε

$$\langle Ag, g\rangle \geqslant (1-\varepsilon)\beta.$$

Τότε, το Λήμμα 4.1.6 συνεπάγεται ότι

$$\|Q_s f\|^2_{L^2(\mu_s)} = \langle Af, f\rangle \geqslant \frac{\beta}{4} - \varepsilon = \frac{1}{4}\langle E_\lambda f, f\rangle - s\lambda,$$

που είναι η ζητούμενη ανισότητα. □

Παρατήρηση 4.1.7. Θα μπορούσαμε να βελτιώσουμε την Πρόταση 4.1.1 αν γνωρίζαμε ότι για κάθε $s > 0$ ισχύει ότι

$$P_s Q_s \geqslant e^{sL}. \tag{4.1.11}$$

Δεν είναι μέχρι στιγμής γνωστό κάποιο αντιπαράδειγμα για την (4.1.11). Μάλιστα, η (4.1.11) ισχύει με μια ασθενή έννοια, αφού για κάθε συνεχή, αύξουσα συνάρτηση δοκιμής $\varphi : [0,1] \to [0,\infty)$ που μηδενίζεται σε μια περιοχή του 0,

$$\mathrm{tr}\varphi(P_s Q_s) \geqslant \mathrm{tr}\varphi(e^{sL}). \tag{4.1.12}$$

Η ανισότητα (4.1.12) προκύπτει αν συνδυάσουμε γνωστά αποτελέσματα της φασματικής θεωρίας με το γεγονός ότι, από το Λήμμα 4.1.5, για κάθε $f \in \mathrm{Dom}(L) \subseteq H^1(\mu)$ με $\|f\|_{L^2(\mu)} = 1$,

$$\langle P_s Q_s f, f\rangle_{L^2(\mu)} = \|Q_s f\|^2_{L^2(\mu_s)} \geqslant \exp\big(-s\|f\|^2_{H^1(\mu)}\big) = \exp\big(s\langle Lf, f\rangle_{L^2(\mu)}\big).$$

4.2 Ένα γενικό άνω φράγμα για τη διασπορά

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε το ακόλουθο γενικό άνω φράγμα για τη διασπορά μιας τοπικά Lipschitz συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ανήκει στον $L^2(\mu)$, με $\partial^i f \in L^2(\mu)$ και $\int \partial^i f \, d\mu = 0$ για κάθε i.

Πρόταση 4.2.1. *Έστω μ ένα πεπερασμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση στον $L^2(\mu)$ με $\partial^i f \in L^2(\mu)$ και $\int \partial^i f \, d\mu = 0$ για κάθε i. Τότε,*

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \sum_{i=1}^n \|\partial^i f\|^2_{H^{-1}(\mu)},$$

όπου $\mathrm{Var}_\mu(f) = \int (f-E)^2 d\mu$ και $E = \int f \, d\mu/\mu(\mathbb{R}^n)$.

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση του ομοιόμορφου μέτρου σε ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με C^∞-λείο σύνορο. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $\varphi : K \to \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση $C^\infty(K)$ αν έχει παραγώγους κάθε τάξης οι οποίες είναι φραγμένες στο εσωτερικό του K. Τότε, οι παράγωγοί της φ είναι καλά ορισμένες και C^∞-λείες στο $\mathrm{bd}(K)$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$ την κλάση όλων των $C^\infty(K)$-λείων συναρτήσεων $u : K \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την

$$\langle \nabla u(x), \nu(x)\rangle = 0$$

για κάθε $x \in \mathrm{bd}(K)$, όπου $\nu(x)$ είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σημείο $x \in \mathrm{bd}(K)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Stokes στη μορφή

$$\int_K \langle \nabla u, \nabla v\rangle = -\int_K (\Delta u) v + \int_{\mathrm{bd}(K)} \langle v\nabla u, \nu\rangle = -\int_K (\Delta u) v$$

για κάθε $v \in C^\infty(K)$ και $u \in \mathcal{D}$.

Για κάθε συνάρτηση $u \in C^\infty(K)$ ορίζουμε

$$\|u\|_{H^{-1}(K)} = \sup\left\{\int_K \varphi u : \varphi \in C^\infty(K), \ \int_K \|\nabla \varphi\|_2^2 \leqslant 1\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\|u\|_{H^{-1}(K)} = \infty$ αν $\int_K u \neq 0$ (αν $\int_K \|\nabla\varphi\|_2^2 \leqslant 1$ τότε το ίδιο ισχύει και για την $\varphi_1 = \varphi + \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$). Θα γράφουμε $\partial^i f$ για την μερική παράγωγο της f ως προς την i συντεταγμένη. Τέλος, για κάθε $f \in L^2(K)$ θέτουμε

$$\mathrm{Var}_K(f) = \int_K (f(x) - \mathbb{E}_{\mu_K}(f))^2 dx,$$

όπου $\mathbb{E}_{\mu_K}(f) = \int_K f$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho : K \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $\rho(x) = -\mathrm{dist}(x, \mathrm{bd}(K))$. Αυτή είναι C^∞-λεία, κυρτή και οι παράγωγοί της κάθε τάξης είναι φραγμένες σε μια περιοχή του $\mathrm{bd}(K)$. Επιπλέον $\rho(x) \leqslant 0$ αν $x \in K$ και

$$\rho(x) = 0 \qquad \text{και} \qquad \|\nabla\rho(x)\|_2 = 1 \quad \text{αν } x \in \mathrm{bd}(K).$$

Παρατηρούμε ότι $\nabla\rho(x) = \nu(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{bd}(K)$.

Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε το ακόλουθο λήμμα (βλέπε Lichnerowicz, [76], Hormander [53] και Kadlec [56] για παρεμφερή αποτελέσματα).

Λήμμα 4.2.2. *Θεωρούμε συνάρτηση $u \in \mathcal{D}$ και θέτουμε $f = -\Delta u$. Τότε,*

$$\int_K f^2 = \sum_{i=1}^n \int_K \|\nabla \partial^i u\|_2^2 + \int_{\mathrm{bd}(K)} \langle (\mathrm{Hess}\,\rho)\,(\nabla u)\,, \nabla u\rangle.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $\mathcal{D}$ έχουμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto \langle \nabla u(x), \nabla \rho(x)\rangle$ μηδενίζεται στο σύνορο του K. Επιπλέον, το διάνυσμα ∇u είναι εφαπτόμενο στο σύνορο του K, και άρα η παράγωγος της $x \mapsto \langle \nabla u(x), \nabla \rho(x)\rangle$ στη διεύθυνση του ∇u μηδενίζεται στο $\mathrm{bd}(K)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\langle \nabla u(x), \nabla\left(\langle \nabla u(x), \nabla \rho(x)\rangle\right)\rangle = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathrm{bd}(K).$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία ισότητα στη μορφή

$$\langle (\mathrm{Hess}\, u)(\nabla \rho), \nabla u\rangle + \langle (\mathrm{Hess}\,\rho)(\nabla u), \nabla u\rangle = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathrm{bd}(K). \tag{4.2.1}$$

Από το θεώρημα Stokes παίρνουμε

$$\int_K f^2 = \int_K (\Delta u)^2 = -\int_K \langle \nabla(\Delta u), \nabla u\rangle + \int_{\mathrm{bd}(K)} \langle (\Delta u \nabla u), \nabla \rho\rangle.$$

Το ολοκλήρωμα στο σύνορο του K είναι μηδέν, άρα με μια ακόμη εφαρμογή του θεωρήματος Stokes παίρνουμε

$$\int_K f^2 = -\sum_{i=1}^n \int_K \partial^i u \Delta(\partial^i u) = \sum_{i=1}^n \int_K \|\nabla \partial^i u\|_2^2 - \int_{\mathrm{bd}(K)} \sum_{i=1}^n \langle \partial^i u \nabla \partial^i u, \nabla \rho\rangle.$$

Όμως ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^n \langle (\partial^i u \nabla \partial^i u), \nabla \rho\rangle = \langle (\mathrm{Hess}\, u)(\nabla \rho), \nabla u\rangle.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την (4.2.1) παίρνουμε

$$\int_K f^2 = \sum_{i=1}^n \int_K \|\nabla \partial^i u\|_2^2 + \int_{\mathrm{bd}(K)} \langle (\mathrm{Hess}\,\rho)\,(\nabla u)\,, \nabla u\rangle,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.2.3. *Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με C^∞ λείο σύνορο. Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι μια $C^\infty(K)$-λεία συνάρτηση τότε*

$$\mathrm{Var}_K(f) \leqslant \sum_{i=1}^n \|\partial^i f\|_{H^{-1}(K)}^2.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int_K f = 0$. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $u \in \mathcal{D}$ (βλέπε για παράδειγμα [47, Κεφάλαιο 7]) τέτοια ώστε

$$f = -\Delta u.$$

Από το θεώρημα Stokes παίρνουμε

$$\int_K f^2 = -\int_K f\Delta u = \int_K \langle \nabla f, \nabla u\rangle - \int_{\mathrm{bd}(K)} \langle f\nabla u, \nu\rangle = \sum_{i=1}^n \int_K \partial^i(f)\, \partial^i u,$$

όπου το ολοκλήρωμα στο σύνορο μηδενίζεται επειδή $u \in \mathcal{D}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της $H^{-1}(K)$-νόρμας και την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_K f^2 = \sum_{i=1}^n \int_K \partial^i(f)\, \partial^i u &\leqslant \sum_{i=1}^n \|\partial^i f\|_{H^{-1}(K)} \cdot \sqrt{\int_K \|\nabla \partial^i u\|_2^2} \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\partial^i f\|_{H^{-1}(K)}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_K \|\nabla \partial^i u\|_2^2}.\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 4.2.2 έχουμε

$$\sum_{i=1}^n \int_K \|\nabla \partial^i u\|_2^2 \leqslant \int_K f^2, \tag{4.2.2}$$

επειδή η Εσσιανή μιας κυρτής συνάρτησης ρ είναι είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας. Από τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε τον ισχυρισμό του λήμματος. □

Θα επεκτείνουμε το Λήμμα 4.2.3 από τα ομοιόμορφα μέτρα σε C^∞-λεία κυρτά σώματα στα πεπερασμένα λογαριθμικά κοίλα μέτρα.

Απόδειξη της Πρότασης 4.2.1. Δίνουμε πρώτα την απόδειξη με την πρόσθετη υπόθεση ότι το μέτρο μ έχει C^∞-λεία πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$, η οποία είναι παντού θετική. Δηλαδή, $d\mu(x) = \exp(-\psi(x))dx$, όπου $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια λεία και κυρτή συνάρτηση. Προσθέτοντας κατάλληλη σταθερά στην f μπορούμε επίσης να υποθέσοουμε ότι $\int f\, d\mu = 0$. Θεωρούμε τον τελεστή Laplace

$$Lu = \Delta u - \langle \nabla u, \nabla \psi\rangle = \sum_{i=1}^n (\partial^{ii} u - \partial^i u \cdot \partial^i \psi)$$

ορισμένο στις C^2-λείες $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα. Για τον τελεστή L ισχύει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot Lv\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u, \nabla v\rangle\, d\mu,$$

αν υποθέσουμε ότι η $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι C^2-λεία με συμπαγή φορέα και η u είναι τοπικά Lipschitz. Από τον τύπο του Bohner, για κάθε C^2-λεία συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα ισχύει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Lu)^2 d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \partial^i u\|_2^2 d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \langle (D^2\psi)\nabla u, \nabla u\rangle d\mu \geqslant \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \partial^i u\|_2^2 d\mu.$$

Αποδεικνύεται επίσης στο [35] ότι υπάρχει μια ακολουθία από C^2-λείες συναρτήσεις $u_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα, τέτοια ώστε

$$Lu_k \longrightarrow f$$

στον $L^2(\mu)$. Τώρα, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot Lu_k \, d\mu &= -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial^i f \cdot \partial^i u_k \, d\mu \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \partial^i u_k\|_2^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|\partial^i f\|_{H^{-1}(\mu)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \|Lu_k\|_{L^2(\mu)} \left(\sum_{i=1}^n \|\partial^i f\|_{H^{-1}(\mu)}^2 \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $k \to \infty$, από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε το ζητούμενο. □

Αποδεικνύουμε τώρα ότι αρκεί να αποδείξουμε την Πρόταση 4.2.1 με την πρόσθετη υπόθεση ότι το μέτρο μ έχει C^∞-λεία πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$, η οποία είναι παντού θετική. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο φορέας του μ δεν περιέχεται σε κάποιον αφινικό υπόχωρο χαμηλότερης διάστασης, αλλιώς μπορούμε απλώς να δουλέψουμε σε αυτόν τον υπόχωρο. Θέλουμε να δείξουμε την ανισότητα

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \sum_{i=1}^n \|\partial^i f\|_{H^{-1}(\mu)}^2 \tag{4.2.3}$$

για ένα γενικό πεπερασμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ και μια γενική συνάρτηση $f \in L^2(\mu)$ που οι ασθενείς της παράγωγοι $\partial^1 f, \ldots, \partial^n f$ ανήκουν στον $L^2(\mu)$ και ικανοποιούν την $\int \partial^i f \, d\mu = 0$.

Αφού ο φορέας του μ δεν περιέχεται σε κάποιον αφφινικό υπόχωρο χαμηλότερης διάστασης, έχουμε $d\mu(x) = \varrho(x)dx$, όπου ϱ είναι μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με φορέα που το εσωτερικό του, Ω, είναι κυρτό και μη κενό, αν υποθέσουμε επίσης ότι το μ δεν είναι το μηδενικό μέτρο. Η συνάρτηση ϱ είναι θετική στο Ω και μηδενίζεται έξω από το Ω. Συμβολίζουμε με $C_c^\infty(\Omega)$ τον χώρι των λείων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο Ω. Ο χώρος $H^1(\Omega, \mu) = H^1(\mu)$ είναι ο χώρος (των κλάσεων ισοδυναμίας) των συναρτήσεων $f \in L^2(\mu)$ για τις οποίες υπάρχουν συναρτήσεις $g_i \in L^2(\mu)$ τέτοιες ώστε, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$ και κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \partial_i \varphi(x) f(x) dx = -\int_\Omega \varphi(x) g_i(x) dx.$$

Οι συναρτήσεις g_i είναι οι ασθενείς μερικές παράγωγοι της f (την οποία βλέπουμε ως συνάρτηση στο Ω). Η ασθενής κλίση $(g_i)_i$ συμβολίζεται με ∇f και ορίζουμε

$$\|f\|_{H^1(\mu)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

Από την Πρόταση 4.1.2 η οικογένεια των λείων, φραγμένων Lipschitz συναρτήσεων $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι πυκνή στον $H^1(\mu)$.

Ισχυριζόμαστε ότι τόσο το αριστερό όσο και το δεξιό μέλος της (4.2.3) εξαρτώνται με συνεχή τρόπο από τη συνάρτηση f ως προς την $H^1(\mu)$-τοπολογία, αν συνεχίσουμε να διατηρούμε τον περιορισμό $\int \partial^i f \, d\mu = 0$ για κάθε i. Πράγματι, η $H^1(\mu)$-νόρμα είναι ισχυρότερη από την $L^2(\mu)$-νόρμα, άρα η $\mathrm{Var}_\mu(f)$ είναι συνεχής συνάρτηση της f ως προς την $H^1(\mu)$-νόρμα. Για το δεξιό μέλος της (4.2.3) παρατηρούμε ότι, από την

$$\|f\|^2_{H^{-1}(\mu)} \leqslant \vartheta_\mu^2 \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu, \tag{4.2.4}$$

έχουμε

$$\|\partial^i f - \partial^i g\|_{H^{-1}(\mu)} \leqslant \vartheta_\mu \|\partial^i f - \partial^i g\|_{L^2(\mu)} \leqslant \vartheta_\mu \|f - g\|_{H^1(\mu)}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την (4.2.3) κάνοντας την πρόσθετη υπόθεση ότι η f είναι λεία συνάρτηση, φραγμένη στον $\mathbb{R}^n$ αυτή και οι μερικές της παράγωγοι πρώτης τάξης, τέτοια ώστε $\int f\, d\mu = 0$ και $\int \partial^i f\, d\mu = 0$ για $i = 1, \ldots, n$. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.2.4. *Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα ϱ. Τότε, υπάρχει μια ακολουθία συναρτήσεων $(\varrho_k)_{k\geqslant 1}$ με τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για κάθε $k \geqslant 1$ η συνάρτηση $\varrho_k : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ είναι μια λεία, παντού θετική, ολοκληρώσιμη λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση και $\varrho \leqslant \varrho_k$ κατά σημείο.*

(ii) *Αν $S \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι το εσωτερικό του φορέα του μ, το οποίο είναι ανοικτό κυρτό σύνολο με πλήρες μ-μέτρο, τότε $\varrho_k \longrightarrow \varrho$ τοπικά ομοιόμορφα στο S.*

(iii) *Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με πολυωνυμικό το πολύ ρυθμό αύξησης στο άπειρο,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\varrho_k \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\varrho.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $\psi(x) = -\log \varrho(x)$ για $x \in S$ και $\psi(x) = +\infty$ για $x \notin S$. Η συνάρτηση ψ είναι κυρτή στον $\mathbb{R}^n$ και αφού η $e^{-\psi}$ είναι ολοκληρώσιμη βλέπουμε ότι υπάρχουν $A \in (0,1)$ και $B > 0$ ώστε

$$\psi(x) \geqslant A\|x\|_2 - B \tag{4.2.5}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Για $k \geqslant 1$ ορίζουμε

$$\tilde{\psi}_k(x) = \inf_{y\in S}[\psi(y) + k\|x-y\|_2] \tag{4.2.6}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση $\tilde{\psi}_k$ είναι Lipschitz στον $\mathbb{R}^n$, αφού είναι το infimum μιας οικογένειας k-Lipschitz συναρτήσεων. Είναι επίσης κυρτή, αφού είναι η ελαχιστική συνέλιξη δύο κυρτών συναρτήσεων. Προφανώς, $\tilde{\psi}_k \leqslant \psi$. Από τις (4.2.5) και (4.2.6), για κάθε $k \geqslant 1$ και $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{\psi}_k(x) \geqslant \inf_{y\in S}[A\|y\|_2 + k\|x-y\|_2 - B] \geqslant \inf_{y\in S}[A\|y\|_2 + A\|x-y\|_2 - B] \geqslant A\|x\|_2 - B. \tag{4.2.7}$$

Σταθεροποιούμε μια λεία, άρτια πυκνότητα πιθανότητας $\vartheta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με φορέα μέσα στη μοναδιαία μπάλα $B(0,1)$. Ορίζουμε $\vartheta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\vartheta(x/\varepsilon)$ και

$$\psi_k = \tilde{\psi}_k * \vartheta_{1/k^2} - \frac{1}{k}.$$

Η συνάρτηση ψ_k είναι πάλι k-Lipschitz και κυρτή, αφού η συνέλιξη διατηρεί αυτές τις ιδιότητες. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\tilde{\psi}_k - \frac{1}{k} \leqslant \psi_k \leqslant \tilde{\psi}_k \leqslant \psi \tag{4.2.8}$$

κατά σημείο στον $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, αφού η $\tilde{\psi}_k$ είναι κυρτή και η ϑ_{1/k^2} είναι μια άρτια πυκνότητα πιθανότητας, από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\psi_k + \frac{1}{k} = \tilde{\psi}_k * \vartheta_{1/k^2} \geqslant \tilde{\psi}_k,$$

και έτσι παίρνουμε την αριστερή ανισότητα στην (4.2.8). Από την άλλη πλευρά, αφού η $\tilde{\psi}_k$ είναι k-Lipschitz και η ϑ_{1/k^2} έχει φορέα μέσα στη μπάλα $B(0,1/k^2)$, βλέπουμε ότι

$$\psi_k + \frac{1}{k} = \tilde{\psi}_k * \vartheta_{1/k^2} \leqslant \tilde{\psi}_k + \frac{k}{k^2} = \tilde{\psi}_k + \frac{1}{k},$$

το οποίο μας δίνει τη μεσαία ανισότητα στην (4.2.8). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της (4.2.8), αφού έχουμε ήδη ελέγξει τη δεξιά ανισότητα στην (4.2.8).

Θέτουμε τώρα $\varrho_k = \exp(-\psi_k)$. Αφού η ψ_k είναι λεία, κυρτή Lipschitz συνάρτηση, η συνάρτηση ϱ_k είναι λεία, παντού θετική και λογαριθμικά κοίλη. Λόγω της (4.2.8), ικανοποιεί την $\varrho_k \geqslant \varrho$. Από τις (4.2.7) και (4.2.8) συμπεραίνουμε ότι η ϱ_k είναι ολοκληρώσιμη, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του (i).

Η συνάρτηση ψ είναι τοπικά Lipschitz στο S αφού είναι κυρτή. Έπεται λοιπόν από την (4.2.6) ότι $\tilde{\psi}_k \longrightarrow \psi$ κατά σημείο στο S και η σύγκλιση είναι τοπικά ομοιόμορφη στο S. Αφού $\tilde{\psi}_k \longrightarrow \psi$ τοπικά ομοιόμορφα στο S, από την (4.2.8) έχουμε ότι $\psi_k \longrightarrow \psi$ επίσης τοπικά ομοιόμορφα στο S. Συνεπώς, $\varrho_k \longrightarrow \varrho$ τοπικά ομοιόμορφα στο S, δηλαδή ισχύει το (ii). Μένει να δείξουμε το (iii). Από τις (4.2.5), (4.2.7) και (4.2.8),

$$\varrho_k(x) \leqslant e^{B+1-A\|x\|_2}$$

για κάθε $k \geqslant 1$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Επομένως, η συνάρτηση $|\varphi(x)|e^{B+1-A\|x\|_2}$ είναι ολοκληρώσιμη και φράσσει τις συναρτήσεις $(\varphi\varrho_k)_{k\geqslant 1}$ στον $\mathbb{R}^n$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, για να δείξουμε το (iii) αρκεί να ελέγξουμε ότι $\varrho_k \longrightarrow \varrho$ σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$. Γνωρίζουμε ήδη ότι $\varrho_k \longrightarrow \varrho$ στο S. Αφού το S είναι κυρτό, το σύνορό του έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue. Έτσι, αρκεί να σταθεροποιήσουμε ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ το οποίο δεν ανήκει στην κλειστή θήκη του S και να αποδείξουμε ότι

$$\varrho_k(x) \longrightarrow 0. \tag{4.2.9}$$

Υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x,\varepsilon) \cap S = \varnothing$. Από τις (4.2.5) και (4.2.6) έχουμε $\tilde{\psi}_k(x) \geqslant k\varepsilon - B$ για κάθε k. Από την (4.2.8) έπεται ότι $\psi_k(x) \geqslant k\varepsilon - B - 1/k \longrightarrow \infty$ όταν $k \to \infty$. Αυτό συνεπάγεται την (4.2.9) και έτσι η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης. □

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.2.4 για το μ και συμβολίζουμε με μ_k το μέτρο με πυκνότητα ϱ_k. Έστω $\vartheta_k \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha_k \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $\tilde{f}_k(x) = f(x) + \langle \vartheta_k, x\rangle + \alpha_k$ να ικανοποιεί τις

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_k d\mu_k = 0 \qquad \text{και} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \partial^i \tilde{f}_k d\mu_k = 0, \;\; i = 1, \dots, n.$$

Από το συμπέρασμα (iii) του λήμματος βλέπουμε ότι $\vartheta_k \to 0$ και $\alpha_k \to 0$ όταν $k \to \infty$. Έπεται επίσης ότι

$$\mathrm{Var}_{\mu_k}(\tilde{f}_k) \longrightarrow \mathrm{Var}_{\mu}(f).$$

Για να ολοκληρώσουμε λοιπόν την αναγωγή της απόδειξης της (4.2.3) αρκεί να δείξουμε ότι για $i =$

$1,\dots,n$ και $g=\partial^i f$,

$$\limsup_{k\to\infty}\|g-E_k(g)\|_{H^{-1}(\mu_k)}\leqslant\|g-E(g)\|_{H^{-1}(\mu)}, \tag{4.2.10}$$

όπου $E_k(g)=\int_{\mathbb{R}^n} g\,d\mu_k/\mu_k(\mathbb{R}^n)$ και $E(g)=\int_{\mathbb{R}^n} g\,d\mu/\mu(\mathbb{R}^n)$. Θα δείξουμε ότι η (4.2.10) ισχύει για κάθε φραγμένη συνάρτηση $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Κανονικοποιώντας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sup|g|\leqslant 1$. Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\limsup_{k\to\infty}\|g-E_k(g)\|_{H^{-1}(\mu_k)}\leqslant\|g-E(g)\|_{H^{-1}(\mu)}+2\varepsilon\cdot\left[\vartheta_\mu+\sup_k\vartheta_{\mu_k}\right]. \tag{4.2.11}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\sup_k\vartheta_{\mu_k}<\infty$. Έστω $T\subset S$ ένα συμπαγές κυρτό σύνολο τέτοιο ώστε

$$\mu(\mathbb{R}^n\setminus T)<\varepsilon^2/4.$$

Τότε υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε $\mu_k(\mathbb{R}^n\setminus T)<\varepsilon^2/4$ για κάθε $k\geqslant k_0$. Ορίζουμε $h=g\cdot\mathbb{1}_T$ όπου $\mathbb{1}_T$ είναι η δείκτρια συνάρτηση του T. Τότε, για κάθε $k>k_0$,

$$\|g-E(g)-h+E(h)\|_{L^2(\mu)}<\varepsilon\qquad\text{και}\qquad\|g-E_k(g)-h+E_k(h)\|_{L^2(\mu_k)}<\varepsilon.$$

Από την (4.2.4) βλέπουμε ότι για την απόδειξη της (4.2.11) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\limsup_{k\to\infty}\|h-E_k(h)\|_{H^{-1}(\mu_k)}\leqslant\|h-E(h)\|_{H^{-1}(\mu)}. \tag{4.2.12}$$

Όμως, η h έχει φορέα το συμπαγές σύνολο $T\subset S$, όπου S είναι ένα ανοικτό σύνολο στο οποίο η ϱ είναι θετική. Η σύγκλιση των ϱ_k στην ϱ είναι ομοιόμορφη στο T. Για κάθε $k\geqslant 1$ έστω $u_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία τοπικά Lipschitz συνάρτηση στον $L^2(\mu_k)$ με $\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla u_k\|_2^2d\mu_k\leqslant 1$ και $\int_{\mathbb{R}^n}u_kd\mu_k=0$ και

$$\|h-E_k(h)\|_{H^{-1}(\mu_k)}\leqslant\frac{1}{k}+\int_{\mathbb{R}^n}hu_kd\mu_k.$$

Αφού $\varrho_k\geqslant\varrho$, αναγκαστικά έχουμε $\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla u_k\|_2^2d\mu\leqslant 1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\|h-E(h)\|_{H^{-1}(\mu)}&\geqslant\int_{\mathbb{R}^n}hu_kd\mu=\int_T hu_kd\mu_k+\int_T hu_k(\varrho-\varrho_k)\\&\geqslant\|h-E_k(h)\|_{H^{-1}(\mu_k)}-\frac{1}{k}-\frac{\sup_T|\varrho_k-\varrho|}{\inf_T\varrho_k}\cdot\int_T|u_k|d\mu_k.\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Παρατηρούμε ότι $\sup_T|\varrho_k-\varrho|\longrightarrow 0$, ενώ το $\inf_T\varrho_k$ μένει φραγμένο μακριά από το 0 για αρκετά μεγάλο k. Επιπλέον,

$$\left(\int_T|u_k|d\mu_k\right)^2\leqslant\mu_k(\mathbb{R}^n)\int_{\mathbb{R}^n}u_k^2d\mu_k\leqslant\sup_k\mu_k(\mathbb{R}^n)\,\vartheta_{\mu_k}^2<\infty.$$

Αφήνοντας το $k\to\infty$, από την (4.2.13) παίρνουμε την (4.2.12).

4.3 Αρχική ιδέα της απόδειξης του βασικού θεωρήματος

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε το εξής.

Θεώρημα 4.3.1. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $C, \alpha > 0$ ώστε*

$$\psi_n \leqslant C(\log n)^{\alpha}$$

για κάθε $n \geqslant 2$.

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε την αρχική ιδέα της απόδειξης. Έστω μ ένα ισοτροπικό, λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με λεία θετική πυκνότητα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι

$$\sigma_\mu > \frac{\sigma_n}{2}. \tag{4.3.1}$$

Δηλαδή, υποθέτουμε ότι η παράμετρος λεπτού φλοιού του μ είναι σχεδόν μέγιστη. Η απαίτηση να ισχύει η (4.3.1) είναι συνεπής με την υπόθεση ότι το μ έχει λεία θετική πυκνότητα. Πράγματι, παίρνοντας τη συνέλιξη του μ με ένα πολύ μικρό μέτρο Gauss και κανονικοποιώντας έτσι ώστε να προκύψει πάλι ισοτροπικό μέτρο, παίρνουμε μια λεία θετική πυκνότητα ενώ ταυτόχρονα η μεταβολή της παραμέτρου σ_μ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή.

Υπενθυμίζουμε ότι, για κάθε $f \in L^2(\mu)$ με $\int f\,d\mu = 0$,

$$\|f\|_{H^{-1}(\mu)} = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} fu\,d\mu\ ;\ u \in L^2(\mu)\ \text{ τοπικά Lipschitz με }\ \int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla u\|_2^2 d\mu \leqslant 1\right\}. \tag{4.3.2}$$

και για κάθε $f \in L^2(\mu)$ συμβολίζουμε με ν_f το φασματικό μέτρο της f ως προς τον τελεστή Laplace που αντιστοιχεί στο μ. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\lambda_1 = \frac{1}{\vartheta_\mu^2}$$

και από την (4.1.5) έχουμε $\nu_f([0,\lambda_1]) = 0$ για κάθε $f \in L^2(\mu)$ με $\int f\,d\mu = 0$ (τότε θα λέμε την f κεντραρισμένη). Από τις (4.1.6) και (4.3.2) συμπεραίνουμε ότι αν η $f \in L^2(\mu)$ είναι κεντραρισμένη τότε

$$\|f\|_{H^{-1}(\mu)}^2 = \int_0^\infty \frac{d\nu_f(\lambda)}{\lambda} = \int_{\lambda_1}^\infty \frac{d\nu_f(\lambda)}{\lambda}. \tag{4.3.3}$$

Από την Πρόταση 4.2.1, για κάθε λεία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $f, \nabla f \in L^2(\mu)$ και $\int_{\mathbb{R}^n}\partial^i f\,d\mu = 0$ για κάθε i,

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \sum_{i=1}^n \|\partial^i f\|_{H^{-1}(\mu)}^2. \tag{4.3.4}$$

Αντικαθιστώντας στην (4.3.4) την $f(x) = \|x\|_2^2$ παίρνουμε

$$n\sigma_\mu^2 = \mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2^2) \leqslant 4\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{H^{-1}(\mu)}^2.$$

Αφού το μ είναι κεντραρισμένο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (4.3.3) και να ξαναγράψουμε την τελευταία ανισότητα ως εξής:

$$\sigma_\mu^2 \leqslant \frac{4}{n}\sum_{i=1}^n \int_{\lambda_1}^\infty \frac{d\nu_{x_i}(\lambda)}{\lambda} = 4\int_{\lambda_1}^\infty \frac{F(\lambda)}{\lambda^2}\,d\lambda, \tag{4.3.5}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει με ολοκλήρωση κατά μέρη, και

$$F(\lambda) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \nu_{x_i}([0,\lambda]) \in [0,1]$$

είναι η μέση φασματική μάζα των συναρτήσεων συντεταγμένων κάτω από το επίπεδο λ. Εφαρμόζοντας τώρα την Πρόταση 4.1.1 για τις συναρτήσεις x_i και αθροίζοντας ως προς i παίρνουμε

$$F(\lambda) \leqslant C\left(\frac{1}{n}\|Q_s x\|^2_{L^2(\mu_s)} + \lambda s\right), \tag{4.3.6}$$

για κάθε $\lambda, s > 0$. Στόχος μας είναι λοιπόν να φράξουμε είναι να φράξουμε το δεξιό μέλος της τελευταίας ανισότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Στοιχεία στοχαστικού λογισμού

5.1 Στοχαστικές ανελίξεις και κίνηση Brown

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παραθέσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς και θεωρήματα που χρειάζονται προκειμένου να δουλέψει κάποιος τη μέθοδο της στοχαστικής τοπικοποίησης του Eldan που χρησιμοποιείται εκτενώς στο δεύτερο μισό της εργασίας.

Ορισμός 5.1.1. Στοχαστική ανέλιξη με τιμές στον μετρήσιμο χώρο $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t : t \in I\}$ που ορίζονται σε κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και παίρνουν τιμές στον $\mathcal{S}$. Στην παρούσα εργασία θεωρούμε ότι $I = [0, +\infty)$, όπου διαισθητικά η ερμηνεία είναι ότι το t αντιπροσωπεύει χρόνο. Για σταθερό $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $t \mapsto X_t(\omega)$ ονομάζεται μονοπάτι ή και τροχιά της ανέλιξης.

Μια ανέλιξη αποτελείται συνεπώς από δύο κομμάτια: το ένα προέρχεται από τον Ω και το άλλο προέρχεται με φυσικό τρόπο από την χρονική της εξέλιξη. Πιο αυστηρά μπορούμε να πούμε ότι μια ανέλιξη είναι μια απεικόνιση

$$X : I \times \Omega \to \mathcal{S}$$

με $X(t, \omega) = X_t(\omega)$ ή μια απεικόνιση

$$\tilde{X} : \Omega \to \mathcal{S}^I$$

με $\tilde{X}(\omega)(t) = X(t, \omega)$, όπου ο $\mathcal{S}^I$ εφοδιάζεται με την σ-άλγεβρα γινόμενο και ως προς αυτήν η $\tilde{X}$ είναι τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 5.1.2. Κατανομή της ανέλιξης X λέμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\tilde{X}$, δηλαδή το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}(\tilde{X} \in A)$ για κάθε $A \subset \mathcal{S}^I$ στην σ-άλγεβρα γινόμενο.

Παρουσιάζει επίσης ενδιαφέρον η κατανομή της στοχαστικής ανέλιξης σε ορισμένα χρονικά «στιγμιότυπα», οι κατανομές αυτών ονομάζονται κατανομές πεπερασμένης διάστασης της X.

Ορισμός 5.1.3. Κατανομές πεπερασμένης διάστασης μιας ανέλιξης X λέμε τις κατανομές των τυχαίων διανυσμάτων $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$, όπου n θετικός ακέραιος και $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ διαφορετικοί ανά δύο δείκτες.

Μια σημαντική κλάση ανελίξεων που μας ενδιαφέρει έντονα είναι τα martingales. Ξεκινάμε από τον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.1.4. (i) Διήθηση στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ λέμε μια αύξουσα οικογένεια $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ σ-αλγεβρών, καθεμία από τις οποίες είναι υποσύνολο της $\mathcal{F}$.

(ii) Μια στοχαστική ανέλιξη $(X_t)_{t\geqslant 0}$ λέγεται προσαρμοσμένη στη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ αν για κάθε $t \geqslant 0$ η X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη.

Αν η στοχαστική ανέλιξη $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ικανοποιεί τα παρακάτω:

(1) η $(X_t)_{t\geqslant 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$,

(2) $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ για κάθε $t \geqslant 0$,

(3) $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ για κάθε $0 \leqslant s < t$,

τότε λέγεται martingale ως προς την διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Αν αντί της (3) ισχύει η $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geqslant X_s$, τότε η ανέλιξη λέγεται submartingale ενώ αν ισχύει η $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leqslant X_s$ τότε η ανέλιξη λέγεται supermartingale.

Μια συνάρτηση $T : \Omega \to [0, \infty]$ λέγεται χρόνος διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ αν για κάθε $t \geqslant 0$ ισχύει:

$$\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Πλέον μπορούμε να διατυπώσουμε (έναν από) τους ορισμούς της κίνησης Brown.

Ορισμός 5.1.5. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{B_t : t \geqslant 0\}$ ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέγεται (μονοδιάστατη) κίνηση Brown αν ισχύουν τα εξής:

(i) Η ανέλιξη έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Δηλαδή, για κάθε $n \geqslant 0$ και $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

είναι ανεξάρτητες.

(ii) Για κάθε $0 \leqslant s < t$,

$$B_t - B_s \sim N(0, t - s).$$

(iii) Με πιθανότητα 1, η συνάρτηση $t \to B(t)$ είναι συνεχής, δηλαδή η ανέλιξη έχει συνεχή μονοπάτια.

Σημείωση 5.1.6. Ο παραπάνω ορισμός δεν θέτει κανέναν περιορισμό στην αρχική τιμή $B(0)$ της κίνησης. Έτσι, είναι δυνατόν η κίνηση να ξεκινάει από ένα συγκεκριμένο $x \in \mathbb{R}$ ή γενικότερα να την ξεκινάμε τυχαία επιλέγοντας το αρχικό της σημείο με βάση ένα μέτρο πιθανότητας μ στο $\mathbb{R}$. Όλες αυτές οι κινήσεις Brown παράγονται από την τυπική κίνηση Brown ως εξής. Έστω B τυπική κίνηση Brown και X τυχαία μεταβλητή που είναι ανεξάρτητη της B και έχει κατανομή μ. Τότε, η ανέλιξη W με

$$W(t) = X + B(t)$$

για κάθε $t \geqslant 0$ είναι κίνηση Brown με αρχική κατανομή μ.

Με φυσιολογικό τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε την πολυδιάστατη κίνηση Brown.

Ορισμός 5.1.7. Έστω $d \geqslant 2$ φυσικός αριθμός και $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(d)}$ ανεξάρτητες μονοδιάστατες κινήσεις Brown. Ονομάζουμε d-διάστατη κίνηση Brown την ανέλιξη

$$B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \ldots, B_t^{(d)}), \quad t \in [0, \infty).$$

Όταν $B(0) = 0 \in \mathbb{R}^d$, λέμε ότι η B είναι τυπική d-διάστατη κίνηση Brown.

Όπως είναι φυσιολογικό, έχουμε το εξής:

Θεώρημα 5.1.8. *Η κίνηση Brown είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ που παράγεται από τις $\{B_s, s \leqslant t\}$, καθώς:*

$$\mathbb{E}[|B_t|]^2 \leqslant \mathbb{E}[|B_t|^2] = |B_0|^2 + nt, s \geqslant t$$

εφόσον $B_s - B_t \sim N(0, s-t)$. Επιπλέον, επειδή έχουμε ανεξάρτητες χρονικές προσαυξήσεις, η $B_s - B_t$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_t$, και ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[B_s - B_t|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_t] = 0 + B_t = B_t.$$

5.2 Το ολοκλήρωμα Itô

Προτού ορίσουμε το ολοκλήρωμα Itô, χρειάζεται να ορίσουμε την κλάση των συναρτήσεων που μας ενδιαφέρουν.

Ορισμός 5.2.1. Έστω $B_t(\omega)$ n-διάστατη κίνηση Brown. Ορίζουμε $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^n$ να είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές $B_s(\cdot)$, $s \leqslant t$. Διαισθητικά, η $\mathcal{F}_t$, αποτελεί το παρελθόν της κίνησης Brown μέχρι τη χρονική στιγμή t. Είναι επίσης προφανές ότι η $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ αποτελεί διήθηση.

Η οικογένεια συναρτήσεων που μας ενδιαφέρει περιγράφεται ως εξής:

Ορισμός 5.2.2. Συμβολίζουμε με $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S,T)$ την οικογένεια συναρτήσεων

$$f(t,\omega) : L[0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$$

που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

(i) Η $(t,\omega) \mapsto f(t,\omega)$ είναι $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ μετρήσιμη, όπου $\mathcal{B}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα στο $[0,\infty)$.

(ii) Η $f(t,\omega)$ είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $\mathcal{F}_t$.

(iii) $\mathbb{E}\left[\int_S^T f(t,\omega)dt\right] < \infty$.

Για τις συναρτήσεις $f \in \mathcal{V}$, θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Itô

$$\mathcal{I}[f](\omega) = \int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega).$$

Η διαδικασία είναι η συνήθης. Θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Itô για μια απλή κλάση συναρτήσεων και μετά με επιχειρήματα πυκνότητας και προσέγγισης θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Itô για όλες τις συναρτήσεις στην $\mathcal{V}(S,T)$.

Μια συνάρτηση $\varphi \in \mathcal{F}$ λέγεται στοιχειώδης, αν έχει την μορφή

$$\varphi(t,\omega) = \sum_j e_j(\omega) \cdot \chi_{[t_j,t_{j+1})}(t).$$

Για τις στοιχειώδεις συναρτήσεις ορίζουμε το ολοκλήρωμα Itô να ισούται με

$$\int_S^T \varphi(t,\omega)dB_t(\omega) = \sum_{j\geqslant 0} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega).$$

Βασική παρατήρηση είναι η εξής:

Λήμμα 5.2.3 (ισομετρία Itô). *Αν η $\varphi(t,\omega)$ είναι στοιχειώδης και φραγμένη συνάρτηση, τότε*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \varphi(t,\omega)dB_t(\omega)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T \varphi^2(t,\omega)dt\right].$$

Απόδειξη. Αν $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$, έχουμε

$$\mathbb{E}[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \delta_{ij}\mathbb{E}[e_j^2](t_{j+1} - t_j)$$

από το γεγονός ότι οι $e_i e_j \Delta B_i$ και ΔB_j είναι ανεξάρτητες, αν $i < j$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \varphi(t,\omega)dB_t(\omega)\right)^2\right] &= \sum_{i,j}\mathbb{E}[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \sum_j \mathbb{E}[e_j^2](t_{j+1} - t_j)\\ &= \mathbb{E}\left[\int_S^T \varphi^2(t,\omega)dt\right].\end{aligned}$$

□

Η ιδέα είναι πλέον να χρησιμοποιήσουμε την ισομετρία Itô για να επεκτείνουμε τον ορισμό από τις στοιχειώδεις συναρτήσεις σε συναρτήσεις στην $\mathcal{V}$.

Βήμα 1 Έστω $g \in \mathcal{V}$ φραγμένη, και έστω ότι η $g(\cdot,\omega)$ είναι συνεχής για κάθε ω. Τότε, υπάρχουν στοιχειώδεις συναρτήσεις $\varphi_n \in \mathcal{V}$ τέτοιες ώστε

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (g - \varphi_n)^2 dt\right] \to 0$$

καθώς $n \to 0$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $\varphi_n(t,\omega) = \sum_j g(t_j,\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1})}(t)$. Τότε η φ_n είναι στοιχειώδης, αφού $g \in \mathcal{V}$, και

$$\int_S^T (g - \varphi_n)^2 dt \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ για κάθε $\omega \in \Omega$, επειδή η $g(\cdot,\omega)$ είναι συνεχής για κάθε ω. Συνεπώς, $\mathbb{E}\left[\int_S^T (g - \varphi_n)^2 dt\right] \to 0$ από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, αφού η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι φραγμένη. □

Βήμα 2 Έστω $h \in \mathcal{V}$ φραγμένη. Τότε υπάρχουν φραγμένες συναρτήσεις $g_n \in \mathcal{V}$ τέτοιες ώστε η $g_n(\cdot,\omega)$ να είναι συνεχής για κάθε ω, n και επιπλέον

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (h - g_n)^2 dt\right] \to 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $|h(t,\omega)| \leqslant M$ για κάθε (t,ω). Για κάθε n, έστω ψ_n μη αρνητική, συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με

(i) $\psi_n(x) = 0$ για $x \leqslant \frac{-1}{n}$ και $x \geqslant 0$,

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)dx = 1$.

Ορίζουμε
$$g_n(t,\omega) = \int_0^t \psi_n(s-t)h(s,\omega)ds.$$
Τότε, η $g_n(\cdot,\omega)$ είναι συνεχής για κάθε ω και $|g(t,\omega)| \leqslant M$. Επειδή $h \in \mathcal{V}$, βλέπουμε ότι η $g_n(t,\cdot)$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη, για κάθε t. Επιπλέον, επειδή η $\{\psi_n\}_n$ είναι προσέγγιση της μονάδας, έχουμε
$$\int_S^T (g_n(s,\omega) - h(s,\omega))^2 ds \to 0$$
για κάθε ω, καθώς $n \to \infty$. Συνεπώς από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, το οποίο εφαρμόζεται επειδή οι ολοκληρωτέες συναρτήσεις είναι φραγμένες, έχουμε
$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (h-g_n)^2 dt\right] \to 0.$$
□

Βήμα 3 Έστω $f \in \mathcal{V}$. Τότε, υπάρχει ακολουθία $\{h_n\} \in \mathcal{V}$, τέτοια ώστε η h_n να είναι φραγμένη για κάθε n και
$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f-h_n)^2 dt\right] \to 0$$
καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη. Ορίζουμε h_n μέσω της:

$$h_n(x) = \begin{cases} -n, & f(t,\omega) < -n \\ f(t,\omega), & -n \leqslant f(t,\omega) \leqslant n \\ n, & f(t,\omega) > n, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

και το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. □

Είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Itô.

Ορισμός 5.2.4 (ολοκλήρωμα Itô). Έστω $f \in \mathcal{V}(S,T)$. Το ολοκλήρωμα Itô της f από το S έως το T ορίζεται μέσω της
$$\int_S^T f(t,\omega)B_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \varphi_n(t,\omega)dB_t(\omega),$$
όπου το όριο είναι στον $L^2(\mathbb{P})$ και $\{\varphi_n\}$ είναι ακολουθία στοιχειωδών συναρτήσεων με
$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f(t,\omega) - \varphi_n(t,\omega))^2 dt\right] \to 0.$$
Η ακολουθία αυτή υπάρχει, από τα βήματα που προηγήθηκαν. Επιπλέον, το όριο στον ορισμό του ολοκληρώματος, υπάρχει και δεν εξαρτάται από την επιλογή των $\{\varphi_n\}$, από την ισομετρία Itô.

Ως άμεση συνέπεια του ορισμού και των ιδιοτήτων των στοιχειωδών συναρτήσεων προκύπτουν τα παρακάτω.

Πόρισμα 5.2.5 (ισομετρία Itô). *Για κάθε $f \in \mathcal{V}$ έχουμε ότι*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dB_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T f^2(t,\omega)dt\right].$$

Πόρισμα 5.2.6. *Αν $f \in \mathcal{V}$ και $f_n \in \mathcal{V}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με*

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f_n(t,\omega) - f(t,\omega)^2 dt\right] \to 0,$$

τότε

$$\int_S^T f_n(t,\omega)dB_t(\omega) \to_{L^2(\mathbb{P})} \int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)$$

καθώς το $n \to \infty$.

Κάποιες ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô προκύπτουν άμεσα και με φυσιολογικό τρόπο, αν τις ελέγξουμε πρώτα για στοιχειώδεις συναρτήσεις και μετά πάρουμε όριο.

Θεώρημα 5.2.7. *Έστω $f \in \mathcal{V}$ και $0 \leqslant S < U < T$. Τότε:*

(i)
$$\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$$
με πιθανότητα 1.

(ii)
$$\int_S^T (cf + g)dB_t = c \cdot \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$$
με πιθανότητα 1.

(iii)
$$\mathbb{E}\left[\int_S^T f dB_t\right] = 0.$$

(iv) *Η συνάρτηση*
$$\int_S^T f dB_t$$
είναι $\mathcal{F}_T$ μετρήσιμη.

Επίσης αρκετά γνωστή (και χρήσιμη) είναι η παρακάτω ανισότητα για martingales, που θα χρησιμοποιούμε συχνά.

Θεώρημα 5.2.8. *Αν M_t είναι martingale και η $t \mapsto M_t(\omega)$ είναι συνεχής με πιθανότητα 1 τότε για κάθε $p \geqslant 1, T \geqslant 0$ και κάθε $\lambda > 0$,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |M_t| \geqslant \lambda\right] \leqslant \frac{1}{\lambda^p} \cdot \mathbb{E}[|M_T|^p].$$

Με χρήση αυτού του θεωρήματος μπορούμε να επιλέξουμε το ολοκλήρωμα Itô ώστε να είναι συνεχές ως προς τον χρόνο. Πιο αυστηρά έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.9. *Έστω $f \in \mathcal{V}(0,T)$. Τότε, υπάρχει t-συνεχής επιλογή του*

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

δηλαδή, υπάρχει t-συνεχής στοχαστική διαδικασία J_t στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}\left[J_t = \int_0^t f dB\right] = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Η J_t καλείται τροποποίηση της $\int_0^t f dB$.

Απόδειξη. Έστω $\varphi_n(t,\omega) = \sum_j e_j^n(\omega)\chi_{[t_j^n, t_{j+1}^n)}(t)$ στοιχειώδεις συναρτήσεις με

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (f-\varphi_n)^2\right] \to 0.$$

Θέτουμε

$$I_n(t,\omega) = \int_0^t \varphi_n(s,\omega)dB_s(\omega)$$

και

$$I_t = I(t,\omega) = \int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Τότε, η $I_n(\cdot,\omega)$ είναι συνεχής για κάθε n. Επιπλέον, η $I_n(t,\omega)$ είναι martingale ως προς την $\mathcal{F}_t$ για κάθε n, καθώς

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I_n(s,\omega)|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \varphi_n dB + \int_t^{\varphi_n dB}\right)\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \int_0^t \varphi_n dB + \mathbb{E}\left[\sum_{t \leqslant t_j^{(n)} \leqslant t_{j+1}^{(n)} \leqslant s} e_j^n \Delta B_j \Big| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \int_0^t \varphi_n dB + \sum_j \mathbb{E}[\mathbb{E}[e_j^{(n)}\Delta B_j|\mathcal{F}_{\sqcup_|^{(\backslash)}}]|\mathcal{F}_t] \\
&= \int_0^t \varphi_n dB = I_n(t,\omega).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η $I_n - I_m$ είναι κι αυτή $\mathcal{F}_t$ martingale, άρα από την ανισότητα Doob έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |I_n(t,\omega) - I_m(t,\omega)| > \varepsilon\right] &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}[|I_n(T,\omega) - I_m(T,\omega)|^2] \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_0^T (\varphi_n - \varphi_m)^2 ds\right] \to 0
\end{aligned}$$

καθώς $m,n \to \infty$. Μπορούμε επομένως να επιλέξουμε μια αύξουσα ακολουθία δεικτών $n_k \to \infty$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |I_{n_{k+1}}(t,\omega) - I_{n_k}(t,\omega)| > 2^{-k}\right] < 2^{-k},$$

άρα από το λήμμα Borel-Cantelli έχουμε

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|I_{n_{k+1}}(t,\omega)-I_{n_k}(t,\omega)|>2^{-k}\text{για άπειρα } k\right]=0$$

συνεπώς, σχεδόν βεβαίως, για κάθε ω, υπάρχει $k_1(\omega)$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|I_{n_{k+1}}(t,\omega)-I_{n_k}(t,\omega)|\leqslant 2^{-k},\quad k\geqslant k_1(\omega).$$

Έπεται ότι η $I_{n_k}(t,\omega)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $t\in[0,T]$ σχεδόν βεβαίως, άρα το όριο (έστω $J_t(\omega)$) είναι t-συνεχές για $t\in[0,T]$ σχεδόν βεβαίως. Επειδή επιπλέον έχουμε $I_{n_k}(t,\omega)\to I(t,\cdot)$ στον $L^2(\mathbb{P})$, έχουμε $I_t=J_t$ σχεδόν βεβαίως για κάθε $t\in[0,T]$, που είναι το ζητούμενο. □

Ένα άμεσο πόρισμα των παραπάνω είναι το εξής.

Πόρισμα 5.2.10. *Έστω $f(t,\omega)\in\mathcal{V}(0,T)$ για κάθε T. Τότε, η*

$$M_t(\omega)=\int_0^t f(s,\omega)dB_s$$

είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ και επιπλέον

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|M_t|\geqslant\lambda\right]\leqslant\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(s,\omega)ds\right]$$

για κάθε $\lambda,T>0$.

Για τις ανάγκες τις παρούσας εργασίας, απομένει να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Itô σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Για τον σκοπό αυτό χρειάζεται μια τροποποίηση στο (ii) του ορισμού της $\mathcal{V}$. Ειδικότερα μπορούμε να το αλλάξουμε στο:

«Υπάρχει διήθηση $(\mathcal{H}_t)_{t\geqslant 0}$ τέτοια ώστε

(i) η B_t είναι martingale ως προς $\mathcal{H}_t$,

(ii) η f_t είναι $\mathcal{H}_t$ προσαρμοσμένη.»

Έχουμε, λόγω του πρώτου, ότι $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{H}_t$. Η πιο σημαντική εφαρμογή αυτής της αλλαγής είναι στην περίπτωση όπου έχουμε μια n-διάστατη κίνηση Brown. Με τις παραπάνω προϋποθέσεις, η κατασκευή του ολοκληρώματος γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Στην περίπτωση που έχουμε n-διάστατη κίνηση Brown μπορούμε να ορίσουμε την σ-άλγεβρα που παράγεται από τις συντεταγμένες. Ως προς αυτήν, κάθε συνιστώσα B_k παραμένει martingale. Για τα ολοκληρώματα Itô μεγαλύτερης διάσταση έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 5.2.11. Έστω $B=(B_1,B_2,\ldots,B_n)$, n-διάστατη κίνηση Brown. Ορίζουμε $\mathcal{V}_H^{m\times n}(S,T)$ να είναι το σύνολο των $m\times n$ πινάκων $u=[u_{ij}(t,\omega)]$ όπου κάθε στοιχείο του πίνακα ικανοποιεί τα (i), (iii) του ορισμού του $\mathcal{V}$ και τις δύο παραπάνω συνθήκες ως προς κάποια διήθηση $(\mathcal{H}_t)_{t\geqslant 0}$.

Αν $u\in\mathcal{V}_H^{m\times n}(S,T)$ ορίζουμε

$$\int_S^T udB=\int_S^T\begin{pmatrix}u_{11}&\cdots&u_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ u_{n1}&\cdots&u_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dB_1\\ \vdots\\ dB_n\end{pmatrix}$$

όπου κάθε συντεταγμένη είναι το άθροισμα των επεκτεταμένων, όπως παραπάνω, ολοκληρωμάτων Itô

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{S}^{T} u_{ij} dB_j(s, \omega).$$

Στην περίπτωση όπου $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{(n)} = \{\mathcal{F}_t^{(n)}\}_{t \geqslant 0}$, γράφουμε απλώς $\mathcal{V}^{m \times n}(S, T)$. Τέλος, θέτουμε

$$\mathcal{V}^{m \times n} = \mathcal{V}^{m \times n}(0, \infty) = \bigcap_{T>0} \mathcal{V}^{m \times n}(0, T).$$

Ορισμός 5.2.12. Έστω $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S, T)$ οι στοχαστικές διαδικασίες $f(t, \omega) \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν το (i) του αρχικού ορισμού και τις δύο παραπάνω συνθήκες. Όμοια με τον συμβολισμό του $\mathcal{V}$, θέτουμε

$$\mathcal{W}_{\mathcal{H}} = \bigcap_{T>0} \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(0, T)$$

και στην περίπτωση των πινάκων $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{m \times n}(S, T)$.

Για μια f όπως παραπάνω, μπορούμε να βρούμε ακολουθία απλών μετρήσιμων $f_n \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ που να συγκλίνουν στην f στον L^2 και γι' αυτές τις συναρτήσεις μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα ως το όριο των στοχαστικών ολοκληρωμάτων των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.

5.3 Ο τύπος του Itô

Όπως και στην περίπτωση του ολοκληρώματος Riemman ή Lebesgue, ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων μέσω του ορισμού είναι πρακτικώς αδύνατος. Ως προς τούτο, σαν ανάλογο του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού έχουμε τον τύπο του Itô. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 5.3.1. Έστω $\{B_t : t \geqslant 0\}$ μια μονοδιάστατη κίνηση Brown στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Μια μονοδιάσταση διαδικασία Itô είναι μια στοχαστική διαδικασία X_t στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ της μορφής

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s,$$

όπου $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty \ \text{ για κάθε } \ t \geqslant 0\right] = 1.$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι η u είναι $\mathcal{H}_t$-προσαρμοσμένη και

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \ \text{ για κάθε } \ t \geqslant 0\right] = 1.$$

Αν η X_t είναι της παραπάνω μορφής, γράφουμε σε «διαφορική μορφή»:

$$dX_t = u dt + v dB_t.$$

Με αυτούς τους ορισμούς έχουμε τον τύπο του Itô:

Θεώρημα 5.3.2 (μονοδιάστατος τύπος του Itô). *Έστω X_t διαδικασία Ito που δίνεται από την*

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

Έστω $g(t,x) \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R})$. Τότε, η

$$Y_t = g(t, X_t)$$

είναι επίσης διαδικασία Ito και

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt - \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t dX_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(t, X_t)\cdot(dX_t)^2,$$

όπου η ποσότητα $(dX_t)^2 = (dX_t)(dX_t)$ υπολογίζεται σύμφωνα με τους κανόνες:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0$$

και

$$(dB_t)^2 = dt.$$

Η απόδειξη είναι καθαρά τεχνική και παραλείπεται. Κυρίως μας ενδιαφέρει το ανάλογο του τύπου του Itô σε μεγαλύτερες διαστάσεις.

Θεώρημα 5.3.3. *Έστω $B(t,\omega) = (B_1(t,\omega),\dots,B_m(t,\omega))$ m-διάστατη κίνηση Brown. Αν κάθε μία από τις διαδικασίες $u_i(t,\omega), v_{ij}(t,\omega)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού για τη διαδικασία Ito, ορίζουμε την διαδικασία Ito*

$$dX_t = udt + vdB_t$$

υπό μορφή πινάκων, όπου:

$$X_t = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nm} \end{pmatrix}, \quad dB(t) = \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{pmatrix}.$$

Έστω $g(t,x) = (g_1(t,x),\dots,g_p(t,x))$, μια C^2 συνάρτηση από τον $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^p$. Τότε η στοχαστική διαδικασία

$$Y(t,\omega) = g(t, X(t))$$

είναι επίσης διαδικασία Ito και η k συνεταγμένη της Y_k δίνεται από την

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X)dX_i dX_j,$$

όπου $dB_i dB_j = \delta_{ij}dt, dB_t dt = dt dB_t = 0$.

5.4 Χώροι Wiener

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δώσουμε μια σύντομη περιγραφή των χώρων Wiener. Έστω $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}_+$ στο $\mathbb{R}$. Εφοδιάζουμε τον χώρο $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ με την ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ως προς την οποία οι συναρτήσεις συντεταγμένων είναι μετρήσιμες για κάθε $t > 0$. Στην πραγματικότητα, η $\mathcal{A}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα που προκύπτει από την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή.

Έστω $\{B_t : t \geqslant 0\}$ κίνηση Brown από έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση με στοιχεία από τον Ω και τιμές στον $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ μέσω της

$$\omega \mapsto (t \mapsto B_t(\omega)).$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι μετρήσιμη. Το μέτρο Wiener (ή η κατανομή της κίνησης Brown) είναι εξ' ορισμού η εικόνα του μέτρου πιθανότητας $\mathbb{P}(d\omega)$ κάτω από αυτή την απεικόνιση. Το μέτρο αυτό, το οποίο συμβολίζουμε με $W(dw)$, είναι μέτρο πιθανότητας στον $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ και για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο A του $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ έχουμε

$$W(A) = \mathbb{P}(B. \in A),$$

όπου με $B.$ αντιστοιχεί στην τυχαία συνεχή συνάρτηση $t \mapsto B_t(\omega)$.

Περιορίζοντας αυτή την ισότητα σε «κυλινδρικά σύνολα» της μορφής

$$A = \{w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : w(t_0) \in A_1, \dots, w(t_n) \in A_n\},$$

όπου $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ και $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, έχουμε

$$\begin{aligned} W(A) &= P(B_{t_0} \in A_0, B_{t_1} \in A_{t_1}, \dots, B_{t_n} \in A_n) \\ &= \chi_{A_0} \int_{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{t_1 (t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})}} \exp\left(- \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right). \end{aligned}$$

Ο παραπάνω τύπος για το μέτρο Wiener στα κυλινδρικά σύνολα, χαρακτηρίζει πλήρως το μέτρο πιθανότητας W. Πράγματι, η κλάση των παραπάνω κυλινδρικών συνόλων είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές και παράγει την σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ και συνεπώς, μέσω συνήθων επιχειρημάτων μονότονης κλάσης, προκύπτει ότι αυτή η κλάση χαρακτηρίζει πλήρως το μέτρο.

Η ιδιότητα του χώρου Wiener που θα χρειαστούμε είναι κυρίως το παρακάτω θεώρημα, η απόδειξη του οποίου παραλείπεται.

Θεώρημα 5.4.1 (Cameron-Martin). *Έστω H χώρος Hilbert και $\tau : H \to \mathbb{R}^n$ χώρος Wiener με μέτρο Wiener $\gamma : \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \mapsto [0,1]$. Για $h \in H$ ορίζουμε την $T_h = x + \tau(h)$. Τότε, το $(T_h)_*(\gamma)$ είναι ισοδύναμο με το γ, με παράγωγο Radon-Nikodym ίση με*

$$\frac{d(T_h)_*\gamma}{d\gamma} = \exp\left(\int \tau(h)(x) dB_s - \frac{1}{2} \|h\|_H^2 \right).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Στοχαστική τοπικοποίηση

6.1 Στοχαστική τοπικοποίηση των Lee και Vempala

Μία από τις πρώτες τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την προσέγγιση της εικασίας Kannan-Lovász-Simonovits, ήταν η κυρτή τοπικοποίηση. Συγκεκριμένα, κόβουμε ένα κυρτό σώμα K με υπερεπίπεδο H και μελετάμε τα $K \cap H^+$ και $K \cap H^-$, όπου H^+ και H^- είναι οι ημίχωροι που ορίζει το H. Η ουσιαστική τροποποίηση που έγινε από τον Eldan και αποτέλεσε την τεχνική με την οποία έχουν βρεθεί όλα τα πρόσφατα αποτελέσματα, βασίζεται στις εξής ιδέες:

Τυχαία τοπικοποίηση. Επιλέγουμε τα υπερεπίπεδα τυχαία με τον περιορισμό να περνάνε από το κέντρο βάρους.

Συνεχής τοπικοποίηση. Αντί να κόψουμε αυστηρά το K, πολλαπλασιάζουμε με ένα αφφινικό συναρτησοειδές που είναι περίπου ίσο με 1.

Με άλλα λόγια: Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας με λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα p. Για μικρό $\varepsilon > 0$, αντί να μελετήσουμε τις τομές με τους ημίχωρους H^+, H^-, μελετάμε τα δύο μέτρα με πυκνότητες

$$(1 \pm \varepsilon\langle x - a, \vartheta\rangle)p(x),$$

όπου a είναι το κέντρο βάρους του μ. Τότε έχουμε δύο νέα μέτρα, ο μέσος όρος των οποίων είναι το αρχικό μέτρο.

Τώρα, ας επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία με το ϑ να είναι τυχαίο και μικρό, $\vartheta = \sqrt{\Delta t}\, Z_t$, όπου Z_t, για $t = \varepsilon, 2\varepsilon, \dots$ είναι τυπικά κανονικά τυχαία διανύσματα και $\varepsilon = \Delta t > 0$. Τότε, αν $p_0(x) = p(x)$, έχουμε

$$p_{t+\Delta t}(x) = \left(1 + \langle x - a_t,\ \sqrt{\Delta t}\, Z_t\rangle\right) p_t(x)$$

και μπορούμε να γράψουμε υπό τη μορφή μιας εξίσωσης διαφορών

$$p_{t+\Delta t}(x) - p_t(x) = \langle x - a_t,\ \sqrt{\Delta t}\, Z_t\rangle p_t(x).$$

Αν τώρα οι Z_t είναι ανεξάρτητα και ισόνομα τυπικά κανονικά τυχαία διανύσματα, μπορούμε να επιλέξουμε

$$\sqrt{\Delta t}\, Z_t = B_{t+\Delta t} - B_t = \Delta B_t.$$

Αφήνοντας τώρα το $\Delta t \to 0$ περνάμε από διακριτό χρόνο σε συνεχή και προκύπτει πλέον η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dp_t(x) = \langle x - a_t, dW_t\rangle p_t(x),$$

όπου το p_0 είναι δοσμένο και $a_t = \int_{\mathbb{R}^n} x p_t(x)\, dx$, που είναι η στοχαστική διαφορική εξίσωση της στοχαστικής τοπικοποίησης των Lee και Vempala.

Πιο φορμαλιστικά, μπορούμε να εξαγάγουμε τα εξής.

Πρόταση 6.1.1. *Έστω $(W_t)_{t\geqslant 0}$ συνήθης κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^n$ με $W_0 = 0$, και μ απολύτως συνεχές μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα p_0 και πεπερασμένες δεύτερες ροπές. Η στοχαστική τοπικοποίηση $(p_t)_{t\geqslant 0}$ που έχει ως οδηγό την $(W_t)_{t\geqslant 0}$ ορίζεται ως εξής. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, η διαδικασία $(p_t(x))_{t\geqslant 0}$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$dp_t(x) = p_t(x)\langle x - a_t, dW_t\rangle, \tag{6.1.1}$$

με αρχική συνθήκη p_0, όπου $a_t = \int_{\mathbb{R}^n} x p_t(x)$ είναι το βαρύκεντρο της p_t.

Η διαδικασία $(p_t)_{t\geqslant 0}$ έχει μια εναλλακτική περιγραφή. Για $t \geqslant 0$ και $\vartheta \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε την πυκνότητα $p_{t,\vartheta}$ μέσω της

$$p_{t,\vartheta}(x) = \frac{1}{Z(t,\vartheta)} e^{\langle \vartheta, x\rangle - \frac{t\|x\|_2^2}{2}} p_0(x), \tag{6.1.2}$$

όπου $Z(t,\vartheta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \vartheta, x\rangle - \frac{t\|x\|_2^2}{2}} p_0(x)\, dx$. Έστω επίσης $a(t,\vartheta)$ το βαρύκεντρο της $p_{t,\vartheta}$. Ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία ϑ_t με $\vartheta_0 = 0$ μέσω της

$$d\vartheta_t = a(t, \vartheta_t)dt + dW_t. \tag{6.1.3}$$

Τότε, έχουμε τα εξής:

(α) *Η $p_t(x)$ είναι martingale και σχεδόν βεβαίως πυκνότητα μέτρου πιθανότητας. Επιπλέον, έχουμε ότι $\mathbb{E}[p_t(x)] = p_0(x)$ και για κάθε συνάρτηση ελέγχου φ έχουμε $\mathbb{E}_{X\sim p_0}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}_{X\sim p_t}[\varphi(X)]]$.*

(β) *Αν οι διαδικασίες ϑ_t, p_t έχουν ως οδηγό την ίδια κίνηση Brown, τότε η πυκνότητα p_t ταυτίζεται με την πυκνότητα p_{t,ϑ_t}.*

Απόδειξη. (α) Πρόκειται για γνωστό αποτέλεσμα της θεωρίας των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και παραπέμπουμε στο [85, Κεφάλαιο 6].

(β) Θεωρούμε τη διαδικασία $q_t(x) = e^{\langle \vartheta_t, x\rangle - \frac{t}{2}\|x\|_2^2} p(x)$. Από τον τύπο του Itô για την $f(a,t) = e^{a - \frac{t}{2}\|x\|_2^2} p(x)$ με $a = \langle \vartheta_t, x\rangle$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} dq_t(x) &= \frac{df(a,t)}{dt}dt + \frac{df(a,t)}{da}d\langle \vartheta_t, x\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2 f(a,t)}{da^2}d[\langle \vartheta_t, x\rangle]_t \\ &= \left(d\langle \vartheta_t, x\rangle - \frac{1}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{2}d[\langle \vartheta_t, x\rangle]_t\right) q_t(x). \end{aligned}$$

Έχουμε ότι $d\langle \vartheta_t, x\rangle = \langle dW_t + a(t,\vartheta_t)dt, x\rangle$ και $d[\langle \vartheta_t, x\rangle]_t = \langle x, x\rangle dt$, άρα η $q_t(x)$ ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dq_t(x) = \langle dW_t + a(t,\vartheta_t), x\rangle q_t(x).$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $V_t = \int_{\mathbb{R}^n} q_t(y)dy$ και έχουμε

$$dV_t = \int_{\mathbb{R}^n} dq_t(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \langle dW_t + a(t,\vartheta_t)dt, y\rangle q_t(y)dy = V_t\langle dW_t + a(t,\vartheta_t)dt, a(t,\vartheta_t)\rangle.$$

Από τον τύπο του Itô για την $f(t,x) = \frac{1}{x}$ έχουμε ότι

$$dV_t^{-1} = -\frac{1}{V_t^2}dVt + \frac{1}{V_t^3}d[V]_t = -V_t^{-1}\langle dW_t, a(t,\vartheta_t)\rangle.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$\begin{aligned} dp_t(x) &= d(V_t^{-1}q_t(x)) = q_t(x)dV_t^{-1} + V_t^{-1}dq_t(x) + d[V_t^{-1}, q_t(x)]_t \\ &= p_t(x)\langle dW_t, x - a(t,\vartheta_t)\rangle, \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα X με κατανομή το μ, ανεξάρτητο από την κίνηση Brown $(W_t)_{t\geqslant 0}$. Ορίζουμε τη διαδικασία $\tilde{\vartheta}_t$ μέσω της

$$\tilde{\vartheta}_t = tX + W_t. \tag{6.1.4}$$

Τότε, έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.1.2. *Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue λ, και έστω $T > 0$ σταθερό. Θεωρούμε τον χώρο $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathcal{V}_T$ και τον μετασχηματισμό $\tau : \Omega \mapsto \Omega$ που δίνεται από την*

$$\tau(x,(W_t)_{0\leqslant t\leqslant T}) = (x,(W_t + tx)_{0\leqslant t\leqslant T}).$$

Αν $\nu = \tau_*(\mu\otimes\gamma_T)$, τότε:

(i) *Η στοχαστική διαδικασία $(\tilde{\vartheta}_t)_{t\geqslant 0}$ που ορίστηκε στην (6.1.4) ταυτίζεται κατά κατανομή με τη διαδικασία $(\vartheta_t)_{t\geqslant 0}$ που αποτελεί λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (6.1.3) .*

(ii) *Το μέτρο ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο $\lambda\otimes\gamma_T$ στον Ω με πυκνότητα*

$$\frac{d\nu}{d(\lambda\otimes\gamma_t)}(x,\tilde{\vartheta}) = p_0(x)e^{\langle\tilde{\vartheta}_T,x\rangle - \frac{T\|x\|_2^2}{2}}$$

για $x\in\mathbb{R}^n$ και $\tilde{\vartheta} = (\tilde{\vartheta}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}\in\mathcal{V}_T$. Συνεπώς, αν $(X,(\tilde{\vartheta}_t)_{0\leqslant t\leqslant T})$ είναι η στοχαστική διαδικασία που ορίστηκε στην (6.1.4), η δεσμευμένη κατανομή της X ως προς την $\tilde{\vartheta} = (\tilde{\vartheta}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ δίνεται από την πυκνότητα πιθανότητας

$$q_T(x \mid \tilde{\vartheta}) = \frac{p_0(x)e^{\langle\tilde{\vartheta}_T,x\rangle - \frac{T}{2}\|x\|_2^2}}{\int_{\mathbb{R}^n} p_0(y)e^{\langle\tilde{\vartheta}_T,y\rangle - \frac{T}{2}\|y\|_2^2}dy} = p_{T,\tilde{\vartheta}_T}(x). \tag{6.1.5}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα το (ii). Για $x\in\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την $\tau_x : \mathcal{V}_T \to \mathcal{V}_T$ μέσω της $\tau_x((W_t)_{t\leqslant T}) = (W_t + tx)_{t\leqslant T}$. Δηλαδή, $\tau(x,\omega) = (x,\tau_x(\omega))$. Από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\nu = \tau_*(\mu\otimes\gamma_T) = \int_{\mathbb{R}^n}(x,\tau_x)_*\gamma_T\, d\mu(x). \tag{6.1.6}$$

Δηλαδή, για κάθε συνάρτηση ελέγχου g έχουμε ότι

$$\int_\Omega g d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathcal{V}_T} g(x, \tilde{\vartheta}) d((\tau_x)_* \gamma_T)(\tilde{\vartheta}) \right) d\mu(x).$$

Εφόσον η τ_x είναι μια μεταφορά στον χώρο Wiener μέσω της συνάρτησης $f_x(t) = tx$, από το θεώρημα Cameron-Martin (Θεώρημα 5.4.1) έχουμε ότι η πυκνότητα του μέτρου $(\tau_x)_*\gamma_T$ ως προς το μέτρο γ_T στο σημείο $(\tilde{\vartheta}_t)_{0\leqslant t\leqslant T} \in \mathcal{V}_T$ είναι ίση με

$$\begin{aligned} \frac{d(\tau_x)_*\gamma_T}{d\gamma_T}((\tilde{\vartheta}_t)_{t\leqslant T}) &= \exp\left(\int_0^T \langle f_x'(t), d\tilde{\vartheta}_t\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T \|f_x'(t)\|_2^2 dt \right) \\ &= \exp\left(\int_0^T x\, d\tilde{\vartheta}_t - \frac{1}{2}\int_0^T \|x\|_2^2 dt \right) = e^{\langle \tilde{\vartheta}_T, x\rangle - \frac{T\|x\|_2^2}{2}}, \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

και συνεπώς, από τις (6.1.6) και (6.1.7) παίρνουμε

$$\frac{d\nu}{d(\lambda\otimes\gamma_T)}(x,\tilde{\vartheta}) = p_0(x)\cdot \frac{d\nu}{d(\mu\otimes\gamma_T)}(x,\tilde{\vartheta}) = p_0(x) e^{\langle \tilde{\vartheta}_T, x\rangle - \frac{T\|x\|_2^2}{2}}. \tag{6.1.8}$$

Το μέτρο ν είναι η από κοινού κατανομή της στοχαστικής διαδικασίας

$$(X, (\tilde{\vartheta}_t)_{0\leqslant t\leqslant T})$$

που ορίστηκε στην (6.1.4). Συνεπώς, αν δεσμεύσουμε ως προς τη διαδικασία $(\tilde{\vartheta}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, από την (6.1.8) έχουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του X είναι ανάλογη της $x \mapsto p_0(x) e^{\langle \tilde{\vartheta}_T, x\rangle - \frac{T\|x\|_2^2}{2}}$ στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο αποδεικνύει το (ii).

Αποδεικνύουμε τώρα το (i). Εφοδιάζουμε τον χώρο Ω με το μέτρο $\mu\otimes\gamma_T$ και ας υποθέσουμε ότι η $(X, (W_t)_{t\geqslant 0})$ είναι κατανεμημένη σύμφωνα με αυτό το μέτρο, και $\tilde{\vartheta}_t = tX + W_t$. Τότε,

$$d\tilde{\vartheta}_t = X dt + dW_t. \tag{6.1.9}$$

Γράφουμε $\mathcal{N}_T$ για την σ-άλγεβρα που παράγεται από τις $(\tilde{\vartheta}_s)_{0\leqslant s\leqslant t}$, και $\mathbb{E}[X \mid \tilde{\vartheta}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{N}_t](\tilde{\vartheta})$ για τη δεσμευμένη μέση τιμή του X ως προς την $\mathcal{N}_t$, που είναι συνάρτηση των $(\tilde{\vartheta}_s)_{0\leqslant s\leqslant t}$. Από την (6.2.7) και το [85, Θεώρημα 8.4.3], η διαδικασία $(\tilde{\vartheta}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ ταυτίζεται κατά κατανομή με τη διαδικασία $(\vartheta_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ που ορίζεται από την αρχική συνθήκη $\vartheta_0 = \tilde{\vartheta}_0 = 0$ και τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$d\vartheta_t = b(t, \vartheta_t)dt + dW_t,$$

όπου η συνάρτηση $b(t,x)$ ορίζεται για $0 < t \leqslant T$ και $x \in \mathbb{R}^n$, και ικανοποιεί την

$$b(t, \tilde{\vartheta}_t) = \mathbb{E}[X \mid \tilde{\vartheta}] \quad \text{για κάθε } \tilde{\vartheta} \in \mathcal{V}_T. \tag{6.1.10}$$

Αν δούμε την τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}[X \mid \tilde{\vartheta}]$ ως $\mathcal{N}_t$-μετρήσιμη συνάρτηση στον χώρο Ω, παρατηρούμε ότι είναι η δεσμευμένη μέση τιμή του X με δεδομένη την $\tilde{\vartheta} = (\tilde{\vartheta}_s)_{0\leqslant s\leqslant T}$, συνεπώς από την Πρόταση 6.1.2 (ii) έχουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή του X με δεδομένη την $\tilde{\vartheta}$ δίνεται από την πυκνότητα πιθανότητας $q_t(x \mid \tilde{\vartheta})$ που δίνεται στην (6.1.5). Συνεπώς, για κάθε $0 < t < T$ και κάθε $\tilde{\vartheta} \in \mathcal{V}_t$ έχουμε

$$\mathbb{E}[X \mid \tilde{\vartheta}] = \int_{\mathbb{R}^n} x q_t(x \mid \tilde{\vartheta})\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} x p_{t,\tilde{\vartheta}_t}(x)\, dx = a(t, \tilde{\vartheta}_t),$$

άρα ικανοποιείται η συνθήκη (6.1.10) με $b(t,x) = a(t,x)$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Τα παραπάνω θα μας φανούν χρήσιμα στο πρόβλημα σε συνδυασμό με την ακόλουθη στοιχειώδη ιδιότητα της κίνησης Brown.

Πρόταση 6.1.3. *Έστω $(W_t)_{t\geqslant 0}$ συνήθης κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^n$ με $W_0 = 0$. Ορίζουμε τη διαδικασία $(\tilde{W}_s)_{s\geqslant 0}$ μέσω της*

$$\tilde{W}_s = sW_{\frac{1}{s}}.$$

Τότε, η $\tilde{W}_s$ είναι επίσης συνήθης κίνηση Brown.

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η $\tilde{W}_s$ είναι κεντραρισμένη Gaussian διαδικασία είναι άμεσο από την αντίστοιχη ιδιότητα της W_t. Το γεγονός ότι τα μονοπάτια της $\tilde{W}_s$ είναι συνεχή είναι άμεσο από το γεγονός ότι τα μονοπάτια της W_t είναι συνεχή, και τέλος για τον πίνακα συνδιακυμάνσεων έχουμε

$$\mathbb{E}[\tilde{W}_s\tilde{W}_s] = \mathbb{E}[tsW_{\frac{1}{s}}W_{\frac{1}{t}}] = ts\cdot\min\left\{\frac{1}{t},\frac{1}{s}\right\} = ts\cdot\frac{1}{\max\{t,s\}} = \min\{t,s\},$$

και έπεται το ζητούμενο. □

Συνέπεια της προηγούμενης πρότασης είναι ότι αν ορίσουμε τη διαδικασία $\tilde{\vartheta}_t$ μέσω της (6.1.1), λόγω του ότι ταυτίζεται με τη λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (6.1.2), έχουμε ότι η διαδικασία

$$Y_s = s\tilde{\vartheta}_{1/s} = X + \tilde{W}_s \tag{6.1.11}$$

ουσιαστικά ταυτίζεται κατά κατανομή με την αντίστροφη στον χρόνο κίνηση Brown με το αρχικό σημείο να είναι από την κατανομή του μ. Δηλαδή, η Y_s δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια κίνηση Brown με τυχαίο (από το μ) σημείο εκκίνησης. Η ουσία είναι ότι η διαδικασία Y_s έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\rho_s = P_s\rho_0$, όπου $\rho_0 = p_0$ είναι η πυκνότητα του μ. Συνεπώς, για δοθείσα φ στον $\mathbb{R}^n$ και $t > 0$, η τυχαία μεταβλητή

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi p_t$$

συμφωνεί κατά κατανομή με την $Q_s\varphi$ ως προς το μέτρο μ_s, για $s = 1/t$. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$Q_s\varphi(y) = \mathbb{E}[\varphi(X)\mid \vartheta_t = \vartheta]\quad \text{για}\ \ s = 1/t > 0, \vartheta = ty\in\mathbb{R}^n. \tag{6.1.12}$$

Έστω τώρα $p_{s,y}$ και $Z(s,y)$ όπως στην Πρόταση 6.1.1. Τότε έχουμε το ακόλουθο λήμμα, το οποίο εκφράζει την τιμή της $Q_s\varphi$ στο σημείο y ως τη μέση τιμή της φ ως προς την πυκνότητα $p_{s,y}$.

Λήμμα 6.1.4. *Για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$ και $\varphi\in L^1(\mu)$ ισχύει ότι*

$$Q_s\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi\cdot p_{s,y}. \tag{6.1.13}$$

Απόδειξη. Εξ' ορισμού των $p_{s,y}$ και $Z(s,y)$, αν ρ είναι η λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα του μ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\rho_s(y)\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\varphi p_{s,y} &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)e^{\langle y,x\rangle/s-\|x\|_2^2/(2s)}\rho(x)dx\cdot\gamma_s(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\rho(x)\cdot\gamma_s(y-x)dx = [(\varphi\rho)*\gamma_s](y) = P_s(\varphi\rho),\end{aligned} \tag{6.1.14}$$

και το ζητούμενο έπεται από την (4.1.1). □

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, είμαστε σε θέση να δείξουμε το εξής.

Λήμμα 6.1.5. *Έστω $\varphi \in L^1(\mu)$ και $s > 0$. Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία $M_t = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi p_t$ που ορίζεται για $t \geqslant 0$. Τότε, για $t = 1/s$ έχουμε*

$$\mathbb{E}\,(M_t^2) = \|Q_s\varphi\|^2_{L^2(\mu_s)}.$$

Απόδειξη. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$ και $\vartheta = ty$. Από το Λήμμα 6.2.5 έχουμε

$$Q_s\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi p_{t,\vartheta} =: M(t,\vartheta). \tag{6.1.15}$$

Επιπλέον, η κατανομή του τυχαίου διανύσματος ϑ_t/t είναι το μέτρο πιθανότητας μ_s. Συνεπώς, από την (6.1.15),

$$\mathbb{E}\,(M_t^2) = \mathbb{E}\,(M(t,\vartheta)^2) = \mathbb{E}\left[(Q_s\varphi)^2\left(\frac{\vartheta_t}{t}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^n} (Q_s\varphi)^2 d\mu_s.$$

□

Θα συνδέσουμε τώρα τα παραπάνω με τον πίνακα συνδιακυμάνσεων της $p_{y,\vartheta}$. Για δοθείσα $f = (f_1,\ldots,f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ορίζουμε την $Q_sf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ κατά συντεταγμένη και θέτουμε $\|f\|^2_{L^2(\mu)} = \sum_i \|f_i\|^2_{L^2(\mu_s)}$. Καθώς

$$a_t = \int_{\mathbb{R}^n} xp_t(x)dx,$$

από το Λήμμα 6.2.6 έχουμε ότι, για κάθε $s > 0$, με $t = 1/s$

$$\mathbb{E}\|a_t\|_2^2 = \|Q_sx\|^2_{L^2(\mu_s)}. \tag{6.1.16}$$

Για $t > 0$ και $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ θέτουμε

$$A_t = A(t,\vartheta) = \mathrm{Cov}(p_{t,\vartheta}) = \int_{\mathbb{R}^n} [(x - a(t,\vartheta))]^{\otimes 2} p_{t,\vartheta} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

τον πίνακα συνδιακυμάνσεων της $p_{t,\vartheta}$. Τότε έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.1.6 (εξίσωση εξέλιξης του κέντρου βάρους). *Αν a_t είναι το βαρύκεντρο της p_t και A_t όπως πριν, τότε*

$$da_t = A_t dW_t,$$

και επιπλέον

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\|a_t\|_2^2 = \mathbb{E}\,(\|A_t\|_2^2), \tag{6.1.17}$$

όπου $\|A_t\|_q = \mathrm{tr}[A_t^q]^{\frac{1}{q}}$ η q-Shatten νόρμα του πίνακα A_t.

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\begin{aligned} da_t &= d\left(\int_{\mathbb{R}^n} xp_t(x)dx\right) = \int_{\mathbb{R}^n} x dp_t(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} x\langle x - a_t, dW_t\rangle p_t(x)\,dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} [x - a_t]^{\otimes 2} p_t(x)\right) dW_t + a_t \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - a_t, dW_t\rangle p_t(x) = A_t dW_t, \end{aligned}$$

καθώς $a_t = \int_{\mathbb{R}^n} xp_t(x)dx$. □

Αντίστοιχα, είμαστε σε θέση να δώσουμε την εξίσωση εξέλιξης του πίνακα συνδιακυμάνσεων της p_t.

Πρόταση 6.1.7 (εξίσωση εξέλιξης του πίνακα συνδιακυμάνσεων). *Έστω $a_t = \int_{\mathbb{R}^n} x p_t(x)dx$ και A_t ο πίνακας συνδιακυμάνσεων της p_t. Αν B_t είναι μια συνήθης κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^n$ με την p_t να ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση της στοχαστικής τοπικοποίησης των Vempala και Lee, τότε*

$$dA_t = \Big\langle \int_{\mathbb{R}^n} (x - a_t)^{\otimes 3} p_t(x)dx, dB_t \Big\rangle - A_t^2 dt. \tag{6.1.18}$$

Απόδειξη. Έχουμε αρχικά ότι

$$A_t = \int_{\mathbb{R}^n} [x - a_t]^{\otimes 2} p_t(x)dx.$$

Αν δούμε τον πίνακα A_t ως συνάρτηση των a_t, p_t δεν έχουμε προφανώς εξάρτηση από το x, συνεπώς ο τύπος του Itô δίνει

$$\begin{aligned} dA_t = &\int_{\mathbb{R}^n} [x - a_t]^{\otimes 2} dp_t(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} da_t \otimes (x - a_t)p_t(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} (x - a_t) \otimes da_t p_t(x)dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} (x - a_t) \otimes da_t dp_t dx - \int_{\mathbb{R}^n} da_t dp_t \otimes (x - a_t)dx + da_t da_t \int_{\mathbb{R}^n} p_t(x)dx. \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς το a_t είναι το κέντρο βάρους, ο δεύτερος και ο τρίτος όρος ισούνται με 0 διότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} da_t \otimes (x - a_t)p_t(x)dx = da_t \otimes \int_{\mathbb{R}^n} (x - a_t)p_t(x)dx = 0.$$

Ο πρώτος όρος τώρα, καθώς $dp_t(x) = \langle x - a_t, dB_t\rangle p_t(x)$, ισούται με

$$\int_{\mathbb{R}^n} [x - a_t]^{\otimes 2} \langle x - a_t, dB_t\rangle p_t(x)dx = \Big\langle \int_{\mathbb{R}^n} (x - a_t)^{\otimes 3} p_t(x)dx, dB_t \Big\rangle.$$

Για τους άλλους όρους έχουμε ότι, καθώς $da_t = A_t dB_t$, ο τελευταίος όρος ισούται προφανώς με $A_t^2 dt$, και για τον τέταρτο και τον πέμπτο όρο έχουμε επίσης ότι ισούνται με $A_t^2 dt$. Ενδεικτικά, για τον τέταρτο όρο (ομοίως και για τον πέμπτο) βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} (x - a_t) \otimes da_t dp_t dx = A_t dB_t \Big\langle \int_{\mathbb{R}^n} (x - a_t)^{\otimes 2} dp_t(x)dx, dB_t \Big\rangle = A_t^2 dt.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στον τύπο του Itô έχουμε το ζητούμενο. □

6.2 Ποιοτικά Αποτελέσματα για την αύξηση του πίνακα συνδιακυμάνσεων

Ορισμός 6.2.1. Για δοθέν $t > 0$ λέμε ότι ένα απολύτως συνεχές μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι t-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο αν έχει πυκνότητα της μορφής

$$x \to \exp\Big(-\varphi(x) - \frac{t}{2}\|x\|_2^2\Big)$$

για κάποια κυρτή συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Δηλαδή, αν το μ είναι κατά κάποιον τρόπο περισσότερο λογαριθμικά κοίλο από το μέτρο του Gauss με συνδιακύμανση $\frac{1}{t} I_n$.

Το βασικό εργαλείο για την απόδειξη της επόμενης πρότασης, που ουσιαστικά δίνει εκτίμηση για τον πίνακα συνδιακυμάνσεων του μ, είναι μια τροποποιημένη ανισότητα Poincaré στην περίπτωση που έχουμε 1-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Είναι γνωστό ότι τα μέτρα πιθανότητας μ αυτής της μορφής ικανοποιούν την ανισότητα Poincaré με σταθερά 1:

Λήμμα 6.2.2. *Για κάθε 1-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ και για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $g \in L_2(\mu)$ και $\int g\, d\mu = 0$ έχουμε*

$$\int g^2\, d\mu \leqslant \int \|\nabla g\|_2^2\, d\mu. \tag{6.2.1}$$

Με την πρόσθετη υπόθεση ότι $\int \nabla f\, d\mu = 0$, θα δείξουμε την ακόλουθη ισχυρότερη ανισότητα.

Πρόταση 6.2.3. *Έστω μ ένα 1-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Ορίζουμε $W = \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x\|_2^2$. Για κάθε συνάρτηση $f \in L^2(\mu)$, με μέση τιμή 0 και τέτοια ώστε $\int \nabla f d\mu = 0$, έχουμε*

$$\int f^2 d\mu \leqslant \frac{1}{2} \int \|\nabla f\|^2 d\mu. \tag{6.2.2}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής κλασικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 6.2.4. Έστω $\mathcal{D} := \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ με συμπαγή φορέα$\}$. Ο χώρος $L(\mathcal{D})$ είναι $L_2(\mu)$-πυκνός στον χώρο $L_2^0(\mu) := \{g \in L_2(\mu) : \int g\, d\mu = 0\}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση C^2 και συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ με λ. Θεωρούμε τον ορθομοναδιαίο τελεστή $U : L_2(\mu) \to L_2(\lambda)$ ο οποίος ορίζεται από την

$$U(f) = fe^{-W/2}.$$

Έστω $\psi \in \mathcal{D}$ και $f \in L_2(\mu)$ με $\|\nabla f\|_2 \in L_2(\mu)$. Θέτουμε $g = U(f) \in L_2(\lambda)$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
\langle -L(U^*(\psi), f\rangle_{L_2(\lambda)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla(U^*(\psi))(x), \nabla f(x)\rangle e^{-W(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\psi(x) + \frac{1}{2}\psi(x)\nabla W(x), e^{-W(x)/2}\nabla f(x)\rangle\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\psi(x) + \frac{1}{2}\psi(x)\nabla W(x), \nabla g(x) + \frac{1}{2}g(x)\nabla W(x)\rangle\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\psi(x)g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla(\psi g)(x), \nabla W(x)\rangle\, dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\psi(x)\|\nabla W(x)\|_2^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta\psi(x) + V(x)\psi(x))g(x)dx,
\end{aligned}$$

όπου $V(x) = \frac{1}{4}\|\nabla W(x)\|_2^2 - \frac{1}{2}\Delta W(x)$. Έπεται ότι για κάθε $f \in L_2(\mu)$ ισχύει η σχέση

$$\langle -L(U^*(\psi), f\rangle_{L_2(\lambda)} = \langle -\Delta\psi + V\psi, Uf\rangle_{L_2(\lambda)}. \tag{6.2.3}$$

Θεωρούμε $f \in L_2(\mu)$ η οποία είναι ορθογώνια στον $L(\mathcal{D})$. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι σταθερή. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $f \in L_2^0(\mu)$ και $f \perp L(\mathcal{D})$ τότε $f \equiv 0$, και έπεται ο ισχυρισμός του λήμματος.

Παρατηρούμε αρχικά ότι, λόγω της (6.2.3), η $g = Uf$ ικανοποιεί την $\Delta g = Vg$ ως κατανομή στον $\mathcal{D}'$. Επομένως $g \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ και η $\|\nabla f\|_2$ ορίζεται καλά. Θεωρούμε $h \in \mathcal{D}$ με $h \equiv 1$ σε μια περιοχή του 0, ορίζουμε $h_k(x) = h(x/k)$, $k \geqslant 1$, και θα δείξουμε ότι $\lim_{k\to\infty} \| \|\nabla(h_k f)\|_2\|_{L_2(\mu)} = 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι η

f είναι σταθερή, και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla(h_k f)(x)\|_2^2 d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla(h_k g e^{W/2})(x)\|_2^2 e^{-W(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\|\nabla(h_k g)(x)\|_2^2 + (h_k(x)g(x))^2 W(x))\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\|\nabla(h_k g)(x)\|_2^2 + h_k^2(x)g(x)\Delta g(x))\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla h_k(x)\|_2^2 g^2(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} h_k^2(x)\|\nabla g(x)\|_2^2 dx \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)g(x)\langle \nabla h_k(x), \nabla g(x)\rangle\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} h_k^2(x)g(x)\Delta g(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla h_k(x)\|_2^2 g^2(x)\, dx \to 0\end{aligned}$$

όταν $k \to \infty$, διότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}(h_k^2 g \nabla g)(x)\, dx = 0.$$

□

Απόδειξη της Πρότασης 6.2.3. Έστω $f \in L_2(\mu)$ με $\int f\, d\mu = 0$ και $\int \nabla f\, d\mu = 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\nabla f \in L_2(\mu)$. Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι, αφού $\int f\, d\mu = 0$, προφανώς έχουμε

$$\min\Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} (g-f)^2\, d\mu \;:\; g \in L_2(\mu),\ \int_{\mathbb{R}^n} g\, d\mu = 0 \Big\} = 0.$$

Συνεπώς, από το Λήμμα 6.2.4,

$$\inf\Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} (Lu-f)^2\, d\mu : u \in C^2 \text{ με συμπαγή φορέα} \Big\} = 0.$$

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u \in C^2$ με συμπαγή φορέα έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f^2(x) - \frac{1}{2}\|\nabla f(x)\|_2^2)\, d\mu(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (Lu-f)^2\, d\mu(x),$$

δηλαδή

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big((Lu(x)-f(x))^2 - f^2(x) + \frac{1}{2}\|\nabla f(x)\|_2^2 \Big)\, d\mu(x) \geqslant 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big((Lu(x))^2 - 2f(x)Lu(x) + \frac{1}{2}\|\nabla f(x)\|_2^2 \Big)\, d\mu(x) \geqslant 0.$$

Από την

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Lu)^2\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} (\|\mathrm{Hess}(u)\|_{HS}^2 + \langle (\mathrm{Hess}(W))(\nabla u), \nabla u\rangle)\, d\mu,$$

από το γεγονός ότι $\langle (\mathrm{Hess}(W))(\nabla u(x)), \nabla u(x)\rangle \geqslant \|\nabla u(x)\|_2^2$, και από την

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)Lu(x)\, d\mu(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u(x), \nabla f(x)\rangle\, d\mu(x),$$

βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\|\mathrm{Hess}(u)(x)\|_{\mathrm{HS}}^2+\|\nabla u(x)\|_2^2+2\langle\nabla u(x),\nabla f(x)\rangle+\frac{1}{2}\|\nabla f(x)\|_2^2\right)d\mu\geqslant 0.$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την τελευταία ανισότητα στη μορφή

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\|\mathrm{Hess}(u)(x)\|_{\mathrm{HS}}^2-\|\nabla u(x)\|_2^2+\frac{1}{2}\|2\nabla u(x)+\nabla f(x)\|_2^2\right)d\mu(x)\geqslant 0.$$

Θέτοντας $\alpha:=\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u(x)\,d\mu(x)$, εισάγοντας μια συνάρτηση u_0 με $\nabla u_0=\nabla u-\alpha$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\int_{\mathbb{R}^n}\nabla f\,d\mu=0$, βλέπουμε ότι η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\|\alpha\|_2^2+\int_{\mathbb{R}^n}\left(\|\mathrm{Hess}(u_0)\|_{\mathrm{HS}}^2-\|\nabla u_0\|_2^2+\frac{1}{2}\|2\nabla u_0+\nabla f\|_2^2\right)d\mu\geqslant 0.$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\|\mathrm{Hess}(u_0)\|_{\mathrm{HS}}^2-\|\nabla u_0\|_2^2\right)\,d\mu\geqslant 0.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2.2 για τις συναρτήσεις $\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}$ για $j=1,\dots,n$ (αυτή είναι ακριβώς η ανισότητα Poincaré για ένα μέτρο μ αυτής της ειδικής μορφής) και αθροίζοντας πάνω από όλα τα $j=1,\dots,n$ παίρνουμε την τελευταία ανισότητα, άρα και το συμπέρασμα. □

Λήμμα 6.2.5. *Έστω μ κεντραρισμένο 1-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, και (B_t) μια συνήθης κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^n$ με $B_0=0$. Τότε, υπάρχει προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία (Q_t) συμμετρικών πινάκων, τέτοια ώστε το $\int_0^1 Q_t dB_t$ να έχει κατανομή μ και τέτοια ώστε, σχεδόν βεβαίως,*

$$0\leqslant Q_t\leqslant Id\quad \text{για κάθε}\ \ t\in[0,1]. \tag{6.2.4}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες της απεικόνισης Brenier $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ που απεικονίζει το σύνηθες μέτρο Gauss στο μ. Η απεικόνιση αυτή είναι κλίση κυρτής συνάρτησης και επιπλέον η $T(B_1)$ έχει κατανομή μ. Εφόσον το μ είναι 1-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο, η απεικόνιση T είναι συστολή, από το θεώρημα του Caffarelli. Για τις ιδιότητες της απεικόνισης Brenier και για το θεώρημα Caffarelli παραπέμπουμε στο βιβλίο του Villani [94]. Από στοιχειώδεις ιδιότητες του πυρήνα της θερμότητας, για κάθε $t>0$, η λεία απεικόνιση $P_{1-t}(T):\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ παραμένει κλίση μιας κυρτής συνάρτησης, και ο

$$M_t(x)=\nabla P_{1-t}(T)(x)\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

είναι συμμετρικός πίνακας με $0\leqslant M_t(x)\leqslant I_n$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και κάθε $0<t<1$. Καθώς η $(P_{1-t}T)(B_t)$ είναι martingale, θέτοντας $Q_t=M_t(B_t)$ έχουμε

$$T(B_1)=(P_1T)(B_0)+\int_0^1 Q_t\,dB_t=\int_0^1 Q_t dB_t,$$

όπου $(P_1T)(0)=\mathbb{E}T(B_1)=0$ καθώς το μ είναι κεντραρισμένο. Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Λήμμα 6.2.6. *Έστω $t>0$ και μ κεντραρισμένο t-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας* *στον* $\mathbb{R}^n$. *Αν* X, Y *είναι δύο ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με κατανομή* μ, *τότε*

$$\mathbb{E}\,\langle X, Y\rangle^3 \leqslant \frac{3}{t}\,\mathbb{E}\,\langle X, Y\rangle^2 = \frac{3}{t}\mathrm{tr}(A^2),$$

όπου A *είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του* μ.

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι ομογενής, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $t = 1$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 6.2.5 και θεωρούμε το martingale (X_t) που δίνεται από την

$$X_t = \int_0^t Q_s\, dB_s.$$

Θέτουμε $X = X_1$ και θεωρούμε ένα αντίγραφο Y του X που είναι ανεξάρτητο από την κίνηση Brown B_t. Ειδικότερα, έχουμε ότι το Y είναι ανεξάρτητο από το X. Από τον τύπο του Itô,

$$\mathbb{E}\,\langle X, Y\rangle^3 = 3\int_0^1 \mathbb{E}\,[\langle X_t, Y\rangle \cdot \|Q_t Y\|_2^2]. \tag{6.2.5}$$

Σταθεροποιούμε $x \in \mathbb{R}^n$ και έναν συμμετρικό πίνακα Q. Εφόσον το Y είναι κεντραρισμένο και ο A είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του Y, έχουμε

$$\mathbb{E}\,[\langle X_t, Y\rangle \cdot \|Q_t Y\|_2^2] \leqslant \mathbb{E}\,[\langle x, Y\rangle^2]^{1/2} \cdot \mathrm{Var}(\|QY\|_2^2)^{1/2} = \langle Ax, x\rangle^{1/2} \cdot \mathrm{Var}(\|QY\|_2^2)^{1/2}.$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την ανισότητα Poincaré της Πρότασης 6.2.3: η κλίση του $\|QY\|_2^2$ είναι $2Q^2Y$ που είναι επίσης κεντραρισμένη, άρα

$$\mathrm{Var}(\|QY\|_2^2) \leqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\,[\|2Q^2Y\|_2^2] = 2\mathrm{tr}(Q^4A).$$

Αντικαθιστώντας στην (6.2.5) και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\mathbb{E}\,[\langle X, Y\rangle^3] \leqslant 3\sqrt{2}\left(\int_0^1 \mathbb{E}\,\langle AX_t, X_t\rangle \cdot \mathbb{E}\,\mathrm{tr}(Q_t^4A)\, dt\right)^{1/2}. \tag{6.2.6}$$

Για $t \in [0,1]$ θέτουμε $M_t = \mathbb{E}(Q_t^2)$. Από τον τύπο του Itô, ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του X_t είναι $\int_0^1 M_s\, ds$. Ειδικότερα, ο πίνακας $\int_0^1 M_s\, ds$ είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεν του X, δηλαδή ο A. Επιπλέον, από την (6.2.4) έχουμε σχεδόν βεβαίως ότι $Q_t^4 \leqslant Q_t^2$, άρα $\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(Q_t^4A) \leqslant \mathrm{tr}(M_tA)$, καθώς ο πίνακας A είναι θετικά ημιορισμένος. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbb{E}\,\langle AX_t, X_t\rangle \cdot \mathbb{E}\,[\mathrm{tr}(Q_t^4A)] &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^t \mathrm{tr}(M_sA)\, ds\right) \cdot \mathrm{tr}(M_tA)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \mathrm{tr}(M_tA)\, dt\right)^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2)^2, \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

και η ζητούμενη ανισότητα έπεται από τις (6.2.6) και (6.2.7). □

Παρατήρηση 6.2.7. Η ανισότητα του Λήμματος 6.2.6 είναι εξαιρετικά σημαντική για την τελική εκτίμηση, μάλιστα η τιμή της σταθεράς στην ανισότητα αυτή επηρεάζει άμεσα τον εκθέτη του λογαρίθμου στο τελικό αποτέλεσμα. Υπάρχει βελτιωμένη έκδοση της ανισότητας που παρουσιάζεται στο άρθρο των Vempala-Lee και επιτυγχάνει σταθερά $2\sqrt{2}$. Η απόδειξη αυτής της εκδοχής προϋποθέτει μια διαφορετική στοχαστική τοπικοποίηση από αυτήν που έχουμε περιγράψει μέχρι στιγμής, οπότε προτιμήσαμε την ανωτέρω προς αποφυγή σύγχυσης.

Πρόταση 6.2.8. *Για κάθε* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ *έχουμε ότι*

$$\mathbb{E}\,\|A_{t_2}\|_2^2 \leqslant \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^3 \mathbb{E}\,\|A_{t_1}\|_2^2.$$

Απόδειξη. Από την εξίσωση εξέλιξης (6.1.18) για τον πίνακα συνδιακυμάνσεων και από τον τύπο του Itô βλέπουμε ότι

$$d\mathrm{tr}(A_t^2) = 2\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij,t}\langle H_{ij,t}, dB_t\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} |H_{ij,t}|^2 dt - 2\mathrm{tr}(A_t^3)dt, \tag{6.2.8}$$

όπου $A_t = (A_{ij,t})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ και

$$H_{ij,t} = \int_{\mathbb{R}^n} (x-a_t)_i (x-a_t)_j (x-a_t)\, p_t(x)\, dx.$$

Στη συνέχεια, δεσμεύοντας ως προς την κίνηση Brown B_t παρατηρούμε ότι ο όρος $\sum_{i,j=1}^n |H_{ij,t}|^2$ είναι ακριβώς ίσος με $\mathbb{E}\,\langle X, Y\rangle^3$, όπου τα τυχαία διανύσματα X, Y είναι ανεξάρτητα, με πυκνότητα $p_t(x+a_t)$. Επιπλέον, επειδή η πυκνότητα p_t είναι t-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλη, τα τυχαία διανύσματα X, Y έχουν μέση τιμή 0, από τον ορισμό του a_t. Συνεπώς από το Λήμμα 6.2.6 έχουμε ότι

$$\sum_{i,j=1}^{n} |H_{ij,t}|^2 \leqslant \frac{3}{t}\cdot \mathrm{tr}(A_t^2). \tag{6.2.9}$$

με πιθανότητα 1. Παίρνοντας μέση τιμή στην (6.2.8), και σε συνδυασμό με την (6.2.9), συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2) \leqslant \frac{3}{t}\cdot \mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2) - 2\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^3) \leqslant \frac{3}{t}\cdot \mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2),$$

και ολοκληρώνοντας αυτή τη διαφορική ανισότητα, παίρνουμε το ζητούμενο. □

6.3 Φράγμα του πίνακα συνδιακυμάνσεων για μικρούς χρόνους και οι ανισότητες του Eldan

Για τις προτάσεις αυτής της ενότητας, ορίζουμε τις ποσότητες

$$\kappa_X^2 = \sup_{\vartheta\in S^{n-1}} \left\{\|\mathbb{E}\langle X,\vartheta\rangle(X\otimes X)\|_2^2\right\}$$

και

$$\kappa_n^2 = \sup_X \kappa_X^2,$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλα τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα τυχαία διανύσματα X στον $\mathbb{R}^n$. Τότε έχουμε το εξής.

Λήμμα 6.3.1. *Έστω X λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο το 0. Τότε,*

$$\kappa_X^2 \leqslant \|\mathrm{Cov}(X)\|_{\mathrm{op}}^3 \cdot \kappa_n^2,$$

όπου $\mathrm{Cov}(X)$ *είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του* X *και* $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ *είναι η νόρμα τελεστή.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η ανισότητα είναι ομογενής, βαθμού 6 ως προς X, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η νόρμα $\|\mathrm{Cov}(X)\|_{\mathrm{op}}$ του $\mathrm{Cov}(X)$ είναι ίση με 1. Συνεπώς, $\mathrm{Cov}(X) \leqslant I_n$, άρα ο πίνακας $I_n - \mathrm{Cov}(X)$ είναι θετικά ημιορισμένος. Έστω Y ένα λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα, ανεξάρτητο από το X, με πίνακα συνδιακυμάνσεων $I_n - \mathrm{Cov}(X)$, τέτοιο ώστε το Y να έχει την ίδια κατανομή με το $-Y$, δηλαδή το Y είναι συμμετρικό. Τότε, έχουμε

$$\mathbb{E}[(X+Y)^{\otimes 3}] = \mathbb{E}[X^{\otimes 3}],$$

που προκύπτει απλώς με λίγες πράξεις, καθώς οι άλλοι όροι στο ανάπτυγμα του τανυστή $(X+Y)^{\otimes 3}$ έχουν μέση τιμή 0. Από το παραπάνω έχουμε ότι $\kappa_X^2 = \kappa_{X+Y}^2$, και επειδή το τυχαίο διάνυσμα $X+Y$ είναι λογαριθμικά κοίλο και ισοτροπικό, έχουμε ότι $\kappa_{X+Y}^2 \leqslant \kappa_n^2$, που είναι το ζητούμενο. □

Θα χρειαστούμε επίσης το εξής λήμμα για martingales.

Λήμμα 6.3.2. *Έστω* $(M_t)_{t\geqslant 0}$ *ένα συνεχές martingale με* $M_0 = 0$ *και* $[M]_t \leqslant \sigma^2$ *σχεδόν βεβαίως, για κάποιον σταθερό χρόνο* $t > 0$ *και κάποια σταθερά* $\sigma > 0$. *Τότε,*

$$\mathbb{P}(M_t \geqslant u) \leqslant e^{-u^2/2\sigma^2}, \quad \text{για κάθε } u \geqslant 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda > 0$. Από τον τύπο του Itô, η διαδικασία (D_s) που ορίζεται από την

$$D_s = \exp\left(\lambda M_s - \frac{\lambda^2}{2}[M]_s\right)$$

είναι θετικό τοπικό martingale, άρα είναι super-martingale από το λήμμα του Fatou. Ειδικότερα, έχουμε $\mathbb{E}[D_t] \leqslant \mathbb{E}[D_0] = 1$. Από την υπόθεση, αυτό συνεπάγεται ότι

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda M_t)] \leqslant \exp(\lambda^2\sigma^2/2).$$

Από την ανισότητα Markov παίρνουμε

$$\mathbb{P}[M_t \geqslant u] = \mathbb{P}[\exp(\lambda M_t) \geqslant \exp(\lambda u)] \leqslant \exp(-\lambda u)\cdot\mathbb{E}[\exp(\lambda M_t)] \leqslant \exp(-\lambda u + \lambda^2\sigma^2/2),$$

και το ζητούμενο έπεται αν επιλέξουμε $\lambda = \frac{u}{\sigma^2}$. □

Στα παρακάτω, όπως πριν, έχουμε μ ιστοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, με πυκνότητα p_0, (p_t) είναι η αντίστοιχη διαδικασία που προκύπτει μέσω της στοχαστικής τοπικοποίησης των Vempala και Lee, και (a_t), (A_t) είναι οι αντίστοιχες διαδικασίες του βαρύκεντρου και του πίνακα συνδιακυμάνσεων.

Πρόταση 6.3.3. *Για κάθε* $t \leqslant (C\kappa_n^2\cdot\log n)^{-1}$ *έχουμε ότι*

$$\mathbb{P}(\|A_t\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2) \leqslant \exp(-(Ct)^{-1}),$$

όπου $C > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.1.7 γνωρίζουμε ότι η διαδικασία πινάκων $(A_t)_{t\geqslant 0}$ ικανοποιεί την

$$dA_t = \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} (x-a_t)^{\otimes 3} p_t(x)\,dx, dB_t\right\rangle - A_t^2 dt.$$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο του Itô για κατάλληλη ομαλή προσέγγιση της $\|A_t\|_{\rm op}$. Έστω $\beta > 0$ το οποίο θα επιλέξουμε αργότερα. Θεωρούμε την

$$\Phi_t = \frac{1}{\beta}\log \mathrm{tr}(e^{\beta A_t}).$$

Τότε,

$$\|A_t\|_{\rm op} \leqslant \Phi_t \leqslant \|A_t\|_{\rm op} + \frac{\log n}{\beta}.$$

Έστω $0 \leqslant \lambda_1(t) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(t)$ οι ιδιοτιμές του A_t, τις οποίες επαναλαμβάνουμε ανάλογα με την πολλαπλότητά τους, και $e_1(t), \ldots, e_n(t) \in \mathbb{R}^n$ μια αντίστοιχη ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ από ιδιοδιανύσματα. Για να απλουστεύσουμε τον υπολογισμό του $d\Phi_t$ θεωρούμε αρχικά την περίπτωση που οι ιδιοτιμές $\lambda_1(t) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(t)$ είναι σχεδόν βεβαίως διακεκριμένες για κάθε χρονική στιγμή t. Από τον τύπο του Itô έχουμε

$$d\lambda_i(t) = \langle u_{ii}(t), dB_t\rangle - \lambda_i(t)^2 dt + \sum_{\{j:\, j\neq i\}} \frac{|u_{ij}(t)|^2}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt,$$

όπου

$$u_{ij}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - a_t, e_i(t)\rangle\langle x - a_t, e_j(t)\rangle (x - a_t) p_t(x)\, dx.$$

Σημειώνουμε ότι η επιλογή της ορθοκανονικής βάσης ιδιοδιανυσμάτων, τα οποία προσδιορίζονται μονοσήμαντα αν εξαιρέσουμε τα πρόσημα, δεν επηρεάζει την έκφραση για την παράγωγο Itô των $\lambda_i(t)$. Τώρα, από τον τύπο του Itô για την ομαλή συνάρτηση

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{\beta}\log\left(\sum_{i=1}^n e^{\beta\lambda_i}\right)$$

έχουμε ότι (παραλείπουμε τον δείκτη t):

$$\Phi_t = \sum_i a_i\langle u_{ii}, dB_t\rangle - \sum_i a_i\lambda_i^2 dt + \sum_{j\neq i} \frac{a_i|u_{ij}|^2}{\lambda_i - \lambda_j} dt + \frac{\beta}{2}\sum_i a_i|u_{ii}|^2 dt - \frac{\beta}{2}\left|\sum_i a_i u_{ii}\right|^2 dt \tag{6.3.1}$$

όπου

$$a_i = \frac{e^{\beta\lambda_i}}{\sum_{i=1}^n e^{\beta\lambda}}.$$

Γράφουμε τον τρίτο όρο της (6.3.1) ως

$$\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{a_i - a_j}{\lambda_i - \lambda_j}|u_{ij}|^2,$$

και παρατηρούμε ότι αυτή η έκφραση για την $d\Phi_t$ εξακολουθεί να έχει νόημα στην περίπτωση που οι ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητα διακεκριμένες. Αυτό υποδεικνύει ότι αυτή η έκφραση για την $d\Phi_t$ εξακολουθεί να ισχύει αν αφαιρέσουμε αυτή την υπόθεση. Μάλιστα, αν εφαρμόσουμε τον τύπο του Itô στη συνάρτηση $A \mapsto \frac{1}{\beta}\log \mathrm{tr}(e^{\beta A})$ καταλήγουμε στην ίδια έκφραση για την $d\Phi_t$. Από τη γνωστή ανισότητα

$$\frac{e^x - e^y}{x - y} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2}$$

βγάζοντας τους μη αρνητικούς όρους έχουμε εν τέλει ότι

$$d\Phi_t \leqslant \sum_i a_i \langle u_{ii}, dB_t\rangle + \frac{\beta}{2}\sum_{i,j} a_i |u_{ij}|^2 dt.$$

Τώρα, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και τις αντίστροφες ανισότητες Holder για λογαριθμικά κοίλα μέτρα έχουμε

$$\begin{aligned} |u_{ii}| &\leqslant \sup_{\vartheta \in S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - a_t, e_i\rangle^2 |\langle x - a_t, \vartheta\rangle| p_t(x) dx \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x - a_t, e_i\rangle^4 p_t(x) dx \right)^{1/2} \cdot \|A_t\|_{\mathrm{op}}^{1/2} \leqslant C \|A_t\|_{\mathrm{op}}^{3/2} \end{aligned}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$. Από το Λήμμα 6.3.1, για κάθε σταθερό i έχουμε ότι

$$\sum_j |u_{ij}|^2 \leqslant \|A_t\|_{\mathrm{op}}^3 \cdot \kappa_n^2,$$

και εφόσον τα a_i αθροίζουν στο 1 έχουμε εν τέλει

$$d\Phi_t = \langle v_t, dB_t\rangle + c_t dt,$$

όπου

$$\|v_t\|_2^2 \leqslant C \cdot \|A_t\|_{\mathrm{op}}^{3/2} \quad \text{και} \quad c_t \leqslant \frac{1}{2}\beta \cdot \|A_t\|_{\mathrm{op}}^3 \cdot \kappa_n^2. \tag{6.3.2}$$

Έστω τ ο χρόνος διακοπής

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0 : \|A_t\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2\}.$$

Επιλέγουμε $\beta = 2\log n$ και υποθέτουμε ότι $t \leqslant (32 \cdot \kappa_n^2 \cdot \log n)^{-1}$. Παρατηρήστε ότι $\Phi_0 = 3/2$ καθώς το μ είναι ισοτροπικό. Από την (6.3.2) και τον ορισμό του τ έχουμε ότι

$$\Phi_{t\wedge\tau} \leqslant \Phi_0 + M_t + 8t \cdot \kappa_n^2 \cdot \log n \leqslant \frac{3}{2} + M_t + \frac{1}{4},$$

όπου M_t είναι το martingale

$$M_t = \int_0^{t\wedge\tau} \langle v_s, dB_s\rangle.$$

Αν $\|A_t\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2$, τότε $\tau \leqslant t$, $\|A_{t\wedge\tau}\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2$ και επιπλέον $\Phi_{t\wedge\tau} \geqslant 2$. Από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(\|A_t\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2) \leqslant \mathbb{P}\left(M_t \geqslant \frac{1}{4}\right).$$

Το martingale (M_s) ικανοποιεί την $M_0 = 0$ και από την (6.3.2) στον χρόνο t έχουμε

$$[M]_t = \int_0^{t\wedge\tau} \|v_s\|_2^2 ds \leqslant C' t, \quad \text{σχεδόν βεβαίως.}$$

Τέλος, από το Λήμμα 6.3.2 έχουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(M_t \geqslant \frac{1}{4}\right) \leqslant e^{-(C'' t)^{-1}},$$

που είναι το ζητούμενο. □

Πόρισμα 6.3.4. *Αν $t \leqslant (C\kappa_n^2 \cdot \log n)^{-1}$ και $p \geqslant 1$, τότε*

$$\mathbb{E}[\|A_t\|_{\rm op}^p] \leqslant C_p,$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $C_p > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

Απόδειξη. Καθώς ο A_t είναι πίνακας συνδιακυμάνσεων μέτρου που είναι περισσότερο λογαριθμικά κοίλο από το μέτρο του Gauss με πίνακα συνδιακυμάνσεων $\frac{1}{t}I_n$, έχουμε ότι $\|A_t\|_{\rm op} \leqslant \frac{1}{t}$ σχεδόν βεβαίως. Συνεπώς, από την Πρόταση 6.3.3 βλέπουμε ότι για $t \leqslant (C\kappa_n^2 \cdot \log n)^{-1}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left[\|A_t\|_{\rm op}^p\right] \leqslant 2^p + \frac{1}{t^p}\mathbb{P}(\|A_t\|_{\rm op} \geqslant 2) \leqslant 2^p + \frac{1}{t^p}e^{-1/Ct} \leqslant 2^p + C^p p!.$$

□

Επιπλέον, καθώς $\|A_t\|_p^p \leqslant n\|A_t\|_{\rm op}^p$, έχουμε το εξής.

Λήμμα 6.3.5. *Για $t \leqslant (C\kappa_n^2 \cdot \log n)^{-1}$ και $q \geqslant 1$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}\left[\|A_t\|_q^q\right] \leqslant C_q n,$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $C_q > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το q.

Συνδυάζοντας το Λήμμα 6.3.5 με την Πρόταση 6.2.8 καταλήγουμε στο εξής.

Πόρισμα 6.3.6. *Αν $t_1 = (C\kappa_n^2 \cdot \log n)^{-1}$, τότε*

$$\mathbb{E}\|a_t\|_2^2 \leqslant C_1 n \cdot t \cdot \max\left\{1, \frac{t^3}{t_1^3}\right\}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $C, C_1 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Από την (6.1.17) και παρατηρώντας ότι το a_0 είναι το κέντρο βάρους του μ, το οποίο έχουμε υποθέσει ότι είναι το 0, παίρνουμε

$$\mathbb{E}\|a_t\|_2^2 = \int_0^t \mathbb{E}\,\|A_r\|_2^2\, dr.$$

Για $r \in [0, t_1]$ έχουμε $\mathbb{E}\|A_r\|_2^2 \leqslant Cn$ από το Λήμμα 6.3.5. Για $r \geqslant t_1$ έχουμε

$$\mathbb{E}\,\|A_r\|_2^2 \leqslant \mathbb{E}\,\|A_{t_1}\|_2^2 \cdot \frac{r^3}{t_1^3} \leqslant C_1 n \cdot \frac{r^3}{t_1^3}$$

από την Πρόταση 6.2.8. Το ζητούμενο προκύπτει αν ολοκληρώσουμε αυτές τις ανισότητες από 0 έως t. □

Μία σημαντική συνέπεια (για $p = 1$) του Πορίσματος 6.3.6 είναι η ανισότητα του Eldan:

Πόρισμα 6.3.7. *Έχουμε ότι*

$$\psi_n \leqslant C\kappa_n^2 \cdot \log n,$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 6.3.4 με $t_1 = (C\kappa_n^2 \cdot \log n)^{-1}$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} \|A_t\|_{\mathrm{op}]}\, dt\right] \leqslant c' t_1 \leqslant \tilde{C}\frac{1}{\log n} = o(1),$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο όπως θα συζητήσουμε παρακάτω. □

Σε γενικότερο πλαίσιο, ισχύει η επόμενη πρόταση που συνδέει τον πίνακα A_t με την αντίστροφη σταθερά Cheeger.

Πρόταση 6.3.8. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Αν για κάποιο σταθερό $T \in (0,1)$ έχουμε ότι*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{T} \|A_t\|_{\mathrm{op}}\, dt\right) \leqslant \frac{1}{8},$$

τότε $\psi_\mu \leqslant \sqrt{T}$.

Απόδειξη. Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα p. Έστω επίσης p_t η πυκνότητα σε χρόνο t όπως προκύπτει μέσω της διαδικασίας της στοχαστικής τοπικοποίησης. Θεωρούμε τυχόν μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Από το γεγονός ότι το ισοπεριμετρικό προφίλ είναι κοίλο και συμμετρικό γύρω από το 1/2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το E έχει μέτρο $\mu(E) = \frac{1}{2}$.

Επειδή το μ είναι ισοτροπικό, γνωρίζουμε ότι $A_0 = \mathrm{Cov}(\mu) = I_n$ και, επιπλέον, από τις εξισώσεις εξέλιξης έχουμε ότι $A_t \leqslant \frac{1}{t} \cdot I_n$ αφού το αποτέλεσμα της στοχαστικής τοπικοποίησης είναι t-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο. Από το θεώρημα των Bakry-Ledoux, η σταθερά Cheeger της p_t είναι μικρότερη από την αντίστοιχη σταθερά για το μέτρο του Gauss με πυκνότητα $e^{-t\|x\|_2^2/2}$, η οποία είναι $\approx \sqrt{t}$. Από το γεγονός ότι η p_t είναι martingale, για κάθε t έχουμε

$$\mu^+(\partial E) = \mathbb{E}\,(p_t^+(\partial E)) \geqslant c\sqrt{t} \cdot \mathbb{E}\,(p_t(E)(1 - p_t(E)) \approx \sqrt{t}\mathbb{E}\,(M_t(1 - M_t)),$$

όπου, με κατάχρηση του συμβολισμού, $p_t(E)$ είναι το μέτρο του E την χρονική στιγμή t και M_t είναι το martingale $\int_E p_t(x)\, dx$. Για το M_t, από τις εξισώσεις εξέλιξης της Πρότασης 6.1.6 έχουμε ότι

$$dM_t = \langle u_t, dB_t\rangle,$$

όπου $u_t = \int_E (x - a_t)\, d\mu_t$. Επίσης, έχουμε

$$\|u_t\|_2 = \sup_{\vartheta\in S^{n-1}} \int_E \langle x - a_t, \vartheta\rangle p_t(x)\, dx \leqslant \sup_{\vartheta\in S^{n-1}} \left(\int_E \langle x - a_t, \vartheta\rangle^2 p_t(x) dx\right)^{1/2} = \|A_t\|_{\mathrm{op}}^{1/2}.$$

Τώρα, από τον τύπο του Itô έχουμε ότι

$$d(M_t(1 - M_t)) = -\|u_t\|_2^2 dt + dN_t \geqslant -\|A_t\|_{\mathrm{op}} + dN_t,$$

όπου N_t είναι κάποιο martingale, το οποίο δεν μας ενδιαφέρει καθώς ολοκληρώνοντας και παίρνοντας μέση τιμή παίρνουμε, για τον χρόνο T,

$$\mathbb{E}\,(M_T(1 - M_T)) \geqslant M_0(1 - M_0) - \mathbb{E}\left(\int_0^{T} \|A_t\|_{\mathrm{op}}\, dt\right) \geqslant \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8},$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση καθώς και το γεγονός ότι $M_0 = \mu(E) = \frac{1}{2}$. Μαζεύοντας όλα τα παραπάνω και λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό της αντίστροφης σταθεράς Cheeger έχουμε το ζητούμενο. □

Έχοντας τώρα συνδέσει την κ_n με την αντίστροφη σταθερά Cheeger, θα μας ήταν χρήσιμη μια σχέση ανάμεσα στη σταθερά λεπτού φλοιού σ_n και την κ_n, η οποία σε συνδυασμό με τη σχέση ανάμεσα στην ψ_n και την σ_n θα μας επέτρεπε έχοντας εκτιμήσεις για μία από όλες αυτές τις ποσότητες να φράξουμε τις υπόλοιπες. Για το σκοπό αυτό δείχνουμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 6.3.9. *Έστω X ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε $\vartheta \in S^{n-1}$. Αν $A = \mathbb{E}\,[(X\otimes X)\langle X,\vartheta\rangle]$, τότε*

$$\|A\|_2 \leqslant C\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^2}{k}.$$

Απόδειξη. Έστω $k \leqslant n$ και E_k υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k. Αν $P(X) = P_{E_k}(X)$ είναι η προβολή του X στον υπόχωρο E_k και $Y = \|P(X)\|_2 - \sqrt{k}$, από τον ορισμό της σ_k έχουμε

$$\mathrm{Var}(Y) \leqslant \sigma_k^2.$$

Εφόσον το X είναι ισοτροπικό, έχουμε $\mathbb{E}\,[\|P(X)\|_2^2] = k$. Επιπλέον,

$$\mathrm{Var}(\|P(X)\|_2^2) \leqslant ck\mathrm{Var}(Y) \leqslant ck\sigma_k.$$

Από την παραπάνω ανισότητα και την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει ότι

$$|\mathbb{E}\,[\langle X,\vartheta\rangle\,\|P(X)\|_2^2] \leqslant \sqrt{\mathrm{Var}(\langle X,\vartheta\rangle)\mathrm{Var}(\|P(X)\|_2^2)} \leqslant c\sqrt{k}\sigma_k.$$

Με άλλα λόγια,

$$|\mathrm{tr}[P_{E_k}AP_{E_k}]| \leqslant c\sqrt{k}\sigma_k.$$

Έστω τώρα $\lambda_1,\dots,\lambda_l$ οι μη αρνητικές ιδιοτιμές του πίνακα A σε φθίνουσα διάταξη. Η τελευταία ανισότητα δείχνει ότι ο πίνακας $P_{E_k}AP_{E_k}$ έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή μικρότερη από $c\sigma_k/\sqrt{k}$. Συνεπώς, αν επιλέξουμε ως E_k τον υπόχωρο που παράγεται από τα πρώτα k ιδιοδιανύσματα, βλέπουμε ότι

$$\lambda_k^2 \leqslant C\frac{\sigma_k^2}{k}.$$

Ομοίως τώρα, αν $\zeta_1,\dots,\zeta_{n-l}$ είναι οι αρνητικές ιδιοτιμές του πίνακα A, προκύπτει ότι $\zeta_k^2 \leqslant C\frac{\sigma_k^2}{k}$. Από τα παραπάνω έχουμε

$$\|A\|_2^2 = \sum_{k=1}^{l}\lambda_k^2 + \sum_{k=1}^{n-l}\zeta_k^2 \leqslant 2C\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^2}{k},$$

που ισοδυναμεί με το ζητούμενο. □

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα παίρνουμε το εξής θεώρημα, που είναι γνωστό και ως «ανισότητα του Eldan».

Θεώρημα 6.3.10. *Οι σταθερές ψ_n,σ_n και κ_n ικανοποιούν τις*

$$\psi_n^2 \leqslant C\log n\cdot\kappa_n \leqslant \tilde{C}\log^2 n\cdot\sigma_n^2.$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 6.3.7, το Λήμμα 6.3.9 και το γεγονός ότι $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \log n$. □

6.4 Απόδειξη της λογαριθμικής εκτίμησης των Klartag και Lehec

Στόχος μας σε αυτή την ενότητα είναι να δώσουμε το ακόλουθο, λογαριθμικό ως προς τη διάσταση, άνω φράγμα για την αντίστροφη σταθερά Cheeger.

Θεώρημα 6.4.1. *Για κάθε $n \geqslant 2$ έχουμε*

$$\psi_n \leqslant C(\log n)^a$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $C, a > 0$. Πιο συγκεκριμένα, η απόδειξη δίνει $a = 5$.

Για την ακρίβεια, αποδεικνύουμε ότι $\sigma_n \leqslant C(\log n)^4$, και το θεώρημα έπεται από την ανισότητα του Eldan (Θεώρημα 6.3.10).

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.1. Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με λεία πυκνότητα, τέτοιο ώστε $\sigma_\mu > \frac{\sigma_n}{2}$. Υπενθυμίζουμε ότι, από τις (4.3.6), (4.3.5) και την Πρόταση 4.1.1,

$$\sigma_\mu^2 \leqslant 4 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{F(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda,$$

όπου $F(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \nu_{x_i}([0,\lambda]) \in [0,1]$, καθώς και ότι

$$F(\lambda) \leqslant C\left(\frac{1}{n}\|Q_s x\|_{L_2(\mu_s)}^2 + \lambda s\right)$$

για θετικούς λ, s. Τώρα, αν $t = \frac{1}{s}$, από την (6.1.16) προκύπτει ότι:

$$F(\lambda) \leq c\left(\frac{1}{n}\mathbb{E}\,\|a_t\|_2^2 + \frac{\lambda}{t}\right). \tag{6.4.1}$$

Από το Πόρισμα 6.3.6, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\mathbb{E}\,\|a_t\|_2^2 \leqslant c_1 t \cdot \max\left\{1, \left(\frac{t}{t_1}\right)^3\right\} n, \tag{6.4.2}$$

όπου $t_1 = (C\kappa_n^2 \log n)^{-1}$. Τώρα, από τα Θεωρήματα 6.3.10, 3.1.7 και 3.1.3 προκύπτει ότι

$$t_1 = \frac{c}{\kappa_n^2 \log n} \leqslant \frac{c'}{\vartheta_\mu^2} = \tilde{c} \cdot \lambda_1. \tag{6.4.3}$$

Για δοθέν $\lambda \geqslant \lambda_1$, συνδυάζοντας τις (6.4.1) και (6.4.2), και επιλέγοντας $t = \lambda^{1/5} \cdot t_1^{3/5}$, παίρνουμε

$$F(\lambda) \leqslant CT^4 \cdot t_1^{-3} + C'\lambda \cdot t^{-1} \leqslant \tilde{C}\lambda^{4/5} \cdot t_1^{-3/5}. \tag{6.4.4}$$

Επιπλέον, από τις (4.3.5), (6.4.3) και (6.4.4) βλέπουμε ότι

$$\sigma_\mu^2 \leqslant \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{F(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda \leqslant C t_1^{-3/5} \cdot \int_{\lambda_1}^{\infty} \lambda^{-6/5}\, d\lambda = C' t_1^{-3/5} \cdot \lambda_1^{-1/5} \leqslant C' t_1^{-4/5}. \tag{6.4.5}$$

Από τον ορισμό του t_1, το γεγονός ότι το μ έχει σχεδόν μέγιστη σταθερά λεπτού φλοιού και την ανισότητα του Eldan (Θεώρημα 6.3.10), καθώς και από τις (4.3.1), (6.4.3) και (6.4.5) προκύπτει ότι

$$\sigma_n^2 \leqslant C\sigma_\mu^2 \leqslant C'(\kappa_n^2 \log n)^{4/5} \leqslant \tilde{C}(\sigma_n^2 \log^2 n)^{4/5},$$

και συνεπώς $\sigma_n \leqslant C(\log n)^4$. Έπεται ότι $\psi_n \leqslant C'(\log n)^5$, με μια τελευταία εφαρμογή της ανισότητας του Eldan . $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Μελέτη του πίνακα συνδιακυμάνσεων

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να περιγράψει την απόδειξη του βέλτιστου (μέχρι στιγμής) άνω φράγματος για την αντίστροφη σταθερά Cheeger. Το κεφάλαιο αυτό είναι σχεδόν ανεξάρτητο από την Ενότητα 6.4. Η ουσιαστική διαφορά είναι ότι χρησιμοποιούμε και συνδυάζουμε καλύτερα φράγματα για τα επί μέρους βήματα. Σημειώνουμε ότι, καθώς ακολουθούμε την πορεία της απόδειξης στο [55], το Λήμμα 6.2.6 χρησιμοποιείται στη μορφή της (6.2.7).

7.1 Κάποια χρήσιμα λήμματα

Προτού προχωρήσουμε στη μελέτη του προβλήματος υπό μια νέα σκοπιά, είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε και να μελετήσουμε την παρακάτω ποσότητα:

Ορισμός 7.1.1. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο a. Για κάθε τριάδα συμμετρικών πινάκων A_1, A_2, A_3 ορίζουμε την ποσότητα

$$T_\mu = \mathbb{E}_{X,Y\sim\mu} \prod_{i=1}^{3} \langle X-a, A_i(Y-a)\rangle,$$

όπου X, Y ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με κατανομή μ. Ομοίως ορίζεται η ποσότητα T_p για κάποια πυκνότητα p. Επιπλέον, ορίζουμε $T(A_1, A_2, A_3)$ να είναι το supremum των ποσοτήτων T_μ πάνω από όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 7.1.2. *Στην περίπτωση όπου $A_1 = A_2 = A_3 = I_n$ η παραπάνω ποσότητα δεν είναι τίποτα άλλο παρά $\mathbb{E}\langle X, Y\rangle^3$. Μελετώντας την ποσότητα σε αυτό το γενικότερο πλαίσιο, προκύπτουν κάποια καλύτερα ποιοτικά αποτελέσματα όπως θα φανεί και παρακάτω.*

Πρώτα κάποια πράγματα για λογισμό πινάκων. Για κάθε συμμετρικό πίνακα A ορίζουμε την απόλυτη τιμή του μέσω της

$$|A| = \sqrt{A^2}.$$

Γενικώς, για μη συμμετρικούς πίνακες ορίζουμε $|A| = \sqrt{AA^*}$. Παραθέτουμε ορισμένες ανισότητες πινάκων που θα φανούν χρήσιμες στην συνέχεια.

Θεώρημα 7.1.3 (ανισότητα Holder για πίνακες). *Έστω A, B συμμετρικοί πίνακες και p, q συζυγείς εκθέτες, δηλαδή $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Τότε,*

$$\operatorname{tr}(AB) \leqslant (\operatorname{tr}(|A|^p))^{1/p}(\operatorname{tr}(|B|^q))^{1/q}.$$

Απόδειξη. Έστω $\{e_i\}$ και $\{g_j\}$ ορθοκανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^n$ από ιδιοδιανύσματα του A και του B αντίστοιχα. Έστω επίσης $\{a_i\}$ και $\{b_j\}$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Τότε, από την ανισότητα Holder με βάρη έχουμε

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(|A|\,|B|) = \sum_{i,j} a_i b_j |\langle e_i, g_j\rangle|^2 &\leqslant \left(\sum_{i,j} a_i^p |\langle e_i, g_j\rangle|^2\right)^{1/p} \left(\sum_{i,j} b_j^q |\langle e_i, g_j\rangle|^2\right)^{1/q} \\ &= (\operatorname{tr}(|A|^p))^{1/p}(\operatorname{tr}(|B|^q))^{1/q},\end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Θεώρημα 7.1.4 (ανισότητα Lieb-Thirring). *Αν A, B είναι θετικά ημιορισμένοι πίνακες και $r \geqslant 1$, τότε*

$$\operatorname{tr}((B^{1/2}AB^{1/2})^r) \leqslant \operatorname{tr}(B^{r/2}A^rB^{r/2}).$$

Λήμμα 7.1.5. *Έστω B συμμετρικός πίνακας, A θετικά ημιορισμένος πίνακας και $a \in [0,1]$. Τότε,*

$$\operatorname{tr}(A^aBA^{1-a}B) \leqslant \operatorname{tr}(AB^2).$$

Λήμμα 7.1.6. *Για κάθε πίνακα A και κάθε ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα p έχουμε*

$$\mathrm{Var}_p(\langle X, AX\rangle) \leqslant \psi_r \cdot \|A\|_F^2,$$

όπου $r = \operatorname{rank}(A+A^T)$.

Απόδειξη. Εφόσον έχουμε $\langle X, AX\rangle = \langle X, A^TX\rangle$, ισχύει ότι

$$\mathrm{Var}_p(\langle X, AX\rangle) = \frac{1}{4}\mathrm{Var}_p(\langle X, (A+A^T)X\rangle),$$

και το ζητούμενο προκύπτει αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Poincaré για την προβολή της πυκνότητας p στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του μηδενοχώρου του πίνακα A. □

Λήμμα 7.1.7. *Για κάθε ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα p και κάθε ζεύγος συμμετρικών πινάκων A και B έχουμε ότι*

$$T_p(A, B, I_n) = \sum_i \operatorname{tr}(A\Delta_iB\Delta_i)$$

και

$$T_p(A, B, I_n) = \sum_{i,j} A_{ij}\operatorname{tr}(\Delta_iB\Delta_j),$$

όπου: $\Delta_i = \mathbb{E}_{X\sim p}X^{\otimes 2}X_i$.

Απόδειξη. Πράγματι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_p(A,B,I_n) &= \mathbb{E}\langle X,AY\rangle\langle X,BY\rangle\langle X,Y\rangle = \sum_i \mathbb{E}\langle X,AY\rangle\langle X,BY\rangle X_iY_i \\ &= \sum_i \mathbb{E}\,\mathrm{tr}(AX^{\otimes 2}BY^{\otimes 2}X_iY_i) = \sum_i \mathrm{tr}(A\Delta_iB\Delta_i), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ και ότι $\langle X,AY\rangle = \mathrm{tr}(AY\otimes X)$.

Για τη δεύτερη ισότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} T_p(A,B,I_n) &= \mathbb{E}\langle X,AY\rangle\langle X,BY\rangle\langle X,Y\rangle = \sum_{i,j} \mathbb{E}X_iY_j\langle X,BY\rangle\langle X,Y\rangle \\ &= \sum_{i,j} A_{ij}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(X^{\otimes 2}BY^{\otimes 2}X_iY_j) = \sum_{i,j} A_{ij}\mathrm{tr}(\Delta_iB\Delta_j). \end{aligned}$$

□

Λήμμα 7.1.8. *Για κάθε τριάδα θετικά ημιορισμένων πινάκων A_1,A_2,A_3 και κάθε ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα p έχουμε*

$$T_p(A_1,A_2,A_3) \geqslant 0.$$

Επίσης, για κάθε τριάδα συμμετρικών πινάκων B_1,B_2,B_3 ισχύει ότι

$$T_p(B_1,B_2,B_3) \leqslant T(|B_1|,|B_2|,|B_3|).$$

Απόδειξη. Έστω X,Y τυχαία διανύσματα με πυκνότητα την p. Ορίζουμε $\Delta_i = \mathbb{E}X^{\otimes 2}\langle X, A_3^{1/2}e_i\rangle$. Τότε έχουμε ότι

$$T_p(A_1,A_2,A_3) = \mathbb{E}\langle X,A_1Y\rangle\langle X,A_2Y\rangle\langle X,A_3Y\rangle = \sum_i \mathrm{tr}(A_1\Delta_iA_2\Delta_i).$$

Ο πίνακας Δ_i είναι συμμετρικός και $A_1,A_2\geqslant 0$, άρα $A_1^{1/2}\Delta_iA_2\Delta_iA_1^{1/2}\geqslant 0$ και $\mathrm{tr}(A_1\Delta_iA_2\Delta_i)\geqslant 0$. Συνεπώς, $T_p(A_1,A_2,A_3)\geqslant 0$.

Για τη δεύτερη ανισότητα γράφουμε $B_1 = B_1^{(1)} - B_1^{(2)}$, όπου $B_1^{(1)},B_1^{(2)}\geqslant 0$ και $|B_1| = B_1^{(1)} + B_1^{(2)}$, και ορίζουμε τους $B_2^{(1)},B_2^{(2)},B_3^{(1)},B_3^{(2)}$ ομοίως. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} T_p(B_1,B_2,B_3) = T_p(B_1^{(1)},B_2^{(1)},B_3^{1}) - T_p(B_1^{(1)},B_2^{(1)},B_3^{(2)}) - T_p(B_1^{(1)},B_2^{(2)},B_3^{(1)}) + T_p(B_1^{(1)},B_2^{(2)},B_3^{(2)}) \\ - T_p(B_1^{(2)},B_2^{(1)},B_3^{(1)}) + T_p(B_1^{(2)},B_2^{(1)},B_3^{(2)}) + T_p(B_1^{(2)},B_2^{(2)},B_3^{(1)}) - T_p(B_1^{(2)},B_2^{(2)},B_3^{(2)}). \end{aligned}$$

Εφόσον $B_j^{(i)}\geqslant 0$, από το πρώτο μέρος του λήμματος έχουμε ότι όλοι οι όροι $T_p(B_1^{(i)},B_2^{(j)},B_3^{(k)})$ είναι $\geqslant 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} T_p(B_1,B_2,B_3) &\leqslant T_p(B_1^{(1)},B_2^{(1)},B_3^{1}) + T_p(B_1^{(1)},B_2^{(1)},B_3^{(2)}) + T_p(B_1^{(1)},B_2^{(2)},B_3^{(1)}) + T_p(B_1^{(1)},B_2^{(2)},B_3^{(2)}) \\ &\quad + T_p(B_1^{(2)},B_2^{(1)},B_3^{(1)}) + T_p(B_1^{(2)},B_2^{(1)},B_3^{(2)}) + T_p(B_1^{(2)},B_2^{(2)},B_3^{(1)}) + T_p(B_1^{(2)},B_2^{(2)},B_3^{(2)}) \\ &= T_p(|B_1|,|B_2|,|B_3|), \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Λήμμα 7.1.9. *Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $0\leqslant b\leqslant \frac{1}{2}$ και $a\geqslant 1$ ώστε $\psi_k\leqslant ak^b$ για κάθε $1\leqslant k\leqslant n$. Έστω p ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα και v μοναδιαίο διάνυσμα. Τότε, για την ποσότητα*

$\Delta = \mathbb{E}X^{\otimes 2}\langle X, v\rangle$ *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Για κάθε ορθογώνια προβολή P με* $\mathrm{rank}(P) = r$,

$$\mathrm{tr}(\Delta P \Delta) \leqslant O(\psi^2_{\min(2r,n)}).$$

(ii) *Για κάθε συμμετρικό πίνακα A,*

$$\mathrm{tr}(\Delta A \Delta) \leqslant O(a^2 \log n) \cdot (\mathrm{tr}|A|^{\frac{1}{2b}})^{2b}.$$

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{tr}(\Delta P \Delta) = \mathbb{E}\langle X, P\Delta X\rangle\langle X, v\rangle$. Εφόσον $\mathbb{E}\langle X, v\rangle = 0$, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\mathrm{tr}(\Delta P \Delta) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(\langle X, v\rangle)^2}\sqrt{\mathrm{Var}(\langle X, P\Delta X\rangle)} \leqslant O(\psi_{\mathrm{rank}(P\Delta+\Delta P)}) \cdot \sqrt{\mathrm{tr}(\Delta P \Delta)},$$

χρησιμοποιώντας και το Λήμμα 7.1.6, και έπεται το ζητούμενο.

(ii) Αρχικά, καθώς $\mathrm{tr}(\Delta A \Delta) \leqslant \mathrm{tr}(\Delta |A| \Delta)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο πίνακας A είναι θετικά ημιορισμένος. Γράφουμε

$$A = \sum_i A_i + B,$$

όπου κάθε πίνακας A_i έχει ιδιοτιμές στο διάστημα $(\|A\|_{\mathrm{op}} 2^i/n, \|A\|_{\mathrm{op}} 2^{i+1}/n]$ και ο B έχει ιδιοτιμές το πολύ ίσες με $\|A\|_{\mathrm{op}}/n$. Έστω P_i η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στην εικόνα $C(A_i)$ του A_i. Καθώς έχουμε ότι $\|A_i\|_{\mathrm{op}} P_i \geqslant A_i$, προκύπτει ότι

$$\mathrm{tr}(\Delta A_i \Delta) \leqslant \|A_i\|_{\mathrm{op}} \mathrm{tr}(\Delta P_i \Delta) \leqslant O(\psi^2_{\min(2\mathrm{rank}(A_i),n)})\|A_i\|_{\mathrm{op}} \leqslant O(a^2) \cdot \sum_i \mathrm{rank}(A_i)^{2b}\|A_i\|_{\mathrm{op}},$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το πρώτο κομμάτι του λήμματος. Ομοίως τώρα έχουμε

$$\mathrm{tr}(\Delta B \Delta) \leqslant O(\psi_n^2)\|B\|_{\mathrm{op}} \leqslant O(n\|B\|_{\mathrm{op}}) \leqslant O(1)\|A\|_{\mathrm{op}}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\Delta A_i \Delta) &\leqslant O(a^2) \cdot \sum_i \mathrm{rank}(A_i)^{2b}\|A_i\|_{\mathrm{op}} + O(1)\|A\|_{\mathrm{op}} \\ &\leqslant O(a^2) \cdot \left(\sum_i \mathrm{rank}(A_i)\|A_i\|_{\mathrm{op}}^{1/(2b)}\right)^{2b} (\log n)^{1-2b} \\ &\leqslant O(a^2 \log n) \cdot (\mathrm{tr}|A|^{1/(2b)})^{2b}.\end{aligned}$$

□

Λήμμα 7.1.10. *Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $0 \leqslant b \leqslant \frac{1}{2}$ και $a \geqslant 1$ ώστε $\psi_k \leqslant ak^b$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$. Τότε, για κάθε ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα p στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε ζεύγος συμμετρικών πινάκων A, B έχουμε:*

(i) $T_p(A, I_n, I_n) \leqslant T_p(I_n, I_n, I_n) \cdot \|A\|_{\mathrm{op}}$.

(ii) $T_p(A, I_n, I_n) \leqslant O(\psi_n^2) \cdot \mathrm{tr}|A|$.

(iii) $T_p(A, B, I_n) \leqslant O(\psi_r^2) \cdot \|B\|_{\mathrm{op}} \mathrm{tr}(|A|)$, *όπου* $r = \min(2\mathrm{rank}(B), n)$.

(iv) $T_p(A, B, I_n) \leqslant O(a^2 \log n) \cdot (\mathrm{tr}|B|^{1/(2b)})^{2b} \mathrm{tr}|A|$.

(v) $T_p(A, B, I_n) \leqslant (T_p(|A|^s, I_n, I_n))^{1/s} \cdot (T_p(|B|^t, I_n, I_n))^{1/t}$ *για κάθε* $s, t \geqslant 1$ *με* $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο A είναι διαγώνιος. Πράγματι, αν έχουμε έναν μη διαγώνιο πίνακα και χρειαζόμαστε να δείξουμε κάτι για την ποσότητα $\mathrm{tr}(A^a \Delta A^b \Delta)$ όπου A, Δ συμμετρικοί πίνακες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την φασματική αποσύνθεση $A = U\Sigma U^T$ και να γράψουμε την $\mathrm{tr}(A^a \Delta A^b \Delta)$ στη μορφή

$$\mathrm{tr}(U\Sigma^a U^T \Delta U \Sigma^b U^T \Delta) = \mathrm{tr}(\Sigma^a (U^T \Delta U) \Sigma^b (U^T \Delta U)),$$

συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε τις προτάσεις στην περίπτωση που έχουμε διαγώνιο πίνακα A.

(i) Έχουμε, διαδοχικά,

$$T_p(A, I_n, I_n) = \sum_i A_{ii} \mathrm{tr}(\Delta_i^2) \leqslant \|A\|_{\mathrm{op}} \sum_i \mathrm{tr}(\Delta_i^2) = \|A\|_{\mathrm{op}} T_p(I_n, I_n, I_n),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 7.1.7.

(ii) Όπως πριν, έχουμε

$$T_p(A, I_n, I_n) = \sum_i A_{ii} \mathrm{tr}(\Delta_i^2) \leqslant \sum_i |A_{ii}| O(\psi_n^2) = O(\psi_n^2) \mathrm{tr}|A|,$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν τα Λήμματα 7.1.7 και 7.1.8.

(iii) Έστω P η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στον $C(B)$. Από τα Λήμματα 7.1.8 και 7.1.7 έχουμε

$$T_p(A, B, I_n) \leqslant T_p(|A|, |B|, I_n) = \sum_i A_{ii} \mathrm{tr}(\Delta_i |B| \Delta_i).$$

Καθώς τώρα $|B| \leqslant \|B\|_{\mathrm{op}} P$, βλέπουμε ότι

$$T_p(A, B, I_n) \leqslant \|B\|_{\mathrm{op}} \sum_i |A_{ii}|\, \mathrm{tr}(\Delta_i P \Delta_i) \leqslant O(\psi_r^2) \mathrm{tr}|A|\, \|B\|_{\mathrm{op}}$$

από το Λήμμα 7.1.9.

(iv) Από τα Λήμματα 7.1.7 και 7.1.9 παίρνουμε

$$T_p(A, B, I_n) = \sum_i A_{ii} \mathrm{tr}(\Delta_i B \Delta_i) \leqslant O(a^2 \log n) \mathrm{tr}|A|\, (\mathrm{tr}|B|^{1/(2b)})^{2b}.$$

(v) Εφαρμόζοντας πάλι τα Λήμματα 7.1.8 και 7.1.7, έχουμε

$$\begin{aligned} T_p(A, B, I_n) \leqslant T_p(|A|, |B|, I_n) &= \sum_i \mathrm{tr}(|A| \Delta_i |B| \Delta_i) \leqslant \sum_i \mathrm{tr}(|A| |\Delta_i| |B| |\Delta_i|) \\ &= \sum_i \mathrm{tr}(|\Delta_i|^{1/s} |A| |\Delta_i|^{1/s} |\Delta_i|^{1/t} |B| |\Delta_i|^{1/t}). \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Holder του Θεωρήματος 7.1.3, έχουμε

$$T_p(A,B,I_n) \leqslant \sum_i [\mathrm{tr}((|\Delta_i|^{1/s}|A||\Delta_i|^{1/s})^s)]^{1/s} \cdot \sum_i [\mathrm{tr}((|\Delta_i|^{1/t}|B||\Delta_i|^{1/t})^t)]^{1/t},$$

και από την ανισότητα Lieb-Thirring του Θεωρήματος 7.1.4 παίρνουμε

$$\begin{aligned} T_p(A,B,I_n) &\leqslant \sum_i [\mathrm{tr}((|\Delta_i||A|^s|\Delta_i|)]^{1/s} \cdot \sum_i [\mathrm{tr}(|\Delta_i||B|^t|\Delta_i|)]^{1/t} \\ &\leqslant \sum_i (\mathrm{tr}(|A|^s\Delta_i^2))^{1/s} \cdot (\mathrm{tr}|B|^t\Delta_i^2)^{1/t} \leqslant \left(\sum_i \mathrm{tr}(|A|^s\Delta_i^2)\right)^{1/s} \cdot \left(\sum_i \mathrm{tr}(|B|^t\Delta_i^2)\right)^{1/t} \\ &= (T_p(|A|^2, I_n, I_n))^{1/s} \cdot (T_p(|B|^t, I_n, I_n))^{1/t}, \end{aligned}$$

με μια τελευταία εφαρμογή του Λήμματος 7.1.7.

□

Λήμμα 7.1.11. *Για κάθε ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα p στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε τριάδα θετικά ημιορισμένων πινάκων A, B, C και κάθε $a \in [0,1]$ ισχύει ότι*

$$T_p(B^{1/2}A^aB^{1/2}, B^{1/2}A^{1-a}B^{1/2}, C) \leqslant T_p(B^{1/2}AB^{1/2}, B, C).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\Delta_i = \mathbb{E}_{X\sim p} B^{1/2}XX^TB^{1/2}X^TC^{1/2}e_i.$$

Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} T_p(B^{1/2}A^aB^{1/2}, B^{1/2}A^{1-a}B^{1/2}, C) &= \mathbb{E}X^TB^{1/2}A^aB^{1/2}YX^TB^{1/2}A^{1-a}B^{1/2}YX^TCY \\ &= \sum_i \mathbb{E}((Y^TB^{1/2}A^aB^{1/2}X)(X^TB^{1/2}A^{1-a}B^{1/2}Y)X^TC^{1/2}e_iC^{1/2}e_i) \\ &= \sum_i \mathbb{E}(\mathrm{tr}(A^aB^{1/2}XX^TB^{1/2}A^{1-a}B^{1/2}YY^TB^{1/2})(X^TC^{1/2}e_i)(Y^TC^{1/2}e_i)) \\ &= \sum_i \mathrm{tr}(A^a\Delta_iA^{1-a}\Delta_i), \end{aligned}$$

και από το Λήμμα 7.1.4 βλέπουμε ότι

$$\sum_i \mathrm{tr}(A^a\Delta_iA^{1-a}\Delta_i) \leqslant \sum_i \mathrm{tr}(A\Delta_i^2) = \mathbb{E}X^TB^{1/2}AB^{1/2}YX^TBYX^TCY = T_p(B^{1/2}AB^{1/2}, B, C).$$

□

Λήμμα 7.1.12. *Για κάθε a-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με πίνακα συνδιακυμάνσεων A και κάθε $q \geqslant 3$, έχουμε*

$$T_\mu(A^{q-2}, I_n, I_n) \leqslant \frac{2}{a}\mathrm{tr}(A^q).$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ έχει βαρύκεντρο το 0. Έστω $\lambda_i > 0$ οι ιδιοτιμές και v_i ορθοκανονική βάση από αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A. Τότε έχουμε

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^{\otimes 2} \quad \text{και} \quad A^q = \sum_{i=1}^n \lambda_i^q v_i^{\otimes 2}.$$

Θεωρούμε επίσης την ποσότητα
$$\Delta_i = \mathbb{E}[\langle X, A^{-\frac{1}{2}} v_i\rangle \cdot X^{\otimes 2}].$$

Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} T_\mu(A^{q-2}, I_n, I_n) &= \mathbb{E}[\langle X, A^{q-2}Y\rangle \cdot \langle X, Y\rangle^2] = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{q-1}\mathbb{E}[\langle X, A^{-1/2}v_i\rangle\langle Y, A^{-1/2}v_i\rangle\langle X, Y\rangle\langle X, Y\rangle] \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^{q-1}\mathrm{tr}(\Delta_i^2), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι τα X, Y είναι ανεξάρτητα. Για τον όρο $\mathrm{tr}(\Delta_i^2)$, καθώς το X έχει βαρύκεντρο το 0 και πίνακα συνδιακυμάνσεων A, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\Delta_i^2) &= \mathbb{E}\langle X, A^{-1/2}v_i\rangle\langle X, \Delta_i X\rangle \\ &\leqslant \sqrt{\mathbb{E}(\langle X, A^{-1/2}v_i\rangle)^2}\sqrt{\mathrm{Var}(\langle X, \Delta_i X\rangle)} = \sqrt{\mathrm{Var}(\langle X, \Delta_i X\rangle)}. \end{aligned}$$

Επειδή το μ είναι a-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο και το grad του $\langle X, \Delta_i X\rangle$ έχει μέση τιμή 0, από την Πρόταση 6.2.3 έχουμε
$$\mathrm{Var}(\langle X, \Delta_i X\rangle) \leqslant \frac{1}{2a}\mathbb{E}\|2\Delta_i X\|_2^2 \leqslant \frac{2}{a}\mathrm{tr}(A\Delta_i^2).$$
Μαζεύοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} T_\mu(A^{q-2}, I_n, I_n) &\leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i^{q-1}\sqrt{\frac{2}{a}\mathrm{tr}(A\Delta_i^2)} \leqslant \sqrt{\frac{2}{a}\sum_{i=1}^n \lambda_i^q}\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{q-2}\mathrm{tr}(A\Delta_i^2)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}\mathrm{tr}(A^q)}\sqrt{T_\mu(A^{q-3}, I_n, I_n)} \leqslant \sqrt{\frac{2}{a}\mathrm{tr}(A^q)}\sqrt{T_\mu(A^{q-2}, I_n, I_n)}, \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Θα χρειαστούμε επίσης ένα αποτέλεσμα των Juditsky και Nemirovski για την Εσσιανή συναρτήσεων πινάκων.

Λήμμα 7.1.13. *Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $I = (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε, για κάποιους $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ και για κάθε $a, b \in [\alpha, \beta]$, να ισχύει ότι*

$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} \leqslant \vartheta\frac{f''(b) + f''(a)}{2} + \varphi.$$

Τότε, για κάθε πίνακα X με ιδιοτιμές στο (α, β) έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 \mathrm{tr} f(X)}{\partial X^2}\Big|_{H,H} \leqslant \vartheta\, \mathrm{tr}(f''(X)H^2) + \varphi\, \mathrm{tr}(H^2).$$

Λήμμα 7.1.14. *Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = x^q$ για $x \geqslant 0$ και 0 διαφορετικά, όπου $q \geqslant 3$. Τότε,*

$$\frac{\varphi'(a) - \varphi'(b)}{b - a} \leqslant \frac{\varphi''(b) + \varphi''(a)}{2}$$

για κάθε $a < b$.

Απόδειξη. Ουσιαστικά η απόδειξη σπάει σε τρεις περιπτώσεις:

(i) Αν $0 \leqslant a < b$, σταθεροποιούμε το a και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$V(b) = \frac{\varphi''(b) + \varphi''(a)}{2}(b-a) - (\varphi'(a) - \varphi'(b)).$$

Παρατηρούμε ότι $V(a) = 0$ και ότι

$$V(b) = q(q-1)\frac{b^{q-2} + a^{q-2}}{2}(b-a) - q(b^{q-1} - a^{q-1}).$$

Παραγωγίζοντας ως προς b έχουμε

$$\frac{2V'(b)}{q(q-1)(q-2)} = \frac{q-3}{q-2}b^{q-2} + \frac{1}{q-2}a^{q-2} - b^{q-3}a \geqslant 0,$$

από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου με βάρη. Συνεπώς, έχουμε ότι $V'(b) \geqslant 0$ για κάθε $b > 0$, άρα $V(b) \geqslant V(a) = 0$, που είναι το ζητούμενο.

(ii) Αν $a \leqslant 0 \leqslant b$, εφόσον $q \geqslant 3$ έχουμε

$$\frac{\varphi'(b) - \varphi'(a)}{b-a} = \frac{qb^{q-1}}{b} \leqslant \frac{q(q-1)}{2}b^{q-2} = \frac{\varphi''(b) + \varphi''(a)}{2}.$$

(iii) Αν $a \leqslant b \leqslant 0$ τότε και τα δύο μέλη είναι ίσα με 0, συνεπώς το ζητούμενο είναι προφανές.

$\square$

Λήμμα 7.1.15. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πίνακα συνδιακυμάνσεων A. Έστω p_t το αποτέλεσμα της στοχαστικής τοπικοποίησης των Lee και Vempala. Έστω επίσης A_t ο πίνακας συνδιακυμάνσεων της p_t και φ όπως στο προηγούμενο λήμμα. Τότε, για κάθε $q \in \{2\} \cup [3, +\infty)$ έχουμε*

$$d\,\mathrm{tr}\varphi(A_t - bI_n) = \mathbb{E}(X-a_t)^T\varphi'(A_t - bI_n)(X-a_t)^{\otimes 2}dW_t - \mathrm{tr}(\varphi'(A_t - bI_n)A_t^2)dt + \frac{1}{2}T_{p_t}(\varphi''(A_t - bI_n), I_n, I_n)dt,$$

και ειδικότερα

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(\varphi(A_t - bI_n)) \leqslant \frac{1}{2}T_{p_t}(\varphi''(A_t - bI_n), I_n, I_n),$$

όπου η μέση τιμή είναι η δεσμευμένη ως προς τον A_t.

Απόδειξη. Έστω $\Phi_t = \mathrm{tr}(\varphi(A_t - bI_n))$. Από την έκφραση για τον πίνακα συνδιακυμάνσεων της p_t έχουμε

$$dA_t = \mathbb{E}(X-a_t)^{\otimes 3}dW_t - A_t^2dt = \sum_i Z_i dW_{t,i} - A_t^2dt,$$

όπου $Z_i = \mathbb{E}(X-a_t)(X-a_t)^T(X-a_t)_i$. Από τον τύπο του Itô έχουμε

$$d\Phi_t = \frac{\partial \mathrm{tr}\Phi_t}{\partial A_t}\Big|_{dA_t} + \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2 \mathrm{tr}\Phi_t}{\partial A_t^2}\Big|_{Z_i, Z_i}dt.$$

Για τον όρο πρώτης τάξης έχουμε

$$\frac{\partial \mathrm{tr}\Phi_t}{\partial A_t}\Big|_{dA_t} = \mathrm{tr}\varphi'(A_t - bI_n)dA_t = \mathbb{E}(X-a_t)^T\varphi'(A_t - bI_n)(X-a_t)^{\otimes 2}dW_t - \mathrm{tr}(\varphi'(A_t - bI_n)A_t^2)dt,$$

ενώ για τον δεύτερο όρο, από το Λήμμα 7.1.13 με $\vartheta = 1$ και $\varphi = 0$, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 \mathrm{tr}\Phi_t}{\partial A_t^2}\Big|_{Z_i,Z_i} \leqslant \sum_i \mathrm{tr}(\varphi''(A_t - bI_n)Z_i^2) = T_{p_t}(\varphi''(A_t - bI_n), I_n, I_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε το ζητούμενο. Ειδικότερα, έχουμε

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(\varphi(A_t - bI_n)) = -\mathrm{tr}(\varphi'(A_t - bI_n)A_t^2) + \frac{1}{2}T_{p_t}(\varphi''(A_t - bI_n), I_n, I_n),$$

και, καθώς $\varphi'(x) \geqslant 0$ για κάθε x, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(\varphi(A_t - bI_n)) \leqslant \frac{1}{2}T_{p_t}(\varphi''(A_t - bI_n), I_n, I_n).$$

□

7.2 Δεσμευμένο φράγμα

Λήμμα 7.2.1. *Έστω μ ένα a-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0. Τότε,*

$$\mu \sim \int_0^\infty Q_t dW_t$$

για θετικά ημιορισμένους πίνακες Q_t με $0 \leqslant Q_t \leqslant \frac{1}{a+t}I_n$. Επιπλέον, έχουμε

$$\mathbb{E}(Q_t) \leqslant A,$$

όπου A είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του μ και η μέση τιμή είναι υπεράνω της στοχαστικής διαδικασίας που παράγει την Q_t.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.1.6 έχουμε ότι

$$da_t = A_t dW_t,$$

όπου A_t είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων της p_t. Εφόσον η p_0 είναι a-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλη, έχουμε ότι η p_t είναι $(a+t)$-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλη, άρα

$$\|A_t\|_{\mathrm{op}} \leqslant \frac{1}{a+t},$$

το οποίο δίνει τον πρώτο ισχυρισμό με $Q_t = A_t$. Για τον δεύτερο ισχυρισμό, έχουμε

$$dA_t = \mathbb{E}[X - a_t]^{\otimes 3} dW_t - A_t^2 dt,$$

και παίρνοντας μέση τιμή βλέπουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}(A_t) \leqslant 0,$$

άρα $\mathbb{E}(A_t) \leqslant A$. □

Λήμμα 7.2.2. *Για κάθε a-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ με πίνακα συνδιακυμάνσεων A, έστω p_t το αποτέλεσμα της διαδικασίας στοχαστικής τοπικοποίησης των Vempala και Lee* *με αρχική πυκνότητα p_0 που δίνεται από το μ. Έστω A_t ο πίνακας συνδιακυμάνσεων της p_t. Τότε, για κάθε $q \geqslant 3$ έχουμε*

$$\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^q) \leqslant \left(1+\frac{t}{a}\right)^{q(q-1)} \mathrm{tr}(A^q).$$

Ειδικότερα, οι Q_t όπως ορίστηκαν στο Λήμμα 7.2.1 ικανοποιούν την

$$\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(Q_t^q) \leqslant \left(1+\frac{t}{a}\right)^{q(q-1)} \mathrm{tr}(A^q).$$

Απόδειξη. Έστω a_t το βαρύκεντρο της p_t. Τότε, το Λήμμα 7.1.15 για $b = 0$ μας δίνει

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^q) \leqslant \frac{q(q-1)}{2} T_{p_t}(A_t^{q-2}, I_n, I_n).$$

Εφόσον η p_t είναι $(a+t)$-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλη (από την Πρόταση 6.1.1) χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.1.12 παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^q) \leqslant \frac{q(q-1)}{a+t}\mathrm{tr}(A_t^q).$$

Λύνοντας αυτή τη διαφορική ανισότητα έχουμε τον πρώτο ισχυρισμό του λήμματος. Ο δεύτερος έπεται από το γεγονός ότι ο Q_t στο Λήμμα 7.2.1 είναι ακριβώς ο A_t. □

Λήμμα 7.2.3. *Έστω μ ένα a-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με πίνακα συνδιακυμάνσεων A. Για $q \in [3, 8]$ υποθέτουμε ότι*

$$\mathrm{tr}(A^q) \leqslant \frac{1}{a^{q-2}\zeta}\mathrm{tr}(A^2).$$

Τότε,

$$T_\mu(I_n, I_n, I_n) \leqslant \frac{12}{a\zeta^{1/(2(q^2-2))}}\mathrm{tr}(A^2).$$

Εναλλακτικά,

$$T_\mu(I_n, I_n, I_n) \leqslant \frac{12}{a^3} \cdot (a^q \mathrm{tr}(A^q))^c \cdot (a^2 \mathrm{tr}(A^2))^{1-c},$$

όπου $c = \frac{1}{2(q^2-2)}$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 7.2.1 έχουμε ότι $\mu \sim \int_0^\infty Q_s dW_s$. Για $X \sim \mu$ ορίζουμε τον τυχαίο περίπατο X_t μέσω της $X_t = \int_0^t Q_s\, ds$. Τότε, έχουμε $X_\infty = X$. Τώρα, από τον τύπο του Itô και την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} T_\mu(I_n, I_n, I_n) = \mathbb{E}\langle X, Y\rangle^3 &= 3\int_0^\infty \mathbb{E}\left(\langle X, Y\rangle \cdot \|Q_t Y\|_2^2\right) dt \\ &\leqslant 3\int_0^\infty \mathbb{E}_X \sqrt{\mathbb{E}_Y\langle X, Y\rangle^2 \cdot \mathrm{Var}\|Q_t Y\|_2^2 dt}. \end{aligned}$$

Επειδή το μ είναι a-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλο και η κλίση του $\|Q_t Y\|_2^2$ έχει μέση τιμή 0 από την Πρόταση 6.2.3 έχουμε ότι

$$\mathrm{Var}\|Q_t Y\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2a}\mathbb{E}\|2Q_t^2 Y\|_2^2 = \frac{2}{a}\mathrm{tr}(Q_t^4 A).$$

Τώρα, επειδή το X_t είναι martingale, έχουμε ότι

$$A = \mathbb{E}X_\infty^{\otimes 2} = \mathbb{E}X_t^{\otimes 2} + \mathbb{E}[X_\infty - X_t]^{\otimes 2}.$$

Ειδικότερα, έχουμε $\mathbb{E}X_t^{\otimes 2} \leqslant A$. Χρησιμοποιώντας αυτό και τις δύο παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στην

$$T_\mu(I_n, I_n, I_n) \leqslant 3\sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^\infty \sqrt{\operatorname{tr}(A^2) \cdot \operatorname{tr}(Q_t^4 A)}dt. \tag{7.2.1}$$

Τώρα σπάμε την εκτίμηση σε δύο κομμάτια. Για το πρώτο κομμάτι, από το Λήμμα 7.2.1 έχουμε ότι $Q_t \leqslant \frac{1}{a+t}$ και $\mathbb{E}(Q_t) \leqslant A$. Συνεπώς,

$$\mathbb{E}\operatorname{tr}(Q_t^4 A) \leqslant \frac{1}{(a+t)^3}\mathbb{E}\operatorname{tr}(Q_t A) \leqslant \frac{1}{(a+t)^3}\operatorname{tr}(A^2).$$

Στη δεύτερη περίπτωση, από την υπόθεση έχουμε

$$\operatorname{tr}(Q_t^q) \leqslant \left(1 + \frac{a}{q}\right)^{q(q-1)} \operatorname{tr}(A^q) \leqslant \frac{1}{\zeta a^{(q-2)}} \left(1 + \frac{t}{a}\right)^{q(q-1)} \operatorname{tr}(A^2).$$

Συνεπώς, για $q \leqslant 8$ έχουμε, από την $Q_t \leqslant \frac{1}{a+t} I_n$ και από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}\operatorname{tr}(Q_t^4 A) \leqslant \frac{\mathbb{E}\operatorname{tr}(Q_t^{q/2} A)}{(a+t)^{4-q/2}} \leqslant \frac{\sqrt{\mathbb{E}\operatorname{tr}(Q_t^q) \cdot \operatorname{tr}(A^2)}}{(a+t)^{4-q/2}},$$

και εν τέλει από το Λήμμα 7.2.2 παίρνουμε

$$\mathbb{E}\operatorname{tr}(Q_t^4 A) \leqslant \frac{a^{1-q/2}\left(1 + \frac{t}{a}\right)^{q(q-1)/2}}{(a+t)^{4-q/2}\zeta^{1/2}} \operatorname{tr}(A^2).$$

Τα δύο παραπάνω φράγματα συμφωνούν την χρονική στιγμή: $t = as^*$, όπου $s^* = \zeta^{\frac{1}{q^2-2}} - 1$. Συνεπώς, για $\frac{t}{a} \geqslant s^*$ έχουμε

$$\mathbb{E}\operatorname{tr}(Q_t^4 A) \leqslant \frac{1}{(a+t)^3}\operatorname{tr}(A^2),$$

ενώ διαφορετικά έχουμε

$$\mathbb{E}\operatorname{tr}(Q_t^4 A) \leqslant \frac{a^{1-q/2}\left(1 + \frac{t}{a}\right)^{q(q-1)/2}}{(a+t)^{4-q/2}\zeta^{1/2}} \operatorname{tr}(A^2).$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (7.2.1) και σπάζοντας το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη, παίρνουμε

$$\frac{T_\mu(I_n, I_n, I_n)}{3\sqrt{2}\operatorname{tr}(A^2)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{as^*} \frac{a^{1/2-q/4}\left(1 + \frac{t}{a}\right)^{q(q-1)/4}}{(a+t)^{2-q/4}\zeta^{1/4}} dt + \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{as^*}^\infty \frac{1}{(a+t)^{3/2}} dt.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{t}{a}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{T_\mu(I_n, I_n, I_n)}{3\sqrt{2}\operatorname{tr}A^2} &\leqslant \frac{1}{a\zeta^{1/4}} \int_0^{s^*} (1+u)^{\frac{q^2-8}{4}} du + \frac{1}{a} \int_{s^*}^\infty \frac{1}{(1+u)^{3/2}} du \\
&= \frac{4}{(q^2-4)a\zeta^{1/4}} \left((1+s^*)^{\frac{q^2-4}{4}} - 1\right) + \frac{2}{a\sqrt{1+s^*}} \\
&= \frac{4}{(q^2-4)a\zeta^{1/4}} \left(\zeta^{\frac{q^2-4}{4(q^2-2)}} - 1\right) + \frac{2}{a\zeta^{\frac{1}{2(q^2-2)}}},
\end{aligned}$$

και ύστερα από κάποιες πράξεις προκύπτει ότι

$$\frac{aT_\mu(I_n, I_n, I_n)}{2\sqrt{2}\mathrm{tr}(A^2)} \leqslant \frac{2,8}{\zeta^{1/(2(q^2-2))}},$$

που δίνει τον πρώτο ισχυρισμό. Ο δεύτερος προκύπτει αν θέσουμε $\zeta = a^{-(q-2)}\frac{\mathrm{tr}(A^2)}{\mathrm{tr}(A^q)}$. □

7.3 Μελέτη του ίχνους των δυνάμεων του πίνακα συνδιακυμάνσεων

Λήμμα 7.3.1. *Έστω p_t το αποτέλεσμα της στοχαστικής τοπικοποίησης των Vempala και Lee με αρχική ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα p_0. Υποθέτουμε ότι η p_0 έχει φορέα σε μια μπάλα με ακτίνα n. Έστω A_t ο πίνακας συνδιακυμάνσεων της p_t και $\bar{A}_t = (A_t - I_n)^+$, όπου με B^+ συμολίξουμε τον περιορισμό του πίνακα B στον γραμμικό υπόχωρο που παράγουν οι θετικές ιδιοτιμές του. Έστω επίσης $t_1 = \frac{1}{c\kappa_n^2 \log n}$ για κάποια αρκούντως μεγάλη σταθερά c που εξαρτάται μόνο από το q. Τότε, για κάθε $0 \leqslant t \leqslant t_1$ και κάθε $q \geqslant 3$ έχουμε*

$$\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^q) \leqslant 1 + (Cq\kappa_n^2 t)^{q/2} n$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$.

Απόδειξη. Έστω $\Phi_t = \mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^q)$ και έστω E_t το ενδεχόμενο να έχουμε $\|A_s\|_{\mathrm{op}} \leqslant 2$ για κάθε $0 \leqslant s \leqslant t$. Για να φράξουμε το ίχνος του πίνακα στην περίπτωση όπου η $\|A_s\|_{\mathrm{op}}$ είναι μικρή, ορίζουμε

$$\Psi_t = \mathbb{E}[\Phi_t \cdot \mathbb{1}_{E_t}].$$

Από το Λήμμα 7.1.15 για $b = 1$ έχουμε

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}(\Phi_t) \leqslant \frac{q(q-1)}{2} T_{p_t}(\bar{A}_t{}^{q-2}, I_n, I_n),$$

όπου η μέση τιμή είναι πάνω από όλους τους χρόνους έως t. Τώρα, από τα Λήμματα 7.1.8, 7.1.10 και 7.1.11, καθώς και από την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει ότι

$$T_{p_t}(\bar{A}_t{}^{q-2}, I_n, I_n) \lesssim \kappa_n^2 \cdot \mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^{q-2} A_t)\|A_t\|_{\mathrm{op}}^2 \leqslant \kappa_n^2 \cdot \mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^{q-2}) \cdot \|A_t\|_{\mathrm{op}}^3 \lesssim \kappa_n^2 \cdot \Phi_t^{1-\frac{2}{q}} n^{\frac{2}{q}} \cdot \|A_t\|_{\mathrm{op}}^3.$$

Καθώς η $f(x) = x^{1-\frac{2}{q}}$ είναι κοίλη, από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\frac{d}{dt}\Psi_t \lesssim q^2 K_n^2 \cdot \mathbb{E}\left(\Phi_t^{1-\frac{2}{q}} 1_{E_t}\right) n^{\frac{2}{q}} \lesssim q^2 \kappa_n^2 \Psi_t^{1-\frac{2}{q}} n^{\frac{2}{q}}. \tag{7.3.1}$$

Συνεπώς, $\frac{d}{dt}\Psi_t^{\frac{2}{q}} \lesssim q\kappa_n^2 n^{\frac{2}{q}}$. Επειδή έχουμε $\Psi_0 = 0$ προκύπτει ότι

$$\Psi_t \leqslant (Cq\kappa_n^2 n^{\frac{2}{q}} t)^{q/2}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά C. Στη συνέχεια, φράσσουμε την $\mathbb{E}(\Phi_t)$, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.3.3. Για $t_1 \approx (q\kappa_n^2 \log n)^{-1}$ έχουμε

$$P(\|A_t\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2,\ \text{ για κάποιο } 0 \leqslant t \leqslant t_1) \leqslant \frac{1}{n^{2q+1}}.$$

Επειδή η p_0 έχει φορέα σε κάποια μπάλα με ακτίνα n, έχουμε $\|A_t\|_{\mathrm{op}} \leqslant n^2$. Συνεπώς,

$$\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^q) \leqslant \Psi_t + P(E_t^c) n^{2q} n \leqslant (Cq\kappa_n^2 t)^{q/2} + 1,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Λήμμα 7.3.2. *Με τις υποθέσεις του προηγούμενου λήμματος και για $3 \leqslant q \leqslant 4$, για κάθε $t \in [t_1, \tilde{t}]$, όπου $\tilde{t} = t_1 \log^{\frac{1}{2q-2}} n$ έχουμε*

$$\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^q) \lesssim n.$$

Επιπλέον, για κάθε $t \geqslant \tilde{t}$ έχουμε

$$\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^q) \lesssim \left(\frac{t}{t_1}\right)^{q(q-1)} \frac{n}{\log^{q/2} n},$$

όπου $t_1 = \frac{1}{c\kappa_n^2 \log n}$ για κάποια σταθερά c.

Απόδειξη. Αρχικά, από την (7.3.1) και τον τύπο του Itô προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^q) \leqslant \frac{q(q-1)}{2} T_{P_t}(\bar{A}_t{}^{q-2}, I_n, I_n), \tag{7.3.2}$$

όπου $\Phi_t = \mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^q)$. Στη συνέχεια, θα φράξουμε την ποσότητα $T_{p_t}(\bar{A}_t{}^q, I_n, I_n)$ χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.1.12. Έστω $p_t(M)$ η πυκνότητα της κατανομής $M^{1/2}A_t^{1/2}(X - a_t)$, όπου $X \sim p_t$. Παρατηρούμε ότι η $p_t(M)$ έχει μέση τιμή 0 και πίνακα συνδιακυμάνσεων M. Από το γεγονός ότι $A_t \leqslant \bar{A}_t + I_n$ και από το Λήμμα 7.1.8 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
T_{p_t}(\bar{A}_t{}^q, I_n, I_n) &= T_{p_t(I_n)}(A_t\bar{A}_t{}^q, A_t, A_t) \leqslant T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-1} + \bar{A}_t{}^{q-2}, \bar{A}_t + I_n, \bar{A}_t + I_n) \\
&= T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-1}, \bar{A}_t, \bar{A}_t) + 2T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-1}, \bar{A}_t, I_n) + T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-1}, I_n, I_n) \\
&\quad + T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-2}, \bar{A}_t, \bar{A}_t) + 2T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-2}, \bar{A}_t, I_n) + T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-2}, I_n, I_n) \\
&\leqslant T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-1}, \bar{A}_t, \bar{A}_t) + 3T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-1}, \bar{A}_t, I_n) + 3T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q}, I_n, I_n) + T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-2}, I_n, I_n).
\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, ξέρουμε ότι η $p_t(\bar{A}_t)$ είναι t-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλη, καθώς η p_t είναι t-ομοιόμορφα λογαριθμικά κοίλη και $\bar{A}_t \leqslant A_t$. Συνεπώς, από το Λήμμα 7.1.12 έχουμε

$$T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-1}, \bar{A}_t, \bar{A}_t) = T_{p_t(\bar{A}_t)}(\bar{A}_t{}^{q-2}, I_n, I_n) \leqslant \frac{2}{t}\mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^q).$$

Για τους άλλους όρους χρησιμοποιούμε το Λήμμα 7.1.11 και την ανισότητα Holder, και προκύπτει ότι

$$T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^{q-1}, \bar{A}_t, I_n) \lesssim T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^q, I_n, I_n).$$

Στη συνέχεια, από το Λήμμα 7.1.10 βλέπουμε ότι $T_{p_t(I_n)}(\bar{A}_t{}^k, I_n, I_n) \lesssim \kappa_n^2 \mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^k)$ και προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
T_{p_t}(|A_t - I_n|^{q-2}, I_n, I_n) &\leqslant \frac{2}{t}\mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^q) + O(\kappa_n^2)(\mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^q) + \mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^{q-2})) \\
&\leqslant \left(\frac{2}{t} + O(\kappa_n^2)\right)\mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^q) + O(\kappa_n^2) \cdot \mathrm{tr}(\bar{A}_t{}^q)^{1-\frac{2}{q}} n^{\frac{2}{q}}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (7.3.2) βλέπουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}(\Phi_t) \leqslant \left(\frac{q(q-1)}{t} + C\kappa_n^2\right)\mathbb{E}(\Phi_t) + C\kappa_n^2(\mathbb{E}(\Phi_t))^{1-\frac{2}{q}}n^{\frac{2}{q}}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$. Τώρα, θέτουμε $a = q(q-1), b = C\kappa_n^2$ και ορίζουμε

$$\Psi_t = \left(\frac{t}{t_1}\right)^{-a} e^{-b(t-t_1)}\mathbb{E}(\Phi_t).$$

Η παραπάνω σχέση μετά τις αντικαταστάσεις δίνει

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi_t &= -\left(\frac{a}{t} + b\right)\Psi_t + \left(\frac{t}{t_1}\right)^{-a} e^{-b(t-t_1)}\frac{d}{dt}\mathbb{E}(\Phi_t)\\
&\leqslant -\left(\frac{a}{t} + b\right)\Psi_t + \left(\frac{t}{t_1}\right)^{-a} e^{-b(t-t_1)}\left[\left(\frac{a}{t} + b\right)\mathbb{E}(\Phi_t) + b(\mathbb{E}(\Phi_t))^{1-\frac{2}{q}}n^{\frac{2}{q}}\right]\\
&= b\left(\frac{t}{t_1}\right)^{-a} e^{-b(t-t_1)}(\mathbb{E}(\Phi_t))^{1-\frac{2}{q}}n^{\frac{2}{q}}\\
&= b\left(\frac{t}{t_1}\right)^{-\frac{2}{q}a} e^{-\frac{2}{q}b(t-t_1)}(\Psi_t)^{1-\frac{2}{q}}n^{\frac{2}{q}},
\end{aligned}$$

συνεπώς

$$\frac{d}{dt}\Psi_t^{2/q} \leqslant \frac{2b}{q}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{-\frac{2}{q}a} e^{-\frac{2}{q}b(t-t_1)}n^{\frac{2}{q}}.$$

Ολοκληρώνοντας μεταξύ t_1 και t παίρνουμε

$$\Psi_t^{2/q} \leqslant \Psi_{t_1}^{2/q} + \frac{2bn^{\frac{2}{q}}}{q}\int_{t_1}^{t}\left(\frac{s}{t_1}\right)^{-\frac{2}{q}a} ds \leqslant \Psi_{t_1}^{2/q} + \frac{2bn^{\frac{2}{q}}}{q}\frac{t_1}{\frac{2}{q}a - 1}.$$

Καθώς έχουμε $q = q(q-1)$ και $q \geqslant 3$, προκύπτει ότι $\Psi_t^{2/q} \leqslant \Psi_{t_1}^{2/q} + \frac{2bn^{2/q}}{q^2}t_1$. Εξ' ορισμού του Ψ_t έχουμε

$$\mathbb{E}(\Phi_t) \leqslant \left(\frac{t}{t_1}\right)^{a} e^{b(t-t_1)}\left(\Psi_{t_1}^{2/q} + \frac{2bn^{\frac{2}{q}}}{q^2}t_1\right)^{q/2} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^{a} e^{b(t-t_1)}\left((\mathbb{E}(\Phi_{t_1}))^{2/q} + \frac{2bn^{\frac{2}{q}}}{q^2}t_1\right)^{q/2}.$$

Για $t \leqslant \kappa_n^{-2}$, καθώς $q \leqslant 4$ και $t_1 = \frac{1}{c\kappa_n^2}$, από το Λήμμα 7.3.1 προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}(\Phi_t) \lesssim \left(\frac{t}{t_1}\right)^{a}\left(\mathbb{E}(\Phi_{t_1}) + \frac{n}{\log^{q/2} n}\right) \lesssim \left(\frac{t}{t_1}\right)^{q(q-1)}\frac{n}{\log^{q/2} n}.$$

Ειδικότερα για $t \leqslant \tilde{t}$ έχουμε

$$\mathbb{E}(\Phi_t) \lesssim (\log^{\frac{1}{2q-2}} n)^{q(q-1)}\frac{n}{\log^{q/2} n} = n,$$

και συνεπώς $\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^q) \lesssim 2^q(\mathbb{E}(\Phi_t) + n) \lesssim n$, για $t \leqslant \tilde{t}$. Για $t \geqslant \tilde{t}$, από το Λήμμα 7.2.2 παίρνοντας μέσες τιμές έχουμε

$$\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^q) \lesssim \left(\frac{t}{\tilde{t}}\right)^{q(q-1)}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_{\tilde{t}}^q) \lesssim \left(\frac{t}{\tilde{t}}\right)^{q(q-1)} n \lesssim \left(\frac{t}{t_1}\right)^{q(q-1)}\frac{n}{\log^{q/2} n},$$

καθώς $\tilde{t} = t_1 \log^{\frac{1}{2q-2}} n$. □

Τώρα χρησιμοποιούμε το παραπάνω φράγμα για το $\mathrm{tr}(A_t^q)$ για να φράξουμε την $\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2)$, και συνεπώς την $\mathbb{E}\|a_t\|_2^2$.

Λήμμα 7.3.3. *Με τις υποθέσεις του Λήμματος 7.3.1, για κάθε* $3 \leqslant q \leqslant 4$ *έχουμε*

$$\mathbb{E}\|a_t\|_2^2 \lesssim nt + n\frac{t^{\gamma+1}}{(t^*)^\gamma},$$

όπου $t^* = \kappa_n^{-2\frac{2q^2-q}{q^2-2}} \log^{-\frac{2q^2-3q}{2(q^2-2)}} n$ *και* $\gamma \leqslant 2\sqrt{2}$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.1.7 και τον τύπο του Itô έχουμε

$$d\mathrm{tr}(A_t^2) = 2\mathbb{E}_{X\sim p_t}\langle X - a_t, A_t(X - a_t)\rangle \otimes (X - a_t)^T dW_t - 2\mathrm{tr}(A_t^3)dt + T_{\mu_t}(I_n, I_n, I_n)dt.$$

Παίρνοντας μέση τιμή και εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.2.3 έχουμε

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2) \leqslant \mathbb{E}T_{\mu_t}(I_n, I_n, I_n) \lesssim \frac{1}{t^3}\mathbb{E}(t^q\mathrm{tr}(A_t^q))^c(t^2\mathrm{tr}(A_t^2))^{1-c}$$

με $c = \frac{1}{2(q^2-2)}$. Καθώς από το Λήμμα 7.3.2 έχουμε $\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^q) \lesssim n + \left(\frac{t}{t_1}\right)^{q(q-1)}\frac{n}{\log^{q/2} n}$, προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2) \lesssim t^{(q-2)c-1}n^c(\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2))^{1-c} + t^{-1+(q-2)c+q(q-1)c}\left(\frac{1}{t_1^{q(q-1)}}\frac{n}{\log^{q/2} n}\right)^c(\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2))^{1-c}.$$

Μετά από λίγες πράξεις και καθώς $c = \Theta(1)$ (αφού $3 \leqslant q \leqslant 4$) έχουμε

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2))^c \lesssim t^{(q-2)c-1}n^c + t^{-1+(q^2-2)c}\left(\frac{1}{t_1^{q(q-1)}}\frac{n}{\log^{q/2} n}\right)^c.$$

Ολοκληρώνοντας από το t_1, και από το γεγονός ότι $\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2) \lesssim n$ για κάθε $t \geqslant t_1$, έχουμε

$$(\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2))^c \lesssim n^c + t^{(q-2)c}n^c + t^{(q^2-2)c}\left(\frac{1}{t_1^{q(q-1)}}\frac{n}{\log^{q/2} n}\right)^c.$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2) \lesssim n + nt^{q-2} + \frac{t^{q^2-2}}{t_1^{q^2-q}}\frac{n}{\log^{q/2} n}.$$

Ειδικότερα, για $t^* = t_q^{\frac{q^2-q}{q^2-2}} \log^{\frac{q}{2(q^2-2)}} n$, για κάθε $0 \leqslant t \leqslant t^*$ έχουμε $\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2) \lesssim n$.

Για $t \geqslant t^*$, χρησιμοποιούμε το φράγμα $T_{\mu_t}(I_n, I_n, I_n) \leqslant \left(\frac{\gamma}{t}\right)\mathrm{tr}(A_t^2)$ του Λήμματος 6.2.6 με $\gamma \leqslant 2\sqrt{2}$. Εφαρμόζοντάς το στην $\frac{d}{dt}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2) \leqslant \mathbb{E}T_{\mu_t}(I_n, I_n, I_n)$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2) \lesssim \left(\frac{t}{t^*}\right)^\gamma \mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_{t^*}^2) \leqslant \left(\frac{t}{t^*}\right)n$$

για κάθε $t \geqslant t^*$. Συνεπώς, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(A_t^2) \lesssim \left(1 + \left(\frac{t}{t^*}\right)^\gamma\right)n.$$

Από την $da_t = A_t dW_t$ της Πρότασης 6.1.6) και από τον τύπο του Itô έχουμε $\frac{d}{dt}\mathbb{E}\|a_t\|_2^2 = \mathrm{tr}(A_t^2)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\mathbb{E}\|a_t\|_2^2 \lesssim \int_0^t \left(1 + \left(\frac{s}{t^*}\right)^\gamma\right) n\, ds \lesssim nt + n\frac{t^{\gamma+1}}{(t^*)^\gamma}$$

με $t^* = \kappa_n^{-2\frac{q^2-q}{q^2-2}} \log^{-\frac{2q^2-3q}{2(q^2-2)}} n$. □

7.4 Εκτίμηση για τη σταθερά λεπτού φλοιού

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε τη βελτιωμένη εκτίμηση (από το [55]) για την σταθερά λεπτού φλοιού σ_n.

Θεώρημα 7.4.1. *Ισχύει ότι $\sigma_n \lesssim \log^\eta n$, όπου*

$$\eta = \min_{3\leqslant q\leqslant 4} \frac{1 + \frac{q^2-\frac{5}{4}q}{q^2-2}\gamma}{1 + \frac{q-2}{q^2-2}\gamma}.$$

Θέτοντας $\gamma = 2\sqrt{2}$ και $q = \frac{1}{47}\left(112 - 16\sqrt{2} + \sqrt{5630 - 1892\sqrt{2}}\right)$ παίρνουμε

$$\eta \leqslant \frac{1}{8}\left(1 + 7\sqrt{2} + \sqrt{53 - 4\sqrt{2}}\right) \leqslant 2,2226.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο με πυκνότητα p_0 τέτοιο ώστε $\sigma_{p_0} \geqslant \frac{1}{2}\sigma_n^2$ και ο φορέας της p_0 περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας n. Έστω p_t το αποτέλεσμα της στοχαστικής τοπικοποίησης των Vempala και Lee με αρχική πυκνότητα p_0. Από το Λήμμα 7.3.3 και τις (4.3.5) και (4.3.6) προκύπτει ότι

$$\sigma_n^2 \lesssim \int_{\lambda_1}^\infty \min_{t_\lambda>0}\left\{\frac{1}{n\lambda^2}\mathbb{E}\|a_{t_\lambda}\|_2^2 + \frac{1}{\lambda t_\lambda}\right\} d\lambda \lesssim \int_{\lambda_1}^\infty \min_{t_\lambda>0}\left\{\frac{t_\lambda}{\lambda^2} + \frac{t_\lambda^{\gamma+1}}{\lambda^2 (t^*)^\gamma} + \frac{1}{\lambda t_\lambda}\right\} d\lambda,$$

όπου: $\lambda_1 \simeq \psi_{p_0}^{-2}$. Επιλέγοντας $t_\lambda = \min\left\{\sqrt{\lambda}, \lambda^{\frac{1}{\gamma+2}}(t^*)^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\right\}$ παίρνουμε

$$\sigma_n^2 \lesssim \int_{\lambda_1}^\infty \frac{1}{\lambda^{1,5}} + \frac{1}{\lambda^{1+\frac{1}{\gamma+2}}(t^*)^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}} d\lambda \lesssim \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{\gamma+2}}(t^*)^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}.$$

Θέτοντας $t^* = \kappa_n^{-2\frac{q^2-q}{q^2-2}} \log^{-\frac{2q^2-3q}{2(q^2-2)}} n$ από το Λήμμα 7.3.3, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\psi_n^2 \lesssim \sigma_n^2$ και $\kappa_n^2 \lesssim \sigma_n^2 \log n$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &\lesssim \sigma_n \log n + \sigma_n^{\frac{2}{\gamma+2}} \log^{\frac{2}{\gamma+2}} n \cdot \left(\kappa_n^{-2\frac{q^2-q}{q^2-2}} \log^{-\frac{2q^2-3q}{2(q^2-2)}} n\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma+2}} \\
&\leqslant \sigma_n \log n + \sigma_n^{\frac{2}{\gamma+2}} \log^{\frac{2}{\gamma+2}} n \cdot \left(\sigma_n^{-2\frac{q^2-q}{q^2-2}} \log^{-\frac{q^2-q}{q^2-2}} n \log^{-\frac{2q^2-3q}{2(q^2-2)}} n\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma+2}} \\
&= \sigma_n \log n + \sigma_n^{2\left(\frac{q^2-2}{q^2-2}\frac{\gamma}{\gamma+2} + \frac{1}{\gamma+2}\right)} \log^{\frac{2}{\gamma+2}\left(1 + \frac{4q^2-5q}{4(q^2-2)}\gamma\right)} n.
\end{aligned}$$

Θέτουμε $a = 2\left(\frac{q^2-q}{q^2-2}\frac{\gamma}{\gamma+2} + \frac{1}{\gamma+2}\right)$ και $b = \frac{2}{\gamma+2}\left(1 + \frac{4q^2-5q}{4(q^2-2)}\gamma\right)$. Έστω τώρα η η μικρότερη δυνατή τιμή ώστε $\sigma_n \leqslant C\log^\eta n$ για κάποια απόλυτη σταθερά C. Η παραπάνω ανισότητα δίνει ότι

$$2\eta \leqslant \max\{\eta+2, a\eta+b\}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι $a, b \geqslant 1$ για κάθε $\gamma \geqslant 0$, συνεπώς $a\eta + b \geqslant \eta + 1$. Αντικαθιστώντας τα a, b και μετα από κάποιες πράξεις, έχουμε

$$\eta \leqslant \frac{b}{2-a} = \frac{1 + \frac{q^2-\frac{5}{4}q}{q^2-2}\gamma}{1 + \frac{q-2}{q^2-2}\gamma},$$

που δείχνει ότι $\sigma_n \lesssim log^\eta n$ για κατάλληλλη επιλογή του γ και κάθε $3 \leqslant q \leqslant 4$. Το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας $\gamma = 2\sqrt{2}$ και βελτιστοποιώντας ως προς q. □

CHAPTER 8

Summary

The main goal of this Thesis is to present results of Klartag, Lehec, Chen, Jambulapati, Vempala and Lee which provide estimates for the isoperimetric constant of isotropic log-concave probability measures. The Thesis essentially consists of two parts: the first one has a functional analysis flavor while the second one employs tools from stochastic calculus.

8.1 The isoperimetric problem

The classical isoperimetric problem can be formulated as follows: among all closed planar curves that enclose a fixed area, which is the one that has minimal perimeter? It is known that the answer is given by the circle. The question can be posed in a more general framework once we define a suitable structure.

Definition 8.1.1. A metric measure space is a triple (X, d, μ) where the pair (X, d) is a metric space and μ is a Borel measure on X. In the case where μ is a probability measure, the triple (X, d, μ) is called metric probability space.

Roughly speaking, we have a measure which allows us to measure "how large" are the subsets of X, while the metric gives us a way to define and measure the "perimeter" of the subsets of X.

Definition 8.1.2. Let (X, d, μ) be a metric measure space. For every $A \in \mathcal{B}(X)$ we define the t-extension of A with respect to the metric d as the set

$$A_t = \{x \in X : d(x, A) < t\}.$$

Then, we define the Minkowski content of A with respect to the measure μ as follows:

$$\mu^+(A) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}.$$

Essentially, the Minkowski content measures how large is the perimeter of a set. With these definitions, we can easily state the isoperimetric problem:

Definition 8.1.3 (isoperimetric problem). Let (X, d, μ) be a metric measure space. For a fixed $t > 0$, among all sets $A \in \mathcal{B}(X)$ with $\mu(A) = t$, determine

$$\inf_A \mu^+(A).$$

In other words, we want to determine the function

$$I_\mu(t) = \inf\{\mu^+(A) : A \,\mathrm{Borel}, \mu(A) = t\},$$

which is the so-called isoperimetric profile of μ.

In some cases, precise results are available:

(i) In $(\mathbb{R}^n, d, \lambda)$, where d is the Euclidean metric and λ is Lebesgue measure, the solution to the problem is the Euclidean ball, exactly as in the two-dimensional case.

(ii) In $(\mathbb{R}^n, d, \gamma_n)$, where d is the Euclidean metric and γ_n is the n-dimensional Gauss measure, the solution to the problem is given by half-spaces. This result was proved by Tsirelson-Sudakov, and later independently by Borell, who made use of Lévy's spherical isoperimetric inequality. Subsequent generalizations of this result due to Bobkov, were later proved by Bakry-Ledoux using semigroups of operators, and by Barthe-Maurey using Brownian motion.

(iii) In $\mathbb{R}^2$, in the case where $X = K$ is a convex body, d is Euclidean metric and μ is the uniform probability measure, the solution to the problem is given by the subsets of K whose boundary is either a part of a circle crossing perpendicularly the boundary ∂K of K or a line segment.

The isoperimetric problem for metric probability spaces, as stated above, essentially asks to give a lower bound for the Cheeger constant

$$\chi_\mu = \inf_{0<t\leqslant 1/2} \frac{\min\{I_\mu(t), I_\mu(1-t)\}}{t},$$

or equivalently, an upper bound for the reciprocal Cheeger constant (or isoperimetric constant)

$$\psi_\mu := \frac{1}{\chi_\mu}.$$

We will study the case where the measure is a probability measure, in particular a logarithmically concave probability measure. As we will see below, convexity plays a very important role in the study of this isoperimetric problem.

8.2 Isoperimetric problem and convexity

We are mainly interested in the cases where the probability measure is either the uniform probability measure on a convex body K or a log-concave probability measure.

Recall that a convex body in $\mathbb{R}^n$ is a compact convex subset K of $\mathbb{R}^n$ with non-empty interior. In **Chapter 2** we give the necessary definitions and present basic results on the geometry of convex bodies. Then, we introduce the class of log-concave probability measures.

Definition 8.2.1. A probability measure μ, which is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure, is called *log-concave* if for any pair of compact subsets A, B of $\mathbb{R}^n$ and any $0 < \lambda < 1$ we have that

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^\lambda.$$

The uniform probability measure on a convex body is log-concave: this is a direct consequence of the Prékopa-Leindler inequality. We provide further information and establish properties of the class of log-concave probability measures. In connection with the isoperimetric problem, the next theorem is very important. It was proved by Sternberg-Zumbrun (1999) in the case of convex bodies and by E. Milman (2009) in the general case of log-concave measures.

Theorem 8.2.2. *The isoperimetric profile $I_\mu(t)$ of a log-concave probability measure μ is a concave function which is also symmetric around $1/2$.*

The proof of this theorem makes use of several earlier results and techniques from Riemannian geometry and geometric measure theory, and we will not discuss it in detail. A consequence of Theorem 1.2.2 is that for every log-concave probability measure μ we have that

$$I_\mu(t) \geqslant 2I_\mu\left(\frac{1}{2}\right)\min\{t, 1-t\},$$

and hence we may restrict ourselves to sets of measure $\frac{1}{2}$ when we study the isoperimetric problem. Then, the question that arises is how we should cut a convex body in two pieces of equal size so that they will have the smallest possible perimeter. This is exactly the content of the Kannan-Lovász-Simonovits conjecture, that up to an absolute constant it suffices to cut by a hyperplane. More precisely, the conjecture is stated as follows:

Conjecture 8.2.3. There exists an absolute constant $c > 0$ such that for every log-concave probability measure μ on $\mathbb{R}^n$, which is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure, we have that

$$\chi_\mu \geqslant c \cdot \inf_{H \subseteq \mathbb{R}^n} \frac{\mu^+(H)}{\min\{\mu(H), 1-\mu(H)\}},$$

where the infimum is over all half-spaces $H \subseteq \mathbb{R}^n$.

Using results of Hensley (1980) and Fradelizi (1999) we may see that the right hand-side in the conjectured inequality is equivalent (up to an absolute constant) with the quantity

$$\frac{1}{\sqrt{\|\mathrm{Cov}(\mu)\|_{\mathrm{op}}}},$$

where $\mathrm{Cov}(\mu) = C_{ij}$ is the covariance matrix of the measure μ with entries

$$C_{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} x_i \, d\mu \cdot \int_{\mathbb{R}^n} x_j \, d\mu.$$

So, Conjecture 1.2.3 reduces to the following:

KLS-Conjecture. For every log-concave probability measure μ on $\mathbb{R}^n$ we have that

$$\chi_\mu \geqslant \frac{c}{\|\mathrm{Cov}(\mu)\|_{\mathrm{op}}},$$

where $c > 0$ is an absolute constant.

The measure μ is called isotropic if it has barycenter at 0 and $\mathrm{Cov}(\mu) = I_n$. Since the formulation of the conjecture involves the covariance matrix of μ, and since using a linear transformation we may map any measure with barycenter at 0 to an isotropic measure, it suffices to study the conjecture for an isotropic log-concave probability measure μ on $\mathbb{R}^n$ which is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. Then, for any such measure we want to show that

$$\chi_\mu \geq c$$

for some absolute constant $c > 0$, or equivalently,

$$\psi_\mu \leqslant C$$

for some absolute constant $C > 0$.

In **Chapter 2** we discuss further properties of isotropic probability measures and in particular we define isotropic convex bodies. We also state a number of conjectures about measures of this type:

Isotropic constant conjecture. *There exists an absolute constant $C > 0$ such that, for every $n \geqslant 1$,*

$$L_n := \max\{\|f\|_\infty^{\frac{1}{n}} : f \text{ isotropic log-concave density in } \mathbb{R}^n\} \leqslant C.$$

Thin-shell conjecture. For every isotropic log-concave probability measure μ on $\mathbb{R}^n$ we define

$$\sigma_\mu^2 := \mathbb{E}_\mu(\|x\|_2 - \sqrt{n})^2$$

and then consider the constant

$$\sigma_n^2 := \sup_\mu \sigma_\mu^2,$$

where the supremum is over all isotropic log-concave probability measures μ on $\mathbb{R}^n$. The thin-shell conjecture states that there exists an absolute constant $C > 0$ such that, for every $n \geqslant 1$ we have that

$$\sigma_n \leqslant C.$$

These two conjectures are closely related: Eldan and Klartag [42] proved that the thin-shell conjecture is stronger than the isotropic constant conjecture. We close Chapter 2 with a proof of the next theorem.

Theorem 8.2.4 (Eldan-Klartag). *There exists an absolute constant $C > 0$ such that, for all $n \geqslant 1$,*

$$L_n \leqslant C\sigma_n.$$

8.3 Laplace-Beltrami operator and Poincaré constant

The Cheeger constant has an important connection with the Poincaré constant of a probability measure, which is defined to be the best constant $\vartheta > 0$ for which the inequality

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \vartheta^2 \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu,$$

holds true for all square integrable locally Lipschitz functions f on $\mathbb{R}^n$.

In **Chapter 3** we prove that the Poincaré constant and the reciprocal Cheeger constant are equivalent in the class of log-concave probability measures, as a consequence of the following theorems.

Theorem 8.3.1 (Maz'ya, Cheeger). *Let μ be a Borel probability measure on $\mathbb{R}^n$ with reciprocal Cheeger constant ψ_μ. Then,*

$$\vartheta_\mu \leqslant 2\psi_\mu. \tag{8.3.1}$$

Theorem 8.3.2 (Buser, Ledoux). *Let μ be a log-concave probability measure on $\mathbb{R}^n$. Then,*

$$\psi_\mu \leqslant C\vartheta_\mu,$$

where $C > 0$ is an absolute constant.

We also discuss classical results on the relation of the Poincaré inequality with the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator

$$\Delta(f) = \mathrm{div}(\nabla f).$$

It is known that the eigenvalues of $-\Delta$ are non-negative and form a discrete set, so we can write them in increasing order as $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$, because Δ vanishes only on constant functions. In the case where μ is a probability measure with density $e^{-\varphi(x)}$, where φ is a C^1-function on $\mathbb{R}^n$, the Laplace-Beltrami operator takes the form

$$L_\mu f = \Delta f - \langle \nabla f, \nabla\varphi\rangle$$

and we have that $\vartheta_\mu^{-2} = \lambda_1$, where λ_1 is the first non-zero eigenvalue of the differential operator $-L_\mu$.

We close Chapter 3 with a first estimate on the KLS-conjecture. We have that

$$\psi_n := \sup\{\psi_\mu : \mu \text{ isotropic log-concave probability measure on } \mathbb{R}^n\} \leqslant C\sqrt{n}$$

where $C > 0$ is an absolute constant. This bound was first obtained by Kannan-Lovász-Simonovits. We present an argument of Bobkov, which leads to the same bound.

Theorem 8.3.3. *Let μ be a log-concave probability measure on $\mathbb{R}^n$. Then,*

$$\chi_\mu \geqslant \frac{c}{\|f\|_{L_2(\mu)}},$$

where $\mathrm{bar}(\mu)$ *is the barycenter of μ, $f(x) = \|x - \mathrm{bar}(\mu)\|_2$ and $c > 0$ is an absolute constant.*

In the isotropic case, the function $f(x) = \|x - \mathrm{bar}(\mu)\|_2$ satisfies $\|f\|_{L_2(\mu)} = \sqrt{n}$. Then, Bobkov's theorem shows that if μ is an isotropic log-concave probability measure on $\mathbb{R}^n$ one has $\psi_\mu \leqslant c\sqrt{n}$, where $c > 0$ is an absolute constant.

8.4 Heat flow and Gaussian measure

Gaussian measure plays an important role in the study of the KLS conjecture, as one can see from the following result of Bakry-Ledoux (1996).

Theorem 8.4.1 (Bakry-Ledoux). *Let μ be an isotropic log-concave probability measure on $\mathbb{R}^n$. Assume that the density of μ is of the form $\frac{d\mu}{dx} = e^{-\rho}$, where* $\mathrm{Hess}(\rho)(x) \geqslant tI_n$ *for some $t > 0$ and every $x \in \mathbb{R}^n$. Then,*

$$\chi_\mu \geqslant \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{t}}.$$

The right hand-side in the inequality of the theorem is precisely the Cheeger constant of the Gaussian measure with covariance matrix $t \cdot I_n$. Therefore, intuitively, the theorem says that if the probability measure is more log-concave than some Gaussian measure then it has larger Cheeger constant.

This suggests that, apart from the assumption that we have a log-concave probability measure, it is useful to be able to compare this measure with the Gaussian measure, which is the standard model of a log-concave probability measure with unbounded support. In **Chapter 4** we describe a way to modify, in a continuous way, an arbitrary log-concave probability measure so that it will become more log-concave, using the heat operator.

For every $s > 0$ we denote by γ_s the density of a Gaussian random vector with mean 0 and covariance matrix $s \cdot I_n$ in $\mathbb{R}^n$. We define

$$\mu_s = \mu * \gamma_s$$

the convolution of μ and γ_s, and set $\mu_0 = \mu$. The heat operator $P_s f = f * \gamma_s$ is a contraction from $L^2(\mu_s)$ to $L^2(\mu)$. The adjoint operator $Q_s := P_s^* : L^2(\mu) \to L^2(\mu_s)$ satisfies

$$Q_s \varphi = \frac{P_s(\varphi \varrho)}{P_s \varrho}$$

where ϱ is the log-concave density of μ. We define $Q_s\varphi$ from this equation for every $s > 0$ and $\varphi \in L^1(\mu)$. We also define $P_0 = I_n$ and $Q_0 = I_n$.

The parameter s intuitively plays the role of time and we will see that as we apply this operator to the measure μ we manage to get more and more log-concave probability measures. Therefore, if we succeed to control the way in which the constants that we study change under the action of this operator, we can immediately obtain some information about the original constants, since the theorem of Bakry-Ledoux tells us what happens after some period of time.

Closely related to the Poincaré inequality and the conjectures that we study is the spectral measure ν_f of a function f which is introduced in **Chapter 4**. Then we show that

$$\sigma_\mu^2 \leqslant \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\nu_{x_i}(\lambda)}{\lambda} = 4 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{F(\lambda)}{\lambda^2}\, d\lambda,$$

where the last equality is obtained with integration by parts, and

$$F(\lambda) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \nu_{x_i}([0, \lambda]) \in [0, 1]$$

is the mean spectral mass of the coordinate functions up to the level λ.

Therefore, in order to estimate the thin-shell constant, it suffices to study the funvtion $F(\lambda)$. Studying properties of the heat operator in Chapter 4, we conclude that the problem is reduced to the study of this operator (more precisely, the study of its adjoint operator) through the estimate

$$F(\lambda) \leqslant C \left(\frac{1}{n} \|Q_s x\|_{L^2(\mu_s)}^2 + \lambda s \right).$$

8.5 Stochastic localization

The second main idea for the study of the problem is to use stochastic localization. Starting with an isotropic log-concave probability measure μ with a log-concave density p_0, we vary the density through the stochastic differential equation

$$dp_t(x) = p_t(x)\langle x - a_t, dW_t\rangle, \tag{8.5.1}$$

with initial condition p_0, where $a_t = \int_{\mathbb{R}^n} xp_t(x)$ is the barycenter of p_t and $(W_t)_{t\geqslant 0}$ is a standard Brownian motion in $\mathbb{R}^n$ with $W_0 = 0$.

The relation with the previous step comes from the fact that if we vary the density of the measure in this way, then

$$\mathbb{E}\|a_t\|_2^2 = \|Q_s x\|_{L^2(\mu_s)}^2.$$

Taking into account the bounds from Chapter 4, we may give an upper bound for the constant σ_μ if we determine in a quantitative way what happens with the barycenter of the measure with density p_t.

In **Chapter 5** we provide some background from stochastic calculus and in **Chapter 6** we establish the main properties of the above stochastic process. It is convenient to consider an additional parameter which is weaker than the reciprocal isoperimetric constant ψ_μ but stronger than the thin-shell constant, which is denoted by κ_μ and is defined by

$$\kappa_\mu^2 = \sup_{\vartheta\in S^{n-1}}\left\{\|\mathbb{E}_\mu\langle x,\vartheta\rangle(x\otimes x)\|_2^2\right\},$$

where, if $x = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$ is a column vector we have that $x \otimes x = x\cdot x^T = (x_i x_j)_{i,j=1}^n$.

Regarding the parameters $\psi_n = \sup_\mu \psi_\mu$ and $\kappa_n = \sup_\mu \kappa_\mu$, where the supremum is over all isotropic log-concave probability measures μ on $\mathbb{R}^n$, we give a proof of the next inequality of Eldan.

Theorem 8.5.1. *The constants ψ_n, σ_n and κ_n satisfy*

$$\psi_n^2 \leqslant C(\log n)\kappa_n \leqslant \tilde{C}(\log n)^2\sigma_n^2,$$

where $C, \tilde{C} > 0$ are absolute constants.

In the end of Chapter 6 we give the proof of the estimate of Klartag-Lehec

$$\sigma_n \leqslant c(\log n)^4,$$

which implies the logarithmic with respect to the dimension upper bound

$$\psi_n \leqslant c(\log n)^5$$

for the reciprocal isoperimetric constant. In Chapter 7, using techniques of a similar nature, but improving some of the estimates in the various steps of the proof, we give a proof of the more recent upper bound of Jambulapati-Vempala-Lee:

$$\sigma_n \leqslant C(\log n)^\eta$$

where $\eta \leqslant \frac{1}{8}\left(1 + 7\sqrt{2} + \sqrt{53 - 4\sqrt{2}}\right)$. A consequence is the best known upper bound for ψ_n.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A

Στοιχεία φασματικής θεωρίας

A.1 Θεωρία Hille-Yosida

Η θεωρία Hille-Yosida μελετά ημιομάδες φραγμένων τελεστών σε χώρους Banach. Παρουσιάζουμε εδώ τα βασικά αποτελέσματα στο γενικότερο πλαίσιο για ημιομάδες τελεστών $P_t : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ όπου $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ είναι πραγματικός διαχωρίσιμος χώρος Banach.

Ορισμός A.1.1 (ημιομάδα). Μια οικογένεια $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ γραμμικών τελεστών $P_t : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $t \geqslant 0$ λέγεται ημιομάδα συστολών αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $t \geqslant 0$ και $x \in \mathcal{B}$ ισχύει $\|P_t x\| \leqslant \|x\|$.

(ii) Για κάθε $t, s \geqslant 0$ ισχύει $P_{t+s} = P_t \circ P_s$.

(iii) Για κάθε $x \in \mathcal{B}$ ισχύει $\lim\limits_{t \to 0} P_t x = x =: P_0 x$.

Από τη γραμμικότητα των P_t και το γεγονός ότι είναι συστολές προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathcal{B}$ η συνάρτηση $t \mapsto P_t x$ είναι συνεχής: πράγματι, αν $s \geqslant 0$ έχουμε

$$\|P_{t+s}x - P_t x\| = \|P_t(P_s x - x)\| \leqslant \|P_s x - x\|,$$

και όμοια, αν $0 \leqslant s \leqslant t$ έχουμε

$$\|P_{t-s}x - P_t x\| \leqslant \|x - P_s x\|,$$

οπότε η συνέχεια έπεται από την ιδιότητα (iii).

Η θεωρία Hille-Yosida εξασφαλίζει ότι αν $(P_t)_{t \geqslant 0}$ είναι μια ημιομάδα συστολών τότε υπάρχει πυκνός γραμμικός υπόχωρος D του $\mathcal{B}$ στον οποίο η συνάρτηση $t \mapsto P_t x$ έχει φραγμένη παράγωγο στο σημείο $t = 0$, άρα και σε κάθε σημείο $t > 0$ από την ιδιότητα (ii) της ημιομάδας. Η παράγωγος στο σημείο $t = 0$ είναι ένας γραμμικός τελεστής L, ο οποίος συχνά είναι μη φραγμένος. Ονομάζεται γεννήτορας της ημιομάδας και το πεδίο του γεννήτορα είναι ο πυκνός υπόχωρος D στον οποίο ορίζεται ο L. Τυπικά, περιγράφουμε τον P_t ως e^{tL}.

Για την κατανόηση αυτών των αποτελεσμάτων είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε κάποιους νέους τελεστές που δρουν στον $\mathcal{B}$. Έστω ν φραγμένο μέτρο στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^+$. Ορίζουμε τον τελεστή $P_\nu : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ με

$$P_\nu := \int_0^\infty P_t \, d\nu(t).$$

Δηλαδή, $P_\nu(x) = \int_0^\infty P_t x\, d\nu(t)$, $x \in \mathcal{B}$, όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα έχει την έννοια του ορίου αθροισμάτων Riemann της μορφής

$$\sum_i P_{t_i}(x) \cdot \nu([a_i, a_{i+1}))$$

πάνω από μια ακολουθία (a_i) που διαμερίζει το $\mathbb{R}^+$ μέσω της οποίας προσεγγίζεται το μέτρο ν. Όταν το ν είναι πεπερασμένο μέτρο, αυτός ο τελεστής είναι φραγμένος στον $\mathcal{B}$ και η νόρμα του φράσσεται από $|\nu|([0,\infty))$. Σε αυτό το πλαίσιο, η ιδιότητα (ii) μεταφράζεται ως εξής: αν ν, ν' είναι φραγμένα μέτρα στο $\mathbb{R}^+$ τότε

$$P_\nu P_{\nu'} = P_{\nu'} P_\nu = \int_0^\infty \int_0^\infty P_{t+s} d\nu(t) d\nu'(s). \tag{A.1.1}$$

Μας ενδιαφέρει η ειδική περίπτωση του επιλύοντος τελεστή, ο οποίος ορίζεται για κάθε $\lambda > 0$ από την

$$R_\lambda := \int_0^\infty P_t \cdot e^{-\lambda t} dt, \tag{A.1.2}$$

δηλαδή αντιστοιχεί στο μέτρο $d\nu(t) = e^{-\lambda t} dt$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε $t \geqslant 0$ και $x \in \mathcal{B}$ έχουμε

$$R_\lambda P_t x = e^{\lambda t} \int_t^\infty P_s x \cdot e^{-\lambda s} ds.$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο ως προς t στο $t = 0$ παίρνουμε

$$L(R_\lambda P_t x) = \left(\lambda e^{\lambda t} \int_t^\infty P_s x \cdot e^{-\lambda s} ds - e^{\lambda t} e^{-\lambda t} P_t x \right) \Big|_{t=0} = \lambda R_\lambda x - x. \tag{A.1.3}$$

Από τις (A.1.1) και (A.1.2) βλέπουμε επίσης ότι για κάθε $\lambda, \lambda' > 0$ ισχύει

$$R_\lambda - R_{\lambda'} = (\lambda' - \lambda) R_\lambda R_{\lambda'} = (\lambda' - \lambda) R_{\lambda'} R_\lambda, \tag{A.1.4}$$

δηλαδή

$$R_\lambda = R_{\lambda'} (Id + (\lambda' - \lambda) R_\lambda).$$

Από αυτή την ταυτότητα βλέπουμε ότι η εικόνα του R_λ στον $\mathcal{B}$ περιέχεται στην εικόνα του $R_{\lambda'}$, και εναλλάσσοντας τους ρόλους των λ και λ' συμπεραίνουμε ότι αυτή η εικόνα του R_λ είναι τελικά ανεξάρτητη από το λ. Ορίζουμε $D = \mathrm{Im}(R_\lambda)$, όπου λ οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός.

Από την ιδιότητα (i) έχουμε $\lim\limits_{t \to 0} P_t x = x$ και $\lambda R_\lambda x = \int_0^\infty P_{s/\lambda} x \cdot e^{-s} ds$, άρα για κάθε $x \in \mathcal{B}$ παίρνουμε

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda x = x \int_0^\infty e^{-s} ds = x.$$

Επομένως ο D είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{B}$. Σταθεροποιούμε $\lambda > 0$ και ορίζουμε έναν τελεστή L στον D θέτοντας

$$Lx = \lambda x - y,$$

όπου $x = R_\lambda y$. Έτσι, μπορούμε να δούμε τον L ως την παράγωγο της $P_t x$ στο σημείο $t = 0$:

$$Lx = \lim_{t\to 0} \frac{P_t x - x}{t}.$$

Πράγματι,

$$R_\lambda P_t x = e^{\lambda t} \int_t^\infty P_t x \cdot e^{-\lambda s} ds,$$

άρα

$$d_t R_\lambda P_t x\Big|_{t=0} = \left(\lambda e^{\lambda t} \int_t^\infty P_s x \cdot e^{-\lambda s} ds - e^{-\lambda t} e^{\lambda t} P_t x\right)\Big|_{t=0} = \lambda R_\lambda x - x.$$

Συνεπώς, γενικότερα, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$d_t P_t x = L P_t x = P_t L x.$$

Το D είναι μάλιστα ακριβώς το σύνολο των $x \in \mathcal{B}$ για τα οποία η $p_t x$ έχει παράγωγο στο $t = 0$. Επιπλέον, η R_λ είναι αμφισυνεχής μεταξύ του $\mathcal{B}$ και του πεδίου D αν στο τελευταίο θεωρήσουμε την τοπολογία που επάγεται από τη νόρμα

(A.1.5) $$\|x\|_D = \|x\| + \|Lx\|, \qquad x \in D.$$

Ο χώρος D περιγράφεται τότε ως το πεδίο του L και συμβολίζεται με $D(L)$. Επιπλέον, η γνώση του $D(L)$ και της δράσης του L σε αυτό, προσδιορίζει πλήρως την ημιομάδα $(P_t)_{t\geqslant 0}$ ως τη μοναδική λύση της εξίσωσης θερμότητας (ως προς L)

(A.1.6) $$\partial_t P_t x = L P_t x$$

για $x \in D(L)$, και στη συνέχεια για $x \in \mathcal{B}$. Ο τελεστής L ονομάζεται, γι' αυτόν τον λόγο, *γεννήτορας* της ημιομάδας $(P_t)_{t\geqslant 0}$ με πεδίο $D(L)$.

A.2 Συμμετρικοί τελεστές

Στην ειδική περίπτωση που ο $\mathcal{B}$ είναι ένας πραγματικός χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, μπορούμε να θεωρήσουμε ημιομάδες φραγμένων συμμετρικών τελεστών. Τότε, οι γεννήτορες είναι μη φραγμένοι αυτοσυζυγείς τελεστές στον $\mathcal{H}$.

Αξίζει να σημειώσουμε τη διαφορά ανάμεσα σε έναν συμμετρικό και έναν αυτοσυζυγή μη φραγμένο τελεστή. Ένας γραμμικός τελεστής A, ορισμένος σε έναν πυκνό υπόχωρο $D(A)$ του $\mathcal{H}$, λέγεται συμμετρικός αν για κάθε $x, y \in D(A)$ ισχύει ότι

(A.2.1) $$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Ο συζυγής τελεστής A^* ενός συμμετρικού τελεστή A ορίζεται στον υπόχωρο $D(A^*)$ που αποτελείται από όλα τα $x \in \mathcal{H}$ για τα οποία υπάρχει σταθερά $C(x) < \infty$ τέτοια ώστε $|\langle x, Ay\rangle| \leqslant C(x)\|y\|$ για κάθε $y \in D(A)$. Αφού ο A είναι συμμετρικός, έχουμε $D(A) \subseteq D(A^*)$. Στον $D(A^*)$, ο A^* ορίζεται από την

$$\langle A^* x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Ακριβέστερα, η απεικόνιση $y \mapsto \langle x, Ay\rangle$, η οποία ορίζεται στον πυκνό υπόχωρο $D(A)$, επεκτείνεται μονοσήμαντα σε μια συνεχή γραμμική μορφή στον $\mathcal{H}$, συνεπώς αναπαρίσταται ως εσωτερικό γινόμενο με κάποιο $A^*x \in \mathcal{H}$. Από την υπόθεση της συμμετρίας έχουμε $A^*x = Ax$ για κάθε $x \in D(A)$, άρα ο A^* είναι επέκταση του A. Επιπλέον, ο A^* είναι κλειστός τελεστής στο πεδίο ορισμού του, δηλαδή αν (x_k) είναι μια ακολουθία στο $D(A^*)$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο x και η (A^*x_k) συγκλίνει σε κάποιο y, τότε $x \in D(A^*)$ και $A^*x = y$. Ο επόμενος ορισμός ξεκαθαρίζει τη διαφορά μεταξύ συμμετρικού και αυτοσυζυγούς τελεστή.

Ορισμός A.2.1 (αυτοσυζυγής τελεστής). Στο πλαίσιο που περιγράψαμε πιο πάνω, λέμε ότι ένας συμμετρικός τελεστής A είναι αυτοσυζυγής αν $D(A^*) = D(A)$.

Συνεπώς, ένας αυτοσυζυγής τελεστής δεν έχει συμμετρική επέκταση άλλη από τον εαυτό του. Αν όμως εξαιρέσουμε τους φραγμένους τελεστές, όπου οι φραγμένοι συμμετρικοί τελεστές είναι αυτοσυζυγείς, υπάρχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα στους συμμετρικούς και τους αυτοσυζυγείς τελεστές. Κάθε συμμετρικός τελεστής έχει τουλάχιστον μία αυτοσυζυγή επέκταση, όμως αυτή η επέκταση μπορεί να μην είναι μοναδική. Επομένως, η περιγραφή ενός τελεστή L σε ένα πολύ μικρό (ακόμα και αν είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$) πεδίο ορισμού δεν εξασφαλίζει την πλήρη περιγραφή της ημιομάδας $(P_t)_{t\geqslant 0}$ που έχει γεννήτορα τον L.

Μια ημιομάδα $(P_t)_{t\geqslant 0}$ λέγεται συμμετρική αν οι τελεστές P_t, $t \geqslant 0$ είναι συμμετρικοί. Σε κάθε περίπτωση, ο γεννήτορας L μιας συμμετρικής ημιομάδας $(P_t)_{t\geqslant 0}$ συστολών στον $\mathcal{H}$, ορισμένων στο $D(L)$, είναι πάντα αυτοσυζυγής. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι τελεστές P_t, $t \geqslant 0$ είναι οι ίδιοι αυτοσυζυγείς και από τον ορισμό του πεδίου ορισμού. Το πραγματικό πρόβλημα είναι ότι το πλήρες πεδίο ορισμού του L είναι άγνωστο. Αυτό που συνήθως δίνεται είναι η περιγραφή του L σε έναν πυκνό υπόχωρο D_0 του $\mathcal{H}$, και το ερώτημα είναι να προσδιορίσουμε αν ο D_0 είναι πυκνός στον $D(L)$. Τότε, ο D_0 προσδιορίζει μια μοναδική αυτοσυζυγή επέκταση, άρα μια μοναδική ημιομάδα $(P_t)_{t\geqslant 0}$ συμμετρικών φραγμένων τελεστών με γεννήτορα τον L. Όταν ένας συμμετρικός γραμμικός τελεστής L ορισμένος σε ένα πυκνό υποσύνολο D_0 του $\mathcal{H}$ έχει μοναδική αυτοσυζυγή επέκταση σε κάποιο μεγαλύτερο πεδίο $D(L)$, τότε λέμε ότι ο L είναι ουσιωδώς αυτοσυζυγής (αυτή η έννοια αναφέρεται τόσο στον L όσο και στο D_0). Σε επόμενη ενότητα αυτού του παραρτήματος θα συζητήσουμε το πρόβλημα του να προσδιορίσουμε αν κάποιος τελεστής L, ορισμένος σε κάποιο πεδίο D_0, είναι ουσιωδώς αυτοσυζυγής.

A.3 Επέκταση Friedrichs θετικών τελεστών

Έστω $\mathcal{H}$ ένας πραγματικός χώρος Hilbert και D_0 ένας πυκνός γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ στον οποίο είναι ορισμένος ένας συμμετρικός γραμμικός τελεστής A. Ο τελεστής A λέγεται θετικός αν $\langle x, Ax\rangle \geqslant 0$ για κάθε $x \in D_0$.

Οι συμμετρικοί θετικοί τελεστές A επεκτείνονται σε αυτοσυζυγείς τελεστές με έναν ελαχιστικό τρόπο (το οποίο δεν σημαίνει ότι το πεδίο ορισμού της επέκτασης είναι ελαχιστικό, αφού γενικά τα πεδία ορισμού των διαφόρων αυτοσυζυγών επεκτάσεων του A δεν είναι συγκρίσιμα). Πράγματι, ορίζουμε $\overline{D}_0$ να είναι το σύνολο των $x \in \mathcal{H}$ που είναι όρια ακολουθιών (x_k) στο D_0 για τις οποίες η ακολουθία (Ax_k) είναι συγκλίνουσα. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του A μπορούμε να ελέγξουμε ότι το όριο της (Ax_k) δεν εξαρτάται από την ακολουθία (x_k). Έτσι, αυτή η διαδικασία ορίζει μια επέκταση $\overline{A}$ του τελεστή A στον $\overline{D}_0$, η οποία είναι κλειστή ως προς την τοπολογία που επάγει η νόρμα που ορίστηκε στην (A.1.5). Ο τελεστής $\overline{A}$ είναι κλειστή επέκταση του A, όμως δεν είναι αυτοσυζυγής γενικά, άρα ο A πρέπει να επεκταθεί περαιτέρω.

Γι' αυτόν τον σκοπό, στον γραμμικό χώρο $\overline{D}_0$ θεωρούμε τη νόρμα

$$\langle x, x\rangle_A = \|x\|_A^2 = \langle x, x\rangle + \langle x, \overline{A}x\rangle,$$

και στη συνέχεια θεωρούμε την πλήρωση του $\overline{D}_0$ ως προς αυτή τη νόρμα. Αφού η νόρμα $\|\cdot\|_A$ είναι μεγαλύτερη από τη νόρμα του $\mathcal{H}$, αυτή η πλήρωση εμφυτεύεται φυσιολογικά στον $\mathcal{H}$. Η πλήρωση που παίρνουμε ορίζει έτσι έναν νέο χώρο Hilbert $\mathcal{H}_1$ που ικανοποιεί την $\overline{D}_0 \subseteq \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$. Ορίζουμε τότε το πεδίο $D(A)$ ως το σύνολο των $x \in \mathcal{H}_1$ για τα οποία η απεικόνιση $\ell(x) : y \mapsto \langle x, y\rangle_A$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $C(x) < \infty$ ώστε $|\ell(x)(y)| \leqslant C(x)\|y\|$. Γι' αυτά τα σημεία x, το $\ell(x)(y)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως $\langle T(x), y\rangle$ για κάποιον γραμμικό τελεστή T που ορίζεται στο $D(A)$ και από την κατασκευή ελέγχουμε εύκολα ότι ο T είναι αυτοσυζυγής. Η αυτοσυζυγής επέκταση του A είναι τότε ο $T - Id$, και το πεδίο ορισμού $D(A)$ του A ικανοποιεί την $D_0 \subseteq D(A) \subseteq \mathcal{H}_1$. Αυτή η αυτοσυζυγής επέκταση ονομάζεται *επέκταση Friedrichs* του A.

Η επέκταση Friedrichs δεν είναι γενικά η μοναδική αυτοσυζυγής επέκταση του A, και δύο διαφορετικές αυτοσυζυγείς επεκτάσεις ενδέχεται να έχουν μη συγκρίσιμα πεδία ορισμού. Όμως, η επέκταση Friedrichs είναι ελαχιστική με την έννοια των πεδίων Dirichlet. Η κατασκευή του χώρου Hilbert $\mathcal{H}_1$ που δώσαμε πιο πάνω μπορεί να γίνει για κάθε συμμετρική (άρα και αυτοσυζυγή) επέκταση του A και ονομάζεται πεδίο της μορφής Dirichlet. Αυτό το πεδίο της μορφής Dirichlet είναι ελαχιστικό για την επέκταση Friedrichs.

Α.4 Φασματική αποσύνθεση

Αν A είναι ένας γραμμικός τελεστής στον $\mathcal{B}$, το επιλύον σύνολο $\rho(A)$ του A είναι το σύνολο όλων των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τους οποίους το σύνολο τιμών του $\lambda \cdot Id - A$ είναι πυκνό στον $\mathcal{B}$ και ο $\lambda \cdot Id - A$ έχει φραγμένο αντίστροφο $R_\lambda = (\lambda \cdot Id - A)^{-1}$. Το φάσμα $\sigma(A)$ του A είναι το $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Όταν ο τελεστής $(A, D(A))$ είναι κλειστός, αν $\lambda \in \rho(A)$ έχουμε $R_\lambda(\lambda \cdot Id - A) = \mathcal{B}$. Συνεπώς, ο αντίστροφος $(\lambda \cdot Id - A)^{-1}$ ορίζεται παντού. Επίσης, το επιλύον σύνολο $\rho(A)$ είναι πάντα ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{C}$.

Ένας μιγαδικός αριθμός λ μπορεί να ανήκει στο φάσμα $\sigma(A)$ του A για τρεις διαφορετικούς λόγους. Αν υπάρχει μη μηδενική λύση $x \in \mathcal{B}$ για την εξίσωση $Ax = \lambda x$, τότε ο λ λέγεται ιδιοτιμή του A και κάθε τέτοιο $0 \neq x \in \mathcal{B}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Το σύνολο των ιδιοτιμών σχηματίζει το λεγόμενο *σημειακό φάσμα* του A. Στην περίπτωση που το σύνολο τιμών του $\lambda \cdot Id - A$ είναι πυκνό στον $\mathcal{B}$ αλλά ο αντίστροφος δεν είναι φραγμένος, λέμε ότι ο λ ανήκει στο λεγόμενο *συνεχές φάσμα*. Τέλος, μπορεί να συμβεί το σύνολο τιμών του $\lambda \cdot Id - A$ να μην είναι πυκνό, αλλά ο λ να μην είναι ιδιοτιμή. Αυτοί οι $\lambda \in \mathbb{C}$ σχηματίζουν το *εναπομείναν φάσμα*. Στην περίπτωση των πραγματικών χώρων Banach πρέπει να θεωρήσουμε τη μιγαδοποίηση του χώρου. Όταν όμως μιλάμε για αυτοσυζυγείς τελεστές σε διαχωρίσιμους χώρους Hilbert, το φάσμα είναι πάντα πραγματικό και το εναπομείναν φάσμα είναι κενό.

Οι αυτοσυζυγείς τελεστές έχουν πολλές ομοιότητες με τους συμμετρικούς πίνακες στις πεπερασμένες διαστάσεις, οι οποίοι διαγωνοποιούνται σε ορθοκανονικές βάσεις ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στις πραγματικές τους ιδιοτιμές. Στις άπειρες διαστάσεις η κατάσταση είναι πιο πολύπλοκη, αφού μπορεί να μην υπάρχουν καθόλου ιδιοδιανύσματα. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τον τελεστή $Af = -f''$ στο $\mathbb{R}$, ο οποίος είναι αυτοσυζυγής στον $L^2(dx)$ για το μέτρο Lebesgue dx (με τον χώρο των λείων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα να παίζει τον ρόλο του D), τα ιδιοδιανύσματα του A δεν ανήκουν στον $L^2(dx)$. Πρέπει λοιπόν να αντικαταστήσουμε τη διαγωνοποίηση με τη λεγόμενη φασματική αποσύνθεση.

Θα περιορίσουμε τη συζήτηση στους θετικούς αυτοσυζυγείς τελεστές A σε έναν πραγματικό, διαχωρίσιμο χώρο Hilbert. Με τον όρο *φασματική αποσύνθεση* εννοούμε μια αύξουσα οικογένεια $(\mathcal{H}_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ κλειστών γραμμικών υποχώρων του $\mathcal{H}$, δεξιά συνεχή με την έννοια ότι $\bigcap_{\lambda'>\lambda}\mathcal{H}_{\lambda'} = \mathcal{H}_\lambda$. Απαιτούμε επιπλέον ο $\bigcup_{\lambda\geqslant 0}\mathcal{H}_\lambda$ να είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$. Θεωρούμε τότε, για κάθε $\lambda \geqslant 0$, την ορθογώνια προβολή E_λ στον $\mathcal{H}_\lambda$. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$, η απεικόνιση $\lambda \mapsto E_\lambda x$ είναι δεξιά συνεχής και $E_\lambda x \to x$ όταν $\lambda \to \infty$. Επιπλέον, η απεικόνιση

$$\lambda \mapsto \|E_\lambda x\|^2 = \langle E_\lambda x, x\rangle$$

είναι φραγμένη, αύξουσα και θετική. Συνεπώς, για κάθε ζεύγος σημείων $(x, y) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$, η απεικόνιση $\lambda \mapsto \langle E_\lambda x, y\rangle$ είναι δεξιά συνεχής και έχει φραγμένη κύμανση ως διαφορά φραγμένων αυξουσών συναρτήσεων:

$$\langle E_\lambda x, y\rangle = \frac{1}{2}[\langle E_\lambda(x + y), x + y\rangle - \langle E_\lambda x, x\rangle - \langle E_\lambda y, y\rangle].$$

Τότε, για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ και κάθε $x, y \in \mathcal{H}$ μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Stieltjes

$$\int_0^\infty \psi(\lambda)\, d\langle E_\lambda x, y\rangle.$$

Συμφωνούμε ότι $E_\lambda = \{0\}$ για $\lambda < 0$, οπότε, επεκτείνοντας την ψ να είναι ίση με 0 στο $(-\infty, 0)$, μπορούμε να θεωρούμε το προηγούμενο ολοκλήρωμα ως $\int_{-\infty}^\infty \psi(\lambda)\, d\langle E_\lambda x, y\rangle$, παίρνοντας υπ' όψιν μας και το ενδεχόμενο άλμα στο σημείο $\lambda = 0$.

Αυτή η κατασκευή ορίζει μέσω δυϊσμού έναν φραγμένο συμμετρικό γραμμικό τελεστή, ο οποίος γράφεται συμβολικά στη μορφή

$$\Psi = \int_0^\infty \psi(\lambda)\, dE_\lambda,$$

και ικανοποιεί την

$$\langle \Psi x, y\rangle = \int_0^\infty \psi(\lambda) d\langle E_\lambda x, y\rangle$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$. Αν η ψ δεν είναι φραγμένη, τότε ο τελεστής $\Psi = \int_0^\infty \psi(\lambda)\, dE_\lambda$ είναι μη φραγμένος με πεδίο

$$\left\{x \in \mathcal{H} : \int_0^\infty \psi^2(\lambda) d\langle E_\lambda x, x\rangle < \infty\right\}. \tag{A.4.1}$$

Το βασικό αποτέλεσμα ύπαρξης είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα A.4.1 (φασματική αποσύνθεση). *Αν A είναι ένας θετικός αυτοσυζυγής τελεστής στον $\mathcal{H}$, τότε υάρχει φασματική αποσύνθεση $(E_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ τέτοια ώστε*

$$A = \int_0^\infty \lambda\, dE_\lambda.$$

Τότε, για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή

$$\psi(A) = \int_0^\infty \psi(\lambda)\, dE_\lambda$$

στο πεδίο (A.4.1), στο οποίο ικανοποιεί την

$$\|\psi(A)x\|^2 = \int_0^\infty \psi^2(\lambda)\, d\langle E_\lambda x, x\rangle.$$

Η σχέση ανάμεσα στη φασματική αποσύνθεση του Θεωρήματος A.4.1 και το φάσμα $\sigma(A)$ του A είναι η εξής. Για έναν θετικό πραγματικό αριθμό λ, έχουμε $\lambda \in \sigma(A)$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, η διάσταση του $\mathcal{H}_{\lambda+\varepsilon}$ είναι γνησίως μεγαλύτερη από τη διάσταση του $\mathcal{H}_{\lambda-\varepsilon}$. Επιπλέον, ο λ ανήκει στο σημειακό φάσμα αν και μόνο αν ο κλειστός υπόχωρος $\mathcal{H}_\lambda^-$ που παράγεται από την $\bigcup_{\lambda'<\lambda} \mathcal{H}_{\lambda'}$ ικανοποιεί την $\mathcal{H}_\lambda^- \neq \mathcal{H}_\lambda$. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε $x \in \mathcal{H}_\lambda$ που είναι κάθετο στον $\mathcal{H}_\lambda^-$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ.

Το φάσμα $\sigma(A)$ ενός θετικού αυτοσυζυγούς τελεστή A έχει και μια δεύτερη αποσύνθεση, η οποία είναι πολύ πιο χρήσιμη στην πράξη. Δίνουμε πρώτα τον εξής ορισμό: Έστω A ένας θετικός αυτοσυζυγής τελεστής στον $\mathcal{H}$. Ένας $\lambda \in \sigma(A)$ ανήκει στο ουσιώδες φάσμα $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, η διάσταση του ορθογώνιου συμπληρώματος του $\mathcal{H}_{\lambda-\varepsilon}$ στον $\mathcal{H}_{\lambda+\varepsilon}$ είναι άπειρη. Το συμπλήρωμα $\sigma_d(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ ονομάζεται διακριτό φάσμα.

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ένα σημείο ανήκει στο διακριτό φάσμα αν είναι μεμονωμένο στο σημειακό φάσμα και αν ο αντίστοιχος ιδιόχωρος έχει πεπερασμένη διάσταση. Αν $\lambda \in \sigma_d(A)$, τότε το σύνολο των λύσεων x της εξίσωσης $Ax = \lambda x$ είναι μη τετριμμένο και έχει πεπερασμένη διάσταση. Το επόμενο χρήσιμο κριτήριο χαρακτηρίζει τα στοιχεία του φάσματος και του ουσιώδους φάσματος.

Θεώρημα A.4.2 (κριτήριο του Weyl). *Έστω A ένας θετικός αυτοσυζυγής τελεστής με πεδίο $D(A) \subseteq \mathcal{H}$. Τότε $\lambda \in \sigma(A)$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in D(A)$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε $\|Ax - \lambda x\| < \varepsilon$. Επίσης, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία (x_k) στο $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ τέτοια ώστε $\|Ax_k - \lambda x_k\| < \varepsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον $\mathcal{H} = L^2(dx)$ και τον τελεστή $A = -\Delta$, όπου Δ είναι ο τελεστής Laplace (ακριβέστερα, η κλειστότητα αυτού του τελεστή αν τον ορίσουμε αρχικά στις λείες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα). Ο τελεστής $A = -\Delta$ είναι αυτοσυζυγής και η φασματική του αποσύνθεση δίνεται από την οικογένεια $(\mathcal{H}_\lambda)_{\lambda>0}$, όπου, για κάθε $\lambda > 0$, ο $\mathcal{H}_\lambda$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων στον $L^2(dx)$ που ο μετασχηματισμός Fourier τους έχει φορέα στο $[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]$. Το σημειακό φάσμα είναι κενό και $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = [0, \infty)$.

Συνέπεια του Θεωρήματος A.4.2 είναι το γεγονός ότι αν το $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ είναι κενό, τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Δηλαδή, υπάρχει μια ακολουθία (λ_k) στο $\sigma(A)$ και μια ορθοκανονική βάση (e_k) του $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ώστε $Ae_k = \lambda_k e_k$ για κάθε k. Αφού ο A είναι θετικός, έχουμε $\lambda_k \geqslant 0$ και μπορούμε να υποθέσουμε για απλότητα ότι οι λ_k είναι διατεταγμένοι έτσι ώστε $0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$. Είναι μάλιστα πιο βολικό να διακρίνουμε τις διαφορετικές ιδιοτιμές, δηλαδή να υποθέσουμε ότι $0 \leqslant \lambda_0 < \cdots < \lambda_k < \cdots$ και να θεωρήσουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ τον διανυσματικό χώρο F_k που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$. Τότε, η φασματική αποσύνθεση του A περιγράφεται με τον εξής απλουστευμένο τρόπο. Η E_k είναι η ορθογώνια προβολή στον F_k και $E_\lambda = E_k$ στο $[\lambda_k, \lambda_{k+1})$ και είναι σταθερή ανάμεσα σε δύο άλματα, που συμβαίνουν στις τιμές λ_k. Αν θεωρήσουμε μια $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, τότε ο $\psi(A)$ είναι ο τελεστής που απεικονίζει το e_k στο $\psi(\lambda_k)e_k$, $k \in \mathbb{N}$, που είναι ο φυσιολογικός τρόπος για να σκεφτόμαστε τον $\psi(A)$, για παράδειγμα όταν η ψ είναι πολυωνυμική συνάρτηση.

A.5 Ουσιωδώς αυτοσυζυγείς τελεστές

Επανερχόμαστε στο ερώτημα αν για δοθέντα συμμετρικό τελεστή L ορισμένο σε κάποιον πυκνό γραμμικό υπόχωρο D_0 ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$, η γνώση του L στον D_0 είναι αρκετή για να προσδιορίσει μια μοναδική αυτοσυζυγή επέκταση του L, ή ισοδύναμα, μια μοναδική συμμετρική ημιομάδα $(P_t)_{t\geqslant 0}$ με γεννήτορα L. Θα περιοριστούμε σε θετικούς συμμετρικούς τελεστές A (όπου σκεφτόμαστε ότι $A = -L$).

Σε αυτό το πλαίσιο, μπορούμε πάντα να θεωρήσουμε την κλειστότητα του D_0 ως προς την τοπολογία που επάγεται από την (A.1.5) (την οποία ήδη χρησιμοποιήσαμε όταν συζητήσαμε την επέκταση Friedrichs). Αυτή η κλειστότητα αναπαριστά την *ελαχιστική επέκταση* του A. Ο συζυγής τελεστής A^* του A και το πεδίο του μπορούν λοιπόν να οριστούν όπως πριν, και ο A^* είναι πάντα επέκταση του A. Οδηγούμαστε έτσι στον ακόλουθο ορισμό: Ένας θετικός συμμετρικός τελεστής A λέγεται *ουσιωδώς αυτοσυζυγής* στο D_0 αν η ελαχιστική επέκταση είναι αυτοσυζυγής.

Έστω τώρα ένας μη φραγμένος θετικός συμμετρικός τελεστής ορισμένος σε κάποιο πυκνό πεδίο $D(A)$ σε έναν μιγαδικό χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Αν ο A είναι συμμετρικός, η διάσταση $\dim(\mathrm{Ker}(\lambda \cdot Id - A^*))$, ως συνάρτηση από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{R}$, είναι σταθερή στο $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ και στο $\mathrm{Im}(\lambda) < 0$. Επιπλέον, ο $\mathrm{Ker}(\lambda \cdot Id - A^*)$ είναι ο ορθογώνιος υπόχωρος του $\mathrm{Im}(\overline{\lambda} \cdot Id - A)$. Γενικά, αν θεωρήσουμε δύο συγκεκριμένους μιγαδικούς αριθμούς, για παράδειγμα τους $\lambda = \pm i$, και θεωρήσουμε τους πυρήνες $\mathcal{K}_+$ και $\mathcal{K}_-$ των $\pm i \cdot Id - A^*$, ένα θεμελιώδες, αν και σχετικά απλό, αποτέλεσμα είναι το εξής.

Θεώρημα A.5.1 (von Neumann). *Αν A είναι ένας κλειστός συμμετρικός τελεστής ορισμένος στο $D(A)$, τότε το πεδίο $D(A^*)$ είναι το $D(A) + \mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-$. Ειδικότερα, ο A είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\mathcal{K}_+ = \mathcal{K}_- = \{0\}$.*

Ένα χρήσιμο κριτήριο για να δούμε αν ένας τελεστής A, ορισμένος στο D_0, είναι ουσιωδώς αυτοσυζυγής δίνεται λοιπόν από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση A.5.2. *Έστω A ένας θετικός συμμετρικός τελεστής, ορισμένος σε κάποιον πυκνό γραμμικό υπόχωρο D_0. Τότε, ο A είναι ουσιωδώς αυτοσυζυγής αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε ο $\lambda \cdot Id - A^*$ να είναι εμφύτευση.*

Πράγματι, αφού το επιλύον σύνολο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, ο $\lambda \cdot Id - A^*$ εξακολουθεί να είναι εμφύτευση για κάποιον μιγαδικό αριθμό κοντά στον λ με θετικό ή αρνητικό φανταστικό μέρος. Συνεπώς, έχουμε $\mathcal{K}_+ = \mathcal{K}_- = \{0\}$ και το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα A.5.1. Ειδικότερα, για να βεβαιωθούμε ότι ο A είναι αυτοσυζυγής, αρκεί να βρούμε κάποιον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο η εξίσωση $\lambda x = A^* x$ δεν έχει μη τετριμμένες λύσεις (με άλλα λόγια, αν ο x ικανοποιεί τις $\lambda\langle y, x\rangle = \langle Ay, x\rangle$ και $|\langle y, x\rangle| \leqslant C\|y\|$ για κάθε $y \in D_0$, τότε $x = 0$).

A.6 Συμπαγείς τελεστές και τελεστές Hilbert-Schmidt

Αν $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ είναι χώροι Banach, ένας γραμμικός τελεστής $A : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ λέγεται συμπαγής αν η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{B}_1$ είναι σχετικά συμπαγής στον $\mathcal{B}_2$. Αν ένας τελεστής A μπορεί να γραφτεί στη μορφή QK ή KQ, με τον Q φραγμένο και τον K συμπαγή, τότε ο A είναι συμπαγής. Επίσης, τα ισχυρά όρια συμπαγών τελεστών είναι συμπαγείς τελεστές. Με άλλα λόγια, αν (A_k) είναι μια ακολουθία συμπαγών τελεστών και αν $\lim_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0$ (με τη νόρμα τελεστών) τότε ο A είναι συμπαγής. Επιπλέον, αν η εικόνα ενός τελεστή έχει πεπερασμένη διάσταση (ο τελεστής έχει πεπερασμένη τάξη), τότε αυτός ο τελεστής είναι συμπαγής. Μάλιστα, σε έναν χώρο Hilbert, κάθε συμπαγής τελεστής είναι ισχυρό όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι βασικό.

Θεώρημα Α.6.1. *Έστω A συμπαγής συμμετρικός τελεστής σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Το φάσμα του A αποτελείται από μια ακολουθία ιδιοτιμών (λ_k), με μοναδικό οριακό σημείο, ενδχομένως εκτός του διακριτού φάσματος, το 0. Οι μη μηδενικές ιδιοτιμές σχηματίζουν μια, πιθανώς πεπερασμένη, ακολουθία που συγκλίνει στο 0, έχουν ιδιόχωρους πεπερασμένης διάστασης, και υπάρχει μια ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων. Αντίστροφα, κάθε τελεστής που έχει μια ακολουθία ιδιοτιμών που συγκλίνει στο 0, είναι συμπαγής.*

Οι τελεστές Hilbert-Schmidt δίνουν σημαντικά παραδείγματα συμπαγών συμμετρικών τελεστών: Ένας συμμετρικός φραγμένος τελεστής K, ορισμένος σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert λέγεται τελεστής Hilbert-Schmidt αν, για κάποια ορθοκανονική βάση (e_k) του $\mathcal{H}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Ke_k\|^2 < \infty.$$

Η ιδιότητα αυτή είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της ορθοκανονικής βάσης.

Πρόταση Α.6.2. *Κάθε τελεστής Hilbert-Schmidt είναι συμπαγής.*

Οι τελεστές Hilbert-Schmidt είναι επομένως τελεστές για τους οποίους η ακολουθία (λ_k) των ιδιοτιμών ικανοποιεί την $\sum_k \lambda_k^2 < \infty$. Όταν ο χώρος Hilbert είναι ο $L^2(\mu)$ πάνω από έναν χώρο μέτρου $(E, \mathcal{F}, \mu)$, κάθε τελεστής Hilbert-Schmidt K αναπαρίσταται από έναν πυρήνα $k(x, y) \in L^2(\mu \otimes \mu)$ έτσι ώστε

$$Kf(x) = \int_E k(x, y) f(y) d\mu(y), \qquad x \in E$$

για κάθε $f \in L^2(\mu)$. Πράγματι, αν (e_ℓ) είναι μια ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές (λ_ℓ), τότε $k(x, y) = \sum_\ell \lambda_\ell e_\ell(x) e_\ell(y)$, και το γεγονός ότι ο K είναι τελεστής Hilbert-Schmidt είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι αυτή η σειρά συγκλίνει στον $L^2(\mu \otimes \mu)$. Αντίστροφα, εκείνοι οι τελεστές K που αναπαρίστανται από $L^2(\mu \otimes \mu)$-πυρήνες είναι συμπαγείς. Πράγματι, αν (f_m) είναι μια φραγμένη ακολουθία στον $L^2(\mu)$, τότε υπάρχει υπακολουθία (f_{s_m}) που συγκλίνει ασθενώς στον $L^2(\mu)$. Τότε, η $Kf_{s_m}(x)$ συγκλίνει καθώς το $m \to \infty$ για κάθε $x \in E$ για το οποίο $\int_E k^2(x, y) d\mu(y) < \infty$, και

$$|Kf_{s_m}(x)| \leqslant C \left(\int_E k^2(x, y) d\mu(y) \right)^{1/2},$$

όπου $C = \sup_m \|f_m\|_2 < \infty$. Αφού $k(x, y) \in L^2(\mu \otimes \mu)$, έπεται ότι η Kf_{s_m} πράγματι συγκλίνει στον $L^2(\mu)$. Από το Θεώρημα Α.6.1 υπάρχει ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων στον $L^2(\mu)$ με αντίστοιχη ακολουθία ιδιοτιμών (λ_m). Με στοιχειώδη εργαλεία από τη θεωρία χώρων Hilbert βλέπουμε εύκολα ότι

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \lambda_\ell^2 = \int_E \int_E k^2(x, y) d\mu(x) d\mu(y),$$

απ' όπου έπεται ο ισχυρισμός.

Ο γεννήτορας L μιας ημιομάδας $(P_t)_{t \geqslant 0}$ δεν είναι γενικά τελεστής Hilbert-Schmidt (δεν είναι, γενικά, καν φραγμένος) ενώ, για $t > 0$, οι τελεστές P_t μπορεί να είναι Hilbert-Schmidt, και συνεπώς συμπαγείς. Το επόμενο θεώρημα περιγράφει συνθήκες για να είναι οι P_t συμπαγείς.

Θεώρημα Α.6.3. *Έστω $(P_t)_{t \geqslant 0}$ συμμετρική ημιομάδα με μη φραγμένο γεννήτορα L, ώστε ο $-L$ να είναι θετικός με πεδίο $D(L)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) $\sigma_{\rm ess}(-L) = \varnothing$.

(ii) *Για όλους ή κάποιους* $t > 0$, *ο* P_t *είναι συμπαγής.*

(iii) *Για όλα ή κάποια* $\lambda > 0$, *η επιλύουσα* $(\lambda \cdot Id - L)^{-1}$ *είναι συμπαγής.*

Στο επίπεδο της φασματικής αποσύνθεσης, οι ισοδύναμες συνθήκες του Θεωρήματος A.6.3 αντιστοιχούν στο ότι οι ιδιοτιμές του $-L$ πηγαίνουν στο άπειρο. Ειδικότερα, αν ο P_t είναι συμπαγής για κάποιον $t > 0$, τότε το φάσμα του $-L$ είναι διακριτό και σχηματίζει μια ακολουθία ιδιοτιμών (λ_k) που πηγαίνει στο άπειρο, και έχουν αντίστοιχους ιδιόχωρους E_k πεπερασμένης διάστασης n_k, $k \in \mathbb{N}$. Τότε, ο P_t είναι Hilbert-Schmidt αν και μόνο αν $\sum_{k\in\mathbb{N}} n_k e^{-2\lambda_k t} < \infty$.

Βιβλιογραφία

[1] M. Anttila, K. M. Ball and E. Perissinaki, *The central limit problem for convex bodies*, trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4723-4735.

[2] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos, and V. D. Milman, *Asymptotic geometric analysis. Part I*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 202, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[3] D. Bakry and M. Emery, *Diffusions hypercontractives*, Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Math. **1123** (1985), 179-206.

[4] D. Bakry and M. Ledoux, *Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator*, Invent. Math. **123** (1996), 259-281.

[5] D. Bakry, I. Gentil and M. Ledoux, *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **348**, Springer (2014).

[6] K. M. Ball, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in* $\mathbb{R}^n$, Studia Math. **88** (1988), 69-84.

[7] F. Barthe, *Un théorème de la limite centrale pour les ensembles convexes*, Séminaire Bourbaki, Vol. 2008/2009, 997-1011.

[8] F. Barthe and D. Cordero-Erausquin, *Invariances in variance estimates*, Proc. London Math. Soc. **106** (2013) 33-64.

[9] F. Barthe and B. Klartag, *Spectral gaps, symmetries and log-concave perturbations*, Bull. Hellenic Math. Soc. **64** (2020), 1-31.

[10] V. Bayle and C. Rosales, *Some isoperimetric comparison theorems for convex bodies in Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), 1371-1394.

[11] S. G. Bobkov, *Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures*, Ann. Prob. **27** (1999), 1903-1921.

[12] S. G. Bobkov, *On concentration of distributions of random weighted sums*, Ann. Probab. **31** (2003), 195-215.

[13] S. G. Bobkov, *Spectral gap and concentration for some spherically symmetric probability measures*, Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Math. **1807**, Springer, Berlin (2003), 37-43.

[14] S. G. Bobkov, *On isoperimetric constants for log-concave probability distributions*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math., **1910**, Springer, Berlin (2007), 81-88.

[15] S. G. Bobkov and C. Houdré, *Some connections between isoperimetric and Sobolev-type inequalities*, Mem. Amer. Math. Soc. **129** (1997).

[16] S. G. Bobkov and A. Koldobsky, *On the central limit property of convex bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 44-52.

[17] V. Bogachev, *Gaussian measures*, Amer. Math. Soc. (1998).

[18] C. Borell, *Complements of Lyapunov's inequality*, Math. Ann. **205** (1973), 323-331.

[19] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Mat. **12** (1974), 239-252.

[20] C. Borell, *Convex set functions in d-space*, Period. Math. Hungar. **6** (1975), 111-136.

[21] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Inventiones Math. **30** (1975), 207-216.

[22] J. Bourgain, *On high dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math. **108** (1986), 1467-1476.

[23] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127-137.

[24] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas and B-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Amer. Math. Society, Mathematical Surveys and Monographs **196** (2014).

[25] Y. Brenier, *Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **305** (1987), 805-808.

[26] Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*, Commun. Pure Appl. Math. **44** (1991), 375–417.

[27] Y. D. Burago and V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York (1988).

[28] P. Buser, *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **15** (1982), 213-230.

[29] L. A. Caffarelli, *A-priori estimates and the geometry of the Monge-Ampère equation*, Park City/IAS Mathematics Series **2** (1992).

[30] L. A. Caffarelli, *Boundary regularity of maps with a convex potential*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 1141-1151.

[31] L. A. Caffarelli, *Regularity of mappings with a convex potential*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 99-104.

[32] I. Chavel, *Isoperimetric inequalities - Differential geometric and analytic perspectives*, Cambridge tracts in Mathematics **145**, Cambridge University Press, Cambridge (2001).

[33] I. Chavel, *Riemannian geometry - A modern introduction*, Second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **98**, Cambridge University Press, Cambridge (2006).

[34] J. Cheeger, *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*, Problems in Analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969), Princeton Univ. Press, Princeton (1970), 195-199.

[35] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi and B. Maurey, *The (B)-conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems*, J. Funct. Anal. **214** (2004), 410-427.

[36] Y. Chen, *An almost constant lower bound of the isoperimetric coefficient in the KLS conjecture*, Geom. Funct. Anal. **31** (2021), 34–61.

[37] E. B. Davies, *Spectral theory and differential operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 42, Cambridge University Press, 1995.

[38] P. Diaconis and D. Freedman, *Asymptotics of graphical projection pursuit*, Ann. of Stat. **12** (1984), 793-815.

[39] M. Dyer and A. Frieze, *Computing the volume of convex bodies: a case where randomness provably helps*, pp. 123-169 in Probabilistic combinatorics and its applications (San Francisco, CA, 1991), edited by B. Bollobás, Proc. Sympos. Appl. Math. 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[40] M. Dyer, A. Frieze, and R. Kannan, *A random polynomial-time algorithm for approximating the volume of convex bodies*, J. Assoc. Comput. Mach. 38:1 (1991), 1-17.

[41] R. Eldan, *Thin shell implies spectral gap up to polylog via a stochastic localization scheme*, Geom. Funct. Anal. **23** (2013), 532-569.

[42] R. Eldan and B. Klartag, *Approximately Gaussian marginals and the hyperplane conjecture Concentration, functional inequalities and isoperimetry*, Contemp. Math. 545, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2011), 55-68.

[43] R. Eldan and B. Klartag, *Dimensionality and the stability of the Brunn-Minkowski inequality*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **13** (2014), no. 4, 975–1007.

[44] R. Eldan and J. Lehec, *Bounding the norm of a log-concave vector via thin-shell estimates*, Geometric aspects of functional analysis, 107–122, Lecture Notes in Math., 2116, Springer, Cham, 2014.

[45] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[46] B. Fleury, *Concentration in a thin Euclidean shell for log-concave measures*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 832-841.

[47] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, NJ (1976).

[48] M. Fradelizi, *Sections of convex bodies through their centroid*, Arch. Math. **69** (1997), 515-522.

[49] R. Gardner, *Geometric Tomography, Second Edition*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **58**, Cambridge University Press, 2006.

[50] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2d ed., Grundlehren Math. Wiss. **224**, Springer, Berlin (1983).

[51] O. Guédon and E. Milman, *Interpolating thin-shell and sharp large-deviation estimates for isotropic log-concave measures*, Geom. Funct. Anal. **21** (2011), 1043-1068.

[52] D. Hensley, *Slicing convex bodies: bounds for slice area in terms of the body's covariance*, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 619-625.

[53] L. Hormander, *L^2-estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator*, Acta Math. **113** (1965), 89-152.

[54] L. Hormander, *Notions of Convexity*, Progress in Math. **127**, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin (1994).

[55] A. Jambulapati, Y. T. Lee and S. S. Vempala, *A Slightly Improved Bound for the KLS Constant*, Preprint.

[56] J. Kadlec, *The regularity of the solution of the Poisson problem in a domain whose boundary is similar to that of a convex domain*, Czechoslovak Math. J. **89** (1964), 386-393.

[57] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541-559.

[58] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Random walks and $O^*(n^5)$ volume algorithm for convex bodies*, Random Structures Algorithms II **1** (1997), 1-50.

[59] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1274-1290.

[60] B. Klartag, *A central limit theorem for convex sets*, Invent. Math. **168** (2007), 91-131.

[61] B. Klartag, *Power-law estimates for the central limit theorem for convex sets*, J. Funct. Anal. **245** (2007), 284-310.

[62] B. Klartag, *A Berry-Esseen type inequality for convex bodies with an unconditional basis*, Probab. Theory Related Fields **145** (2009), 1-33.

[63] B. Klartag and J. Lehec, *Bourgain's slicing problem and KLS isoperimetry up to polylog*, Geom. Funct. Anal. **32** (2022), no. 5, 1134–1159.

[64] B. Klartag and E. Putterman, *Spectral monotonicity under Gaussian convolution*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (to appar).

[65] E. Kuwert, *Note on the isoperimetric profile of a convex body*, Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Springer, Berlin (2003), 195-200.

[66] M. Ledoux, *A simple analytic proof of an inequality by P. Buser*, Proc. Am. Math. Soc. **121** (1994), 951-959.

[67] M. Ledoux, *Isoperimetry and Gaussian Analysis*, Ecole d'Eté de Probabilités de St.-Flour 1994, Lecture Notes in Math. **1709** (1996), 165-294.

[68] M. Ledoux, *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities*, Séminaire de probabilités XXXIII, Lecture Notes in Math. **1709**, Springer, Berlin (1999), 120-216.

[69] M. Ledoux, *The geometry of Markov diffusion generators*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **9** (2000), 305-366.

[70] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs **89**, American Mathematical Society, Providence, RI (2001).

[71] M. Ledoux, *Spectral gap, logarithmic Sobolev constant, and geometric bounds*, Surveys in Differential Geometry, vol. IX, Int. Press, Somerville (2004), 219-240.

[72] Y. T. Lee and S. S. Vempala, *Eldan's stochastic localization and the KLS hyperplane conjecture: An improved lower bound for expansion*, In Proc. of IEEE FOCS, 2017.

[73] Y. T. Lee and S. S. Vempala, *The KLS Conjecture*, Current Developments in Mathematics, 2017.

[74] Y. T. Lee and S. S. Vempala, *Stochastic localization + Stieltjes barrier = tight bound for log-Sobolev*, in Proceedings of the 50th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing, pp. 1122-1129. ACM, 2018.

[75] Y. T. Lee and S. S. Vempala, *Eldan's Stochastic localization and the KLS Conjecture: Isoperimetry, Concentration and Mixing*, Preprint.

[76] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations*, Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris, 1958.

[77] L. Lovász and M. Simonovits, *Random walks in a convex body and an improved volume algorithm*, Random Structures and Algorithms **4** (1993), 359-412.

[78] L. Lovász and S. Vempala, *The geometry of logconcave functions and sampling algorithms*, Random Structures Algorithms **30** (2007), 307-358.

[79] V. G. Maz'ya, *The negative spectrum of the higher-dimensional Schrodinger operator*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **144** (1962), 721-722.

[80] V. G. Maz'ya, *On the solvability of the Neumann problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **147** (1962), 294-296.

[81] E. Milman, *On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration*, Invent. Math. **177** (2009), no. 1, 1-43.

[82] E. Milman, *On the role of convexity in functional and isoperimetric inequalities*, Proc. Lond. Math. Soc. **99** (2009), no. 1, 32-66.

[83] E. Milman, *Isoperimetric and concentration inequalities: equivalence under curvature lower bound*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 207-239.

[84] E. Milman, *Isoperimetric bounds on convex manifolds*, in Proceedings of the Workshop on "Concentration, Functional Inequalities and Isoperimetry", Contemporary Math. **545** (2011), 195-208.

[85] B. Oksendal, *Stochastic differential equations. An introduction with applications*, Sixth edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xxiv+360 pp.

[86] G. Paouris, *Concentration of mass in convex bodies*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1021-1049.

[87] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287-308.

[88] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[89] P. Sternberg and K. Zumbrun, *On the connectivity of boundaries of sets minimizing perimeter subject to a volume constraint*, Commun. Anal. Geom. **7** (1999), 199-220.

[90] V. N. Sudakov, *Typical distributions of linear functionals in finite-dimensional spaces of high dimension*, Soviet Math. Dokl. 19 (1978), 1578-1582

[91] S. S. Vempala, *Geometric random walks: A survey*, MSRI. Combinatorial and Computational Geometry, **52** (2005), 573–612.

[92] S. S. Vempala, *Algorithmic Convex Geometry: A survey*, 2010.
https://www.cc.gatech.edu/ vempala/papers/acg.pdf

[93] S. S. Vempala, *Algorithmic aspects of convexity*, Lecture notes from the Institut Henri Poincaré Winter School, January 19-23, 2015.

[94] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Texts in Mathematics **58**, Amer. Math. Soc. (2003).

[95] H. von Weizsaker, *Sudakov's typical marginals, random linear functionals and a conditional central limit theorem*, Probab. Theory Relat. Fields **107** (1997), 313-324.