Πραγματική Ανάλυση

Πέτρος Βαλέττας

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2009

Περιεχόμενα

Μέρος I

Μετρικοί χώροι

Κεφάλαιο 1

Μετρικοί χώροι

1.1 Ορισμός και παραδείγματα

Ορισμός 1.1.1 (μετρική). Έστω X ένα μη κενό σύνολο. *Μετρική* στο X λέγεται κάθε συνάρτηση $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\rho(x,y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ (μη αρνητική) και $\rho(x,y) = 0$ αν και μόνον αν $x = y$.

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ για κάθε $x, y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα).

(iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ για κάθε $x, y, z \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Αν ρ είναι μια μετρική στο X τότε το ζεύγος (X, ρ) λέγεται *μετρικός χώρος*. Τα στοιχεία του X θα λέγονται και *σημεία*.

Παραδείγματα 1.1.2. (α) Η *συνήθης μετρική* στο $\mathbb{R}$ είναι η

$$d(x,y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(β) Η *Ευκλείδεια μετρική* στον $\mathbb{R}^m$, τον χώρο των διατεταγμένων m-άδων $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ πραγματικών αριθμών, ορίζεται ως εξής: αν $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ και $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, τότε

$$\rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Πρέπει φυσικά να ελεγχθεί η τριγωνική ανισότητα (βλέπε §1.3).

(γ) Κάθε μη κενό σύνολο X μπορεί να γίνει μετρικός χώρος κατά «τετριμμένο τρόπο»: Θεωρούμε τη συνάρτηση $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

ως μετρική (ελέγξτε ότι ικανοποιεί τις (i), (ii) και (iii) του ορισμού). Αυτή η μετρική λέγεται *διακριτή* μετρική και ο χώρος (X,δ) *διακριτός* μετρικός χώρος.

(δ) Στο ίδιο σύνολο X μπορούμε να ορίσουμε πολλές διαφορετικές μετρικές: Αν έχουμε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1, τότε αυτή επάγει μια μετρική d_f στο X ως εξής:

$$d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|, \quad x,y \in X.$$

Εύκολα ελέγχεται ότι η d_f είναι μετρική στο X.

(ε) *Ο n-διάστατος κύβος του Hamming.* Θεωρούμε το σύνολο

$$H_n = \{0,1\}^n = \big\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \bigm| x_i = 0 \text{ ή } 1,\ i=1,\ldots,n\big\}.$$

Θεωρούμε την $h : H_n \times H_n \to \mathbb{R}$, όπου $h(x,y)$ είναι το πλήθος των θέσεων στις οποίες διαφέρουν οι n-άδες $x=(x_1,\ldots,x_n)$ και $y=(y_1,\ldots,y_n)$, δηλαδή

$$h(x,y) = \mathrm{card}\big(\{1 \le i \le n : x_i \neq y_i\}\big).$$

Αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη να δείξει ότι η h είναι μετρική στο H_n. Ο $\big(H_n,h\big)$ λέγεται κύβος του Hamming και η h μετρική του Hamming.

Ορισμός 1.1.3 (σχετική μετρική). Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Αν A είναι οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο του X, η απεικόνιση $\rho_A : A \times A \to \mathbb{R}$ με

$$\rho_A(x,y) = \rho(x,y), \qquad x,y \in A$$

(ο περιορισμός δηλαδή της ρ στο $A \times A$) είναι μετρική στο σύνολο A. Η μετρική ρ_A είναι η *σχετική μετρική* που επάγεται από την ρ στο A.

Για παράδειγμα, κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρικός χώρος με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής σε αυτό.

Ορισμός 1.1.4 (διάμετρος). Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Ο (X,ρ) λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $x,y \in X$ να ισχύει $\rho(x,y) \le C$. Ισοδύναμα, αν

$$\sup\{\rho(x,y) : x,y \in X\} < \infty.$$

Αν αυτό συμβαίνει, τότε η *διάμετρος* του (X,ρ) είναι ο αριθμός

$$\mathrm{diam}(X) := \sup\{\rho(x,y) : x,y \in X\}.$$

Παραδείγματα 1.1.5. (α) Το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $d(x,y) = |x-y|$ δεν είναι φραγμένος μετρικός χώρος.

(β) Το $\mathbb{R}$ με τη μετρική που επάγει η $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, δηλαδή

$$\rho(x,y) = |\arctan x - \arctan y|, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

είναι φραγμένος μετρικός χώρος και μάλιστα $\mathrm{diam}\,(\mathbb{R},\rho) = \pi$.

(γ) Το $\mathbb{R}$ με τη μετρική

$$\sigma(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|},\quad x,y\in\mathbb{R}$$

είναι επίσης φραγμένος μετρικός χώρος, αφού $\sigma(x,y)<1$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}\,(\mathbb{R},\sigma)=1$.

(δ) Κάθε διακριτός μετρικός χώρος είναι φραγμένος (και, αν έχει περισσότερα από ένα σημεία, η διάμετρός του είναι ίση με 1).

(ε) Σταθεροποιούμε έναν πρώτο αριθμό p και θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων. Αν $m,n\in\mathbb{Z}$ με $m\neq n$, θέτουμε $p(n,m)$ τη μεγαλύτερη δύναμη του p που διαιρεί τον $|n-m|$, δηλαδή αν $m\neq n$, τότε

$$p(m,n)=\max\{k\geq 0 : m\equiv n \bmod p^k\}.$$

Ορίζουμε $\sigma_p:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ με

$$\sigma_p(m,n)=\begin{cases}2^{-p(m,n)}, & m\neq n\\ 0, & m=n\end{cases}$$

Τότε, η σ_p είναι μετρική στο $\mathbb{Z}$ και ο $(\mathbb{Z},\sigma_p)$ είναι φραγμένος μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα

$$\sigma_p(x,z)\leq\sigma_p(x,y)+\sigma_p(y,z)\quad \text{για κάθε } x,y,z\in\mathbb{Z}.$$

Αν $x=z$ τότε η ανισότητα ισχύει κατά προφανή τρόπο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x\neq z$ και επομένως είτε $x\neq y$ ή $y\neq z$ (γιατί;). Αν είναι $x=y$ ή $y=z$ τότε η ανισότητα πάλι ισχύει κατά προφανή τρόπο. Ας είναι λοιπόν $x\neq y$ και $y\neq z$. Έστω $p(x,y)=a$, $p(x,z)=c$ και $p(y,z)=b$. Τότε έχουμε ότι $x\equiv y \bmod p^a$ και $y\equiv z\bmod p^b$, άρα $z\equiv x\bmod p^{\min\{a,b\}}$ και από τον ορισμό του $p(x,z)$ έχουμε ότι $\min\{a,b\}\leq c$. Επειδή θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2^c}\leq\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b},$$

αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε την

$$2^{c-a}+2^{c-b}\geq 1$$

η οποία ισχύει διότι, από την $\min\{a,b\}\leq c$, έχουμε είτε $a\leq c$ ή $b\leq c$. □

1.2 Χώροι με νόρμα

Πολλοί από τους κλασικούς μετρικούς χώρους που θα συναντήσουμε σε αυτό το μάθημα είναι ταυτόχρονα γραμμικοί χώροι. Επιπλέον, η μετρική τους συνδέεται φυσιολογικά με τη γραμμική τους δομή. Όπως λέμε, «επάγεται από μια νόρμα».

Ορισμός 1.2.1 (νόρμα). Έστω X ένας πραγματικός γραμμικός χώρος. *Νόρμα* στον X είναι κάθε συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνον αν $x = \vec{0}$ (μη αρνητική).

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$ (θετικά ομογενής).

(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται *χώρος με νόρμα*.

Παρατηρήσεις 1.2.2. (α) Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \|x - y\|, \qquad x, y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του). Πράγματι,

- $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και ισχύει $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ αν και μόνο αν $x - y = \vec{0}$ δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$.
- $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in X$.
- Αν $x, y, z \in X$ τότε

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Επιπλέον, η d είναι συμβιβαστή με τη γραμμική δομή του χώρου:

- Η d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές, δηλαδή $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.
- Η d είναι ομογενής, δηλαδή $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παρατηρήστε ότι οι τελευταίες δύο ιδιότητες δεν έχουν νόημα σε όλους τους μετρικούς χώρους, αφού στην διατύπωσή τους εμπλέκονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Με άλλα λόγια, μια μετρική που επάγεται σε έναν γραμμικό χώρο από μια νόρμα έχει πρόσθετες ιδιότητες και ο μετρικός χώρος που προκύπτει έχει πολύ πιο πλούσια δομή από αυτήν του «γενικού» μετρικού χώρου.

(β) Χρήσιμο είναι να τονίσουμε ότι η κλάση των χώρων με νόρμα είναι γνήσια υποκλάση της κλάσης των μετρικών χώρων. Παρατηρήστε ότι κάθε γραμμικός χώρος $X \neq \{0\}$ έχει άπειρα το πλήθος σημεία: αν $x \in X$, $x \neq 0$, τότε ο υπόχωρος $\mathrm{span}(\{x\}) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ του X έχει άπειρα το πλήθος σημεία (για την ακρίβεια, είναι ισοπληθικός με το $\mathbb{R}$). Από την άλλη πλευρά, κάθε πεπερασμένο μη κενό σύνολο γίνεται μετρικός χώρος με τη διακριτή μετρική.

Παρατηρήστε επίσης ότι σε κάθε (μη μηδενικό) γραμμικό χώρο μπορούμε να ορίσουμε μετρική η οποία δεν επάγεται από νόρμα. Αν θεωρήσουμε ένα γραμμικό χώρο X και τη διακριτή μετρική δ σ' αυτόν, τότε δεν υπάρχει νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ώστε $\delta(x,y) = \|x-y\|$. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι απλή: αν υπήρχε τέτοια νόρμα, παίρνοντας $x \in X$, $x \neq 0$, θα είχαμε

$$n\|x\| = \|nx\| = \delta(nx, 0) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή ισοδύναμα $\|x\| = 1/n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, που είναι προφανώς άτοπο.

Στο υπόλοιπο αυτού του Κεφαλαίου ορίζουμε μερικούς κλασικούς χώρους με νόρμα.

1.2.1 Χώροι πεπερασμένης διάστασης

1. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ως εξής: αν $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ τότε

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, m\}.$$

Αποδεικνύουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα. Έχουμε

$$\|x+y\|_\infty = |x_{i_0} + y_{i_0}|$$

για κάποιον $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Για το συγκεκριμένο i_0,

$$|x_{i_0} + y_{i_0}| \leq |x_{i_0}| + |y_{i_0}| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Συνεπώς,

$$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ συμβολίζεται με ℓ_∞^m.

2. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την 1-νόρμα $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_m| = \sum_{i=1}^m |x_i|.$$

Η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας για την απόλυτη τιμή στο $\mathbb{R}$. Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ συμβολίζεται με ℓ_1^m.

3. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Όλες οι ιδιότητες της νόρμας είναι τετριμμένες εκτός από την τριγωνική ανισότητα για την απόδειξη της οποίας απαιτείται η ανισότητα Cauchy–Schwarz.

Πρόταση 1.2.3 (Ανισότητα Cauchy–Schwarz). *Εστω* $x_1, \ldots, x_m$ *και* $y_1, \ldots, y_m$ *πραγματικοί αριθμοί. Τότε, ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{i=1}^m |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη που παραθέτουμε οφείλεται στον Schwarz. Θέτουμε $B = \sum_{i=1}^m |x_i y_i|$, $A = \sum_{i=1}^m |x_i|^2$ και $C = \sum_{i=1}^m |y_i|^2$. Πρέπει να δείξουμε ότι $B^2 \leq AC$ ή ισοδύναμα $(2B)^2 \leq 4AC$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$p(\lambda) := (\lambda|x_1| + |y_1|)^2 + \cdots + (\lambda|x_m| + |y_m|)^2 \geq 0,$$

η οποία μετά από πράξεις παίρνει τη μορφή

$$p(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν $A = 0$ τότε $x_i = 0$ για $i = 1, \ldots, m$ και προφανώς η αρχική ανισότητα ισχύει (ως ισότητα). Υποθέτουμε λοιπόν ότι $A > 0$ και τότε η $p(\lambda)$ είναι τριώνυμο το οποίο είναι μη αρνητικό για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Από τη θεωρία του τριωνύμου πρέπει να ισχύει $(2B)^2 - 4AC \leq 0$, το οποίο δίνει και τη ζητούμενη ανισότητα. □

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας για την Ευκλείδεια νόρμα. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m |x_i|^2 + 2\sum_{i=1}^m x_i y_i + \sum_{i=1}^m |y_i|^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2\sum_{i=1}^m |x_i y_i| + \|y\|_2^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy–Schwarz. Έτσι,

$$\|x+y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \implies \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ λέγεται Ευκλείδειος χώρος και συμβολίζεται με ℓ_2^m.

4. Γενικότερα, στον $\mathbb{R}^m$ μπορούμε να θεωρήσουμε την p-νόρμα, $1 < p < \infty$, όπου

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Αποδεικνύουμε και σ' αυτή την περίπτωση μόνο την τριγωνική ανισότητα η οποία δεν είναι άμεση. Για την απόδειξη θα χρειασθούμε δύο ανισότητες.

Πρόταση 1.2.4 (Ανισότητα Hölder). *Αν $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $p, q > 1$ ώστε*[1] $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι η συνάρτηση $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι κοίλη, για κάθε $x, y > 0$ έχουμε

$$\log\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\log(x^p) + \frac{1}{q}\log(y^q)$$

ή ισοδύναμα

$$\log(xy) \leq \log\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right).$$

Από το γεγονός ότι η συνάρτηση log είναι αύξουσα έπεται ότι

$$(*) \qquad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \text{για κάθε } x, y \geq 0.$$

Έστω τώρα $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ πραγματικοί αριθμοί. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p)^{1/p} \neq 0$ και $(|y_1|^q + \cdots + |y_m|^q)^{1/q} \neq 0$. Αλλιώς ισχύει $x_1 = \cdots = x_m = 0$ ή $y_1 = \cdots = y_m = 0$ και αυτό σημαίνει ότι $\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| = 0$ οπότε η ζητούμενη ανισότητα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.

Θεωρούμε τους αριθμούς

$$a_i = \frac{|x_i|}{(|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p)^{1/p}}, \quad i = 1, \ldots, m$$

και

$$b_i = \frac{|y_i|}{(|y_1|^q + \cdots + |y_m|^q)^{1/q}}, \quad i = 1, \ldots, m$$

για τους οποίους ισχύει $a_i, b_i \geq 0$ και

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^p = \sum_{i=1}^{m} b_i^q = 1.$$

Αν λοιπόν εφαρμόσουμε την $(*)$ για κάθε ζεύγος a_i, b_i έχουμε ότι

$$a_i b_i \leq \frac{a_i^p}{p} + \frac{b_i^q}{q}$$

[1] Οι p και q λέγονται συζυγείς εκθέτες.

και αθροίζοντας ως προς $i = 1, \dots, m$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m} a_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{m} b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} |x_i||y_i|}{(|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p)^{1/p}(|y_1|^q + \cdots + |y_m|^q)^{1/q}} \leq 1,$$

που δίνει το ζητούμενο:

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p)^{1/p}(|y_1|^q + \cdots + |y_m|^q)^{1/q}.$$

□

Σημείωση 1.2.5. Παρατηρήστε ότι η ανισότητα Hölder αποτελεί γενίκευση της ανισότητας Cauchy–Schwarz: η δεύτερη είναι ειδική περίπτωση της πρώτης για $p = q = 2$.

Πρόταση 1.2.6 (Ανισότητα Minkowski). *Αν $x_1, \dots, x_m$ και $y_1, \dots, y_m$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $p > 1$, τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p > 0$, αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.

Έχουμε διαδοχικά

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder στο άθροισμα $\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i|$ παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

όπου q ο συζυγής εκθέτης του p, δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ή $q(p-1) = p$. Άρα, η προηγούμενη ανισότητα γράφεται

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p}\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Τελικά,

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p}\right]$$

ή

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p\right)^{1-1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Το ζητούμενο προκύπτει από την $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. □

Παρατηρήστε τώρα ότι η τριγωνική ανισότητα $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ για την p-νόρμα είναι ακριβώς η ανισότητα Minkowski (όπου $x = (x_1, \ldots, x_m)$ και $y = (y_1, \ldots, y_m)$). Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$ συμβολίζεται με ℓ_p^m.

5. Αξίζει τον κόπο να δούμε τη μορφή που παίρνουν οι επαγόμενες μετρικές $d_p(x,y) = \|x-y\|_p$ στον $\mathbb{R}^m$. Αν $x = (x_1, \ldots, x_m)$ και $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, τότε

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$$

αν $1 \leq p < \infty$ και

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, m\}.$$

1.2.2 Χώροι ακολουθιών

1. Ο χώρος $\ell_\infty \equiv \ell_\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\ell_\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \text{υπάρχει } M \equiv M(x) > 0 : \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ ισχύει } |x(n)| \leq M\}$$

είναι πραγματικός γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον ℓ_∞ ορίζουμε την supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(n)| : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Αποδεικνύουμε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα:

(α) Είναι $\|x\|_\infty \geq 0$ για κάθε $x \in \ell_\infty$. Αν $\|x\|_\infty = 0$, τότε $|x(n)| \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή $x(n) = 0$ για $n = 1, 2, \ldots$. Συνεπώς, $x = 0$.
(β) Ισχύει $\|\lambda x\|_\infty = \sup_n |\lambda x(n)| = |\lambda| \sup_n |x(n)| = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
(γ) Έστω $x, y \in \ell_\infty$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$|x(n) + y(n)| \leq |x(n)| + |y(n)| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Παίρνοντας supremum ως προς n συμπεραίνουμε ότι

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x(n) + y(n)| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

2. Ο χώρος $c_0 \equiv c_0(\mathbb{N})$ των μηδενικών ακολουθιών, δηλαδή

$$c_0 = \Big\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\Big|\; \lim_{n \to \infty} x(n) = 0 \Big\}$$

είναι επίσης γραμμικός χώρος (και μάλιστα γραμμικός υπόχωρος του ℓ_∞ αφού κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη) με τις κατά σημείο πράξεις. Σε αυτόν θεωρούμε την supremum νόρμα που κληρονομεί από τον ℓ_∞.

3. Ο χώρος $\ell_1 \equiv \ell_1(\mathbb{N})$ των 1-αθροίσιμων ακολουθιών[2] δηλαδή,

$$\ell_1 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty \right\}$$

είναι γραμμικός υπόχωρος του c_0. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty$ τότε $\lim\limits_{n \to \infty} x(n) = 0$. Ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\|_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|.$$

4. Γενικότερα, αν $1 \leq p < \infty$, ο χώρος $\ell_p \equiv \ell_p(\mathbb{N})$ των p-αθροίσιμων ακολουθιών αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty$. Στον ℓ_p ορίζουμε την p–νόρμα

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Minkowski για πεπερασμένα αθροίσματα και περνώντας στο όριο, αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα (οι άλλες ιδιότητες της νόρμας ελέγχονται εύκολα).

[2] Μιλάμε λοιπόν για τις ακολουθίες των οποίων η σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα.

5. Θεωρούμε τον χώρο $c_{00} \equiv c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών. Δηλαδή, $x \in c_{00}$ αν και μόνον αν υπάρχει $n_0 \equiv n_0(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $x(n) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Σε αυτό το χώρο μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε από τις p–νόρμες, $1 \leq p \leq \infty$.

1.2.3 Χώροι συναρτήσεων

1. Ο χώρος $\mathcal{C}([0,1])$ των συνεχών συναρτήσεων επί του $[0,1]$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ \mid \ f \text{ συνεχής}\}$$

το οποίο είναι γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον $\mathcal{C}([0,1])$ ορίζουμε την $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$, με

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Παρατηρήστε ότι το sup όντως υπάρχει, αφού η $|f| : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, και μάλιστα είναι max διότι κάθε συνεχής συνάρτηση, που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα, παίρνει μέγιστη τιμή. Ελέγξτε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα.

2. Στον $\mathcal{C}([0,1])$ μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την 1-νόρμα

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

και γενικότερα, για κάθε $1 \leq p < \infty$, την p–νόρμα

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Για να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι ανισότητες Hölder και Minkowski ισχύουν και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Ανισότητα Hölder για συναρτήσεις. *Αν $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, $1 < p < \infty$ και q είναι ο συζυγής εκθέτης του p (δηλαδή, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), τότε*

$$\int_0^1 |f(t)g(t)|\, dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

Η απόδειξη της ανισότητας Hölder είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν της αντίστοιχης ανισότητας για πεπερασμένες ακολουθίες. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{p}|f(t)|^p + \frac{1}{q}|g(t)|^q \qquad (*)$$

για κάθε $t \in [0,1]$. Αν κάνουμε την πρόσθετη υπόθεση ότι $\int_0^1 |f(t)|^p dt = \int_0^1 |g(t)|^q dt = 1$, τότε παίρνοντας ολοκληρώματα στην $(*)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(t)g(t)|\,dt &\leq \frac{1}{p}\int_0^1 |f(t)|^p dt + \frac{1}{q}\int_0^1 |g(t)|^q dt\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1\\ &= \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |g(t)|^q dt\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Στη γενική περίπτωση, «κανονικοποιούμε» τις f και g, θεωρώντας τις $f_1 := f/\|f\|_p$ και $g_1 := g/\|g\|_q$.

Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για συναρτήσεις και ακολουθώντας βήμα προς βήμα την απόδειξη της ανισότητας Minkowski για πεπερασμένες ακολουθίες, μπορούμε να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$:

Ανισότητα Minkowski για συναρτήσεις. *Αν $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $1\leq p<\infty$, τότε*

$$\left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

3. Στον $\mathcal{C}^1([0,1])$, τον χώρο των συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ που έχουν συνεχή παράγωγο, μπορούμε να θεωρήσουμε τη νόρμα

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Παρατηρήστε ότι η

$$\|f\|' := \|f'\|_\infty$$

δεν είναι νόρμα (και δεν επάγει μετρική) στον $\mathcal{C}^1([0,1])$.

4. Αξίζει τον κόπο να δούμε τη μορφή που παίρνουν οι επαγόμενες μετρικές $d_p(f,g) = \|f-g\|_p$ στον $\mathcal{C}([0,1])$. Αν $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε

$$d_p(f,g) = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

αν $1\leq p<\infty$ και

$$d_\infty(f,g) = \max\{|f(t)-g(t)| : t\in[0,1]\}.$$

1.3 Ασκήσεις

1. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η νόρμα είναι άρτια συνάρτηση και ικανοποιεί την ανισότητα
$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$$
για κάθε $x, y \in X$.

2. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:

(α) $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

(β) $|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,w)$ για κάθε $x, y, z, w \in X$.

3. Έστω $\emptyset \neq A \subseteq (0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρικός χώρος (X, ρ) ώστε
$$A = \{\rho(x,y) : x, y \in X,\, x \neq y\}.$$

4. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\sigma(a,b) = \sqrt{|a-b|}$. Αποδείξτε ότι ο $(\mathbb{R}, \sigma)$ είναι μετρικός χώρος.

Γενικότερα, δείξτε ότι: αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και αν θεωρήσουμε την $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με
$$d(x,y) = \sqrt{\|x-y\|}, \quad x, y \in X,$$
τότε ο (X, d) είναι μετρικός χώρος.

5. (α) Έστω $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ αύξουσα συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι *υποπροσθετική*, δηλ. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \geq 0$. Δείξτε ότι: αν η d είναι μετρική στο X τότε και η $f \circ d$ είναι μετρική στο X.

(β) Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ συνάρτηση. Αποδείξτε ότι καθεμιά από τις ακόλουθες ιδιότητες είναι ικανή να εξασφαλίσει την υποπροσθετικότητα της f:

(i) Η f είναι κοίλη συνάρτηση.

(ii) Η συνάρτηση $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι φθίνουσα.

(γ) Εφαρμογές: Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\rho_1 = \min\{d, 1\}$, $\rho_2 = \frac{d}{1+d}$ και $d_\alpha = d^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ είναι μετρικές στο X.

6. Αν d_1, d_2 είναι μετρικές στο σύνολο X εξετάστε αν οι $d_1 + d_2$, $\max\{d_1, d_2\}$, $\min\{d_1, d_2\}$ είναι μετρικές στο X. Αν η d είναι μετρική στο X, είναι η d^2 μετρική στο X;

7. (*Ανισότητα Hölder για συναρτήσεις*) Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και p, q συζυγείς εκθέτες (δηλ. $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Δείξτε ότι
$$\int_0^1 |f(t)g(t)|\,dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

8. Έστω $1 \leq p < \infty$. Δείξτε ότι ο χώρος $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_p)$ με

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

είναι χώρος με νόρμα.

9. Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Αν $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ είναι ένα πολυώνυμο από το $\mathcal{P}$, το *ύψος* του p είναι το

$$h(p) = \max\{|a_i| : i = 0, 1, \ldots, n\}.$$

(α) Δείξτε ότι ο $\mathcal{P}$ είναι γραμμικός χώρος με τις πράξεις κατά σημείο και η συνάρτηση $h : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον $\mathcal{P}$.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\sigma : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, με

$$\sigma(p) = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

είναι νόρμα στον $\mathcal{P}$.

(γ) Δείξτε ότι $h(p) \leq \sigma(p) \leq (n+1) \cdot h(p)$ για κάθε πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n.

10. Θεωρούμε τον χώρο $(\mathcal{P}, h)$ της προηγούμενης άσκησης και τον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : (\mathcal{P}, h) \to (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ με

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \overset{f}{\longmapsto} f(p) := a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων που διατηρεί τις αποστάσεις. Δηλαδή, η f είναι 1-1, επί και ικανοποιεί τις σχέσεις

(i) $f(p+q) = f(p) + f(q)$

(ii) $f(\lambda p) = \lambda f(p)$

(iii) $\|f(p)\|_\infty = h(p)$

για κάθε $p, q \in \mathcal{P}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

11. Θεωρούμε τους χώρους ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$ και c_0.

(α) Δείξτε ότι: αν $1 \leq p < q \leq \infty$ τότε $\ell_p \subseteq \ell_q$ και ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.

(β) Δείξτε ότι: αν $1 \leq p < \infty$ τότε $\ell_p \subseteq c_0$ και ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.

(γ) Να βρεθεί ακολουθία $x = (x_n)$ που συγκλίνει στο 0 αλλά δεν ανήκει σε κανέναν ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Με άλλα λόγια, ο c_0 περιέχει γνήσια την ένωση $\bigcup\{\ell_p : 1 \leq p < \infty\}$.

(δ) Να βρεθεί ακολουθία $x = (x_n)$ ώστε $x \notin \ell_1$ αλλά $x \in \ell_p$ για κάθε $p > 1$.

12. Ο *κύβος του Hilbert* $\mathcal{H}^\infty$ είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών $x = (x_n)$ με $|x_n| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι η

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x_n - y_n|$$

ορίζει μετρική στο $\mathcal{H}^\infty$.

(β) Αν $x, y \in \mathcal{H}^\infty$ και $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε $M_k = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_k - y_k|\}$. Δείξτε ότι

$$2^{-k}M_k \leq d(x,y) \leq 2^{-k+1} + M_k.$$

13. Θεωρούμε τη μοναδιαία Ευκλείδεια σφαίρα $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_2 = 1\}$ στον $\mathbb{R}^m$. Ορίζουμε «απόσταση» $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x, y \in S^{m-1}$ να είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y. Δείξτε ότι: αν $\rho(x,y) = \theta$ τότε

$$\|x - y\|_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leq \|x - y\|_2 \leq \rho(x,y), \qquad x, y \in S^{m-1}.$$

Είναι η ρ μετρική στην S^{m-1};

14. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq X$. Η *διάμετρος* $\mathrm{diam}(A)$ του A είναι η ποσότητα

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(a,b) : a, b \in A\}.$$

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της διαμέτρου:

(α) Αν $A \neq \emptyset$ τότε $\mathrm{diam}(A) = 0$ αν και μόνο αν το A είναι μονοσύνολο (δηλαδή, $A = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$).

(β) Αν $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq X$ τότε $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(B)$.

(γ) Έστω $A \neq \emptyset$. Αν $\mathrm{diam}(A) < r$, τότε $A \subseteq \{x : d(a,x) < r\}$ για κάποιο $a \in A$.

(δ) Αν $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ τότε ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{diam}(A \cap B) \leq \min\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leq \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leq \mathrm{diam}(A \cup B)$$

Ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$$

για κάθε ζευγάρι μη κενών υποσυνόλων A, B του X;

(ε) Αν (A_n) είναι μια ακολουθία μη κενών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$, δείξτε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι το πολύ μονοσύνολο (έχει το πολύ ένα στοιχείο).

15. (α) Δείξτε ότι ένα μη κενό υποσύνολο A του μετρικού χώρου (X,ρ) είναι φραγμένο αν και μόνον αν υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $\rho(a,x_0) \leq r$ για κάθε $a \in A$.

(β) Έστω $A_1,\dots,A_k$ φραγμένα μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X,ρ). Δείξτε ότι το $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ είναι φραγμένο.

16. Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{S}$ όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Έστω (m_n) ακολουθία θετικών αριθμών, με $\sum_n m_n < +\infty$. Ορίζουμε απόσταση d στον $\mathcal{S}$ ως εξής: αν $x=(x_n)$, $y=(y_n) \in \mathcal{S}$, θέτουμε

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|}.$$

Δείξτε ότι ο $(\mathcal{S},d)$ είναι μετρικός χώρος, και υπολογίστε τη διάμετρό του.

Κεφάλαιο 2

Σύγκλιση ακολουθιών και συνέχεια συναρτήσεων

2.1 Σύγκλιση ακολουθιών

Στον Απειροστικό Λογισμό μελετήσαμε τη σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Με τον όρο *ακολουθία πραγματικών αριθμών* εννοούμε κάθε συνάρτηση $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και τιμές στο $\mathbb{R}$). Συνήθως, γράφουμε $x_n := x(n)$ για τον n-οστό όρο της ακολουθίας x και συμβολίζουμε τις ακολουθίες με $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ή $\{x_n\}$ ή (x_n).

Αν (x_n) είναι μια ακολουθία στο $\mathbb{R}$, λέμε ότι η (x_n) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό x αν ισχύει το εξής:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$ με την ιδιότητα: αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq n_0(\varepsilon)$, τότε $|x_n - x| < \varepsilon$.

Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε $\lim x_n = x$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ή, πιο απλά, $x_n \to x$.

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε τον ορισμό του ορίου για μια ακολουθία (x_n) σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ). Ο ορισμός υπαγορεύεται από τον αντίστοιχο ορισμό για ακολουθίες πραγματικών αριθμών: η βασική ιδέα είναι ότι μια ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο $x \in X$ αν μπορούμε να βρούμε όσο κοντά θέλουμε στο x ένα τελικό τμήμα της ακολουθίας. Ισοδύναμα, θα λέγαμε ότι η (x_n) συγκλίνει στο x αν η απόσταση του x_n από το x τείνει στο 0 όταν το n τείνει στο άπειρο. Οι βασικές πρώτες συνέπειες του ορισμού του ορίου εξακολουθούν να ισχύουν στο γενικό πλαίσιο των μετρικών χώρων. Οι αποδείξεις δεν έχουν καμία ουσιαστική διαφορά από τις αντίστοιχες αποδείξεις για ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

2.1.1 Συγκλίνουσες ακολουθίες

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. *Ακολουθία* στον X είναι κάθε συνάρτηση $x : \mathbb{N} \to X$. Γράφουμε $x_n := x(n)$ για τον n-οστό όρο της ακολουθίας x και συμβολίζουμε τις ακολουθίες με $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ή $\{x_n\}$ ή (x_n) ή $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$.

Ορισμός 2.1.1 (σύγκλιση ακολουθίας). Λέμε ότι μια ακολουθία (x_n) στο μετρικό χώρο (X,ρ) *συγκλίνει στο $x \in X$ ως προς τη μετρική ρ* (ή είναι ρ-συγκλίνουσα) αν

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Για να το δηλώσουμε αυτό γράφουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ ή απλώς $x_n \to x$. Το x λέγεται ρ-όριο (ή απλώς όριο) της ακολουθίας.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ) και έστω $x \in X$. Τότε, $x_n \xrightarrow{\rho} x$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(\rho(x_n,x))_n$ πραγματικών αριθμών είναι μηδενική.*

Απόδειξη. Αρκεί να συγκρίνουμε τους δύο ορισμούς: η ακολουθία $(\rho(x_n,x))_n$ στο $\mathbb{R}$ είναι μηδενική αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x) = |\rho(x_n,x) - 0| < \varepsilon$. Όμως αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$. □

Πρόταση 2.1.3. *Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Αν υπάρχει το όριο της (x_n), τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $x_n \xrightarrow{\rho} y$, όπου $x, y \in X$. Θα δείξουμε ότι $x = y$. Πράγματι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$0 \leq \rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y).$$

Αν θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\rho(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \rho(x_n,y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\rho(x,y) = 0$, άρα $x = y$. □

Πρόταση 2.1.4. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αν $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες στον X και $x, y \in X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$, τότε $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα Λήμμα που έχει ανεξάρτητο ενδιαφέρον:

Λήμμα 2.1.5. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε ισχύουν οι ανισότητες:*

(α) $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$ *για κάθε* $x, y, z \in X$.

(β) $|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,w)$ *για κάθε* $x, y, z, w \in X$.

Απόδειξη του Λήμματος. (α) Έστω $x, y, z \in X$. Από την τριγωνική ανισότητα της μετρικής έχουμε

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) \Rightarrow \rho(x,z) - \rho(y,z) \le \rho(x,y),$$
$$\rho(y,z) \le \rho(y,x) + \rho(x,z) \Rightarrow \rho(y,z) - \rho(x,z) \le \rho(y,x).$$

Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες παίρνουμε

$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \le \rho(x,y).$$

(β) Αν $x, y, z, \in X$, από την τριγωνική ανισότητα στο $\mathbb{R}$ έχουμε

$$|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \le |\rho(x,y) - \rho(z,y)| + |\rho(z,y) - \rho(z,w)|$$

Όμως, από το (α) ισχύει

$$|\rho(x,y) - \rho(z,y)| + |\rho(z,y) - \rho(z,w)| \le \rho(x,z) + \rho(y,w).$$

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη της πρότασης: χρησιμοποιώντας την ανισότητα (β) του λήμματος βλέπουμε ότι

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x,y)| \le \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$. □

2.1.2 Παραδείγματα σύγκλισης σε μετρικούς χώρους

1. Έστω (X, δ) ο διακριτός μετρικός χώρος και (x_n) μια ακολουθία στον X. Η (x_n) είναι συγκλίνουσα αν και μόνον αν είναι τελικά σταθερή.

Απόδειξη. Αφού, σε κάθε μετρικό χώρο, κάθε τελικά σταθερή ακολουθία είναι συγκλίνουσα, αρκεί να δείξουμε ότι αν μια ακολουθία στον (X, δ) συγκλίνει, τότε είναι τελικά σταθερή. Έστω λοιπόν $x_n \xrightarrow{\delta} x$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \ge n_0$ τότε $\delta(x_n, x) < \frac{1}{2}$. Αλλά, από τον ορισμό της διακριτής μετρικής, έπεται ότι $\delta(x_n, x) = 0$ για κάθε $n \ge n_0$ ή αλλιώς, ότι $x_n = x$ για κάθε $n \ge n_0$. Συνεπώς η (x_n) είναι τελικά σταθερή. □

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι στον κύβο του Hamming (H_n, h) μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνον αν είναι τελικά σταθερή: έστω (x_m) ακολουθία στον H_n με $x_m \xrightarrow{h} x$. Τότε, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m \ge m_0$ να ισχύει $h(x_m, x) < \frac{1}{2}$. Όμως η h παίρνει μόνο τις τιμές $0, 1, \ldots, n$. Άρα, $h(x_m, x) = 0$ για κάθε $m \ge m_0$. Δηλαδή, $x_m = x$ για κάθε $m \ge m_0$. □

2. Στο χώρο $(\mathbb{Z}, \sigma_p)$ που ορίσαμε στην §1.1.5, μια ακολουθία (x_n) ακεραίων συγκλίνει στον x αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών (k_n) ώστε $k_n \to \infty$ και $x_n \equiv x \bmod p^{k_n}$.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ακολουθία (k_n) ώστε $k_n \to \infty$ και $x_n \equiv x \bmod p^{k_n}$. Τότε $p(x_n, x) \geq k_n$, άρα $p(x_n, x) \to \infty$. Ισοδύναμα, $\sigma_p(x_n, x) \to 0$.

Αντίστροφα· αν $\sigma_p(x_n, x) \to 0$ τότε $2^{p(x_n,x)} \to \infty$, άρα $p(x_n, x) \to \infty$. Θέτουμε $k_n = p(x_n, x)$. Τότε, $k_n \to \infty$ και $x_n \equiv x \bmod p^{k_n}$. □

3. *Πεπερασμένο γινόμενο μετρικών χώρων.* Έστω $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ μετρικοί χώροι και $X = \prod_{i=1}^k X_i$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Στο X ορίζουμε τη μετρική $d = \sum_{i=1}^k d_i$, δηλαδή

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{k} d_i(x(i), y(i)),$$

όπου $x = (x(1), \ldots, x(k))$, $y = (y(1), \ldots, y(k))$ και $x(i), y(i) \in X_i$. Τότε, μια ακολουθία στο X συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη. (Μια μετρική d στο χώρο γινόμενο με την ιδιότητα αυτή λέγεται *μετρική γινόμενο.*)

Απόδειξη. Έστω (x_n) μια ακολουθία στο X. Τότε, η (x_n) έχει τη μορφή

$$x_n = (x_n(1), x_n(2), \ldots, x_n(k)), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $x_n \xrightarrow{d} x = (x(1), x(2), \ldots, x(k))$ τότε $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$ για $i = 1, \ldots, k$. Πράγματι· αν $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ έχουμε

$$d_i(x_n(i), x(i)) \leq \sum_{i=1}^{k} d_i(x_n(i), x(i)) = d(x_n, x) \longrightarrow 0$$

καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$.

Αντίστροφα· αν $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$ για $i = 1, 2, \ldots, k$, αυτό σημαίνει ότι $d_i(x_n(i), x(i)) \to 0$ για $i = 1, 2, \ldots, k$. Συνεπώς,

$$d(x_n, x) = d_1(x_n(1), x(1)) + \cdots + d_k(x_n(k), x(k)) \longrightarrow 0$$

καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{d} x$. □

4*. *Ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$.* Το σύνολο

$$[-1, 1]^{\mathbb{N}} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid |x(n)| \leq 1, n = 1, 2, \ldots\}$$

το εφοδιάζουμε με τη μετρική

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n},$$

όπου $x = (x(n))$ και $y = (y(n))$. Ο μετρικός χώρος $([-1,1]^{\mathbb{N}}, d)$ λέγεται *κύβος του Hilbert* και συμβολίζεται με $\mathcal{H}^\infty$. Η σύγκλιση στον κύβο είναι κατά συντεταγμένη.

Απόδειξη. Έστω (x_m) μια ακολουθία στον κύβο, δηλαδή

$$x_m = (x_m(1), x_m(2), \ldots, x_m(n), \ldots),\ m = 1, 2, \ldots$$

όπου $|x_m(n)| \leq 1$ για $m, n = 1, 2, \ldots$ Υποθέτουμε ότι $x_m \xrightarrow{d} x = (x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots)$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$2^{-k}|x_m(k) - x(k)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_m(n) - x(n)|}{2^n} = d(x_m, x)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και επειδή $d(x_m, x) \to 0$ έπεται ότι $x_m(n) \to x(n)$ καθώς $m \to \infty$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Ισχύει και το αντίστροφο: δηλαδή, αν $x_m = (x_m(1), x_m(2), \ldots)$ είναι μια ακολουθία στον $\mathcal{H}^\infty$ (δηλ. $|x_m(n)| \leq 1,\ n, m = 1, 2, \ldots$) ώστε $x_m(n) \to x(n)$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ τότε η $x = (x(1), x(2), \ldots)$ είναι στοιχείο του $\mathcal{H}^\infty$ και μάλιστα $x_m \xrightarrow{d} x$: ξεκινάμε παρατηρώντας ότι, αφού $x_m(n) \to x(n)$, έχουμε $|x(n)| = \lim_m |x_m(n)| \leq 1$, άρα $x \in \mathcal{H}^\infty$. Για να δείξουμε ότι $x_m \xrightarrow{d} x$ αρκεί για κάθε $\varepsilon > 0$ να βρούμε ένα $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m \geq m_0$ τότε $d(x_m, x) < \varepsilon$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} \leq M_{k+1} + 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

όπου

$$M_k = \max\{|x(1) - y(1)|, |x(2) - y(2)|, \ldots, |x(k) - y(k)|\}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε

$$M_k^m = \max\{|x_m(i) - x(i)| : i = 1, \ldots, k\}.$$

Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $M_k^m \to 0$ καθώς $m \to \infty$ (γιατί;). Επίσης, υπάρχει $k \equiv k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Γι' αυτό το k ισχύει $M_{k+1}^m \to 0$, άρα υπάρχει $m_0(\varepsilon, k) \equiv m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m \geq m_0$ να ισχύει $M_{k+1}^m < \frac{\varepsilon}{2}$. Αν λοιπόν $m \geq m_0$, τότε

$$d(x_m, x) \leq M_{k+1}^m + \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

5*. *Άπειρο γινόμενο μετρικών χώρων.* Έστω (X_n, d_n), $n = 1, 2, \dots$ ακολουθία μετρικών χώρων ώστε $d_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_n$, $n = 1, 2, \dots$. Στο $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ ορίζουμε τη *μετρική γινόμενο* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n)),$$

όπου $x = (x(1), x(2), \dots)$, $y = (y(1), y(2), \dots)$ με $x(n), y(n) \in X_n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Η d είναι πράγματι μετρική.

Έστω (x_m) ακολουθία στον (X, d). Τότε η (x_m) είναι ακολουθία ακολουθιών:

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(n), \dots) \\ x_2 &= (x_2(1), x_2(2), \dots, x_2(n), \dots) \\ &\vdots \\ x_m &= (x_m(1), x_m(2), \dots, x_m(n), \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $x_m \xrightarrow{d} x = (x(1), x(2), \dots, x(n), \dots)$ καθώς το $m \to \infty$. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $n = 1, 2, \dots$, ισχύει $x_m(n) \xrightarrow{d_n} x(n)$ καθώς $m \to \infty$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$2^{-n} d_n(x_m(n), x(n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_m(n), x(n)) = d(x_m, x),$$

και επειδή $d(x_m, x) \to 0$ έπεται ότι $d_n(x_m(n), x(n)) \to 0$ καθώς $m \to \infty$.
Το αντίστροφο αφήνεται ως άσκηση. □

2.1.3 Βασικές ακολουθίες και φραγμένες ακολουθίες

Ο ορισμός της ακολουθίας Cauchy (ή βασικής ακολουθίας) πραγματικών αριθμών γενικεύεται κι αυτός άμεσα στο πλαίσιο των μετρικών χώρων.

Ορισμός 2.1.6 (βασική ακολουθία). Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Λέμε ότι η (x_n) είναι *βασική* (ή Cauchy) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m, n \geq n_0$ τότε $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Πρόταση 2.1.7. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) συγκλίνουσα ακολουθία. Τότε, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Έστω $m, n \geq n_0$. Τότε,

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. □

Ορισμός 2.1.8 (φραγμένη ακολουθία). Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Λέμε ότι η (x_n) είναι *φραγμένη* αν το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει $C > 0$ ώστε $\rho(x_m, x_n) \leq C$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 2.1.9. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε, κάθε βασική ακολουθία στον X είναι φραγμένη.*

Ειδικότερα, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X, ρ). Τότε, υπάρχει $n_0 > 1$ ώστε αν $m, n \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x_m) < 1$. Ειδικότερα, $\rho(x_n, x_{n_0}) < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Θέτουμε

$$C = \max\{\rho(x_1, x_{n_0}), \ldots, \rho(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1\} > 0.$$

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\rho(x_n, x_{n_0}) \leq C.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\sup\{\rho(x_m, x_n) : m, n \in \mathbb{N}\} \leq 2C.$$

Συνεπώς, η (x_n) είναι φραγμένη.

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από τον πρώτο, αφού κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι βασική. □

Παρατηρήσεις 2.1.10. (α) Υπάρχουν παραδείγματα μετρικών χώρων στους οποίους δεν συγκλίνουν όλες οι βασικές ακολουθίες. Ένα παράδειγμα είναι ο χώρος $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ των ρητών με τη συνήθη μετρική: η ακολουθία (q_n) όπου $q_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, ενώ είναι βασική, δεν συγκλίνει σε ρητό αριθμό.

Για ένα άλλο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το χώρο $(\mathbb{R}, \rho)$ με τη μετρική

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

όπου[1] $f(t) = \frac{t}{|t|+1}$. Τότε η ακολουθία $x_n = n$ είναι ρ-βασική αλλά δεν είναι ρ-συγκλίνουσα. Πράγματι, επειδή η $(f(n))$ είναι συγκλίνουσα ως προς τη συνήθη μετρική είναι και $|\cdot|$-βασική, δηλαδή

$$\rho(n, m) = |f(n) - f(m)| \to 0 \quad \text{καθώς } m, n \to \infty.$$

[1] παρατηρήστε ότι η f είναι 1-1 από το $\mathbb{R}$ επί του $(-1, 1)$.

Αλλά, η (x_n) δεν είναι ρ-συγκλίνουσα, διότι αν ήταν τότε θα υπήρχε $x \in \mathbb{R}$ ώστε $\rho(n,x) \to 0$. Από την άλλη πλευρά, αφού $f(n) \to 1$,

$$\rho(n,x) = |f(n) - f(x)| \to |1 - f(x)|.$$

Όμως τότε, $|1 - f(x)| = 0$, δηλαδή $\frac{x}{|x|+1} = 1$. Αυτό είναι άτοπο.

Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι η κατάσταση αυτή δεν μπορεί να εμφανιστεί στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική: εκεί, κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει. Οι μετρικοί χώροι στους οποίους κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει λέγονται *πλήρεις μετρικοί χώροι* και θα τους μελετήσουμε ξεχωριστά αργότερα.

(β) Πολύ απλούστερο είναι να δώσουμε παραδείγματα μετρικών χώρων στους οποίους μπορούμε να έχουμε φραγμένη ακολουθία η οποία να μην είναι βασική. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, η $x_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά δεν είναι βασική, αφού $|x_n - x_{n+1}| = 2$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

2.1.4 Υπακολουθίες

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω (x_n) μια ακολουθία στον X. Αν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε η (x_{k_n}) λέγεται **υπακολουθία** της (x_n).

Παρατηρήσεις 2.1.11. (α) Αν $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία και $x : \mathbb{N} \to X$ είναι ακολουθία στον X, τότε η $x \circ k : \mathbb{N} \to X$ είναι υπακολουθία της (x_n). Για την ακρίβεια, κάθε υπακολουθία της (x_n) είναι η σύνθεση της ακολουθίας (x_n) με μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

(β) Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, έχουμε ότι $k_n \geq n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Η (απλή) απόδειξη αυτού του ισχυρισμού γίνεται με επαγωγή.

Είναι λογικό (και αποδεικνύεται ακριβώς όπως στην περίπτωση των ακολουθιών πραγματικών αριθμών) ότι αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε για κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ισχύει $x_n \xrightarrow{\rho} x$ (άσκηση 11). Ένα άλλο αποτέλεσμα που μεταφέρεται χωρίς καμιά δυσκολία από το πλαίσιο των πραγματικών αριθμών σε αυτό των μετρικών χώρων είναι το εξής:

Πρόταση 2.1.12. *Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Αν η (x_n) είναι Cauchy και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω ότι η (x_n) είναι βασική και ότι $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$, όπου η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία της (x_n).

Ισχυρισμός. Η (x_n) συγκλίνει στο x.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η (x_n) είναι βασική έχουμε ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{αν} \quad n, m \geq n_1.$$

Επιπροσθέτως, $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$, άρα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\rho(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{αν} \quad n \geq n_2.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Παρατηρήστε ότι αν $n \geq n_0$ τότε $k_n \geq n \geq n_0$, οπότε $n, k_n \geq n_1$ και $n \geq n_2$. Συνεπώς,

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$. □

Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύει η ιδιότητα Bolzano–Weierstrass: κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου οποιασδήποτε διάστασης.

Θεώρημα 2.1.13 (Bolzano–Weierstrass). *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$ (με την Ευκλείδεια μετρική) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω $x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(m))$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$. Αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε η $(x_n(1))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Από την ιδιότητα Bolzano–Weierstrass στο $\mathbb{R}$, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n}(1))$:

$$x_{k_n}(1) \to x_1.$$

Η υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) έχει λοιπόν συγκλίνουσα πρώτη συντεταγμένη. Η $(x_{k_n}(2))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}}(2))$:

$$x_{k_{\lambda_n}}(2) \to x_2.$$

Παρατηρήστε ότι

$$x_{k_{\lambda_n}}(1) \to x_1,$$

διότι η $x_{k_n}(1) \to x_1$ και η $(x_{k_{\lambda_n}}(1))$ είναι υπακολουθία της $x_{k_n}(1)$. Άρα, η υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}})$ έχει συγκλίνουσα πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη. Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο μέχρι την m-οστή συντεταγμένη και παίρνοντας m διαδοχικές υπακολουθίες της (x_n) βρίσκουμε υπακολουθία της η οποία έχει κάθε συντεταγμένη της συγκλίνουσα. Έχουμε δείξει ότι η σύγκλιση ακολουθίας στον Ευκλείδειο χώρο είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση κατά συντεταγμένη, συνεπώς η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. □

Σε τυχόντα μετρικό χώρο η ιδιότητα Bolzano–Weierstrass δεν ισχύει όπως φαίνεται και από το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.1.14. Θεωρούμε το χώρο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ των μηδενικών ακολουθιών με τη μετρική που επάγεται από την supremum νόρμα: αν $x = (x_n)$ και $y = (y_n)$ τότε

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Σε αυτό το χώρο θεωρούμε την ακολουθία (e_n) όπου

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

η οποία είναι φραγμένη αφού $d_\infty(e_n, e_m) = \|e_n - e_m\|_\infty = 1$ αν $n \neq m$. Η ίδια ισότητα δείχνει ότι η (e_n) δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: οι όροι της θα έπρεπε τελικά να απέχουν απόσταση μικρότερη από 1.

2.2 Συνέχεια σε ένα σημείο και αρχή της μεταφοράς

Υπενθυμίζουμε τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας για πραγματικές συναρτήσεις. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$, τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in A \text{ και } |x - x_0| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο A αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$. Η γενίκευση του ορισμού της συνέχειας στο πλαίσιο των μετρικών χώρων είναι άμεση:

Ορισμός 2.2.1. Έστω (X, ρ) και (Y, σ) δύο μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται *συνεχής στο* $x_0 \in X$ αν

> για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ώστε: αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται συνεχής στον X αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X. Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, το συμβολίζουμε με $\mathcal{C}(X, Y)$. Ειδικότερα, αν $Y = \mathbb{R}$ γράφουμε $\mathcal{C}(X)$ αντί του $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Παραδείγματα 2.2.2. (α) Έστω (X, δ) ο διακριτός μετρικός χώρος και (Y, σ) τυχών μετρικός χώρος. Κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $f : (X, \delta) \to (Y, \sigma)$ τυχούσα συνάρτηση και έστω $x_0 \in X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Πράγματι: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \frac{1}{2} > 0$. Από τον ορισμό της δ, αν $x \in X$ και $\delta(x, x_0) < \frac{1}{2}$ τότε $x = x_0$, άρα $f(x) = f(x_0)$ και $\sigma(f(x), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$. □

(β) Κάθε ακολουθία $f : \mathbb{N} \to X$ είναι συνεχής συνάρτηση (εξηγήστε γιατί).

(γ) Η ταυτοτική συνάρτηση $I : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_2)$ *δεν* είναι συνεχής.

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι η άρνηση του ορισμού της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ στο $x_0 \in X$ διατυπώνεται ως εξής:

Η $f : X \to Y$ είναι ασυνεχής στο $x_0 \in X$ αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε:
για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ και $\sigma(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

Θα αποδείξουμε ότι η I είναι ασυνεχής στο $0 = (0, 0, 0, \ldots)$. Πράγματι: αν $x_n = (\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n-\text{θέσεις}}, 0, 0, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε

$$\|I(x_n) - I(0)\|_2 = \|I(x_n)\|_2 = \|x_n\|_2 = 1$$

και

$$\|x_n - 0\|_\infty = \|x_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Αν επιλέξουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ παρατηρούμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in c_{00}$ με $\|x_\delta\|_\infty < \delta$ και $\|I(x_\delta) - I(0)\|_2 > \frac{1}{2}$ (αρκεί να επιλέξουμε $x_\delta = x_n$ για κάποιο n αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$). Συνεπώς, η $I : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_2)$ είναι ασυνεχής στο 0. $\square$

Η συνέχεια περιγράφεται μέσω της σύγκλισης ακολουθιών, ακριβώς όπως και στην περίπτωση συναρτήσεων που ορίζονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.2.3 (αρχή της μεταφοράς). *Έστω (X, ρ) και (Y, σ) δύο μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ και $x_0 \in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής στο x_0.*

(β) *Για κάθε ακολουθία (x_n) στοιχείων του X με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$.*

(γ) *Για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$, η $(f(x_n))$ είναι σ-συγκλίνουσα.*

Απόδειξη. (α)⇒(β) Έστω $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή, η f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Επιπλέον, επειδή $x_n \to x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x_0) < \delta$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $\sigma(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ αν $n \geq n_0$, δηλαδή $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$.

(β)⇒(γ) Προφανές: αν $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$, τότε η $(f(x_n))$ είναι σ-συγκλίνουσα.

(γ)⇒(α) Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon_0 > 0$ και ακολουθία (x_n) στοιχείων του X με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ και $\sigma(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$ για $n = 1, 2, \ldots$ (εξηγήστε γιατί). Από την υπόθεση έχουμε ότι η $(f(x_n))$ είναι σ-συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $y \in Y$ ώστε $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} y$. Τότε, από την πρόταση 2.1.4 έχουμε $\sigma(f(x_n), f(x_0)) \to \sigma(y, f(x_0))$, άρα $\sigma(y, f(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Οπότε $y \neq f(x_0)$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$z_n = (x_0, x_1, x_0, x_2, x_0, x_3, \ldots) \quad \text{ή} \quad z_n = \begin{cases} x_0, & n = 2k - 1 \\ x_k, & n = 2k \end{cases},$$

για την οποία εύκολα δείχνουμε ότι συγκλίνει στο x_0 και επιπλέον η $f(z_{2n}) = f(x_n) \xrightarrow{\sigma} y$ ενώ $f(z_{2n-1}) = f(x_0) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$. Επειδή, $y \neq f(x_0)$ προκύπτει ότι η $(f(z_n))$ είναι αποκλίνουσα, το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση. $\square$

Χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς μπορούμε να δείξουμε ότι η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής.

Πρόταση 2.2.4 (σύνθεση συνεχών συναρτήσεων). *Έστω (X,ρ), (Y,σ) και (Z,τ) τρεις μετρικοί χώροι. Έστω $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ δύο συναρτήσεις. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ και η g είναι συνεχής στο $f(x_0) \in Y$, τότε η $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία σημείων του X με $x_n \to x_0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$. Αφού η g είναι συνεχής στο $f(x_0) \in Y$, για κάθε ακολουθία (y_n) σημείων του Y με $y_n \to f(x_0)$ έχουμε $g(y_n) \to g(f(x_0))$.

Όμως, $f(x_n) \in Y$ και $f(x_n) \to f(x_0)$. Συνεπώς,

$$g(f(x_n)) \to g(f(x_0)).$$

Για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του X με $x_n \to x_0$ δείξαμε ότι

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

Από την αρχή της μεταφοράς, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0. $\square$

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει τη σχέση της συνέχειας με τις συνήθεις αλγεβρικές πράξεις ανάμεσα σε πραγματικές συναρτήσεις. Η απόδειξή του είναι άμεση, αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ιδιότητες για τα όρια ακολουθιών.

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω $f, g : (X,\rho) \to \mathbb{R}$, έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο x_0. Τότε,*

(α) Οι $f+g$, λf και $f \cdot g$ είναι συνεχείς στο x_0.

(β) Αν επιπλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, τότε η $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο X και είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη. Η απόδειξη όλων των ισχυρισμών είναι απλή: για παράδειγμα, για να δείξουμε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του X που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x_n)\right)$ συγκλίνει στο $\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$. Από την υπόθεση, οι f και g είναι συνεχείς στο x_0. Από την αρχή της μεταφοράς έχουμε έχουμε $f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$. Αφού $g(x_n) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(x_0) \neq 0$, έχουμε

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0).$$

Η απόδειξη της συνέχειας των $f+g$, λf και $f\cdot g$ στο x_0 αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. $\square$

Πόρισμα 2.2.6. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ο χώρος $\mathcal{C}(X)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικός χώρος.*

2.3 Ασκήσεις

1. Έστω $(X_1,d_1),\dots,(X_k,d_k)$ πεπερασμένη οικογένεια μετρικών χώρων. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι μετρικές γινόμενο στο $X=\prod_{i=1}^k X_i$:

$$\rho_\infty(x,y)=\max\{d_i(x(i),y(i)) : i=1,2,\dots,k\}$$

και

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^k [d_i(x(i),y(i))]^p\right)^{1/p},\ 1\leq p<\infty,$$

όπου $x=(x(1),\dots,x(k))$, $y=(y(1),\dots,y(k))$.

2. Έστω (X_n,d_n), $n=1,2,\dots$ ακολουθία μετρικών χώρων ώστε $d_n(x,y)\leq 1$ για κάθε $x,y\in X_n$, $n=1,2,\dots$. Θεωρούμε το

$$X=\prod_{n=1}^\infty X_n=\Big\{x=(x(1),x(2),\dots,x(n),\dots):\ x(n)\in X_n\Big\}.$$

Δηλαδή, ο X αποτελείται από όλες τις ακολουθίες οι οποίες στη n-οστή θέση έχουν στοιχείο του X_n. Ορίζουμε $d : X\times X\to\mathbb{R}$ με

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} d_n(x(n),y(n)).$$

Δείξτε ότι ο (X,d) είναι μετρικός χώρος και η d είναι μετρική γινόμενο.

3. Έστω $(X_n,d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων και $X=\prod_{n=1}^\infty X_n$. Ορίζουμε $d : X\times X\to\mathbb{R}$ με

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}.$$

Δείξτε ότι ο (X,d) είναι μετρικός χώρος και η d είναι μετρική γινόμενο.

4. Έστω $1\leq p<\infty$ και $x=(x(k))_{k\in\mathbb{N}}\in\ell_p$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $x_n\in\ell_p$ με

$$x_n=(x(1),\dots,x(n),0,0,\dots).$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0$. Ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον ℓ_∞;

5. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει στο $x \in X$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(y_n) = (x_1, x, x_2, x, x_3, x, \ldots, x_n, x, \ldots)$ συγκλίνει στο x.

6. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Υποθέτουμε ότι $x_n \to x \in X$. Δείξτε ότι: για κάθε μετάθεση (1-1 και επί συνάρτηση) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η ακολουθία $y_n = x_{\sigma(n)}$ συγκλίνει κι αυτή στο x.

7. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Θεωρούμε την ακολουθία $\{E_n\}$ υποσυνόλων του X με

$$E_n = \{x_k : k \geq n\},\ n = 1, 2, \ldots$$

και την ακολουθία θετικών αριθμών

$$t_n = \sup\{d(x_k, x_n) : k \geq n\},\ n = 1, 2, \ldots$$

Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η (x_n) είναι βασική.

(β) $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(γ) $t_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

8. Έστω (x_n) και (y_n) βασικές ακολουθίες στο μετρικό χώρο (X,ρ). Δείξτε ότι η $\alpha_n = \rho(x_n, y_n)$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

9. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Δείξτε ότι η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνο αν έχει υπακολουθία (x_{k_n}) με την ιδιότητα $\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

10. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Λέμε ότι η (x_n) έχει *φραγμένη κύμανση* αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < +\infty.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση τότε είναι βασική (άρα, και φραγμένη). Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Αν η (x_n) είναι βασική τότε έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.

(γ) Αν κάθε υπακολουθία της (x_n) έχει φραγμένη κύμανση, τότε η (x_n) είναι βασική ακολουθία.

(δ) Η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνον αν έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.

11. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ) και έστω $x \in X$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η (x_n) συγκλίνει στο x τότε κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) συγκλίνει στο x.

(β) Αν κάθε υπακολουθία της (x_n) έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο x, τότε η (x_n) συγκλίνει στο x.

12. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \neq x_m$ για $n \neq m$. Θέτουμε

$$A = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Δείξτε ότι: αν $x_n \to x \in X$ τότε για κάθε 1-1 συνάρτηση $f : A \to A$ ισχύει $f(x_n) \to x$.

13. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Θεωρούμε τον $X \times X$ με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο d. Δείξτε ότι η $\rho : (X \times X, d) \to \mathbb{R}$ με $(x,y) \mapsto \rho(x,y)$ είναι συνεχής.

14. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x \in X$ ισχύει το εξής: για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$. Είναι σωστό ότι $x_n \to x$;

Κεφάλαιο 3

Τοπολογία μετρικών χώρων

3.1 Ανοικτά σύνολα

3.1.1 Ανοικτά σύνολα

Ορισμοί 3.1.1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $x_0 \in X$.
(α) Η ανοικτή ρ-μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$B_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < \varepsilon\}.$$

(β) Η κλειστή ρ-μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$\widehat{B}_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) \leq \varepsilon\}.$$

(γ) Η ρ-σφαίρα με κέντρο το x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$S_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) = \varepsilon\}.$$

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σχετικά με τη μετρική στην οποία αναφερόμαστε, θα παραλείπουμε τον δείκτη στα αντίστοιχα σύνολα και θα γράφουμε απλώς $B(x_0,\varepsilon), S(x_0,\varepsilon)$ κ.λ.π.

Παραδείγματα 3.1.2. (α) Στο διακριτό μετρικό χώρο (X,δ) ισχύει

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{αν } 0 < r \leq 1 \\ X, & \text{αν } r > 1 \end{cases}$$

και

$$S(x,r) = \begin{cases} X \setminus \{x\}, & \text{αν } r = 1 \\ \emptyset, & \text{αν } r \neq 0, r \neq 1. \end{cases}.$$

(β) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική,

$$B(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon),\qquad \widehat{B}(x,\varepsilon)=[x-\varepsilon,x+\varepsilon],\qquad S(x,\varepsilon)=\{x-\varepsilon,x+\varepsilon\}.$$

(γ) Στο χώρο $(\mathbb{Z},\sigma_p)$ (όπου $p>1$ σταθερός πρώτος αριθμός) έχουμε

$$B(x,1/2)=\{y\in\mathbb{Z}: y\equiv x \bmod p^2\}.$$

Εξηγήστε γιατί.

Ορισμός 3.1.3 (εσωτερικό σημείο). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A\subseteq X$. Το $x\in A$ λέγεται *εσωτερικό σημείο* (*interior point*) του A αν υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x)\subseteq A$.

Ορισμός 3.1.4 (ανοικτό σύνολο). Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω $G\subseteq X$. Το G λέγεται *ρ-ανοικτό* (*open*) αν για κάθε $x\in G$ υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x)\subseteq G$. Δηλαδή, αν κάθε σημείο του G είναι εσωτερικό του σημείο.

Παραδείγματα 3.1.5. (α) Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο. Πράγματι: έστω $B(x,\varepsilon)$ μια ανοικτή μπάλα σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) και έστω $y\in B(x,\varepsilon)$. Επιλέγουμε $0<\varepsilon'<\varepsilon-\rho(x,y)$. Η μπάλα $B(y,\varepsilon')$ περιέχεται στην $B(x,\varepsilon)$, γιατί αν $t\in B(y,\varepsilon')$ τότε $\rho(y,t)<\varepsilon'$ και η τριγωνική ανισότητα μας δίνει

$$\rho(t,x)\leq\rho(t,y)+\rho(y,x)<\varepsilon'+\rho(x,y)<\varepsilon.$$

Από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι $t\in B(x,\varepsilon)$, δηλαδή $B(y,\varepsilon')\subseteq B(x,\varepsilon)$.

(β) Κάθε υποσύνολο ενός διακριτού μετρικού χώρου είναι ανοικτό. Πράγματι, έστω (X,δ) διακριτός μετρικός χώρος και έστω $A\subseteq X$. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε σημείο του A είναι εσωτερικό: αν $a\in A$ τότε για $0<\varepsilon<1$ ισχύει $B_\delta(a,\varepsilon)=\{a\}\subseteq A$.

(γ) Τα διαστήματα της μορφής $(a,b]$ στο $(\mathbb{R},|\cdot|)$, $a<b$ δεν είναι ανοικτά. Αν θεωρήσουμε τη μπάλα με κέντρο το b και ακτίνα $\varepsilon>0$ οσοδήποτε μικρή, τότε $B(b,\varepsilon)\nsubseteq(a,b]$, διότι $b+\frac{\varepsilon}{2}\in B(b,\varepsilon)$ αλλά $b+\frac{\varepsilon}{2}\notin(a,b]$.

(δ) Στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$, το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό, διότι κάθε διάστημα περιέχει άρρητους.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει βασικές ιδιότητες της οικογένειας των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου.

Πρόταση 3.1.6. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*[1]

(α) *Τα $X,\emptyset$ είναι ανοικτά.*

(β) *Αν $(G_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X τότε το σύνολο $\bigcup_{i\in I}G_i$ είναι ανοικτό.*

(γ) *Αν τα $G_1,G_2,\ldots,G_n$ είναι ανοικτά τότε το $\bigcap_{i=1}^n G_i=G_1\cap\cdots\cap G_n$ είναι ανοικτό.*

[1] Όταν έχουμε μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X η οποία περιέχει το X, το κενό σύνολο, είναι κλειστή ως προς ενώσεις και πεπερασμένες τομές, τότε λέμε ότι έχουμε μια *τοπολογία* στο X. Με αυτή την ορολογία, η Πρόταση 3.1.6 μας λέει ότι η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (έτσι όπως αυτά ορίσθηκαν) είναι μια τοπολογία σ' αυτόν.

Απόδειξη. (α) Άμεσο από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου.

(β) Έστω $x \in \bigcup_{i\in I} G_i$. Τότε, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in G_{i_0}$. Αφού το G_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon_0) \subseteq G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$. Άρα, το $\bigcup_{i\in I} G_i$ είναι ανοικτό.

(γ) Έστω $x \in G_1 \cap \cdots \cap G_n$. Τότε, $x \in G_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Αφού όλα τα G_i είναι ανοικτά, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ υπάρχει $\varepsilon_i > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon_i) \subseteq G_i$. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} > 0$. Τότε, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε $\varepsilon \leq \varepsilon_i$, άρα

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_i) \subseteq G_i.$$

Συνεπώς, $B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n G_i$. □

Σημείωση 3.1.7. Αν έχουμε μια άπειρη οικογένεια ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ) τότε η τομή τους δεν είναι κατ' ανάγκην ανοικτό σύνολο. Για παράδειγμα, αν στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρήσουμε την ακολουθία των ανοικτών συνόλων $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, παρατηρούμε ότι $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \{0\}$, το οποίο δεν είναι ανοικτό (εξηγήστε τις λεπτομέρειες).

Η επόμενη πρόταση δίνει ένα χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων μέσω της σύγκλισης ακολουθιών.

Πρόταση 3.1.8. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X.*

(β) *Για κάθε $x \in G$ και για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $x_n \in G$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Έστω $x \in G$ και (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Αφού το G είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq G$. Αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Συνεπώς, $x_n \in B(x, \varepsilon) \subseteq G$ για κάθε $n \geq n_0$.

Αντίστροφα· υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (α), δηλαδή ότι το G δεν είναι ανοικτό. Τότε, υπάρχει $x \in G$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να ισχύει

$$B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus G) \neq \emptyset.$$

Τότε, για $n = 1, 2, ...$ μπορούμε να βρούμε $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus G)$, δηλαδή

$$x_n \notin G \quad \text{και} \quad \rho(x_n, x) < \frac{1}{n}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η (x_n) συγκλίνει στο x και όλοι οι όροι της είναι εκτός του G, δηλαδή δεν ισχύει το (β). □

Εφαρμογή 3.1.9. *Το σύνολο $\mathbb{P}$ των πρώτων αριθμών δεν είναι ανοικτό στο μετρικό χώρο $(\mathbb{Z}, \sigma_p)$.*

Απόδειξη. Έστω $q \in \mathbb{P}$ και $x_n = q + np^n$ για $n = 1, 2, \dots$ Τότε ισχύει $x_n \xrightarrow{\sigma_p} q$. Αλλά, η (x_n) δεν περιέχεται τελικά στο $\mathbb{P}$, διότι η υπακολουθία της $x_{nq} = q(1 + np^{nq})$ αποτελείται από σύνθετους. □

Πόρισμα 3.1.10. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο V του X είναι ανοικτό αν και μόνον αν είναι (ενδεχομένως άπειρη) ένωση από ανοικτές μπάλες του X.*

Απόδειξη. Αν το V είναι ένωση από ανοικτές μπάλες τότε είναι ανοικτό σύμφωνα με την πρόταση 3.1.6. Αντίστροφα, έστω ότι το V είναι ανοικτό. Τότε, για κάθε $x \in V$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon_x) \subseteq V$. Παρατηρήστε ότι $V = \bigcup_{x \in V} B(x, \varepsilon_x)$. □

Πρόταση* 3.1.1 (ανοικτά υποσύνολα της ευθείας). *Κάθε ανοικτό σύνολο U στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.*

Απόδειξη. Έστω $x \in U$. Αφού το U είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq U$. Θέτουμε

$$a_x = \inf\{s : (s, x] \subseteq U\}.$$

Τότε $(a_x, x] \subseteq U$. Με ανάλογο τρόπο, αν θέσουμε

$$b_x = \sup\{t : [x, t) \subseteq U\}$$

τότε έχουμε $[x, b_x) \subseteq U$. Ελέγχουμε ότι $(a_x, b_x) \subseteq U$: για παράδειγμα, αν $x < t < b_x$ υπάρχει t_1 ώστε $t < t_1 \leq b_x$ και $[x, t_1) \subseteq U$, άρα $t \in U$. Συνεπώς,

$$(*) \qquad U = \bigcup_{x \in U} (a_x, b_x).$$

Ισχυρισμός 1. Αν $z, x \in U$ και $z \in (a_x, b_x)$ τότε $(a_x, b_x) = (a_z, b_z)$.
Πράγματι, $[z, b_x) \subseteq U$ άρα $b_x \leq b_z$ και $(a_x, z] \subseteq U$ άρα $a_z \leq a_x$. Συνεπώς, $(a_x, b_x) \subseteq (a_z, b_z)$. Τώρα, αφού $x \in (a_z, b_z)$, το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι $(a_z, b_z) \subseteq (a_x, b_x)$.

Ισχυρισμός 2. Αν $x, y \in U$ τότε είτε $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) = \emptyset$ ή $(a_x, b_x) = (a_y, b_y)$.
Πράγματι, έστω ότι $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) \neq \emptyset$. Τότε, θεωρούμε $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y)$ και χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό παίρνουμε άμεσα

$$(a_x, b_x) = (a_z, b_z) = (a_y, b_y).$$

Από τον δεύτερο ισχυρισμό και την $(*)$ είναι φανερό ότι το U γράφεται στη μορφή

$$U = \bigcup_{j \in J} I_j,$$

όπου I_j ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα. Τέλος, η παραπάνω ένωση είναι αριθμήσιμη: ορίζουμε $\tau : J \to \mathbb{Q}$ ως εξής: αν $j \in J$ επιλέγουμε ως $\tau(j)$ τυχόντα ρητό $q_j \in I_j$. Η τ είναι ένα προς ένα, διότι τα I_j είναι ξένα. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, το J είναι επίσης αριθμήσιμο. □

3.1.2 Εσωτερικό συνόλου

Ορισμός 3.1.11 (εσωτερικό συνόλου). Έστω A ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,ρ). Το *εσωτερικό* (*interior*) του A είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A και συμβολίζεται με $\mathrm{int}A$ (ή A°). Δηλαδή,

$$A^\circ \equiv \mathrm{int}A = \{x \in A \mid \exists\, \varepsilon > 0 \ : \ B(x,\varepsilon) \subseteq A\}\,.$$

Σημείωση 3.1.12. Για κάθε $A \subseteq X$ το εσωτερικό A° του A είναι ανοικτό σύνολο. Πράγματι, έστω $x \in A^\circ$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Αν $y \in B(x,\varepsilon)$ τότε $B(y,\varepsilon - \rho(x,y)) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Συνεπώς, κάθε $y \in B(x,\varepsilon)$ είναι εσωτερικό σημείο του A. Δηλαδή, $B(x,\varepsilon) \subseteq A^\circ$. Άρα, το x είναι εσωτερικό σημείο του A°.

Παραδείγματα 3.1.13. (α) Το εσωτερικό του $(a,b]$ στο $\mathbb{R}$ ως προς τη συνήθη μετρική είναι το (a,b).

(β) Το εσωτερικό του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ είναι το $\emptyset$.

(γ) Το εσωτερικό μιας ανοικτής μπάλας σε ένα μετρικό χώρο είναι η ίδια η μπάλα.

Οι βασικές ιδιότητες του εσωτερικού περιγράφονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.1.14. *Έστω A,B υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(α) $A^\circ \subseteq A$.

(β) $A^\circ = \bigcup\{V \subseteq A : V \text{ ανοικτό}\}$. *Ισοδύναμα, το εσωτερικό του A είναι το μέγιστο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A.*

(γ) $A^\circ = A$ *αν και μόνον αν το A είναι ανοικτό.*

(δ) *Αν $A \subseteq B$, τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$.*

(ε) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(στ) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

Απόδειξη. (α) Είναι άμεσο από τον ορισμό.

(β) Αν $x \in A^\circ$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Άρα

$$x \in B(x,\varepsilon) \subseteq \bigcup\{V \subseteq A : V \text{ ανοικτό}\}$$

διότι το $B(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό που περιέχεται στο A.

Αντίστροφα, έστω $x \in \bigcup\{V \subseteq A : V \text{ ανοικτό}\}$. Τότε, υπάρχει $V_x \subseteq A$ ανοικτό, ώστε $x \in V_x$. Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $B(x,\varepsilon) \subseteq V_x$, δηλαδή $B(x,\varepsilon) \subseteq A$, οπότε $x \in A^\circ$.

(γ) Από τον προηγούμενο ισχυρισμό έχουμε ότι το A° είναι ανοικτό. Συνεπώς, αν $A^\circ = A$ έπεται ότι το A είναι ανοικτό.

Αντίστροφα, αν το A είναι ανοικτό τότε $A^\circ = A$. Πράγματι: αρκεί να δείξουμε ότι $A \subseteq A^\circ$. Αλλά, αφού το A είναι ανοικτό, έχουμε ότι κάθε σημείο του είναι εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή $A \subseteq A^\circ$.

(δ) Έστω $A \subseteq B$ και έστω $x \in A^\circ$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A \subseteq B$. Από τον ορισμό του εσωτερικού σημείου έχουμε ότι $x \in B^\circ$.

(ε) Είναι $A \cap B \subseteq A$, άρα $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$ από το (δ). Ομοίως, έχουμε ότι $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$. Συνεπώς,

$$(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ.$$

Ακόμη, $A^\circ \subseteq A$ και $B^\circ \subseteq B$, άρα $A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$. Αφού το $A^\circ \cap B^\circ$ είναι ανοικτό, από το (β) έχουμε

$$A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(στ) Ισχύει $A \subseteq A \cup B$, άρα $A^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$. Ομοίως, παίρνουμε $B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$, οπότε έχουμε $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$. □

Σημείωση 3.1.15. Ο τελευταίος εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική για $A = [0,1]$ και $B = (1,2)$ έχουμε $A^\circ \cup B^\circ = (0,1) \cup (1,2)$ ενώ, $(A \cup B)^\circ = (0,2)$.

Άλλο παράδειγμα μας δίνουν τα $A = \mathbb{Q}$ και $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ στον ίδιο χώρο. Έχουμε $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ και $A \cup B = \mathbb{R}$. Συνεπώς, $A^\circ \cup B^\circ = \emptyset$, ενώ $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$.

3.1.3 Σχετικώς ανοικτά σύνολα

Θυμηθείτε τον ορισμό της σχετικής μετρικής: αν A είναι μη κενό υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,ρ), η απεικόνιση $\rho_A : A \times A \to \mathbb{R}$ με $\rho_A(x,y) = \rho(x,y)$, $x,y \in A$ είναι μετρική στο A. Η επόμενη πρόταση περιγράφει τα ανοικτά σύνολα του (A,ρ_A).

Πρόταση 3.1.16. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Τότε:*

(α) *Το $G \subseteq A$ είναι ανοικτό στο μετρικό χώρο (A,ρ_A) αν και μόνον αν υπάρχει V ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $G = A \cap V$.*

(β) *Αν $B \subseteq A$, τότε $A \cap \mathrm{int}_X(B) \subseteq \mathrm{int}_A(B)$.*

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι το G είναι ανοικτό στο μετρικό υπόχωρο (A,ρ_A). Τότε, γράφεται ως ένωση από ανοικτές μπάλες του A δηλαδή,

$$G = \bigcup_{x\in G} B_{\rho_A}(x,\varepsilon_x) = \bigcup_{x\in G} \left(B_\rho(x,\varepsilon_x) \cap A\right) = A \cap \left(\bigcup_{x\in G} B_\rho(x,\varepsilon_x)\right).$$

[Για την πρώτη ισότητα παρατηρήστε ότι μια μπάλα σε έναν μετρικό υπόχωρο είναι μια μπάλα που έχει κέντρο σημείο του υποχώρου και περιέχει μόνον σημεία του, οπότε είναι η τομή της αντίστοιχης μπάλας του μεγάλου χώρου με τον υπόχωρο.]

Θέτοντας $V = \bigcup_{x\in G} B_\rho(x,\varepsilon_x)$ έχουμε ότι το G γράφεται στη μορφή $A \cap V$, όπου V είναι ανοικτό υποσύνολο του X (αφού είναι ένωση από ανοικτές μπάλες του X).

Αντίστροφα, έστω V ανοικτό υποσύνολο του X και $x \in G = A \cap V$. Τότε, $x \in V$ άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V$. Έπεται ότι $B_{\rho_A}(x, \varepsilon) = A \cap B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq A \cap V$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του G. Άρα, το G είναι ανοικτό στο μετρικό υπόχωρο (A, ρ_A).

(β) Σύμφωνα με το προηγούμενο, το $A \cap \mathrm{int}_X(B)$ είναι ένα ρ_A-ανοικτό υποσύνολο του A και περιέχεται στο B. Άρα, από τη μεγιστικότητα του εσωτερικού έχουμε ότι περιέχεται στο ρ_A-εσωτερικό του B ως προς τον υπόχωρο A. Δηλαδή,

$$A \cap \mathrm{int}_X(B) \subseteq \mathrm{int}_A(B).$$

$\square$

Σημείωση 3.1.17. Ο εγκλεισμός στην παραπάνω σχέση μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, αν θεωρήσουμε το $\mathbb{Z}$ ως μετρικό υπόχωρο με τη σχετική μετρική, τότε $\mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ ενώ $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) = \emptyset$. Δηλαδή,

$$\emptyset = \mathbb{Z} \cap \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}.$$

3.2 Κλειστά σύνολα

3.2.1 Κλειστά σύνολα

Ορισμός 3.2.1 (κλειστό σύνολο). Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $F \subseteq X$. Το F λέγεται *ρ-κλειστό* (*closed*) αν το συμπλήρωμά του $F^c \equiv X \setminus F$ είναι ρ-ανοικτό.

Παραδείγματα 3.2.2. (α) Σε κάθε μετρικό χώρο (X, ρ) τα μονοσύνολα $\{x\}$, $x \in X$ είναι κλειστά (εξηγήστε γιατί).

(β) Κάθε κλειστή μπάλα $\widehat{B}(x, \varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο. Πράγματι, το $X \setminus \widehat{B}(x, \varepsilon)$ είναι ανοικτό: έστω $y \in X \setminus \widehat{B}(x, \varepsilon)$. Τότε, $\rho(x, y) > \varepsilon$. Επιλέγουμε $0 < \eta < \rho(x, y) - \varepsilon$ και έχουμε ότι $B(y, \eta) \subseteq X \setminus \widehat{B}(x, \varepsilon)$ διότι, αν $z \in B(y, \eta)$ έχουμε $\rho(z, y) < \eta$ και

$$\rho(z, x) \geq \rho(y, x) - \rho(z, y) > \rho(x, y) - \eta > \varepsilon,$$

δηλαδή $z \in X \setminus \widehat{B}(x, \varepsilon)$.

Ειδικότερα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι κλειστό σύνολο (εξηγήστε γιατί).

(γ) Το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι κλειστό σύνολο, διότι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν περιέχει διάστημα.

(δ) Στο διακριτό μετρικό χώρο (X, δ) κάθε υποσύνολο είναι κλειστό (εξηγήστε γιατί).

(ε) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Έστω $x \in X$ και ακολουθία (x_n) στον X, ώστε $x_n \to x$. Το σύνολο

$$E = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{x\}$$

είναι κλειστό στον (X, d).

Πράγματι, αν $y \notin E$, τότε $\delta = d(x,y) > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x, \delta/2)$ για κάθε $n > n_0$. Θέτουμε

$$r = \min\{d(y, x_i) : i = 1, 2, \ldots, n_0\} > 0.$$

Αν επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \min\{r/2, \delta/2\}$, ελέγχουμε εύκολα ότι $B(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus E$.

Σημείωση 3.2.3. Όπως δείχνουν τα προηγούμενα παραδείγματα, ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, ρ) μπορεί να μην είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό. Επίσης, ένα σύνολο που είναι ανοικτό (αντιστοίχως, κλειστό) μπορεί να είναι και κλειστό (αντιστοίχως, ανοικτό).[2]

Στην προηγούμενη παράγραφο δώσαμε χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων μέσω ακολουθιών. Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και $G \subseteq X$, τότε το G είναι ανοικτό αν και μόνο αν ισχύει το εξής: για κάθε $x \in G$ και για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $x_n \in G$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ισοδυναμία μπορούμε να δώσουμε αντίστοιχο χαρακτηρισμό για τα κλειστά σύνολα: είναι εκείνα τα υποσύνολα του X που είναι *κλειστά ως προς τα όρια συγκλινουσών ακολουθιών που περιέχονται σε αυτά*:

Πρόταση 3.2.4. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το F είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

(β) *Αν (x_n) είναι ακολουθία στο F με $x_n \xrightarrow{\rho} x \in X$, τότε $x \in F$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το F είναι κλειστό και θεωρούμε ακολουθία (x_n) στο F η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Έστω ότι $x \notin F$. Τότε, $x \in X \setminus F$ και το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Από τον χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in X \setminus F$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: για κάθε $n \geq n_0$ παίρνουμε $x_n \notin F$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι ισχύει το (β) αλλά το F δεν είναι κλειστό. Τότε, το $X \setminus F$ δεν είναι ανοικτό. Συνεπώς, υπάρχει $x \in X \setminus F$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Επιλέγοντας διαδοχικά $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, βρίσκουμε $x_n \in F$ ώστε $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Η (x_n) είναι ακολουθία στο F και $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Αφού έχουμε δεχτεί το (β), έπεται ότι $x \in F$. Αυτό είναι άτοπο. □

Οι βασικές ιδιότητες της οικογένειας των κλειστών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες της οικογένειας των ανοικτών υποσυνόλων:

Πρόταση 3.2.5. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Τα $X, \emptyset$ είναι κλειστά.*

(β) *Αν $F_1, F_2, \ldots, F_n$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ είναι κλειστό σύνολο.*

(γ) *Αν $(E_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, τότε η τομή τους $\bigcap_{i \in I} E_i$ είναι κλειστό σύνολο.*

[2] Τα σύνολα που είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά αναφέρονται συχνά ως clopen.

Απόδειξη. Τα αποτελέσματα προκύπτουν άμεσα από τους τύπους του De Morgan

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad \text{και} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

και από τον ορισμό του κλειστού συνόλου ως συμπληρώματος ανοικτού συνόλου. □

Σημείωση 3.2.6. Αν έχουμε μια άπειρη οικογένεια κλειστών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο, τότε η ένωσή τους δεν είναι κατ᾽ ανάγκην κλειστό σύνολο. Πράγματι, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, αν θεωρήσουμε την ακολουθία κλειστών διαστημάτων $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $n = 2, 3, \ldots$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$ και το $(0, 1]$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

3.2.2 Σημεία επαφής

Ορισμός 3.2.7 (σημείο επαφής). Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται *σημείο επαφής* του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ (δηλαδή αν κάθε μπάλα με κέντρο το x περιέχει στοιχεία του A).

Παραδείγματα 3.2.8. (α) Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ θεωρούμε το σύνολο $A = (0, 1]$. Το σημείο 0 είναι σημείο επαφής του A.

(β) Αν (x_n) είναι μια ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ) ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$, τότε το x είναι σημείο επαφής του συνόλου $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(γ) Στο διακριτό μετρικό χώρο (X, δ), αν θεωρήσουμε τυχόν $A \subseteq X$, τότε ένα $x \in X$ είναι σημείο επαφής του A αν και μόνον αν $x \in A$.

(δ) Στο χώρο $(\mathbb{Z}, \sigma_p)$ ένα $x \in \mathbb{Z}$ είναι σημείο επαφής για κάποιο σύνολο $A \subseteq \mathbb{Z}$ αν και μόνον αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ ώστε $x - \lambda_k p^k \in A$. Για παράδειγμα, το σύνολο $E = \{x + p^m : m = 1, 2, \ldots\}$ έχει σημείο επαφής το x.

Η λεπτομερής αιτιολόγηση των παραπάνω ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

Η επόμενη πρόταση δίνει χαρακτηρισμό του σημείου επαφής ενός συνόλου μέσω ακολουθιών.

Πρόταση 3.2.9. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το $x \in X$ είναι σημείο επαφής του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ώστε $a_n \xrightarrow{\rho} x$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $x \in X$ είναι σημείο επαφής του A. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $A \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset$ για $n = 1, 2, \ldots$. Επιλέγοντας $a_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$ έχουμε μια ακολουθία (a_n) στο A με την ιδιότητα $a_n \in B(x, \frac{1}{n})$, δηλαδή $\rho(a_n, x) < \frac{1}{n}$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $a_n \xrightarrow{\rho} x$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $a_n \xrightarrow{\rho} x$. Θα δείξουμε ότι το x είναι σημείο επαφής του A. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \xrightarrow{\rho} x$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(a_n, x) < \varepsilon$, ισοδύναμα $a_n \in B(x, \varepsilon)$. Όμως $a_n \in A$, άρα $a_n \in A \cap B(x, \varepsilon)$. Αυτό σημαίνει ότι $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. □

3.2.3 Κλειστή θήκη συνόλου

Ορισμός 3.2.10 (κλειστή θήκη). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Η *κλειστή θήκη* (*closure*) $\overline{A}$ (ή $\mathrm{cl}(A)$) του A είναι το σύνολο των σημείων επαφής του. Δηλαδή,

$$\overline{A} \equiv \mathrm{cl}(A) = \{x \in X : \forall\, \varepsilon > 0, A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset\}.$$

Σημείωση 3.2.11. Για κάθε $A \subseteq X$ η κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A είναι κλειστό σύνολο. Πράγματι, έστω (x_n) ακολουθία στο $\overline{A}$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $a_n \in A$ ώστε $\rho(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$, διότι κάθε x_n είναι σημείο επαφής του A. Τότε,

$$\rho(a_n, x) \leq \rho(a_n, x_n) + \rho(x_n, x) < \frac{1}{n} + \rho(x_n, x) \to 0,$$

δηλαδή $a_n \xrightarrow{\rho} x$. Η (a_n) είναι ακολουθία στο A και $a_n \xrightarrow{\rho} x$. Συνεπώς, $x \in \overline{A}$.

Παραδείγματα 3.2.12. (α) Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύουν οι $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ και $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
(β) Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ τότε $\mathrm{cl}\,(a,b) = \mathrm{cl}\,(a,b] = \mathrm{cl}\,[a,b) = [a,b]$.
(γ) Στο διακριτό μετρικό χώρο (X,δ), για κάθε σύνολο $A \subseteq X$ ισχύει $\overline{A} = A$.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις βασικές ιδιότητες της κλειστής θήκης.

Πρόταση 3.2.13. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Τότε, ισχύουν τα εξής:*
(α) $A \subseteq \overline{A}$.
(β) $\overline{A} = \bigcap\{F \supseteq A : F$ *κλειστό*$\}$. *Ισοδύναμα, η κλειστή θήκη του A είναι το ελάχιστο κλειστό υποσύνολο του X στο οποίο περιέχεται το A.*
(γ) $A = \overline{A}$ *αν και μόνον αν το A είναι κλειστό.*
(δ) *Αν $A \subseteq B$, τότε $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*
(ε) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(στ) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Απόδειξη. (α) Προφανές από τον ορισμό της κλειστής θήκης. Κάθε σημείο του A είναι σημείο επαφής του A.
(β) Είδαμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό και $A \subseteq \overline{A}$. Συνεπώς, $\cap\{F \supseteq A : F$ κλειστό$\} \subseteq \overline{A}$.

Αντίστροφα, έστω F κλειστό σύνολο ώστε $A \subseteq F$. Αν $x \in \overline{A}$ τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Τότε, $x_n \in F$ και αφού το F είναι κλειστό συμπεραίνουμε ότι $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$. Δηλαδή, $\overline{A} \subseteq F$. Έπεται ότι $\overline{A} \subseteq \cap\{F \supseteq A : F$ κλειστό$\}$.
(γ) Αν $A = \overline{A}$ τότε το A είναι κλειστό διότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό.

Αντίστροφα, αν το A είναι κλειστό τότε, αφού το A περιέχεται στον εαυτό του, έχουμε $\overline{A} = \bigcap\{F \supseteq A : F$ κλειστό$\} \subseteq A$, δηλαδή $\overline{A} \subseteq A$. Ούτως ή άλλως ισχύει $A \subseteq \overline{A}$, οπότε παίρνουμε τελικά την ισότητα $A = \overline{A}$.

(δ) Αν $A \subseteq B$ τότε $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$, δηλαδή $A \subseteq \overline{B}$. Το $\overline{B}$ είναι ένα κλειστό σύνολο που περιέχει το A, άρα περιέχει και το ελάχιστο κλειστό που περιέχει το A, δηλαδή την κλειστή θήκη του A. Έτσι, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(ε) Χρησιμοποιώντας το (δ) και τους εγκλεισμούς $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$ βλέπουμε ότι $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ και $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, άρα $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Επιπλέον, είναι $A \subseteq \overline{A}$ και $B \subseteq \overline{B}$ άρα $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Από το (β) προκύπτει ότι $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Τελικά, έχουμε ότι $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(στ) Ισχύει $A \cap B \subseteq A$, οπότε $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$. Ομοίως, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$, άρα $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. □

Σημείωση 3.2.14. Ο εγκλεισμός στην τελευταία σχέση μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ έχουμε $\overline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c} = \emptyset$ ενώ, $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$.

3.2.4 Σχετικώς κλειστά σύνολα

Ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο με την περιγραφή των κλειστών υποσυνόλων ενός μετρικού υποχώρου και τη σχέση που συνδέει το εσωτερικό με την κλειστή θήκη ενός συνόλου. Τέλος, δίνουμε τον ορισμό των G_δ και F_σ συνόλων και κάποια παραδείγματα.

Πρόταση 3.2.15. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω (A, ρ_A) μετρικός υπόχωρός του. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) Το $F \subseteq A$ είναι κλειστό στο μετρικό χώρο (A, ρ_A) αν και μόνον αν $F = A \cap E$ όπου E κλειστό στον (X, ρ).

(β) Αν $B \subseteq A$ τότε $\mathrm{cl}_A(B) = A \cap \mathrm{cl}_X(B)$.

Απόδειξη. (α) Το F είναι κλειστό στο A αν και μόνον αν το $A \setminus F$ είναι ανοικτό στο A, δηλαδή αν και μόνον αν $A \setminus F = A \cap G$ για κάποιο G ανοικτό στον X. Δηλαδή, $A \cap F^c = A \cap G$.

Ισχυρισμός. Είναι $F = A \cap G^c$.
Δείχνουμε πρώτα ότι $F \subseteq A \cap G^c$. Αρκεί να δείξουμε ότι $F \subseteq G^c$. Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα τότε υπάρχει $x \in F$ ώστε $x \in G$, δηλαδή $x \in F \cap G \subseteq A \cap G = A \cap F^c$. Άρα, $x \notin F$, άτοπο. Συνεπώς, $F \subseteq G^c$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό θα δείξουμε ότι $A \cap G^c \subseteq F$. Πάλι με απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in A \cap G^c$ ώστε $x \notin F$, δηλαδή $x \in A \setminus F$ και $x \notin G$. Τότε $x \in A \cap F^c$ και $x \notin G$, το οποίο είναι άτοπο αφού $A \cap F^c = A \cap G$.

Αφού το G^c είναι κλειστό, παίρνοντας $E = G^c$ έχουμε το ζητούμενο.

(β) Από το πρώτο μέρος της πρότασης, το σύνολο $A \cap \mathrm{cl}_X(B)$ είναι κλειστό στο A και $B \subseteq A \cap \mathrm{cl}_X(B)$. Τότε, η πρόταση 3.2.13(β) δείχνει ότι $\mathrm{cl}_A(B) \subseteq A \cap \mathrm{cl}_X(B)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in A \cap \mathrm{cl}_X(B)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $B(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ και επιπλέον $x \in A$, άρα $x \in \mathrm{cl}_A(B)$. □

Παραδείγματα 3.2.16. (α) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρούμε το σύνολο $A = (0,1] \cup \{2\}$. Τότε τα $(0,1], \{2\}$ είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά στο A.

(β) Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$ θεωρούμε ως υπόχωρο το xy-επίπεδο H (δηλαδή στοιχεία της μορφής $(x,y,0)$). Τότε ο δίσκος D^2 του xy-επιπέδου ($D^2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1\}$) είναι κλειστό σύνολο στον H. Μάλιστα κάθε υποσύνολο F του H είναι κλειστό στον H αν και μόνον αν είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^3$ (εξηγήστε γιατί).

3.2.5 Σχέση κλειστής θήκης και εσωτερικού

Πρόταση 3.2.17. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*
(α) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.
(β) $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε τυχόν $x \in X$. Τότε, ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:

1. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Ισοδύναμα, $x \in \overline{A}$.

2. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, δηλαδή $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Ισιδύναμα, $x \in (X \setminus A)^\circ$.

Αυτό αποδεικνύει ότι τα σύνολα $\overline{A}$ και $(X \setminus A)^\circ$ είναι ξένα και έχουν ως ένωση το X. Έπεται ότι $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

(β) Εφαρμόζοντας την προηγούμενη ισότητα με το $X \setminus A$ στη θέση του A, παίρνουμε

$$X \setminus \overline{X \setminus A} = (X \setminus (X \setminus A))^\circ = A^\circ.$$

Παίρνοντας συμπληρώματα βλέπουμε ότι $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$. □

3.2.6 Σύνολα G_δ και F_σ

Ορισμός 3.2.18 (σύνολα G_δ και F_σ). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$.
(α) Το A λέγεται G_δ–σύνολο αν γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών υποσυνόλων του X.
(β) Το A λέγεται F_σ–σύνολο αν γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του X.

Παραδείγματα 3.2.19. (α) Κάθε κλειστό σύνολο είναι προφανώς F_σ. Είναι όμως και G_δ.
(β) Κάθε ανοικτό σύνολο είναι προφανώς G_δ. Είναι όμως και F_σ.
(γ) Ένα σύνολο A είναι G_δ αν και μόνον αν το A^c είναι F_σ.
(δ) Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ το διάστημα $(a,b]$ είναι F_σ και G_δ. Πράγματι, αν επιλέξουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $a + \frac{1}{k} < b$, έχουμε

$$(a,b] = \bigcup_{n=k}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right).$$

Οι αποδείξεις των ισχυρισμών (α), (β) και (γ) αφήνονται για τις ασκήσεις του Κεφαλαίου.

3.2.7 Σημεία συσσώρευσης και σύνορο

Ορισμός 3.2.20 (σημείο συσσώρευσης). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A\subseteq X$. Το $x\in X$ λέγεται *σημείο συσσώρευσης* (*accumulation point*) του A αν σε κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το x μπορούμε να βρούμε σημείο του A διαφορετικό από το x. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει

$$B(x,\varepsilon)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset.$$

Το σύνολο των σημείων συσσσώρευσης του A συμβολίζεται με A' και λέγεται *παράγωγο σύνολο* του A.

Πρόταση 3.2.21. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $A\subseteq X$ και $x\in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α) *Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.*
(β) *Για κάθε $\varepsilon>0$ το $A\cap B(x,\varepsilon)$ είναι άπειρο σύνολο.*
(γ) *Υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ώστε*

$$\rho(x,a_1)>\rho(x,a_2)>\cdots>\rho(x,a_n)>\cdots\quad \textit{και}\quad a_n\xrightarrow{\rho}x.$$

(δ) *Υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ώστε $a_n\xrightarrow{\rho}x$ και $a_n\neq x$ για $n=1,2,\ldots$.*

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β): Έστω $\varepsilon>0$. Αφού το x είναι σημείο συσσώρευσης του A, υπάρχει τουλάχιστον ένα $y\neq x$ ώστε $y\in B(x,\varepsilon)$. Υποθέτουμε ότι το μη κενό σύνολο $A\cap(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\})$ είναι πεπερασμένο και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Γράφουμε $A\cap(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\})=\{y_1,\ldots,y_k\}$ και θέτουμε $\delta=\min\{\rho(x,y_1),\ldots,\rho(x,y_k)\}>0$. Αφού το x είναι σημείο συσσώρευσης του A, υπάρχει τουλάχιστον ένα $y\neq x$ ώστε $y\in B(x,\delta)$. Τότε, $y\in B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}$ (διότι $\delta<\varepsilon$ και $y\neq x$). Συνεπώς, $y=y_i$ για κάποιο $1\le i\le k$. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει διότι $\rho(x,y)<\delta\le\rho(x,y_i)$.

(β) $\Rightarrow$ (γ): Το $A\cap B(x,1)$ είναι άπειρο σύνολο, άρα υπάρχει $a_1\in A$ ώστε $a_1\neq x$ και $\rho(x,a_1)<1$. Υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει $a_1,\ldots,a_n\in A$ ώστε $a_i\neq x$, $\rho(x,a_i)<\frac{1}{i}$ για κάθε $i=1,\ldots,n$, και $\rho(x,a_1)>\rho(x,a_2)>\cdots>\rho(x,a_n)$. Θέτουμε $\varepsilon_{n+1}=\min\left\{\rho(x,a_n),\frac{1}{n+1}\right\}$. Το $A\cap B(x,\varepsilon_{n+1})$ είναι άπειρο σύνολο, άρα υπάρχει $a_{n+1}\in A$ ώστε $a_{n+1}\neq x$ και $\rho(x,a_{n+1})<\varepsilon_{n+1}$. Τότε, $\rho(x,a_1)>\rho(x,a_2)>\cdots>\rho(x,a_n)>\rho(x,a_{n+1})$ και $\rho(x,a_{n+1})<\frac{1}{n+1}$. Επαγωγικά, ορίζεται ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ώστε $\rho(x,a_n)>\rho(x,a_{n+1})$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\rho(x,a_n)<\frac{1}{n}$, απ' όπου έπεται ότι $a_n\xrightarrow{\rho}x$.
Οι συνεπαγωγές (γ) $\Rightarrow$ (δ) και (δ) $\Rightarrow$ (α) είναι απλές (άσκηση). $\square$

Σημείωση 3.2.22. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A\subseteq X$. Τότε,

$$\overline{A}=A\cup A'.$$

Επομένως, το A είναι κλειστό αν και μόνον αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.

Ορισμός 3.2.23 (σύνορο). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται *συνοριακό σημείο* (*boundary point*) του A αν αν σε κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το x μπορούμε να βρούμε σημείο του A και σημείο του A^c. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύουν οι $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του A λέγεται *σύνορο* (*boundary*) του A και συμβολίζεται με $\mathrm{bd}(A)$ ή $\partial(A)$.

Πρόταση 3.2.24. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε,*
(α) $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$.
(β) $\overline{A} = \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{int}(A)$.
(γ) $X = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{int}(A^c)$.
(δ) $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$. *Ισοδύναμα,* $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. *Ειδικότερα, το* $\mathrm{bd}(A)$ *είναι κλειστό σύνολο.*
(ε) *Το A είναι κλειστό αν και μόνον αν* $\mathrm{bd}(A) \subseteq A$.

Απόδειξη. Αφήνεται για τις ασκήσεις αυτού του Κεφαλαίου. □

3.3 Πυκνά σύνολα και διαχωρισιμότητα

3.3.1 Πυκνά υποσύνολα

Ορισμός 3.3.1 (πυκνό υποσύνολο). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $D \subseteq X$. Το D λέγεται *πυκνό* (*dense*) στον X, αν $\overline{D} = X$.

Παραδείγματα 3.3.2. (α) Τα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
(β) Ο $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$ είναι πυκνός στον $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.
Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι κάθε 1–αθροίσιμη ακολουθία προσεγγίζεται από τελικά μηδενική ακολουθία. Έστω $a = (a_n) \in \ell^1$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, και έστω $\varepsilon > 0$. Από το κριτήριο Cauchy για αθροίσιμες σειρές έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Θέτουμε $x = (a_1, ..., a_{n_0}, 0, ...) \in c_{00}$. Τότε,

$$d_1(a,x) = \|a - x\|_1 = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon,$$

δηλαδή $x \in B_{d_1}(a,\varepsilon)$. Άρα, $c_{00} \cap B_{d_1}(a,\varepsilon) \neq \emptyset$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $a \in \overline{c_{00}}$. □
(γ) (*Θεώρημα Kronecker*). Έστω $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Το σύνολο

$$D(\theta) := \{(\cos(2\pi n\theta), \sin(2\pi n\theta)) : n \in \mathbb{N}\}$$

είναι πυκνό στον κύκλο $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (άσκηση).

Πρόταση 3.3.3. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $D \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το D είναι πυκνό στον X.*

(β) *Αν F κλειστό και $D \subseteq F$, τότε $F = X$.*

(γ) *Για κάθε μη κενό ανοικτό $G \subseteq X$ ισχύει $G \cap D \neq \emptyset$.*

(δ) *Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $D \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$.*

(ε) *Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του D ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.*

(στ) $(X \setminus D)^\circ = \emptyset$.

Απόδειξη. (α)⇒(β) Έστω F κλειστό υποσύνολο του X ώστε $D \subseteq F$. Τότε, $\overline{D} \subseteq \overline{F}$ δηλαδή $X \subseteq F$.

(β)⇒(γ) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μη κενό ανοικτό $G \subseteq X$ με $G \cap D = \emptyset$. Τότε, $D \subseteq G^c$. Αφού το G^c είναι κλειστό, από την υπόθεση έχουμε ότι $G^c = X$, δηλαδή $G = \emptyset$, άτοπο.

(γ)⇒(δ) Προφανής, αφού κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.

(δ)⇒(ε) Έστω $x \in X$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $D \cap B(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε ακολουθία $(x_n) \subseteq D$ με $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\rho(x_n, x) \to 0$, έχουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

(ε)⇒(στ) Υποθέτουμε ότι $\mathrm{int}(X \setminus D) \neq \emptyset$. Τότε, υπάρχει $x \in X \setminus D$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus D$. Δηλαδή, $B(x,\varepsilon) \cap D = \emptyset$. Από την υπόθεση υπάρχει $(x_n) \subseteq D$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Άρα, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Τότε, $x_n \in B(x,\varepsilon)$ και $x_n \in D$ το οποίο είναι άτοπο, διότι $B(x,\varepsilon) \cap D = \emptyset$.

(στ)⇒(α) Από την πρόταση 3.2.16 έχουμε $X \setminus \overline{D} = (X \setminus D)^\circ$. Έχουμε υποθέσει ότι $(X \setminus D)^\circ = \emptyset$, άρα $X \setminus \overline{D} = \emptyset$. Δηλαδή, $\overline{D} = X$. □

Εφαρμογή 3.3.4. Το $\mathbb{Q}^n$ είναι πυκνό στον ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε την περίπτωση $1 \leq p < \infty$ (η περίπτωση $p = \infty$ αφήνεται ως άσκηση).

Έστω $x = (x(1), \ldots, x(n)) \in \ell_p^n$. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ υπάρχει ακολουθία ρητών $(q_m(i))_{m\in\mathbb{N}}$ ώστε $q_m(i) \to x(i)$. Θέτουμε $q_m = (q_m(1), \ldots, q_m(n))$. Κάθε q_m ανήκει στο $\mathbb{Q}^n$. Από τον ορισμό της p–μετρικής

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x(i) - y(i)|^p \right)^{1/p}$$

και τις ιδιότητες του ορίου πραγματικών ακολουθιών είναι φανερό ότι

$$d_p(x,q_m) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x(i) - q_m(i)|^p \right)^{1/p} \to 0$$

όταν το $m \to \infty$. Δηλαδή, $q_m \xrightarrow{d_p} x$. □

3.3.2 Διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

Ορισμός 3.3.5 (διαχωρίσιμος μετρικός χώρος). Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ο X λέγεται *διαχωρίσιμος* (*separable*) αν έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Δηλαδή, αν υπάρχει $D \subseteq X$ αριθμήσιμο ώστε $\overline{D} = X$.

Παραδείγματα 3.3.6. (α) Ο $\mathbb{R}^n$, με οποιαδήποτε από τις p–μετρικές, είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του είναι το $\mathbb{Q}^n$.

(β) Οι χώροι ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ είναι διαχωρίσιμοι.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $D = \{x \in c_{00} : x_i \in \mathbb{Q}\}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον ℓ^p. Αρχικά δείχνουμε ότι το D είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, η απεικόνιση $f : D \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ με

$$x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \xmapsto{f} (x_1, \ldots, x_n),$$

είναι 1-1 και το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Έπεται ότι το D είναι αριθμήσιμο.

Δείχνουμε τώρα ότι το D είναι πυκνό στον ℓ^p. Έστω $\varepsilon > 0$ και $x = (x_n) \in \ell^p$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ από το κριτήριο Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, n_0$, από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε $q_i \in \mathbb{Q}$ ώστε $|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon^p}{2n_0}$. Αν θέσουμε $q = (q_1, \ldots, q_{n_0}, 0, \ldots)$ έχουμε $q \in D$ και

$$d_p^p(x, q) = \sum_{n=1}^{n_0} |x_i - q_i|^p + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < n_0 \cdot \frac{\varepsilon^p}{2n_0} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή, $d_p(x, q) < \varepsilon$. Συνεπώς, το D είναι πυκνό στον ℓ^p. □

Όπως θα δούμε στο τέλος αυτής της παραγράφου, ο $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι διαχωρίσιμος (παράδειγμα 3.3.11(β)).

(γ) Ο κύβος του Hilbert, $\mathcal{H}^\infty$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το σύνολο D των τελικά μηδενικών ακολουθιών με ρητές συντεταγμένες στο $[-1, 1]$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον $\mathcal{H}^\infty$. Για την πυκνότητα θεωρούμε τυχόν $x \in \mathcal{H}^\infty$ και τυχόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, για τους x_i, $i = 1, \ldots, n_0$ που ανήκουν στο $[-1, 1]$ υπάρχουν ρητοί $q_i \in [-1, 1]$ ώστε $\frac{|x_i - q_i|}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2n_0}$. Θέτουμε $q = (q_1, \ldots, q_{n_0}, 0, \ldots)$ και έχουμε

$$d(x, q) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|x_n - q_n|}{2^n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} < n_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2n_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Η αριθμησιμότητα του D προκύπτει όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα. □

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα χαρακτηρισμό των διαχωρίσιμων μετρικών χώρων μέσω του «πληθαρίθμου μιας *βάσης* της τοπολογίας»[3] τους. Πιο συγκεκριμένα, ένας μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος αν και μόνον αν έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.

Θεώρημα 3.3.7. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι διαχωρίσιμος.*

(β) *Υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}$ ανοικτών υποσυνόλων του X, η οποία έχει την εξής ιδιότητα: Για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ και για κάθε $x \in G$ υπάρχει $U \in \mathcal{O}$ ώστε $x \in U \subseteq G$.*

Απόδειξη. (α)$\Rightarrow$(β). Έστω $D = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{O} = \left\{ B(x_n, q) : q \in \mathbb{Q}^+,\, x_n \in D \right\},$$

η οποία είναι αριθμήσιμη και αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του X. Θα δείξουμε ότι αυτή έχει την ζητούμενη ιδιότητα. Έστω $G \subseteq X$ ανοικτό και έστω $x \in G$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq G$. Από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < 2q < \varepsilon$. Αφού το D είναι πυκνό στον X, η μπάλα $B(x,q)$ περιέχει ένα στοιχείο του D, έστω x_n. Παρατηρήστε ότι $x \in B(x_n,q)$ και $B(x_n,q) \subseteq G$. Πράγματι, αν $y \in B(x_n,q)$ τότε

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) < q + q < \varepsilon,$$

δηλαδή $y \in B(x,\varepsilon) \subseteq G$.

(β)$\Rightarrow$(α). Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}$ ανοικτών υποσυνόλων του X που ικανοποιεί το (β). Για κάθε $\emptyset \neq U \in \mathcal{O}$ επιλέγουμε τυχόν $x_U \in U$. Τότε, το $D = \{x_U : U \in \mathcal{O}\}$ είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X (εξηγήστε γιατί). □

Πόρισμα 3.3.8. *Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Κάθε υπόχωρος A του X είναι επίσης διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα: για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ και $x \in G$ υπάρχει $U \in \mathcal{O}$ ώστε $x \in U \subseteq G$. Τότε, η αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{O}\}$ αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του υποχώρου A και έχει την ίδια ιδιότητα. Άρα, ο (A,ρ_A) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. □

Η επόμενη πρόταση μας δίνει κριτήριο και «μέθοδο» για να δείχνουμε ότι ένας μετρικός χώρος *δεν* είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση 3.3.9. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω A υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\rho(x,y) \geq \varepsilon$ για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$. Τότε, ο (X,ρ) δεν είναι διαχωρίσιμος.*

[3] Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται *βάση* για την τοπολογία του X αν έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε ανοικτό σύνολο $V \subseteq X$ και για κάθε $x \in V$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subseteq V$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος. Τότε, έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D. Θεωρούμε τις μπάλες $B(x,\frac{\varepsilon}{2})$, $x\in A$. Αυτές είναι ξένες ανά δύο και υπεραριθμήσιμες το πλήθος. Καθώς το D είναι πυκνό, έχουμε $D\cap B(x,\frac{\varepsilon}{2})\neq\emptyset$ για κάθε $x\in A$, δηλαδή υπάρχει $d_x\in D$ ώστε $d_x\in B(x,\frac{\varepsilon}{2})$. Ορίζουμε την απεικόνιση $A\ni x\longmapsto d_x\in D$, η οποία είναι 1-1. Δηλαδή, το A είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του D. Άτοπο, διότι το D είναι αριθμήσιμο, ενώ το A υπεραριθμήσιμο. □

Πόρισμα 3.3.10. *Σε κάθε διαχωρίσιμο μετρικό χώρο (X,ρ) κάθε οικογένεια από ξένες ανοικτές μπάλες είναι το πολύ αριθμήσιμη.*

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με κάποια παραδείγματα μη διαχωρίσιμων μετρικών χώρων.

Παραδείγματα 3.3.11. (α) Ο $(\mathbb{R},\delta)$ δηλαδή, το $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική, είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την πρόταση 3.3.9 με $A=\mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι $\delta(x,y)=1$ αν $x\neq y$ και το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Συνεπώς, ο $(\mathbb{R},\delta)$ δεν είναι διαχωρίσιμος, □

Γενικότερα, αν έχουμε ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο S και το εφοδιάσουμε με τη διακριτή μετρική τότε ο (S,δ) είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

(β) Ο $\ell^\infty\equiv(\ell^\infty(\mathbb{N}),\|\cdot\|_\infty)$ είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Στον ℓ^∞ θεωρούμε το σύνολο $S=\{\chi_A : A\subseteq\mathbb{N}\}$, όπου χ_A η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $A\subseteq\mathbb{N}$. Δηλαδή, $\chi_A(n)=1$ αν $n\in A$ και $\chi_A(n)=0$ αν $n\notin A$. Τότε, το S είναι ισοπληθικό με το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ το οποίο είναι υπεραριθμήσιμο (βλέπε Παράρτημα Α΄). Επιπλέον, είναι $\|\chi_A-\chi_B\|_\infty\geq 1$ για $A\neq B$ και συνεπώς οι μπάλες $B\left(\chi_A,\frac{1}{2}\right)$ είναι ξένες ανά δύο. Από την πρόταση 3.3.9 συμπεραίνουμε ότι ο ℓ^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. □

3.4 Ασκήσεις

1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και F,G υποσύνολα του X. Αν το F είναι κλειστό και το G είναι ανοικτό, δείξτε ότι το $F\setminus G$ είναι κλειστό και το $G\setminus F$ είναι ανοικτό.

2. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A του X γράφεται ως τομή ανοικτών υποσυνόλων του (X,ρ).

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το $G=\{x\in\mathbb{R} : f(x)>0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το $F=\{x\in\mathbb{R} : f(x)=0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

4. Δείξτε ότι κάθε κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών διαστημάτων και κάθε ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών διαστημάτων.

5. Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό.

6. Αποδείξτε ότι κάθε σφαίρα ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό σύνολο. Μπορεί σε έναν μετρικό χώρο μια σφαίρα να είναι το κενό σύνολο;

7. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Εξετάστε, αν ισχύει πάντοτε η ισότητα

$$\overline{B(x,\varepsilon)} = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

[*Υπενθύμιση:* Για κάθε $A \subseteq X$ συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την κλειστή θήκη του A.]

8. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι $\widehat{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$ για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$.

9. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Η *διαγώνιος* του $X \times X$ είναι το σύνολο $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. Αποδείξτε ότι το Δ είναι κλειστό στον $X \times X$ ως προς τη μετρική d_2, όπου

$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{d^2(x_1,y_1) + d^2(x_2,y_2)}.$$

Γενικότερα, αποδείξτε ότι το Δ είναι κλειστό ως προς κάθε μετρική γινόμενο στον $X \times X$.

10. Δείξτε ότι ο c_0 είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ^∞. Τι μπορείτε να πείτε για τον c_{00}; Είναι ανοικτό υποσύνολο του ℓ_∞; κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞;

11. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) Το G είναι ανοικτό.
(β) Για κάθε $A \subseteq X$, $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$.
(γ) Για κάθε $A \subseteq X$, $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$.

12. Υπάρχει άπειρο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από ρητούς; Υπάρχει ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από άρρητους;

13. Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων το πλήθος ανοικτών διαστημάτων με ρητά άκρα.

14. Αποδείξτε ότι στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν μη τετριμμένα υποσύνολα (δηλάδή διαφορετικά από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$) τα οποία να είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά.

15. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έστω F_n κλειστό υποσύνολο του $(n, n+1)$. Θέτουμε $F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$.
Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι για κάθε n υπάρχει $\delta_n > 0$ έτσι ώστε $|x-y| \geq \delta_n$ οποτεδήποτε $x \in F_n$ και $y \in F_m$, $n \neq m$.

(β) Βρείτε μια ακολουθία ξένων ανά δυο κλειστών συνόλων στο $\mathbb{R}$ των οποίων η ένωση δεν είναι κλειστό σύνολο.

16. Έστω A, B δύο υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d). Αποδείξτε ότι:
(α) Αν $A \cup B = X$, τότε $\overline{A} \cup B^\circ = X$.
(β) Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $\overline{A} \cap B^\circ = \emptyset$.

17. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:
(α) Αν το X έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε υπάρχει ανοικτό $G \subsetneq X$, ώστε $G \neq \emptyset$ και $X \setminus G \neq \emptyset$.
(β) Αν το X είναι άπειρο σύνολο, τότε υπάρχει ανοικτό $G \subsetneq X$ ώστε το G και το $X \setminus G$ να είναι άπειρα.

18. Εστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $x, y \in X$ με $x \neq y$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V ώστε $x \in U$, $y \in V$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

19. Εστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin F$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V ώστε $x \in U$, $F \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Μπορούμε να πετύχουμε να ισχύει, επιπλέον, ότι $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$;

20. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:
(α) $(A \setminus B)^\circ \subseteq A^\circ \setminus B^\circ$ για κάθε $A, B \subseteq X$.
(β) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$ για κάθε $A, B \subseteq X$.
Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους εγκλεισμούς με ισότητες;

21. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Θέτουμε A' το *παράγωγο σύνολο* του A, δηλαδή το σύνολο των σημείων συσσσώρευσης του A. Αποδείξτε τα ακόλουθα:
(α) $\overline{A} = A \cup A'$. Συμπεράνατε ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.
(β) Το A' είναι κλειστό σύνολο.
(γ) Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $A' \subseteq B'$.
(δ) $A' = (\overline{A})'$. Δηλαδή, τα A και $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.
(ε) $(A')' \subseteq A'$. Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε ο εγκλεισμός να είναι γνήσιος.

22. Εξετάστε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς:
(α) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{N}$.
(β) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Z}$.
(γ) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Q}$.

23. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $P \subseteq X$. Το P λέγεται *τέλειο* αν είναι κενό ή είναι κλειστό και κάθε σημείο του είναι σημείο συσσώρευσης γι' αυτό. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Ένα συνόλο $P \subseteq (X,\rho)$ είναι τέλειο αν και μόνο αν $P = P'$.

(β) Κάθε κλειστό (μη τετριμμένο) διάστημα στο $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική) είναι τέλειο σύνολο. Επίσης, το $\mathbb{R}$ είναι τέλειο αν θεωρηθεί ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

(γ) Κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο P του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. [*Υπόδειξη.* Το P είναι άπειρο. Αν είναι αριθμήσιμο, γράφεται στη μορφή $P = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίστε κατάλληλη ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n, b_n]$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n] \cap P \neq \emptyset$ αλλά $x_n \notin [a_n, b_n]$.]

24. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Το x λέγεται *σημείο συμπύκνωσης* του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν το A είναι αριθμήσιμο τότε δεν έχει σημεία συμπύκνωσης.

(β) Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και P είναι το σύνολο των σημείων συμπύκνωσης του A τότε $P' = P$ και το $A \setminus P$ είναι αριθμήσιμο.

(γ) Αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε υπάρχουν τέλειο σύνολο P και αριθμήσιμο σύνολο Z ώστε $A = P \cup Z$ και $P \cap Z = \emptyset$.

25. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στο X. Το $x \in X$ λέγεται *οριακό σημείο* της (x_n) αν υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$. Θέτουμε $L(x_n)$ το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας (x_n). Αποδείξτε ότι

(α) Αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $L(x_n) = \{x\}$. Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ τότε $A' \subseteq L(x_n) \subseteq \overline{A}$. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι οι εγκλεισμοί μπορεί να είναι γνήσιοι.

(γ) Δείξτε ότι το $L(x_n)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(δ) Αν το A δεν είναι κλειστό, δείξτε ότι $L(x_n) \neq \emptyset$. Αν επιπλέον, η (x_n) είναι ρ-Cauchy, τότε είναι ρ-συγκλίνουσα.

(ε) Το x είναι οριακό σημείο της (x_n) αν και μόνο για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \geq n$ ώστε $x_m \in B_\rho(x,\varepsilon)$.

26. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq X$. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \mathrm{diam}(A)$. Ισχύει το ίδιο για το εσωτερικό του A;

27. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αν $A, B \subseteq X$, η *απόσταση* του A από το B ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{\rho(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της απόστασης:

(α) αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.

(β) $\mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B}) = \mathrm{dist}(A,B)$.

(γ) $\mathrm{dist}(A, B \cup C) = \min\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(A,C)\}$.

(δ) Δώστε παράδειγμα κλειστών και ξένων υποσυνόλων A, B ενός μετρικού χώρου (X, ρ) τα οποία έχουν μηδενική απόσταση.

28. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν $x \in X$ ορίζουμε την απόσταση του x από το A να είναι η απόσταση των συνόλων $\{x\}, A$:

$$\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}.$$

Αποδείξτε ότι:
(α) $\mathrm{dist}(x, A) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.
(β) $|\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)| \leq \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.
(γ) Το σύνολο $\{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$ είναι ανοικτό, ενώ το σύνολο $\{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$ είναι κλειστό.
(δ) Αν $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, τότε $\mathrm{dist}(x, A) = \mathrm{dist}(x, B)$ για κάθε $x \in X$.

29. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι

$$A' = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A \setminus \{x\}) = 0\}.$$

30. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.

31. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Αποδείξτε τις εξής ιδιότητες του συνόρου του A:

(α) $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$.

(β) $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$.

(γ) $X = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) \cup (X \setminus A)^\circ$.

(δ) $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$ ή ισοδύναμα $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Επομένως, το σύνορο είναι κλειστό σύνολο.

(ε) Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $\mathrm{bd}(A) \subseteq A$.

32. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν το A είναι ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του X τότε το $\mathrm{bd}(A)$ έχει κενό εσωτερικό.

(β) Αν $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ τότε $\mathrm{bd}(A \cup B) = \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{bd}(B)$.

33. Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε $(\mathrm{bd}(A))^\circ = \mathbb{R}$.

34. (α) Έστω A ανοικτό υποσύνολο του (X, ρ) και $G \subseteq A$. Δείξτε ότι το G είναι ανοικτό στο A αν και μόνο αν είναι ανοικτό στον X.

(β) Έστω A κλειστό υποσύνολο του (X,ρ) και $G \subseteq A$. Είναι σωστό ότι το G είναι κλειστό στο A αν και μόνο αν είναι κλειστό στον X;

35. Έστω A υποσύνολο του (X,ρ). Αν G και H είναι ξένα ανοικτά σύνολα στο A, δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα U και V στο X ώστε $G = A \cap U$ και $H = A \cap V$.

36. Σωστό ή λάθος; Για κάθε άπειρο μετρικό χώρο (X,d) υπάρχει άπειρο υποσύνολο A του X ώστε κάθε $G \subseteq A$ να είναι ανοικτό ως προς τη σχετική μετρική στο A.

37. Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε οικογένεια ξένων ανοικτών υποσυνόλων του X είναι πεπερασμένη ή αριθμήσιμη.

38. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:

(α) Αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X, τότε $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X.

(β) Αν το G είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X και το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, τότε το $G \cap D$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Ισχύει το ίδιο αν το G δεν υποτεθεί ανοικτό;

(γ) Είναι σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X είναι πυκνό υποσύνολο του X;

39. Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X είναι το πολύ αριθμήσιμο.

(β) Αν S είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X τότε υπάρχει ακολουθία διαφορετικών ανά δυο στοιχείων του S, η οποία συγκλίνει σε σημείο του S.

40. Έστω $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$D(\theta) := \{(\cos(2\pi n\theta), \sin(2\pi n\theta)) : n \in \mathbb{N}\}$$

είναι πυκνό στον κύκλο $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

41. Βρείτε ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ως προς τη συνήθη μετρική.

42. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Το $A \subseteq X$ λέγεται *πουθενά πυκνό* αν $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$. Αποδείξτε ότι:

(α) Το $A \subseteq X$ είναι πουθενά πυκνό αν και μόνον αν $A \subseteq \overline{(X \setminus \overline{A})}$.

(β) Το $A \subseteq X$ είναι πουθενά πυκνό και κλειστό αν και μόνον αν το $X \setminus A$ είναι πυκνό και ανοικτό.

(γ) Αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε το A είναι πουθενά πυκνό αν και μόνον αν $A = \mathrm{bd}(A)$.

(δ) Αν το A είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του X και το $X \setminus B$ είναι πυκνό τότε το $X \setminus (A \cup B)$ είναι πυκνό στον X.

(ε) Η ένωση πεπερασμένου πλήθους πουθενά πυκνών υποσυνόλων του X είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του X.

43. Έστω (q_n) μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Ορίζουμε

$$I_n = \left(q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι το $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και ότι το U^c είναι πουθενά πυκνό.

44. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το A είναι πουθενά πυκνό.

(β) Το $\overline{A}$ δεν περιέχει μη κενό ανοικτό σύνολο.

(γ) Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X περιέχει ένα μη κενό ανοικτό σύνολο ξένο προς το A.

(δ) Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X περιέχει μια ανοικτή μπάλα ξένη προς το A.

45. Έστω $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ μετρικοί χώροι. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο (X, d) με $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ και $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$. Δείξτε ότι:

(α) Αν κάθε G_i είναι d_i-ανοικτό στον X_i, $i = 1, \ldots, n$, τότε το $\prod_{i=1}^{n} G_i$ είναι d-ανοικτό στον X.

(β) Αν κάθε F_i είναι d_i-κλειστό στον X_i, $i = 1, \ldots, n$, τότε το $\prod_{i=1}^{n} F_i$ είναι d-κλειστό στον X.

(γ) Αν κάθε D_i είναι πυκνό στον X_i, $i = 1, \ldots, n$, τότε το $D = \prod_{i=1}^{n} D_i$ είναι πυκνό στον X.

Ειδικότερα, αν κάθε (X_i, d_i), $i = 1, ..., n$ είναι διαχωρίσιμος τότε ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος.

46. Έστω (X_n, ρ_n), $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία μετρικών χώρων με $\rho_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Θεωρούμε το χώρο γινόμενο (X, ρ), όπου $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ και $\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(x(n), y(n))$. Σταθεροποιούμε $\alpha = (\alpha(n))$ στον X. Θεωρούμε τα σύνολα

$$D_m = \{x = (x(n)) \in X : x(n) = \alpha(n), \ n > m\}, \ m = 1, 2, \ldots$$

και ορίζουμε

$$D_\alpha := \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m.$$

Αποδείξτε ότι το D_α είναι πυκνό στον X.

47. Έστω A, B αριθμήσιμα, πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : A \to B$ η οποία είναι αύξουσα, 1-1 και επί.

Κεφάλαιο 4

Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

4.1 Συνεχείς συναρτήσεις

Έστω (X,ρ) και (Y,σ) δύο μετρικοί χώροι. Στην §2.2 δώσαμε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ σε κάποιο σημείο $x_0 \in X$: λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(x_0,\varepsilon) > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $\rho(x,x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$.

Μια ισοδύναμη διατύπωση είναι η εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(B_\rho(x_0,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x_0),\varepsilon).$$

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακτίνα $\delta > 0$ ώστε η μπάλα (του X) με κέντρο το x_0 και ακτίνα δ να απεικονίζεται, μέσω της f, μέσα στη μπάλα (του Y) με κέντρο το $f(x_0)$ και ακτίνα ε.

Ορισμός 4.1.1 (περιοχή). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $x \in X$. Το $U \subseteq X$ λέγεται *περιοχή του x* αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq U$, δηλαδή αν $x \in U^\circ$.

Με την ορολογία των περιοχών, εύκολα ελέγχουμε ότι η συνέχεια συνάρτησης σε δεδομένο σημείο περιγράφεται ως εξής:

> *Η $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ είναι συνεχής στο $x \in X$ αν για κάθε περιοχή V του $f(x)$ υπάρχει περιοχή W του x ώστε $f(W) \subseteq V$.*

[Πράγματι, αν η f είναι συνεχής στο x και V είναι μια περιοχή του $f(x)$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\sigma(f(x),\varepsilon) \subseteq V$ και, λόγω της συνέχειας της f στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(B_\rho(x,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon) \subseteq V$. Θέτοντας $W = B_\rho(x,\delta)$ έχουμε το ζητούμενο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, θέτουμε $V = B_\sigma(f(x), \varepsilon)$, βρίσκουμε περιοχή W του x ώστε $f(W) \subseteq V$ και μετά βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε $B_\rho(x, \delta) \subseteq W$. Τότε, $f(B_\rho(x,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x), \varepsilon)$.]

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τις συνεχείς συναρτήσεις $f : X \to Y$ μέσω των ανοικτών και κλειστών υποσυνόλων των X και Y (υπενθυμίζουμε ότι η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$).

Πρόταση 4.1.2. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής.*

(β) *Αν G είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.*

(γ) *Αν F είναι κλειστό υποσύνολο του Y, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του Y. Θα δείξουμε ότι το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Αν το $f^{-1}(G)$ είναι κενό τότε το συμπέρασμα ισχύει. Αν όχι, έστω $x \in f^{-1}(G)$. Τότε, $f(x) \in G$ και το G είναι ανοικτό, συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(f(x), \varepsilon) \subseteq G$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq G$, δηλαδή $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$. Συνεπώς, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Είναι άμεσο από τη σχέση $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$: έστω F κλειστό υποσύνολο του Y. Τότε, το $Y \setminus F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Από την υπόθεσή μας, το $f^{-1}(Y \setminus F)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Όμως, $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$. Αφού το $X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοικτό, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

(γ) $\Rightarrow$ (α) Έστω $x \in X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τη μπάλα $B = B(f(x), \varepsilon)$. Τότε το $X \setminus B$ είναι κλειστό και από την υπόθεσή μας το $f^{-1}(X \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ είναι επίσης κλειστό, δηλαδή το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό. Επιπλέον, $x \in f^{-1}(B)$ διότι $f(x) \in B$. Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B)$. Ισοδύναμα, $f(B(x,\delta)) \subseteq B = B(f(x), \varepsilon)$. □

Στην επόμενη πρόταση δίνουμε αντίστοιχους χαρακτηρισμούς των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to Y$ μέσω της κλειστής θήκης και του εσωτερικού:

Πρόταση 4.1.3. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής.*

(β) *Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(γ) *Για κάθε $B \subseteq Y$ ισχύει $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.*

(δ) *Για κάθε $C \subseteq Y$ ισχύει $f^{-1}(C^\circ) \subseteq (f^{-1}(C))^\circ$.*

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $A \subseteq X$ και $y \in f(\overline{A})$. Τότε, υπάρχει $x \in \overline{A}$ με $y = f(x)$. Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to x$. Η f είναι συνεχής στο x, άρα $f(x_n) \to f(x) = y$. Όμως, $f(x_n) \in f(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $y \in \overline{f(A)}$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Αν $B \subseteq Y$, θέτοντας $A = f^{-1}(B)$ στο (β) έχουμε

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}.$$

Ο δεύτερος εγκλεισμός προκύπτει από την $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ που ισχύει για κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ και κάθε $B \subseteq Y$.

Τώρα, από την $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{B}$ συμπεραίνουμε ότι $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(γ) ⇒ (δ) Έστω $C \subseteq Y$. Γράφουμε

$$X \setminus (f^{-1}(C))^\circ = \overline{X \setminus f^{-1}(C)} = \overline{f^{-1}(Y \setminus C)}$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\overline{f^{-1}(Y \setminus C)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus C})$ παίρνουμε

$$X \setminus (f^{-1}(C))^\circ \subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus C}).$$

Επιπλέον, ισχύει

$$f^{-1}(\overline{Y \setminus C}) = f^{-1}(Y \setminus C^\circ) = X \setminus f^{-1}(C^\circ).$$

Συνεπώς,

$$X \setminus (f^{-1}(C))^\circ \subseteq X \setminus f^{-1}(C^\circ),$$

δηλαδή $f^{-1}(C^\circ) \subseteq (f^{-1}(C))^\circ$.

(δ) ⇒ (α) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του Y. Θέτοντας $C = G$ στην (δ) παίρνουμε

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(G^\circ) \subseteq [f^{-1}(G)]^\circ$$

διότι $G = G^\circ$. Έπεται ότι το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό. Από την πρόταση 4.1.2 η f είναι συνεχής. □

4.2 Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός 4.2.1 (ομοιόμορφη συνέχεια). Έστω (X,ρ) και (Y,σ) δύο μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $\rho(x,y) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Παραδείγματα 4.2.2. (α) Κάθε συνάρτηση $f : (X,\delta) \to (Y,\sigma)$ από τον διακριτό μετρικό χώρο σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $x, y \in X$ και $\delta(x,y) < \frac{1}{2}$ έπεται ότι $x = y$, άρα $\sigma(f(x), f(y)) = 0 < \varepsilon$. □

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι κάθε ακολουθία $a : \mathbb{N} \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

(β) Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Η συνάρτηση *απόστασης από το σύνολο* A είναι η $d_A : X \to \mathbb{R}$ με

$$t \mapsto \mathrm{dist}(t, A) \equiv \inf\{\rho(t,a) : a \in A\}.$$

Η d_A είναι ομοιόμορφα συνεχής: μπορούμε να δείξουμε ότι

$$(*) \qquad |d_A(t) - d_A(s)| \leq \rho(t,s)$$

για κάθε $t, s \in X$. Τότε, για δοθέν $\varepsilon > 0$, επιλέγοντας $\delta = \varepsilon$ έχουμε ότι αν $t, s \in X$ και $\rho(t,s) < \delta$ ικανοποιείται η $|d_A(t) - d_A(s)| < \delta = \varepsilon$.

Απόδειξη της $(*)$: Έστω $t, s \in X$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$d_A(t) \leq \rho(t,a) \leq \rho(t,s) + \rho(s,a).$$

Συνεπώς, ο $d_A(t) - \rho(t,s)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\rho(s,a) : a \in A\}$. Έπεται ότι $d_A(t) - \rho(t,s) \leq d_A(s)$. Δηλαδή,

$$d_A(t) - d_A(s) \leq \rho(t,s).$$

Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα δείχνει ότι

$$d_A(s) - d_A(t) \leq \rho(t,s),$$

απ΄ όπου παίρνουμε την $(*)$. □

(γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία «μηδενίζεται στο άπειρο», δηλαδή $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό).

(δ) Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι προφανώς συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πράγματι, η συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $p(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής: για κάθε $\delta > 0$, αν επιλέξουμε $x_\delta = \frac{1}{\delta}$ και $y_\delta = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, τότε $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ αλλά

$$|p(x_\delta) - p(y_\delta)| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Από τον ορισμό έπεται ότι η p δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ο χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών (που γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό) μεταφέρεται χωρίς καμία αλλαγή στο πλαίσιο των μετρικών χώρων:

Πρόταση 4.2.3. *Έστω $(X,\rho), (Y,\sigma)$ μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(β) *Αν $(x_n), (z_n)$ είναι ακολουθίες στον X με $\rho(x_n, z_n) \to 0$, τότε $\sigma(f(x_n), f(z_n)) \to 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και θεωρούμε ακολουθίες (x_n), (z_n) στον X με $\rho(x_n, z_n) \to 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν } x, z \in X \text{ και } \rho(x,z) < \delta \ \text{ τότε } \ \sigma(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

Αφού $\rho(x_n, z_n) \to 0$, υπάρχει $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, z_n) < \delta$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε, $\rho(x_n, z_n) < \delta$ και $x_n, z_n \in X$, οπότε $\sigma(f(x_n), f(z_n)) < \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\sigma(f(x_n), f(z_n)) \to 0$.

Αντίστροφα: αν η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα:

$$\text{Για κάθε } \delta > 0 \text{ υπάρχουν } x_\delta, z_\delta \in X \text{ με } \rho(x_\delta, y_\delta) < \delta \text{ αλλά } \sigma(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon.$$

Επιλέγοντας διαδοχικά $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, βρίσκουμε ζευγάρια $x_n, z_n \in X$ ώστε $\rho(x_n, z_n) < \frac{1}{n}$ αλλά $\sigma(f(x_n), f(z_n)) \geq \varepsilon$. Αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες (x_n), (z_n), έχουμε $\rho(x_n, z_n) \to 0$ αλλά $\sigma(f(x_n), f(z_n)) \not\to 0$ (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι έτοπο, συνεπώς έχουμε αποδείξει την αντίστροφη κατεύθυνση. □

Πρόταση 4.2.4. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Θεωρούμε τις προτάσεις:*

(α) *Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(β) *Η f απεικονίζει βασικές ακολουθίες του X σε βασικές ακολουθίες του Y.*

(γ) *Η f είναι συνεχής.*

Τότε, ισχύουν οι συνεπαγωγές (α) ⇒ (β) *και* (β) ⇒ (γ).

Απόδειξη. (α) ⇒ (β). Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X, ρ). Θα δείξουμε ότι η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία στον (Y, σ). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $\rho(x, y) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Η (x_n) είναι ρ–βασική, συνεπώς υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m, n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x_m) < \delta$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $m, n \geq n_0$ τότε $\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

(β) ⇒ (γ). Έστω $x \in X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x. Αρκεί να δείξουμε ότι αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$. Θεωρούμε την ακολουθία $y_n = (x, x_1, x, x_2, x, x_3, \ldots)$. Η (y_n) συγκλίνει στο x (γνωστό) άρα είναι βασική. Από την υπόθεση έχουμε ότι η $(f(y_n))$ είναι επίσης βασική. Αλλά, η υπακολουθία $(f(y_{2n-1}))$ της $(f(y_n))$ είναι σταθερή και ίση με $f(x)$, επομένως συγκλίνει στο $f(x)$. Αφού η $(f(y_n))$ είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, συγκλίνει, και μάλιστα στο $f(x)$ (αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε το όριό της συμπίπτει με το όριο κάθε υπακολουθίας της). □

Παρατηρήσεις 4.2.5. (α) Μπορούμε να δώσουμε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν απεικονίζει κάθε βασική ακολουθία σε βασική ακολουθία (άρα το αντίστροφο της συνεπαγωγής (β) ⇒ (γ) δεν ισχύει). Αν θεωρήσουμε την $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ τότε αυτή είναι συνεχής, αν όμως θεωρήσουμε την βασική ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $(0, +\infty)$ τότε αυτή δεν απεικονίζεται σε βασική ακολουθία, αφού $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$.

(β) Επίσης, δεν ισχύει το αντίστροφο της συνεπαγωγής (α) ⇒ (β), δηλαδή μπορεί μια συνάρτηση να απεικονίζει βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες και να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $p(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρ' όλα αυτά, αν έχουμε μια βασική ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ τότε, όπως έχουμε δει στον Απειροστικό Λογισμό, αυτή είναι και συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x_n \to x$ και, επειδή η p είναι συνεχής, $p(x_n) \to p(x)$, δηλαδή η $(p(x_n))$ είναι συγκλίνουσα και άρα βασική.

4.2.1 Lipschitz συναρτήσεις

Ορισμός 4.2.6. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Λέμε ότι η f είναι C–Lipschitz (ή αλλιώς, ότι ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά $C > 0$) αν ικανοποιεί την

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq C\,\rho(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Λέμε ότι η f είναι Lipschitz αν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με κάποια σταθερά $C > 0$.

Παρατηρήσεις 4.2.7. (α) Κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \sqrt{t}$, τότε αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz για καμία θετική σταθερά (άσκηση).

(β) Συμβολίζουμε με $\mathrm{Lip}(X, Y)$ την κλάση όλων των συναρτήσεων Lipschitz $f : X \to Y$. Στην περίπτωση $Y = \mathbb{R}$, γράφουμε απλώς $\mathrm{Lip}(X)$ αντί για $\mathrm{Lip}(X, \mathbb{R})$. Η κλάση $\mathrm{Lip}(X, Y)$ είναι πάντοτε μη κενή διότι περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις. Η κλάση $\mathrm{Lip}(X)$ είναι επίσης μη κενή και, γενικά, περιέχει «πολλές» συναρτήσεις: αν A είναι οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο του X, τότε η συνάρτηση απόστασης $d_A : X \to \mathbb{R}$ με $d_A(x) = \mathrm{dist}(x, A)$ είναι 1–Lipschitz.

(γ) Αν $f, g \in \mathrm{Lip}(X)$, τότε $f + g \in \mathrm{Lip}(X)$ και αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda f \in \mathrm{Lip}(X)$. Με άλλα λόγια, η τριάδα $\big(\mathrm{Lip}(X), +, \cdot\big)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{C}(X)$.

(δ) Για κάθε συνάρτηση $f \in \mathrm{Lip}(X, Y)$ ορίζουμε

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \inf\big\{C > 0 : \sigma(f(x), f(y)) \leq C\,\rho(x, y),\ x, y \in X\big\}.$$

Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη να δείξει ότι

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \sup\left\{\frac{\sigma(f(x), f(y))}{\rho(x, y)} \mid x, y \in X, x \neq y\right\}$$

και ότι $\sigma(f(x), f(y)) \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Παραδείγματα 4.2.8. (α) Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη παράγωγο είναι Lipschitz.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε $|f'(x)| \leq C$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τυχόντες πραγματικούς αριθμούς x, y με $x < y$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[x, y]$, βρίσκουμε $\xi \in (x, y)$ ώστε

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi).$$

Τότε, $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq C$, ή αλλιώς, $|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|$. □

Ειδικότερα, οι συναρτήσεις $\sin, \cos, \arctan$ είναι Lipschitz.

(β) Έστω X γραμμικός χώρος. Κάθε νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι 1–Lipschitz, άρα ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

(γ) Για τη συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 1$. Η απόδειξη είναι απλή: για την ανισότητα $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $|f'(x)| = |\cos x| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ για την ανισότητα $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Πρόταση 4.2.9. *Έστω $(X,\rho), (Y,\sigma)$ δύο μετρικοί χώροι και έστω $f \in \mathrm{Lip}(X,Y)$. Τότε, η f απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του X σε φραγμένα υποσύνολα του Y. Πιο συγκεκριμένα, αν A είναι φραγμένο υποσύνολο του X, τότε*

$$\mathrm{diam}(f(A)) \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \mathrm{diam}(A).$$

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq X$ φραγμένο. Τότε, $\mathrm{diam}(A) < \infty$. Έστω $x, y \in A$. Τότε,

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \rho(x,y) \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \mathrm{diam}(A) < \infty.$$

Παίρνοντας supremum ως προς $x, y \in A$ συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{diam}(f(A)) \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \mathrm{diam}(A)$. □

Σημείωση 4.2.10. Η υπόθεση ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz δε μπορεί να αντικατασταθεί από την ασθενέστερη υπόθεση της ομοιόμορφης συνέχειας. Αν θεωρήσουμε την ταυτοτική συνάρτηση $I : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ όπου δ η διακριτή μετρική, τότε αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρατηρήστε ότι το $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο στον $(\mathbb{R}, \delta)$ αλλά δεν είναι φραγμένο στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

4.3 Ισομετρίες, ομοιομορφισμοί, ισοδύναμες μετρικές

4.3.1 Ισομετρίες

Ορισμός 4.3.1 (ισομετρία). Έστω $(X,\rho), (Y,\sigma)$ δύο μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται *ισομετρία* (*isometry*) αν διατηρεί τις αποστάσεις, δηλαδή

$$\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x,y)$$

για κάθε $x, y \in X$.

Παρατηρήσεις 4.3.2. (α) Κάθε ισομετρία είναι 1-1 συνάρτηση.

(β) Κάθε ισομετρία είναι Lipschitz συνάρτηση.

(γ) Αν υπάρχει ισομετρία $f : X \to Y$, τότε γράφουμε $X \overset{\mathrm{isom}}{\hookrightarrow} Y$ και λέμε ότι ο X εμφυτεύεται ισομετρικά στον Y. Αν, επιπλέον, η f είναι επί, τότε λέμε ότι οι χώροι X, Y είναι ισομετρικοί (και σαν μετρικοί χώροι «ταυτίζονται»).

(δ) Μπορούμε να ορίσουμε ισομετρίες οι οποίες να μην είναι επί. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τον *τελεστή της δεξιάς μετατόπισης* (shift operator) $S_r : \ell_2 \to \ell_2$ με

$$S_r(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots),$$

τότε αυτός είναι ισομετρία από τον ℓ_2 στον εαυτό του, η οποία δεν είναι επί.

Παραδείγματα 4.3.3. (α) (*Μεταφορές*) Οι απεικονίσεις $\sigma_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\sigma_u(x) = x + u$ και $\tau_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\tau_u(x) = -x + u$ (όπου $u \in \mathbb{R}$) είναι ισομετρίες. Γενικότερα, κάθε μεταφορά $T_y : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με $T_y(x) = x + y$, όπου $y \in \mathbb{R}^n$, είναι ισομετρία επί.

(β) Αν $n < m$ τότε $\ell_2^n \overset{isom}{\hookrightarrow} \ell_2^m$.

Πράγματι, η απεικόνιση $i : \ell_2^n \to \ell_2^m$ με

$$i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0}_{m-\text{θέσεις}})$$

είναι ισομετρία.

4.3.2 Ισοδύναμες μετρικές

Ορισμός 4.3.4 (ισοδύναμες μετρικές). Έστω X ένα μη κενό σύνολο και ρ, σ δύο μετρικές στο X. Οι ρ και σ λέγονται *ισοδύναμες* (και γράφουμε $\rho \sim \sigma$) αν ορίζουν τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες. Δηλαδή $\rho \sim \sigma$ αν και μόνον αν ισχύει η ισοδυναμία

$$x_n \xrightarrow{\rho} x \iff x_n \xrightarrow{\sigma} x.$$

Πρόταση 4.3.5. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και ρ, σ δύο μετρικές στο X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Οι ρ, σ είναι ισοδύναμες.*

(β) *Η ταυτοτική συνάρτηση $I : (X, \rho) \to (X, \sigma)$ είναι αμφισυνεχής. Δηλαδή, η I είναι συνεχής και η I^{-1} επίσης.*

(γ) *(Κριτήριο Hausdorff) Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε $B_\rho(x, \delta_1) \subseteq B_\sigma(x, \varepsilon)$ και $B_\sigma(x, \delta_2) \subseteq B_\rho(x, \varepsilon)$.*

(δ) *Το $G \subseteq X$ είναι ρ–ανοικτό αν και μόνον αν είναι σ–ανοικτό.*

(ε) *Το $F \subseteq X$ είναι ρ–κλειστό αν και μόνον αν είναι σ–κλειστό.*

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Απλό από την υπόθεση και την αρχή της μεταφοράς για τις I και I^{-1}.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$. Αφού η I είναι συνεχής, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $I(B_\rho(x, \delta_1)) \subseteq B_\sigma(I(x), \varepsilon)$ ή ισοδύναμα $B_\rho(x, \delta_1) \subseteq B_\sigma(x, \varepsilon)$. Όμοια, αφού η I^{-1} είναι συνεχής υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε $B_\sigma(x, \delta_2) \subseteq B_\rho(x, \varepsilon)$.

(γ) $\Rightarrow$ (δ). Υποθέτουμε ότι το G είναι ρ–ανοικτό. Θα δείξουμε ότι είναι σ–ανοικτό. Αν $x \in G$, αφού το G είναι ρ–ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq G$. Από την υπόθεση υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B_\sigma(x, \delta) \subseteq B_\rho(x, \varepsilon)$. Τελικά, $B_\sigma(x, \delta) \subseteq G$. Αφού το $x \in G$ ήταν τυχόν, το G είναι σ–ανοικτό. Όμοια δείχνουμε την άλλη κατεύθυνση.

(δ) $\Rightarrow$ (ε). Απλό: θεωρούμε το συμπλήρωμα του F και εφαρμόζουμε την υπόθεση ότι ισχύει το (δ).

(ε)$\Rightarrow$ (α). Έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Θα δείξουμε ότι $x_n \xrightarrow{\sigma} x$. Αν δεν συμβαίνει αυτό, τότε υπάρχουν $\varepsilon_0 > 0$ και υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $\sigma(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon_0$ για $n = 1, 2, \ldots$. Θεωρούμε το σύνολο $F = \{y \in X : \sigma(y, x) \geq \varepsilon_0\}$. Τότε το F είναι σ–κλειστό και από την υπόθεση έπεται ότι είναι ρ–κλειστό. Επιπλέον, έχουμε $x_{k_n} \in F$ (εκ κατασκευής) για $n = 1, 2, \ldots$ και $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$. Έπεται ότι $x \in F$, άρα $\sigma(x, x) \geq \varepsilon_0$, άτοπο. Συνεπώς, $x_n \xrightarrow{\sigma} x$. Όμοια δείχνουμε την άλλη κατεύθυνση. □

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, αν στο ίδιο σύνολο έχουμε δύο ισοδύναμες μετρικές τότε οι δύο μετρικοί χώροι που προκύπτουν είναι όμοιοι αφού έχουν ακριβώς τα ίδια ανοικτά σύνολα. Λέμε ότι οι ισοδύναμες μετρικές παράγουν ακριβώς *την ίδια τοπολογία*.

Πρόταση 4.3.6. *Αν ρ είναι μια μετρική στο σύνολο X, τότε υπάρχει ισοδύναμη μετρική σ στο X η οποία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τη μετρική $\sigma : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\sigma(x, y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, $x, y \in X$. Η σ είναι φραγμένη μετρική και $\rho \sim \sigma$, αφού $\sigma(x_n, x) \to 0$ αν και μόνον αν $\rho(x_n, x) \to 0$. □

4.3.3 Ομοιομορφισμοί

Ορισμός 4.3.7 (ομοιομορφισμός). Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Η f λέγεται *ομοιομορφισμός* (*homeomorphism*) αν είναι 1-1, επί και αμφισυνεχής. Τότε, οι μετρικοί χώροι (X, ρ) και (Y, σ) λέγονται *ομοιομορφικοί* και γράφουμε $X \overset{\text{hom}}{\sim} Y$ ή $X \simeq Y$.

Παρατηρήσεις 4.3.8. (α) Η σχέση ομοιομορφισμού μεταξύ μετρικών χώρων είναι σχέση ισοδυναμίας.

(β) Έστω ρ και σ δύο μετρικές στο σύνολο X. Αν οι ρ, σ είναι ισοδύναμες, τότε οι μετρικοί χώροι (X, ρ) και (X, σ) είναι ομοιομορφικοί. Το αντίστροφο δεν ισχύει: μπορούμε να βρούμε σύνολο X και μετρικές ρ, σ στο X ώστε οι χώροι (X, ρ) και (X, σ) να είναι ισομετρικοί, αλλά οι ρ, σ να μην είναι ισοδύναμες. Θεωρούμε το σύνολο $X = c_{00}$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών και ορίζουμε τη συνάρτηση $T : c_{00} \to c_{00}$ με

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots) = (x_1, 2x_2, \ldots, nx_n, 0, \ldots).$$

Μέσω του T ορίζουμε μια νέα νόρμα στον c_{00} ως εξής: $\|y\|_T = \|Ty\|_\infty$ για $y \in c_{00}$. Τότε, οι χώροι $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ και $(c_{00}, \|\cdot\|_T)$ είναι ισομετρικοί (μέσω της T) αλλά οι μετρικές που επάγουν οι νόρμες δεν είναι ισοδύναμες στον c_{00} (άσκηση).

Πρόταση 4.3.9. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνάρτηση 1-1 και επί. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι ομοιομορφισμός.*

(β) *Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X και $x \in X$, τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ αν και μόνον αν $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$.*

(γ) *Το $G \subseteq X$ είναι ρ–ανοικτό αν και μόνον αν το $f(G) \subseteq Y$ είναι σ–ανοικτό.*

(δ) *Το $F \subseteq X$ είναι ρ–κλειστό αν και μόνον αν το $f(F) \subseteq Y$ είναι σ–κλειστό.*

(ε) *Η $d(x, y) = \sigma(f(x), f(y))$ ορίζει μετρική στο X ισοδύναμη με την ρ.*

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

Πρόταση 4.3.10. *Κάθε μετρικός χώρος (X, ρ) είναι ομοιομορφικός με έναν φραγμένο μετρικό χώρο.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την πρόταση 4.3.6 και την παρατήρηση 4.3.8(β). □

Θεώρημα 4.3.11. *Κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος εμφυτεύεται[1] στον κύβο του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$.*

Απόδειξη. Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Θα δείξουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $F : X \to \mathcal{H}^\infty$ η οποία είναι 1-1 και η $F^{-1} : F(X) \to X$ είναι επίσης συνεχής. Τότε, $X \simeq F(X) \subseteq \mathcal{H}^\infty$.

Θυμίζουμε ότι ο $\mathcal{H}^\infty$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων $y : \mathbb{N} \to [-1, 1]$ με τη μετρική $d(y, y') = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}|y(n) - y'(n)|$.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι για τον (X, ρ) ισχύει $\rho(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X$ (αυτό μας το εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση). Έστω $D = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Ορίζουμε την απεικόνιση $F : X \to \mathcal{H}^\infty$ με $F(x) = y$ όπου $y(n) = \rho(x, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός. Η F είναι 1-1.

Έστω $x, y \in X$ με $F(x) = F(y)$ δηλαδή, $\rho(x, x_n) = \rho(y, x_n)$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το D είναι πυκνό, υπάρχει $x_n \in D$ ώστε $\rho(y, x_n) = \rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, x_n) < \varepsilon$$

και αφού το ε είναι τυχόν συμπεραίνουμε ότι $\rho(x, y) = 0$, δηλαδή $x = y$.

Ισχυρισμός. Η F είναι συνεχής (μάλιστα Lipschitz).

Θα δείξουμε ότι ισχύει $d(F(x), F(y)) \leq \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$, όπου d η μετρική του κύβου του Hilbert. Έχουμε

$$d(F(x), F(y)) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}|\rho(x, x_n) - \rho(y, x_n)| \leq \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\rho(x, y) = \rho(x, y).$$

[1] Λέμε ότι ο X εμφυτεύεται στον Y αν υπάρχει $f : X \to Y$ συνεχής, 1-1 και η $f^{-1} : f(X) \to X$ είναι επίσης συνεχής. Με άλλα λόγια, αν ο X είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του Y.

Τέλος, δείχνουμε ότι η αντίστροφη της F είναι συνεχής δείχνοντας ότι αν $a_m, a \in X$ και $F(a_m) \xrightarrow{d} F(a)$ τότε $a_m \xrightarrow{\rho} a$ (το ζητούμενο προκύπτει από την αρχή της μεταφοράς).

Πράγματι: έστω ότι $F(a_m) \xrightarrow{d} F(a)$. Αφού η d είναι μετρική γινόμενο, έχουμε $\lim_{m\to\infty} F(a_m)(n) = F(a)(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\lim_{m\to\infty} \rho(a_m, x_n) = \rho(a, x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το D είναι πυκνό στο X, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(a, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Επιπλέον, αφού $\rho(a_m, x_{n_0}) \to \rho(a, x_{n_0})$ υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m \geq m_0$ τότε $\rho(a_m, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3} + \rho(a, x_{n_0})$. Συνεπώς, αν $m \geq m_0$ τότε

$$\rho(a_m, a) \leq \rho(a_m, x_{n_0}) + \rho(a, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3} + 2\rho(a, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

δηλαδή $a_m \xrightarrow{\rho} a$ καθώς $m \to \infty$. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα παράδειγμα ζεύγους μετρικών χώρων που είναι ομοιομορφικοί αλλά δεν είναι ισομετρικοί και με κάποιες παρατηρήσεις επί των ομοιομορφικών διαστημάτων στο $\mathbb{R}$.

Παραδείγματα 4.3.12. (α) Τα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και $\mathbb{R}$(και τα δύο με τη συνήθη μετρική) είναι ομοιομορφικά μέσω της συνάρτησης $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, όμως δεν είναι ισομετρικά διότι $\mathrm{diam}((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \pi$ ενώ $\mathrm{diam}(\mathbb{R}) = \infty$.

(β) Διαστήματα τα οποία «μοιάζουν» είναι ομοιομορφικά, δηλαδή $(0,1) \simeq (a,b)$, $[0,1) \simeq [a,b) \simeq (c,d]$ και $[0,1] \simeq [a,b]$. Για την πρώτη και τρίτη περίπτωση έχουμε τον ομοιομορφισμό $f(t) = a + t(b-a)$. Για τη δεύτερη έχουμε ότι η συνάρτηση $g : [0,1) \to (c,d]$ με $g(t) = d - t(d-c)$ είναι 1-1, επί και αμφισυνεχής.

(γ) Το $(0,1)$ *δεν* είναι ομοιομορφικό με το $[0,1)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f : [0,1) \to (0,1)$ ομοιομορφισμός και θέτουμε $c = f(0)$. Τότε $0 < c < 1$ και επίσης η $f|_{(0,1)} : (0,1) \to (0,1) \setminus \{c\}$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή τα $(0,1)$ και $(0,c) \cup (c,1)$ είναι ομοιομορφικά. Όμως τότε, το $\mathbb{R}$ είναι κι αυτό ομοιομορφικό με το $(0,c) \cup (c,1)$, δηλαδή το $\mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως ξένη ένωση δυο ανοικτών (μη τετριμμένων) υποσυνόλων του, το οποίο είναι άτοπο διότι στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν μη τετριμμένα υποσύνολα που να είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά (άσκηση από το 3ο Κεφάλαιο). □

4.4 Βασικά αποτελέσματα για συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους

4.4.1 Το λήμμα του Urysohn

Θεώρημα 4.4.1 (Urysohn). *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A, B κλειστά υποσύνολα του X με $A \cap B = \emptyset$. Τότε, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(α) $0 \leq f(x) \leq 1$ *για κάθε* $x \in X$.
(β) $f(x) = 0$ *για κάθε* $x \in A$.
(γ) $f(x) = 1$ *για κάθε* $x \in B$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, A)}{\mathrm{dist}(x, A) + \mathrm{dist}(x, B)},$$

η οποία είναι καλά ορισμένη διότι τα A, B είναι κλειστά και $A \cap B = \emptyset$ (αν ο παρονομαστής μηδενιζόταν για κάποιο $x \in X$ τότε θα είχαμε $x \in \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B$). Η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in X$. Τέλος, παρατηρούμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in B$. □

Ορισμός 4.4.2. Έστω A, B δύο ξένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ).

(α) Τα A, B *διαχωρίζονται* αν υπάρχουν ανοικτά G, H ώστε $A \subseteq G$, $B \subseteq H$ και $G \cap H = \emptyset$.

(β) Τα A, B *διαχωρίζονται πλήρως* αν διαχωρίζονται από τα G, H όπως στο (α) και επιπλέον ισχύει $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$.

Πρόταση 4.4.3. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και E, F δύο ξένα κλειστά υποσύνολα του X. Τότε τα E, F διαχωρίζονται πλήρως.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα βασιστεί στο λήμμα του Urysohn. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in E$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in F$. Θέτουμε $U = (-1/3, 1/3)$ και $V = (2/3, 4/3))$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(α) Τα $G = f^{-1}(U)$, $H = f^{-1}(V)$ είναι ανοικτά στον X διότι η f είναι συνεχής.

(β) $E \subseteq G$, $F \subseteq H$.

(γ) Ισχύει ότι $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$. Πράγματι, αν $x \in \overline{G}$ θεωρούμε ακολουθία (x_n) στο G. Τότε, $f(x_n) \in U$ δηλαδή $f(x_n) < 1/3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την αρχή της μεταφοράς έχουμε $f(x_n) \to f(x)$, άρα $f(x) \leq 1/3$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι αν $y \in \overline{H}$ τότε $f(y) \geq 2/3$. Άρα, ισχύει $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$. □

4.4.2 Διαμερίσεις της μονάδας

Ορισμός 4.4.4. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$. Ο *φορέας* (*support*) της f είναι το σύνολο

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Θεώρημα 4.4.5 (διαμέριση της μονάδας). *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $U_1, \ldots, U_k$ ανοικτά υποσύνολα του X ώστε $X = U_1 \cup \cdots \cup U_k$. Τότε, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\phi_i : X \to [0, 1]$, $i = 1, \ldots, k$ με την ιδιότητα $\mathrm{supp}(\phi_i) \subseteq U_i$ για $i = 1, \ldots, k$ και $\phi_1(x) + \cdots + \phi_k(x) = 1$ για κάθε $x \in X$.*

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.4.6. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $U_1,\ldots,U_k$ ανοικτά υποσύνολα του X ώστε $X = U_1 \cup \ldots \cup U_k$. Τότε, υπάρχουν ανοικτά σύνολα $W_1,\ldots,W_k$ ώστε $\overline{W_i} \subseteq U_i$ για $i = 1,\ldots,k$ και $X = W_1 \cup \cdots W_k$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει W_1 ανοικτό ώστε $\overline{W_1} \subseteq U_1$ και $X = W_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$. Κατόπιν, το συμπέρασμα έπεται με επαγωγή. Παρατηρούμε ότι το $X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_k)$ είναι κλειστό και είναι ξένο προς το κλειστό $X \setminus U_1$. Συνεπώς, διαχωρίζονται πλήρως. Ειδικότερα, υπάρχει ανοικτό W_1 ώστε $X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_k) \subseteq W_1$ και $\overline{W_1} \cap \overline{X \setminus U_1} = \emptyset$ (γιατί, αν W_2 είναι ανοικτό με $U_1^c \subseteq W_2$ και $\overline{W_1} \cap \overline{W_2} = \emptyset$, τότε $\overline{W_1} \cap \overline{X \setminus U_1} \subseteq \overline{W_1} \cap \overline{W_2} = \emptyset$). Άρα,

$$\overline{W_1} \subseteq X \setminus \overline{(X \setminus U_1)} \subseteq X \setminus (X \setminus U_1) = U_1.$$

Τέλος, ισχύει $X = W_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$. □

Απόδειξη του θεωρήματος. Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχουν ανοικτά σύνολα V_i, $i = 1,\ldots,k$ ώστε $\overline{V}_i \subseteq U_i$ και $X = \bigcup_{i=1}^k V_i$. Για τον ίδιο λόγο υπάρχουν ανοικτά W_i, $i = 1,\ldots,k$ ώστε $\overline{W}_i \subseteq V_i$ για $i = 1,\ldots,k$ και $X = \bigcup_{i=1}^k W_i$. Από το λήμμα του Urysohn, για κάθε $i = 1,\ldots,k$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_i : X \to [0,1]$ ώστε $f_i(x) = 1$ για κάθε $x \in \overline{W}_i$ και $f_i(x) = 0$ για κάθε $x \notin V_i$ για $i = 1,2,\ldots,k$. Παρατηρούμε τα εξής:

(i) $f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x) > 0$ για κάθε $x \in X$ διότι $X = W_1 \cup \cdots \cup W_k$ και $f_i(x) = 1$ για κάθε $x \in W_i$ για $i = 1,\ldots,k$.

(ii) $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq U_i$ για $i = 1,\ldots,k$, διότι αν $x \in X$ ώστε $f_i(x) \neq 0$ τότε $x \in V_i$. Άρα,

$$\mathrm{supp}(f_i) = \overline{\{x : f_i(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$$

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $\phi_i : X \to \mathbb{R}$ με $\phi_i = \frac{f_i}{f_1+\cdots+f_k}$. Αυτές είναι καλά ορισμένες και $\mathrm{supp}(\phi_i) \subseteq U_i$ (εξηγήστε γιατί). Τέλος, $\sum_{i=1}^k \phi_i(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. □

4.4.3 Ταλάντωση και σημεία συνέχειας

Ορισμός 4.4.7 (ταλάντωση). Έστω $(X,\rho),(Y,\sigma)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Αν $A \subseteq X$, η *ταλάντωση* της f στο A ορίζεται ως εξής:

$$\tau_f(A) = \mathrm{diam}(f(A)) = \sup\{\sigma(f(x),f(y)) : x,y \in A\}.$$

Παρατηρήσεις 4.4.8. (α) Από τον ορισμό, $0 \leq \tau_f(A) \leq +\infty$.

(β) Αν η f δεν είναι φραγμένη στο A τότε $\tau_f(A) = \infty$.

(γ) Αν $f \in \mathrm{Lip}(X,Y)$, τότε η ταλάντωση της f σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένη και μάλιστα

$$\tau_f(A) \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \mathrm{diam}(A).$$

(δ) Αν $f:(X,\rho)\to\mathbb{R}$ και $A\subseteq X$ τότε[2]

$$\tau_f(A)=\sup\{|f(a)-f(b)|:a,b\in A\}\leq 2\sup_{a\in A}|f(a)|.$$

(ε) Η συνάρτηση $\tau_f:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ είναι «αύξουσα»: αν $A\subseteq B$ τότε $\tau_f(A)\leq\tau_f(B)$.

Σταθεροποιούμε ένα σημείο $x\in X$ και ορίζουμε ως ταλάντωση της $f:X\to Y$ στο x την ποσότητα

$$\tau_f(x):=\inf\{\tau_f(V):V \text{ ανοικτό},\ x\in V\}.$$

Θα δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο αν και μόνον αν η ταλάντωσή της στο σημείο αυτό είναι μηδενική. Για το σκοπό αυτό δείχνουμε πρώτα ένα λήμμα το οποίο μας δίνει μια πιο εύχρηστη περιγραφή της $\tau_f(x)$.

Λήμμα 4.4.9. *Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ και $x\in X$. Τότε, για την ταλάντωση της f στο x ισχύει η ισότητα*

$$\tau_f(x)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\operatorname{diam}(f(B_\rho(x,\varepsilon)))=\lim_{\varepsilon\to0^+}\tau_f(B_\rho(x,\varepsilon)).$$

Απόδειξη. Έστω V ανοικτό με $x\in V$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon_0>0$ ώστε $B(x,\varepsilon_0)\subseteq V$. Από τη μονοτονία της ταλάντωσης έχουμε $\tau_f(B(x,\varepsilon_0))\leq\tau_f(V)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:(0,\infty)\to[0,\infty]$ με $g(\varepsilon)=\tau_f(B(x,\varepsilon))$ η οποία είναι αύξουσα. Άρα,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow0}\tau_f(B(x,\varepsilon))\leq\tau_f(B(x,\varepsilon_0))\leq\tau_f(V).$$

Έπεται ότι $\lim_{\varepsilon\downarrow0}\tau_f(B(x,\varepsilon))\leq\inf\{\tau_f(V):V \text{ ανοικτό}, x\in V\}=\tau_f(x)$.
Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρούμε ότι

$$\tau_f(x)\leq\tau_f(B(x,\varepsilon))$$

για κάθε $\varepsilon>0$, διότι το $B(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό και περιέχει το x. Άρα, $\tau_f(x)\leq\lim_{\varepsilon\downarrow0}\tau_f(B(x,\varepsilon))$. □

Θεώρημα 4.4.10. *Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ και $x\in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α) *Η f είναι συνεχής στο x.*
(β) *Η ταλάντωση της f στο x είναι μηδενική, δηλαδή $\tau_f(x)=0$.*

Απόδειξη. (α) ⇒ (β). Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta>0$ ώστε $f(B(x,\delta))\subseteq B\left(f(x),\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Από τη μονοτονία της διαμέτρου έχουμε

$$\operatorname{diam}(f(B(x,\delta)))\leq\operatorname{diam}\left(B\left(f(x),\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\leq\varepsilon.$$

Όμως,

$$\tau_f(x)=\lim_{r\downarrow0}\operatorname{diam}(f(B(x,r)))\leq\varepsilon$$

[2] Δείτε την Παρατήρηση 4.2.7 (δ).

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\tau_f(x) = 0$.

(β) $\Rightarrow$ (α). Υποθέτουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο x. Τότε, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in X$ ώστε $\rho(x_\delta, x) < \delta$ και $\sigma(f(x_\delta), f(x)) \geq \varepsilon_0$. Άρα, $\tau_f(B(x,\delta)) \geq \varepsilon_0$ για κάθε $\delta > 0$. Τότε,

$$\tau_f(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \tau_f(B(x,\delta)) \geq \varepsilon_0.$$

□

Θεώρημα 4.4.11. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Συμβολίζουμε με $D(f)$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f. Τότε, το $D(f)$ είναι F_σ–υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι ασυνεχής σε ένα σημείο $x \in X$ αν και μόνον αν $\tau_f(x) > 0$. Άρα, $D(f) = \{x \in X : \tau_f(x) > 0\}$ ή ισοδύναμα

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \tau_f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Θα δείξουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $A_n = \left\{x \in X : \tau_f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$ είναι κλειστό. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε σύνολο $A = \{x \in X : \tau_f(x) < a\}$ με $a > 0$ είναι ανοικτό. Έστω $x \in A$. Παρατηρούμε ότι

$$\tau_f(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \tau_f(B(x,\delta)) < a.$$

Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\tau_f(B(x,\delta)) < a$.

Ισχυρισμός. Ισχύει $B\left(x, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq A$ (άρα, το A είναι ανοικτό).

Πράγματι, έστω $y \in B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$. Παρατηρούμε ότι $B\left(y, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq B(x,\delta)$. Αυτό ισχύει διότι, αν $z \in B\left(y, \frac{\delta}{2}\right)$ τότε $\rho(z,x) \leq \rho(z,y) + \rho(y,x) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. Έτσι, προκύπτει ότι

$$\tau_f(y) \leq \tau_f\left(B\left(y, \frac{\delta}{2}\right)\right) \leq \tau_f(B(x,\delta)) < a,$$

δηλαδή $y \in A$. □

Πόρισμα 4.4.12. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Συμβολίζουμε με $C(f)$ το σύνολο των σημείων του X στα οποία η f είναι συνεχής. Τότε, το $C(f)$ είναι G_δ–υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Το $C(f)$ είναι το συμπλήρωμα ενός συνόλου F_σ, του $D(f)$. Συνεπώς, είναι σύνολο G_δ.

Ένας άλλος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι

$$C(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \tau_f(x) < \frac{1}{n} \right\}$$

και να θυμηθούμε ότι, σύμφωνα με τον ισχυρισμό του προηγούμενου θεωρήματος, τα σύνολα στο δεξιό μέλος είναι ανοικτά. □

4.5 Ασκήσεις

1. Έστω $f, g : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ δυο συνεχείς συναρτήσεις και D πυκνό υποσύνολο του (X, ρ). Δείξτε ότι:

(α) Το σύνολο $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό.

(β) Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$, τότε $f \equiv g$.

2. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ και $x_0 \in X$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$, $\rho(y, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

3. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Δείξτε ότι, αν για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(A') \subseteq (f(A))'$, τότε η f είναι συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

4. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Δείξτε ότι το G είναι ανοικτό αν και μόνο αν υπάρχουν συνεχής συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ και $V \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, ώστε $G = f^{-1}(V)$.

5. (α) Έστω $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $Z(f)$ το *σύνολο μηδενισμού* της f, δηλαδή

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

Δείξτε ότι: αν η f είναι συνεχής τότε το $Z(f)$ είναι κλειστό στον X.

(β) Έστω $F \subseteq X$. Δείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ ώστε $Z(f) = F$.

6. Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (Y, \delta)$, όπου δ η διακριτή μετρική στον Y. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι σταθερή.

7. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Συμβολίζουμε με χ_A την *χαρακτηριστική συνάρτηση του* A, όπου $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων συνέχειας της χ_A ειναι το $A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$, το σύνολο των σημείων ασυνέχειάς της είναι το $\mathrm{bd}(A)$ και ότι η χ_A είναι συνεχής αν και μόνο αν το A είναι ανοικτό και κλειστό (clopen).

8. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Το *γράφημα* της f είναι το σύνολο

$$\mathrm{Gr}(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in X\big\} \subseteq X \times Y.$$

Δείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής συνάρτηση, τότε το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ της f είναι κλειστό στον $X \times Y$ ως προς κάθε μετρική γινόμενο. Δώστε παράδειγμα το οποίο να δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

9. Μια συνάρτηση $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ λέγεται *τοπικά φραγμένη* (*locally bounded*) αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει περιοχή U_x του x ώστε η $f|_{U_x}$ να είναι φραγμένη.

(α) Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι τοπικά φραγμένη. Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
  (i) Η f είναι συνεχής.
  (ii) Η f είναι τοπικά φραγμένη και έχει κλειστό γράφημα.

10. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση και έστω A διαχωρίσιμο υποσύνολο του X (δηλαδή, ο (A, ρ_A) είναι διαχωρίσιμος). Δείξτε ότι το $f(A)$ είναι διαχωρίσιμο υποσύνολο του Y.

11. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση και D πυκνό υποσύνολο του X. Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς.

(α) Αν η $f|_D$ είναι φραγμένη, τότε η f είναι φραγμένη.

(β) Αν η $f|_D$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Αν η $f|_D$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.

12. Δώστε παράδειγμα φραγμένης, συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Μπορεί μια μη φραγμένη συνάρτηση να είναι ομοιόμορφα συνεχής;

13. Έστω (X, ρ), (Y, σ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: αν $A, B \subseteq X$ με $\mathrm{dist}(A, B) < \delta$, τότε $\mathrm{dist}(f(A), f(B)) < \varepsilon$.

14. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$ κλειστά και ξένα. Αν $f : X \to [0, 1]$ είναι η συνάρτηση του Urysohn, δηλαδή $f(x) = \frac{\mathrm{dist}(x,A)}{\mathrm{dist}(x,A)+\mathrm{dist}(x,B)}$, αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\mathrm{dist}(A, B) = 0$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Αν $\mathrm{dist}(A, B) = \delta > 0$, τότε η f είναι δ^{-1}–Lipschitz.

15. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$ με $\mathrm{dist}(A, B) > 0$ και $f_1 : A \to \mathbb{R}$, $f_2 : B \to \mathbb{R}$ (ομοιόμορφα) συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A \\ f_2(x), & x \in B \end{cases}$$

είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

16. Δώστε ένα παράδειγμα δυο ξένων υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου τα οποία διαχωρ΄-ιζονται, αλλά δε διαχωρίζονται πλήρως.

17. Έστω F μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : F \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in F$.

18. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, απόδειξτε ότι η f επεκτείνεται σε μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $F : \overline{A} \to \mathbb{R}$.

19. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ ομοιομορφισμός. Δείξτε ότι ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο (Y, σ) είναι διαχωρίσιμος.

20. Εξετάστε αν ισχυουν τα παρακάτω.

(α) Το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$.

(β) Το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$.

(γ) Το $\mathbb{Q}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$.

(δ) Το $\mathbb{Z}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}$.

21. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Η f λέγεται *ανοικτή* αν για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ το $f(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Ανάλογα, η f λέγεται *κλειστή* αν για κάθε κλειστό $F \subseteq X$ το $f(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y.

(α) Δώστε παράδειγμα: συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι ανοικτή, ανοικτής συνάρτηση-ς η οποία δεν είναι συνεχής, συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι κλειστή, κλειστής συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής.

(β) Αν η $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ είναι 1-1 και επί, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα: (i) η f είναι ανοικτή, (ii) η f είναι κλειστή, (iii) η f^{-1} είναι συνεχής.

Συνεπώς, αν η f είναι συνεχής και ανοικτή (ή κλειστή) τότε είναι ομοιομορφισμός.

22. Έστω (X_i, d_i) , $i = 1, \ldots, m$ μετρικοί χώροι και $X = \prod_{i=1}^{m} X_i$ ο χώρος γινόμενο με τη μετρική $d = \sum_{i=1}^{m} d_i$. Η συνάρτηση $i-$*προβολή* είναι η $\pi_i : X \to X_i$ που ορίζεται ως εξής:

$$\pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m) = x_i.$$

Αποδείξτε ότι η π_i είναι συνεχής, επί και ανοικτή.

23. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Δείξτε ότι η f είναι ανοικτή αν και μόνο αν $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$ για κάθε $A \subseteq X$. Δώστε παράδειγμα μιας συνεχούς, ανοικτής συνάρτησης $f : X \to Y$ και κάποιου $A \subseteq X$ ώστε το $f(A^\circ)$ να περιέχεται γνήσια στο $(f(A))^\circ$.

Συμπληρωματικές ασκήσεις

24. Έστω (X,ρ), (Y,σ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Για κάθε $\delta \geq 0$ ορίζουμε το *μέτρο συνέχειας* (*modulus of continuity*) της f ως εξής:

$$\omega_f(\delta) = \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : d(x,y) \leq \delta,\ x, y \in X\}.$$

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\omega_f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ είναι αύξουσα, δηλαδή αν $0 \leq \delta_1 < \delta_2$ τότε $\omega_f(\delta_1) \leq \omega_f(\delta_2)$.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν ισχύει $\omega_f(\delta) \to 0$ καθώς $\delta \to 0^+$. [*Υπόδειξη.* Δείξτε ότι $\sigma(f(x), f(y)) \leq \omega_f(d(x,y))$ για κάθε $x, y \in X$].

25. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η ρ είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική στον X.

(β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι τελικά σταθερή.

(γ) Ο X δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

(δ) Για κάθε μετρικό χώρο Y, κάθε $f : X \to Y$ είναι συνεχής.

(ε) Η κλειστή θήκη κάθε ανοικτού συνόλου $G \subseteq X$ είναι ανοικτό σύνολο.

26. (α) Μια συνάρτηση $f : (X,\rho) \to \mathbb{R}$ λέγεται *κάτω ημισυνεχής* αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) \leq t\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \to x \in X$, ισχύει

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Δώστε παράδειγμα κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής.

(β) Μια συνάρτηση $f : (X,\rho) \to \mathbb{R}$ λέγεται *άνω ημισυνεχής* αν η $-f$ είναι κάτω ημισυνεχής. Διατυπώστε και αποδείξτε χαρακτηρισμούς της άνω ημισυνεχούς συνάρτησης, αντίστοιχους με τους χαρακτηρισμούς της κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης που περιγράφτηκαν στο (α).

27. Δίνονται οι μετρικοί χώροι $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ και ο χώρος γινόμενο $\prod_{i=1}^k X_i$ με μετρική γινόμενο την $d_\infty = \max\{d_i : 1 \leq i \leq k\}$. Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \to \prod_{i=1}^k X_i$ με $f = (f_1, \ldots, f_k)$, όπου $f_i : X \to X_i$ για $i = 1, \ldots, k$. Δείξτε τα εξής:

(α) Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν οι f_i, $i = 1, \ldots, k$ είναι συνεχείς.

(β) Η f είναι Lipschitz αν και μόνο αν κάθε f_i είναι Lipschitz.

(γ) Η f είναι ομοιομόρφα συνεχής αν και μόνο αν οι f_i, $i = 1, \ldots, k$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

(δ) Είναι σωστό ότι η f είναι ισομετρία αν και μόνο αν οι f_i είναι ισομετρίες;

(ε) Είναι σωστό ότι η f είναι ομοιομορφισμός αν και μόνο αν οι f_i είναι ομοιομορφισμοί;

28.* Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο μετρικοί χώροι (X, ρ), (Y, σ) οι οποίοι δεν είναι ομοιομορφικοί αλλά ικανοποιούν το εξής: υπάρχουν συναρτήσεις $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ οι οποίες είναι συνεχείς, 1-1 και επί.

Μέρος II

Πληρότητα και συμπάγεια

Κεφάλαιο 5

Πληρότητα

5.1 Πλήρεις μετρικοί χώροι

Ορισμός 5.1.1 (πλήρης μετρικός χώρος). Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται *πλήρης* (*complete*) αν κάθε ρ–βασική ακολουθία (x_n) στον X είναι ρ–συγκλίνουσα.

Παραδείγματα 5.1.2 (πλήρεις χώροι). (α) Κάθε διακριτός μετρικός χώρος (X,δ) είναι πλήρης. Πράγματι: αν (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X, τότε αυτή είναι τελικά σταθερή. Συνεπώς, συγκλίνει.

(β) Ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Στον Απειροστικό Λογισμό είδαμε ότι κάθε βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(γ) Ο $(\mathbb{R}^m,\rho_2)$, όπου ρ_2 η Ευκλείδεια μετρική, είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$. Γράφουμε $x_n=(x_n(1),\dots,x_n(m))$, όπου $x_n(i)\in\mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon>0$. Η (x_n) είναι βασική ακολουθία, επομένως υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε αν $n,s\geq n_0$ τότε

$$(*)\qquad \rho_2(x_n,x_s)=\left(\sum_{j=1}^{m}(x_n(j)-x_s(j))^2\right)^{1/2}<\varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $i=1,\dots,m$,

$$|x_n(i)-x_s(i)|\leq\left(\sum_{j=1}^{m}(x_n(j)-x_s(j))^2\right)^{1/2}.$$

Συνεπώς, αν $n,s\geq n_0$, τότε για κάθε $i=1,\dots,m$ χωριστά έχουμε

$$|x_n(i)-x_s(i)|<\varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι: για κάθε $i = 1, \ldots, m$ η ακολουθία $(x_n(i))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ έπεται ότι υπάρχουν $x(1), \ldots, x(m) \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x_n(i) \to x(i), \qquad i = 1, \ldots, m$$

καθώς το $n \to \infty$. *Ορίζουμε* $x = (x(1), \ldots, x(m)) \in \mathbb{R}^m$ και μένει να δείξουμε ότι $\rho_2(x_n, x) \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Επιστρέφουμε στην $(*)$: για κάθε $n, s \geq n_0$ έχουμε

$$\left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x_s(j))^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Σταθεροποιούμε $n \geq n_0$. Από την $\lim\limits_{s \to \infty} x_s(j) = x(j)$, $j = 1, \ldots, m$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x(j))^2 \right)^{1/2} &= \lim_{s \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x_s(j))^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{s \geq n_0} \left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x_s(j))^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

λόγω της $(*)$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\rho_2(x_n, x) = \left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x(j))^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\rho_2(x_n, x) \to 0$. $\square$

(γ) Έστω $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{k}$ πεπερασμένη ακολουθία μετρικών χώρων. Ο $(\prod_{i=1}^{k} X_i, \sum_{i=1}^{k} d_i)$ είναι πλήρης αν και μόνο αν οι (X_i, d_i) είναι πλήρεις για $i = 1, 2, \ldots, k$. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης στο προηγούμενο παράδειγμα.

(δ) Έστω $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μετρικών χώρων ώστε $d_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Θεωρούμε τον $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ με μετρική την

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n))$$

όπου $x = (x(1), \ldots, x(n), \ldots)$ και $y = (y(1), \ldots, y(n), \ldots) \in X$. Αν οι X_n είναι πλήρεις μετρικοί χώροι τότε και ο (X, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος. Η απόδειξη είναι επίσης παρόμοια με αυτήν που δώσαμε στο παράδειγμα (β) και αφήνεται για τις ασκήσεις.

(ε) Ο *χώρος του Baire* είναι ο $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ όπου

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\eta(x,y)}}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

και $\eta(x,y) = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$ με $x = (x_n), y = (y_n)$. Ο χώρος του Baire είναι πλήρης μετρικός χώρος (άσκηση).

Παραδείγματα 5.1.3 (μη πλήρεις χώροι). Στην §2.1.3 είδαμε παραδείγματα μετρικών χώρων στους οποίους υπάρχουν βασικές ακολουθίες που δεν συγκλίνουν.

(α) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, με μετρική την $d(x,y) = |x-y|$. Ο $(\mathbb{Q}, d)$ δεν είναι πλήρης: αυτό προκύπτει εύκολα αν θυμηθούμε ότι $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Αν $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τότε υπάρχει ακολουθία (q_n) στο $\mathbb{Q}$ ώστε $q_n \to \alpha$. Αφού η (q_n) συγκλίνει (στο $\mathbb{R}$) είναι βασική στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $\mathbb{Q}$. Όμως, δεν υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $|q_n - q| \to 0$, γιατί τότε θα είχαμε $q = \alpha$, το οποίο είναι άτοπο.

(β) Ο χώρος $(\mathbb{R}, \rho)$ με τη μετρική $\rho(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ δεν είναι πλήρης. Εξηγήσαμε ότι η ακολουθία $x_n = n$ είναι ρ-βασική αλλά δεν είναι ρ-συγκλίνουσα.

Ορισμός 5.1.4 (χώρος Banach). Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Ο X λέγεται χώρος *Banach* αν είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα, δηλαδή αν ο (X,d) όπου $d(x,y) = \|x-y\|$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Ολοι οι κλασικοί χώροι ακολουθιών που ορίσαμε στο πρώτο Κεφάλαιο είναι χώροι Banach: αποδεικνύουμε εδώ ότι ο ℓ_∞ και ο c_0 είναι πλήρεις. Η απόδειξη για τον ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ αφήνεται για τις ασκήσεις. Σε επόμενο Κεφάλαιο θα μελετήσουμε αναλυτικά τον $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ και, μεταξύ άλλων, θα δούμε ότι είναι πλήρης.

Πρόταση 5.1.5. *Εστω Γ μη κενό σύνολο. Ο χώρος $\ell_\infty(\Gamma)$ των φραγμένων συναρτήσεων $x : \Gamma \to \mathbb{R}$, με μετρική την*

$$d_\infty(x,y) = \sup\{|x(\gamma) - y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}$$

είναι πλήρης.

Απόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $\ell_\infty(\Gamma)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι βασική ακολουθία, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, s \geq n_0$ τότε $\sup\{|x_n(\gamma) - x_s(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \varepsilon$. Συνεπώς, αν $n, s \geq n_0$ τότε για κάθε $\gamma \in \Gamma$ ισχύει

$$(*) \qquad |x_n(\gamma) - x_s(\gamma)| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\gamma \in \Gamma$ η ακολουθία $(x_n(\gamma))_n$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Άρα, υπάρχουν $x(\gamma) \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} x_n(\gamma) = x(\gamma), \qquad \gamma \in \Gamma.$$

Ορίζεται έτσι μια συνάρτηση $x : \Gamma \to \mathbb{R}$ που σε κάθε $\gamma \in \Gamma$ αντιστοιχεί τον αριθμό $x(\gamma)$. Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $x \in \ell_\infty(\Gamma)$.

Για κάθε $\gamma \in \Gamma$, έχουμε $|x_n(\gamma) - x_s(\gamma)| \to |x_n(\gamma) - x(\gamma)|$ καθώς $s \to \infty$. Άρα, από την $(*)$ έπεται ότι

$$(**) \qquad |x_n(\gamma) - x(\gamma)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } n \geq n_0 \text{ και για κάθε } \gamma \in \Gamma.$$

Επομένως, για κάθε $\gamma \in \Gamma$,

$$|x(\gamma)| \leq |x_{n_0}(\gamma)| + \varepsilon \leq \|x_{n_0}\|_\infty + \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\sup_\gamma |x(\gamma)| \leq \|x_{n_0}\|_\infty + \varepsilon < \infty$, δηλαδή $x \in \ell_\infty(\Gamma)$. [1]

Επίσης από την $(**)$, έχουμε ότι, για κάθε $n \geq n_0$,

$$d_\infty(x_n, x) = \sup\{|x_n(\gamma) - x(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι τυχόν, δείξαμε ότι $x_n \to x$ ως προς την d_∞. □

Εφαρμόζοντας την πρόταση στην ειδική περίπτωση $\Gamma = \mathbb{N}$, έχουμε:

Πόρισμα 5.1.6. *Ο χώρος ℓ_∞ των φραγμένων ακολουθιών, με μετρική την*

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x(i) - y(i)| : i \in \mathbb{N}\}$$

είναι πλήρης.

Πρόταση 5.1.7. *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $F \subseteq X$. Το F είναι κλειστό στον X αν και μόνον αν ο $(F, \rho|_F)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του (X, ρ). Έστω (x_n) βασική ακολουθία στοιχείων του F. Τότε, η (x_n) είναι βασική ακολουθία και στον X και, αφού ο X είναι πλήρης, έπεται ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Αλλά, από την υπόθεση ότι το F είναι κλειστό, έπεται ότι $x \in F$. Άρα, ο F είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.

Αντίστροφα· έστω ότι ο F είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος. Θα δείξουμε ότι είναι κλειστός. Έστω $(y_n) \subseteq F$ με $y_n \to y \in X$. Αφού η (y_n) είναι συγκλίνουσα, είναι βασική ακολουθία και περιέχεται στον πλήρη μετρικό χώρο F. Άρα, συγκλίνει σε σημείο του F. Από τη μοναδικότητα του ορίου, αφού $y_n \to y$, έχουμε ότι $y \in F$. Έπεται ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

Εφαρμογή 5.1.8. Ο χώρος c_0 των μηδενικών ακολουθιών με τη μετρική που επάγεται από τον ℓ_∞ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

[1] Αλλιώς: η (x_n) είναι βασική, άρα φραγμένη. Αν $M = \sup_n \|x_n\|_\infty$, τότε για κάθε $\gamma \in \Gamma$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $|x_n(\gamma)| \leq M$ και συνεπώς $|x(\gamma)| \leq M$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$, δηλαδή $\|x\|_\infty \leq M < \infty$.

Απόδειξη. Ο c_0 είναι υπόχωρος του ℓ_∞. Για να δείξουμε ότι είναι πλήρης, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞.

Έστω $x = (x(i)) \in \overline{c_0}$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_n = (x_n(i)) \in c_0$ με $\|x_n - x\|_\infty \to 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in c_0$, δηλαδή ότι $\lim\limits_{i\to\infty} x(i) = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x - x_n\|_\infty < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $i \in \mathbb{N}$,

$$|x(i) - x_n(i)| < \varepsilon.$$

Η $x_{n_0} = (x_{n_0}(i))$ ανήκει στον c_0, άρα, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $i \geq i_0$,

$$|x_{n_0}(i)| < \varepsilon.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες βλέπουμε ότι, για κάθε $i \geq i_0$,

$$|x(i)| \leq |x(i) - x_{n_0}(i)| + |x_{n_0}(i)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Άρα, $x(i) \to 0$ όταν το $i \to \infty$, δηλαδή $x \in c_0$. □

5.2 Το θεώρημα του Cantor

Το θεώρημα του Cantor γενικεύει την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων στο πλαίσιο των μετρικών χώρων. Στην πραγματικότητα, η αρχή κιβωτισμού στο $\mathbb{R}$ οφείλεται στον Cantor, ενώ η εκδοχή του θεωρήματος στους μετρικούς χώρους αποδίδεται στον Fréchet. Παρ' όλα αυτά έχει επικρατήσει να φέρει το όνομα του πρώτου.

Λήμμα 5.2.1. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $\{A_n\}$ ακολουθία υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$. Τότε, το σύνολο $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ περιέχει το πολύ ένα στοιχείο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y \in X$ με $x \neq y$ και $x, y \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Αφού $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{diam}(A_n) < \rho(x, y)$. Άτοπο, διότι $x, y \in A_n$. □

Λήμμα 5.2.2. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων*

$$R_n = \{x_k : k \geq n\}$$

για $n = 1, 2, \ldots$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Η ακολουθία (x_n) είναι βασική.*

(β) $\mathrm{diam}(R_n) \to 0$ *καθώς το $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι η (x_n) είναι βασική. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m, n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Από τον ορισμό των R_n έπεται ότι $\mathrm{diam}(R_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Παρατηρούμε ότι η $\{R_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία ($R_1 \supseteq R_2 \supseteq \cdots$), άρα αν $n \geq n_0$ τότε

$$\mathrm{diam}(R_n) \leq \mathrm{diam}(R_{n_0}) < \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\operatorname{diam}(R_n) \to 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η ακολουθία των διαμέτρων $(\operatorname{diam}(R_n))$ είναι μηδενική. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\operatorname{diam}(R_{n_0}) < \varepsilon$. Αν $m, n \geq n_0$ τότε $x_n, x_m \in R_{n_0}$, οπότε

$$\rho(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(R_{n_0}) < \varepsilon$$

Συνεπώς, η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον (X, ρ). $\square$

Θεώρημα 5.2.3 (Cantor–Fréchet). *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο χώρος (X, ρ) είναι πλήρης.*

(β) *Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι πλήρης και θεωρούμε μια ακολουθία $\{F_n\}$ όπως στην υπόθεση. Αφού κάθε F_n είναι μη κενό, μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in F_n$ για κάθε n. Έτσι, σχηματίζουμε μια ακολουθία (x_n).

Γράφουμε $R_n = \{x_k : k \geq n\}$. Αφού η $\{F_n\}$ είναι φθίνουσα, έχουμε $R_n \subseteq F_n$. Άρα, ισχύει η ανισότητα $\operatorname{diam}(R_n) \leq \operatorname{diam}(F_n)$. Αφού $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, έπεται ότι $\operatorname{diam}(R_n) \to 0$ και από το προηγούμενο λήμμα η (x_n) είναι βασική. Ο (X, ρ) είναι πλήρης, συνεπώς υπάρχει $x \in X$ ώστε $\rho(x_n, x) \to 0$.

Δείχνουμε τώρα ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Τότε, η $(x_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}$ έχει όλους τους όρους της στο F_m και είναι υπακολουθία της (x_n). Επομένως, συγκλίνει κι αυτή στο x και επειδή το F_m είναι κλειστό έπεται ότι $x \in F_m$.

Από το λήμμα 5.2.1 το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ έχει το πολύ ένα στοιχείο, άρα έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει το (β). Έστω (x_n) μια βασική ακολουθία στον X. Θεωρούμε τα σύνολα $R_n = \{x_k : k \geq n\}$ όπως στο λήμμα 5.2.2. Τότε, τα R_n είναι μη κενά, σχηματίζουν φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του X και $\operatorname{diam}(R_n) \to 0$. Για να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση θεωρούμε τα $\overline{R}_n$ τα οποία είναι επιπλέον κλειστά. Γνωρίζουμε ότι $\operatorname{diam}(\overline{R}_n) = \operatorname{diam}(R_n) \to 0$. Έτσι, από την υπόθεση, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{R}_n = \{x\}$. Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x_n, x \in \overline{R}_n$, άρα

$$\rho(x_n, x) \leq \operatorname{diam}(\overline{R}_n) \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{\rho} x$. $\square$

Παρατηρήσεις 5.2.4. (α) Η υπόθεση ότι τα σύνολα F_n είναι κλειστά δεν μπορεί να παραλειφθεί. Στον πλήρη μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ η ακολουθία $G_n = (0, \frac{1}{n})$ είναι φθίνουσα και $\operatorname{diam}(G_n) = \frac{1}{n} \to 0$, αλλά $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. Παρατηρήστε ότι τα G_n δεν είναι κλειστά στο $\mathbb{R}$.

(β) Η υπόθεση ότι $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Στον πλήρη μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ τα σύνολα $E_n = [n, +\infty)$ είναι κλειστά και $E_n \supseteq E_{n+1}$ για $n = 1, 2, \ldots$, αλλά $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Παρατηρήστε ότι $\operatorname{diam}(E_n) = \infty$ για κάθε n.

(γ) Σύμφωνα με το θεώρημα 5.2.3, σε κάθε μετρικό χώρο που δεν είναι πλήρης, υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ και κενή τομή. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το μετρικό χώρο $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |\cdot|)$ και την ακολουθία κλειστών συνόλων $F_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \cap \mathbb{Q}^c$ τότε ισχύουν οι $F_n \supseteq F_{n+1}$ για $n = 1, 2, \dots$ και $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ καθώς το $n \to \infty$, αλλά $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

5.3 Το θεώρημα κατηγορίας του Baire

Σε αυτή την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Cantor για να αποδείξουμε το θεώρημα κατηγορίας του Baire. Το θεώρημα του Baire έχει πολλές εφαρμογές στη Συναρτησιακή Ανάλυση (όπως είναι η αρχή ομοιόμορφου φράγματος, το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης, το θεώρημα κλειστού γραφήματος). Εδώ θα δώσουμε μια γεύση από τις εφαρμογές του στην κλασική ανάλυση, παρουσιάζοντας το θεώρημα του Osgood και την απόδειξη του Banach για την ύπαρξη συνεχών και πουθενά παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Πριν όμως περάσουμε στη διατύπωση και την απόδειξη του θεωρήματος, κάνουμε κάποια σχόλια.

Σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ), αν έχουμε μια πεπερασμένη ακολουθία $G_1, G_2, \dots, G_m$ από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X, τότε το $\bigcap_{i=1}^{m} G_i$ είναι πυκνό (και φυσικά, ανοικτό). Αντίστοιχο αποτέλεσμα δεν ισχύει αν θεωρήσουμε άπειρα το πλήθος σύνολα. Για παράδειγμα, στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ θεωρούμε μια αρίθμηση (q_n) του $\mathbb{Q}$ και ορίζουμε τα σύνολα $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$. Τότε, τα G_n είναι ανοικτά και πυκνά στον $\mathbb{Q}$, αλλά η τομή τους είναι κενή. Αυτό συνδέεται με το γεγονός ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος. Το θεώρημα του Baire μας λέει ότι σε έναν πλήρη μετρικό χώρο, οποιαδήποτε αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών συνόλων είναι μη κενή (και μάλιστα πυκνό υποσύνολο του χώρου).

Θεώρημα 5.3.1 (Baire). *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και έστω (G_n) ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε, το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό στον X. Ειδικότερα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν ανοικτό σύνολο V στον X. Θα δείξουμε ότι $V \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \neq \emptyset$.

Αφού το G_1 είναι πυκνό, έχουμε $V \cap G_1 \neq \emptyset$. Το $V \cap G_1$ είναι ανοικτό, άρα υπάρχουν $0 < r_1 < 1$ και $x_1 \in V \cap G_1$ ώστε $\hat{B}(x_1, r_1) \subseteq V \cap G_1$.

Το σύνολο $B(x_1, r_1)$ είναι ανοικτό, άρα το σύνολο $G_2 \cap B(x_1, r_1)$ είναι μη κενό και ανοικτό. Υπάρχουν $x_2 \in G_2 \cap B(x_1, r_1)$ και $0 < r_2 < \frac{1}{2}$ ώστε

$$\hat{B}(x_2, r_2) \subseteq G_2 \cap B(x_1, r_1) \subseteq V \cap G_1 \cap G_2.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε μια ακολουθία από κλειστές μπάλες $\hat{B}(x_n, r_n)$ που ικανοποιούν τα εξής:

- $\operatorname{diam}(\hat{B}(x_n, r_n)) \leq \frac{2}{n}$

- $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq G_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$, άρα $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq \hat{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$ και
- $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq V \cap G_1 \cap \cdots \cap G_n$.

Από το θεώρημα του Cantor, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n)$. Τότε $x \in V \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $x \in V \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Πόρισμα 5.3.2. *Έστω G πυκνό και G_δ–υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε, το G είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ και ότι υπάρχουν G_n ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα G_n είναι πυκνά (διότι το G είναι πυκνό). Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $V_n = \mathbb{R} \setminus \{x_n\}$ είναι ανοικτό και πυκνό. Όμως,

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = (\mathbb{R} \setminus G) \cap G = \emptyset.$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα του Baire. □

Πόρισμα 5.3.3. *Το σύνολο των αρρήτων $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι F_σ–υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αν το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ήταν F_σ–υποσύνολο του $\mathbb{R}$ θα είχαμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όμως, το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και, σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, δεν μπορεί να είναι σύνολο G_δ. □

Πόρισμα 5.3.4. *Δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με σύνολο σημείων ασυνέχειας $D(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το πόρισμα 5.3.3 και το θεώρημα 4.4.11: για κάθε $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, το σύνολο $D(f)$ των σημείων ασυνέχειας της f είναι F_σ–υποσύνολο του X. □

Μια ισοδύναμη και πιο εύχρηστη μορφή του θεωρήματος του Baire είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 5.3.5 (Baire). *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και έστω F_n ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Τότε, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(F_k) \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mathrm{int}(F_n) = \emptyset$. Τότε, τα $G_n = X \setminus F_n$ είναι ανοικτά και πυκνά, διότι $\overline{X \setminus F_n} = X \setminus \mathrm{int}(F_n) = X$. Επίσης,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset.$$

Αυτό είναι άτοπο σύμφωνα με το θεώρημα 5.3.1. □

Από την προηγούμενη ισοδύναμη μορφή του θεώρηματος του Baire οδηγούμαστε στους επόμενους ορισμούς:

Ορισμός 5.3.6. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.

(α) Ένα υποσύνολο A του X λέγεται *πουθενά πυκνό* ή *αραιό* αν ισχύει $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

(β) Ένα υποσύνολο B του X λέγεται *πρώτης κατηγορίας* (στον X) αν γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών υποσυνόλων του X, δηλαδή αν υπάρχουν E_n, $n = 1, 2, \dots$ πουθενά πυκνά υποσύνολα του X, ώστε $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

(γ) Ένα υποσύνολο C του X λέγεται *δεύτερης κατηγορίας* (στον X) αν δεν είναι πρώτης κατηγορίας.

Με αυτή την ορολογία, το θεώρημα Baire διατυπώνεται ως εξής: *κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας (στον εαυτό του).*

5.3.1 Εφαρμογές του θεωρήματος του Baire

Θεώρημα 5.3.7 (Osgood). *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in [0,1]$ η ακολουθία $(f_n(t))$ είναι φραγμένη. Τότε, υπάρχουν $[a,b] \subseteq [0,1]$ και $M > 0$ ώστε, για κάθε $t \in [a,b]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f_n(t)| \leq M.$$

Δηλαδή, η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[a,b]$.

Απόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \{t \in [0,1] : \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leq m\}.$$

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Κάθε A_m είναι κλειστό: παρατηρήστε ότι

$$A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{t \in [0,1] : |f_n(t)| \leq m\}$$

και καθένα από τα σύνολα $\{t \in [0,1] : |f_n(t)| \leq m\}$ είναι κλειστό αφού κάθε f_n είναι συνεχής.

(ii) $[0,1] = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $t \in [0,1]$. Από την υπόθεση, η $(f_n(t))$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M_t > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leq M_t$. Υπάρχει $m = m(t) \in \mathbb{N}$ με $m \geq M_t$, και γι' αυτό το m έχουμε $t \in A_m$.

Ο $[0,1]$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, οπότε το θεώρημα του Baire μας εξασφαλίζει ότι κάποιο A_{m_0} έχει μη κενό εσωτερικό, δηλαδή υπάρχει διάστημα $[a,b] \subseteq A_{m_0}$. Όμως τότε, η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[a,b]$: για κάθε $t \in [a,b]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $|f_n(t)| \leq m_0$. □

Θεώρημα* 5.3.1. *Θεωρούμε το χώρο $\mathcal{C}([0,1])$ των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με μετρική την $d_\infty(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$ (σε επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι είναι πλήρης μετρικός χώρος). Το σύνολο M των $f \in \mathcal{C}([0,1])$ που δεν έχουν παράγωγο σε κανένα σημείο του $[0,1]$ είναι πυκνό στον $\mathcal{C}([0,1])$.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Baire και το εξής λήμμα:

Λήμμα* 5.3.1. *Για κάθε συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε συνεχή «πολυγωνική συνάρτηση» $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $d_\infty(f,g) < \varepsilon$.*

[Μια συνεχής συνάρτηση g λέγεται *πολυγωνική* αν το γράφημά της είναι πολυγωνική γραμμή, δηλαδή αν υπάρχει διαμέριση $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1\}$ του $[0,1]$ ώστε $g(t) = a_i t + b_i$ σε κάθε (t_{i-1}, t_i), $i = 1, \ldots, N$.]

Απόδειξη του λήμματος. Θα χρησιμοποιήσουμε την ομοιόμορφη συνέχεια της f: Για το δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $t, s \in [0,1]$ και $|t - s| < \delta$ τότε $|f(s) - f(t)| < \varepsilon/2$.

Βρίσκουμε φυσικό αριθμό N που ικανοποιεί την $1/N < \delta$ και χωρίζουμε το $[0,1]$ σε N ίσα τμήματα. Παίρνουμε δηλαδή τη διαμέριση $P = \big\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1\big\}$ με $t_i = \frac{i}{N}$. Ορίζουμε g έτσι ώστε να είναι γραμμική σε κάθε $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, N$ και στα άκρα κάθε υποδιαστήματος να συμπίπτει με την f:

$$g(t_i) = f(t_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Έστω $t \in [0,1]$. Υπάρχει δείκτης $1 \le i \le N$ ώστε $t_{i-1} \le t \le t_i$. Τότε,

$$(*) \qquad |f(t) - g(t)| \le |f(t) - f(t_i)| + |f(t_i) - g(t)|.$$

Όμως $|t - t_i| < \delta$ άρα $|f(t) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ και, από τη γραμμικότητα της g στο $[t_{i-1}, t_i]$ και το γεγονός ότι $|t_i - t_{i-1}| = \frac{1}{N} < \delta$, βλέπουμε ότι

$$|f(t_i) - g(t)| = |g(t_i) - g(t)| \le |g(t_i) - g(t_{i-1})| = |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιστρέφοντας στην $(*)$ βλέπουμε ότι $|f(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Αφού το t ήταν τυχόν, $d_\infty(f,g) < \varepsilon$. □

Απόδειξη του θεωρήματος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$D_n = \Big\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) : \forall t \in [0,1]\ \exists y \in \big(t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}\big) \cap (0,1) : |f(y) - f(t)| > n|y - t| \Big\}.$$

Ισχυρισμός. Κάθε $f \in \bigcap_{n=1}^\infty D_n$ είναι συνεχής, πουθενά παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Απόδειξη. Έστω $f \in \bigcap_{n=1}^\infty D_n$. Για κάθε $t \in [0,1]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $y_n = y_n(t) \in (0,1)$ ώστε $|t - y_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(y_n) - f(t)| > n|y_n - t|$. Αφού $y_n \neq t$, $y_n \to t$ και

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(y_n) - f(t)}{y_n - t} \right| = \infty,$$

η $f'(t)$ δεν υπάρχει. $\square$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ είναι πυκνό στον $\mathcal{C}([0,1])$, και, σύμφωνα με το Θεώρημα του Baire, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε D_n είναι ανοικτό και πυκνό.

Ισχυρισμός. Κάθε D_n είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{C}([0,1])$.

Απόδειξη. Είναι πιο εύκολο να δείξουμε ότι το συμπλήρωμα D_n^c του D_n είναι κλειστό. Έστω $f_k \in D_n^c$ και $f_k \to f$ ως προς την d_∞.

Αφού $f_k \in D_n^c$, υπάρχει $t_k \in [0,1]$ ώστε, για κάθε $y \in (0,1)$ με $|y-t_k| < 1/n$ να ισχύει $|f(y) - f(t_k)| \leq n|y - t_k|$.

Αφού $t_k \in [0,1]$, υπάρχουν $t \in [0,1]$ και υπακολουθία (t_{k_m}) της (t_k) με $t_{k_m} \to t$. Θα δείξουμε ότι αν $y \in (0,1)$ και $|y-t| < 1/n$ τότε $|f(y)-f(t)| \leq n|y-t|$ (συνεπώς, $f \in D_n^c$.)

Έστω $\varepsilon > 0$ και $y \in (0,1)$ με $|y-t| < 1/n$. Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $y_{k_m} = y + (t_{k_m} - t)$, τότε $y_{k_m} \to y$. Άρα, για μεγάλα m έχουμε $y_{k_m} \in (0,1)$ και $|y_{k_m} - t_{k_m}| = |y-t| < 1/n$. Συνεπώς, αφού $f_{k_m} \in D_n^c$,

$$|f_{k_m}(y_{k_m}) - f_{k_m}(t_{k_m})| \leq n|y-t|.$$

(ii) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και $t_{k_m} \to t$. Επίσης, $y_{k_m} - y = t_{k_m} - t \to 0$. Άρα, για μεγάλα m ισχύουν οι

$$|f(t) - f(t_{k_m})| < \varepsilon \text{ και } |f(y) - f(y_{k_m})| < \varepsilon.$$

(iii) Πάλι για μεγάλα m, $d_\infty(f_{k_m}, f) < \varepsilon$ (διότι $f_{k_m} \to f$).

Παίρνουμε m τόσο μεγάλο που να ικανοποιούνται τα (i), (ii) και (iii), και γράφουμε

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(t)| &\leq |f(y) - f(y_{k_m})| + |f(y_{k_m}) - f_{k_m}(y_{k_m})| + |f_{k_m}(y_{k_m}) - f_{k_m}(t_{k_m})| \\
&\quad + |f_{k_m}(t_{k_m}) - f(t_{k_m})| + |f(t_{k_m}) - f(t)| \\
&< \varepsilon + d(f, f_{k_m}) + n|y-t| + d(f_{k_m}, f) + \varepsilon \\
&< n|y-t| + 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $|f(y) - f(t)| \leq n|y-t|$. Αυτό ισχύει για το τυχόν $y \in (0,1)$ με $|y-t| < 1/n$, άρα $f \in D_n^c$. $\square$

Ισχυρισμός. Κάθε D_n είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{C}([0,1])$.

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{C}([0,1])$ και έστω $\varepsilon > 0$. Από το λήμμα, υπάρχει $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, πολυγωνική, ώστε $d_\infty(f,g) < \varepsilon/2$. Συνεπώς, αρκεί να βρούμε $h \in D_n$ ώστε $d_\infty(g,h) < \varepsilon/2$.

Η g είναι πολυγωνική, δηλαδή υπάρχουν $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ ώστε η g να έχει σταθερή παράγωγο σε κάθε (t_{i-1}, t_i). Έστω l_i η κλίση της g στο (t_{i-1}, t_i).

Ορίζουμε μια μικρή «οδοντωτή» συνάρτηση $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε: (i) $0 \leq w(t) < \varepsilon/2$ στο $[0,1]$ και (ii) οι κλίσεις της w είναι (κατ' απόλυτη τιμή ίσες και) μεγαλύτερες από $Q = n + \max\{|l_j| : j = 1, \ldots, N\}$. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: χωρίζουμε το $[0,1]$ σε διαδοχικά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\varepsilon/2Q$, ορίζουμε την w να παίρνει εναλλάξ τις τιμές 0 και $\varepsilon/2$ στα άκρα αυτών των διαστημάτων, και επεκτείνουμε την w σε πολυγωνική συνάρτηση. Θέτουμε $h = g + w$, οπότε

$$d_\infty(g,h) = \max_{t\in[0,1]} |w(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι $h \in D_n$. Έστω $t \in [0,1]$. Υπάρχει δείκτης $i \leq N$ για τον οποίο $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Επιλέγουμε $|s| < 1/n$ τόσο μικρό ώστε στο διάστημα με άκρα τα $t, t+s$ οι g και w να έχουν και οι δύο σταθερές παραγώγους (το s μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό). Αν y είναι ένα σημείο του ανοικτού διαστήματος με άκρα $t, t+s$, έχουμε $y \in (0,1)$, $|y-t| < 1/n$ και

$$\begin{aligned} |h(y) - h(t)| &\geq |w(y) - w(t)| - |g(y) - g(t)| \\ &> \left(n + \max_j |l_j|\right) |y-t| - |l_i||y-t| \\ &= n|y-t|. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $h \in D_n$. □

5.4 Πλήρωση μετρικού χώρου*

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε με ποιόν τρόπο κάθε μετρικός χώρος X μπορεί να «γίνει» πυκνός μέσα σε έναν πλήρη μετρικό χώρο $\widetilde{X}$ ο οποίος είναι με μια έννοια μοναδικός και λέγεται *πλήρωση* του X. Ακριβέστερα θα αποδείξουμε το εξής: *Κάθε μετρικός χώρος εμφυτεύεται ισομετρικά και πυκνά σε έναν πλήρη μετρικό χώρο.*

Ορισμός 5.4.1 (πλήρωση μετρικού χώρου). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ένας πλήρης μετρικός χώρος (Y,σ) λέγεται *πλήρωση* του X αν υπάρχει ισομετρία $T : X \to Y$ για την οποία ο $T(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του Y.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι κάθε μετρικός χώρος έχει μια πλήρωση.

Θεώρημα 5.4.2 (ύπαρξη πλήρωσης). *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε, υπάρχουν πλήρης μετρικός χώρος $(\widetilde{X},\tilde{\rho})$ και $T : X \to \widetilde{X}$ ισομετρία ώστε ο $T(X)$ να είναι πυκνός υπόχωρος του $\widetilde{X}$.*

Θα περιγράψουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη βασίζεται στο επόμενο λήμμα (υπενθυμίζουμε ότι ο $\ell_\infty(X)$ είναι ο χώρος των φραγμένων συναρτησεων $f : X \to \mathbb{R}$. Αν εφοδιασθεί με την μετρική d_∞ όπου $d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$, είναι πλήρης μετρικός χώρος).

Λήμμα 5.4.3. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε υπάρχει ισομετρική εμφύτευση $T : (X,\rho) \to (\ell_\infty(X), d_\infty)$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε και σταθεροποιούμε ένα σημείο $a \in X$. Για κάθε $x \in X$, ορίζουμε την συνάρτηση $f_x : X \to \mathbb{R}$ από τον τύπο

$$f_x(t) = \rho(t,x) - \rho(t,a), \quad t \in X.$$

Παρατηρούμε ότι η f_x είναι φραγμένη στο X. Πράγματι, για κάθε $t \in X$ έχουμε $|f_x(t)| = |\rho(t,x) - \rho(t,a)| \leq \rho(x,a)$. Δηλαδή $f_x \in \ell_\infty(X)$ αφού $\|f_x\|_\infty \leq \rho(x,a)$. Ορίζεται λοιπόν μια απεικόνιση

$$T : X \to \ell_\infty(X) \text{ με } x \mapsto f_x.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι ισομετρία. Πράγματι αν $x, y \in X$, τότε για κάθε $t \in X$ έχουμε $|f_x(t) - f_y(t)| = |\rho(t,x) - \rho(t,y)| \leq \rho(x,y)$, άρα $\sup\{|f_x(t) - f_y(t)| : t \in X\} \leq \rho(x,y)$ και $\sup\{|f_x(t) - f_y(t)| : t \in X\} \geq |f_x(y) - f_y(y)| = \rho(x,y)$, οπότε ισχύει ισότητα. Δηλαδή

$$d_\infty(T(x), T(y)) = \rho(x,y).$$

□

Απόδειξη του θεωρήματος 5.4.2. Ονομάζουμε $\tilde{X}$ την κλειστή θήκη $\overline{T(X)}$ της εικόνας του X μέσα στον $(\ell_\infty(X), d_\infty)$ μέσω της απεικόνισης T του προηγουμένου Λήμματος. Η T είναι ισομετρία και η εικόνα της, $T(X)$, είναι από την κατασκευή της πυκνή στον $\tilde{X}$. Όμως ο $\tilde{X}$ είναι κλειστός υπόχωρος του πλήρους μετρικού χώρου $(\ell_\infty(X), d_\infty)$ και συνεπώς με την επαγόμενη μετρική είναι πλήρης μετρικός χώρος. □

Δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος 5.4.2. Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει σε τρία βήματα.

(i) *Ορισμός του* $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο των βασικών ακολουθιών του X: λέμε ότι οι βασικές ακολουθίες (x_n) και (x'_n) είναι ισοδύναμες και γράφουμε $(x_n) \sim (x'_n)$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\sim$ είναι όντως σχέση ισοδυναμίας. Παρατηρήστε επίσης ότι αν μια ακολουθία (y_n) συγκλίνει σε κάποιο $y \in X$ τότε είναι ισοδύναμη με τη σταθερή ακολουθία $z_n = y$:

$$y_n \to y \in X \text{ αν και μόνο αν } (y_n) \sim (y, y, \ldots).$$

Ορίζουμε $\tilde{X}$ να είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$. Συμβολίζουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας (τα στοιχεία του $\tilde{X}$) με $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \ldots$ Αν $(x_n) \in \tilde{x}$ τότε λέμε ότι η (x_n) είναι *αντιπρόσωπος της κλάσης* $\tilde{x}$.

Στη συνέχεια, ορίζουμε μετρική $\tilde{\rho}$ στον $\tilde{X}$. Έστω $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$. Θεωρούμε τυχόντες αντιπροσώπους $(x_n) \in \tilde{X}$, $(y_n) \in \tilde{Y}$, και θέτουμε

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι αυτό το όριο υπάρχει. Θυμηθείτε ότι οι $(x_n),(y_n)$ είναι βασικές ακολουθίες: από την τριγωνική ανισότητα,

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\leq \rho(x_n,x_m)+\rho(y_n,y_m)\to 0$$

καθώς $n,m\to\infty$. Αυτό σημαίνει ότι η $(\rho(x_n,y_n))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$, άρα το όριο $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$ υπάρχει.

Πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι η ποσότητα $\tilde{\rho}(\tilde{x},\tilde{y})$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των αντιπροσώπων $(x_n)\in\tilde{x}$ και $(y_n)\in\tilde{y}$. Αν όμως υποθέσουμε ότι $(x_n')\sim(x_n)$ και $(y_n')\sim(y_n)$ τότε από την

$$|\rho(x_n',y_n')-\rho(x_n,y_n)|\leq \rho(x_n,x_n')+\rho(y_n,y_n')\to 0$$

βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n',y_n')=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

Τέλος, πρέπει να ελέγξουμε ότι η $\tilde{\rho}$ ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής. Όλες οι ιδιότητες της μετρικής ελέγχονται άμεσα. Έστω $(x_n)\in\tilde{x}$, $(y_n)\in\tilde{y}$ και $(z_n)\in\tilde{z}$. Τότε, για παράδειγμα, αν $\tilde{\rho}(\tilde{x},\tilde{y})=0$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$, άρα $(x_n)\sim(y_n)$ και αυτό σημαίνει ότι $\tilde{x}=\tilde{y}$. Επίσης, η τριγωνική ανισότητα

$$\tilde{\rho}(\tilde{x},\tilde{y})\leq\tilde{\rho}(\tilde{x},\tilde{z})+\tilde{\rho}(\tilde{z},\tilde{y})$$

είναι άμεση συνέπεια της

$$\rho(x_n,y_n)\leq\rho(x_n,z_n)+\rho(z_n,y_n).$$

Έτσι, έχουμε ορίσει τον $(\tilde{X},\tilde{\rho})$.

(ii) *Πυκνή ισομετρική εμφύτευση του X στον $\tilde{X}$.* Σε κάθε $y\in X$ αντιστοιχεί φυσιολογικά η σταθερή ακολουθία $(y,y,\ldots)$, καθώς και η κλάση της, που είναι στοιχείο του $\tilde{X}$. Παρατηρήστε ότι αν $y\neq y'$ στον X τότε δεν μπορεί να ισχύει $(y,y,\ldots)\sim(y',y',\ldots)$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, διαφορετικά σημεία του X ορίζουν διαφορετικές κλάσεις στον $\tilde{X}$.

Ορίζουμε

$$W=\{\tilde{b}:b\in X\},$$

όπου $\tilde{b}$, $b\in X$, είναι η κλάση της σταθερής ακολουθίας $(b,b,\ldots)$. Παρατηρώντας ότι

$$\tilde{\rho}(\tilde{b_1},\tilde{b_2})=\lim_{n\to\infty}\rho(b_1,b_2)=\rho(b_1,b_2)$$

αν $b_1,b_2\in X$, βλέπουμε αμέσως ότι η απεικόνιση $T:(X,\rho)\to(W,\tilde{\rho})$ με $b\to\tilde{b}$ είναι ισομετρία επί.

Δείχνουμε ότι $\overline{W}^{\tilde{\rho}}=\tilde{X}$ (ο X εμφυτεύεται «πυκνά» στον $\tilde{X}$). Πράγματι, έστω $\tilde{x}\in\tilde{X}$ και έστω $(x_n)\in\tilde{x}$. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_m,x_n)<\varepsilon/2$ για κάθε $m\geq n$

(αυτό ισχύει διότι η (x_n) είναι βασική). Θεωρούμε το $\tilde{x}_n \in W$: δηλαδή, την κλάση της σταθερής ακολουθίας $(x_n, x_n, \ldots)$. Τότε,

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_m, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ελέγξαμε ότι, για κάθε $\tilde{x} \in \tilde{X}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $W \cap B_{\tilde{\rho}}(\tilde{x}, \varepsilon) \neq \emptyset$. Άρα, ο W είναι $\tilde{\rho}$–πυκνός στον $\tilde{X}$.

(iii) *Πληρότητα του* $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$. Έστω $(\tilde{x}_n)$ βασική ακολουθία στον $\tilde{X}$. Αφού ο W είναι $\tilde{\rho}$–πυκνός στον $\tilde{X}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $\tilde{y}_n \in W$ ώστε $\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) < 1/n$. Από την τριγωνική ανισότητα,

$$\begin{aligned} \rho(y_m, y_n) &= \tilde{\rho}(\tilde{y}_m, \tilde{y}_n) \leq \tilde{\rho}(\tilde{y}_m, \tilde{x}_m) + \tilde{\rho}(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) + \tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \\ &< \frac{1}{m} + \tilde{\rho}(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η (y_n) είναι βασική ακολουθία στον X. Έστω $\tilde{y}$ η κλάση ισοδυναμίας της (y_n). Τότε,

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}) \leq \tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) + \tilde{\rho}(\tilde{y}_n, \tilde{y}) < \frac{1}{n} + \tilde{\rho}(\tilde{y}_n, \tilde{y}).$$

Όμως,

$$\tilde{\rho}(\tilde{y}_n, \tilde{y}) = \lim_{m\to\infty} \rho(y_n, y_m),$$

άρα

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}) \leq \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} \rho(y_n, y_m).$$

Αν δοθεί $\varepsilon > 0$, επιλέγοντας αρκετά μεγάλο n έχουμε ότι η τελευταία ποσότητα γίνεται μικρότερη από ε (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, $\tilde{x}_n \xrightarrow{\tilde{\rho}} \tilde{y}$. Δηλαδή, ο $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ είναι πλήρης. $\square$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η πλήρωση ενός μετρικού χώρου που προκύπτει με την παραπάνω κατασκευή είναι μοναδική με την ακόλουθη έννοια.

Θεώρημα 5.4.4 (μοναδικότητα πλήρωσης). *Έστω $(\tilde{X}_1, \rho_1)$ και $(\tilde{X}_2, \rho_2)$ δύο πληρώσεις του ίδιου μετρικού χώρου (X, ρ). Τότε, υπάρχει $\tau : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, ισομετρία και επί. Μάλιστα, αν $T_i : X \to \tilde{X}_i$ $(i = 1, 2)$ είναι οι δύο ισομετρικές εμφυτεύσεις, τότε $\tau(T_1(x)) = T_2(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος 5.4.4 θα χρειαστούμε ένα θεώρημα επέκτασης για ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε πυκνά υποσύνολα μετρικών χώρων. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο:

Πρόταση 5.4.5. *Έστω (M,ρ) μετρικός χώρος και έστω D πυκνό υποσύνολο του M. Αν (N,σ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και $f : D \to N$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, τότε αυτή επεκτείνεται μοναδικά σε μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $F : M \to N$. Επιπλέον, αν η f είναι ισομετρία, τότε η F είναι ισομετρία.*

Απόδειξη. Θέλουμε να επεκτείνουμε την f συνεχώς, σε σημεία του $M \setminus D$. Έστω $x \in M$. Επειδή το D είναι πυκνό στο M υπάρχει ακολουθία (t_n) στοιχείων του D ώστε $t_n \xrightarrow{\rho} x$. Ειδικότερα, η (t_n) είναι ρ–βασική. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, απεικονίζει βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες, άρα η $(f(t_n))$ είναι σ–βασική. Επίσης, ο (N,σ) είναι πλήρης, οπότε υπάρχει $y \in N$ ώστε $f(t_n) \xrightarrow{\sigma} y$. Ορίζουμε λοιπόν την απεικόνιση $F : M \to N$ με $x \mapsto F(x) := \lim_{n\to\infty} f(t_n)$, όπου $(t_n) \subseteq D$ και $t_n \to x$.

Ισχυρισμός 1. Η F είναι καλά ορισμένη συνάρτηση.

Αν $(a_n),(b_n)$ είναι ακολουθίες στοιχείων του D με $a_n \to x$ και $b_n \to x$, θέτουμε $y_1 = \lim f(a_n), y_2 = \lim f(b_n)$. Όμως, $\rho(a_n,b_n) \to \rho(x,x) = 0$. Έπεται ότι

$$\sigma(y_1,y_2) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f(a_n),f(b_n)) = 0,$$

διότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως, η εικόνα y του x *δεν* εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας που προσεγγίζει το x.

Ισχυρισμός 2. Η F είναι επέκταση της f δηλαδή, $F|_D = f$.

Αν $t \in D$ τότε για την $t_n = t$, $n = 1,2,...$ ισχύει $t_n \to t$, άρα $F(t) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t)$.

Ισχυρισμός 3. Η F είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $t_1,t_2 \in D$ με $\rho(t_1,t_2) < \delta$, τότε $\sigma(f(t_1),f(t_2)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Έστω $x,y \in M$ με $\rho(x,y) < \frac{\delta}{3}$. Θα δείξουμε ότι $\sigma(F(y),F(x)) < \varepsilon$. Υπάρχει $a \in D$ ώστε $\rho(a,x) < \frac{\delta}{3}$ και $\sigma(F(x),f(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$ (εξηγήστε γιατί). Ομοίως, υπάρχει $b \in D$ ώστε $\rho(b,y) < \frac{\delta}{3}$ και $\sigma(F(y),f(b)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι $\rho(a,b) < \delta$. Συνεπώς, $\sigma(f(a),f(b)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Πάλι από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $\sigma(F(y),F(x)) < \varepsilon$.

Αν η f είναι ισομετρία τότε ισχύουν οι ισότητες

$$\sigma(F(x),F(y)) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f(a_n),f(b_n)) = \lim_{n\to\infty} \rho(a_n,b_n) = \rho(x,y)$$

όπου $(a_n),(b_n)$ είναι ακολουθίες στο D με $a_n \to x$ και $b_n \to y$.

Η μοναδικότητα της F είναι απλή. □

Απόδειξη του θεωρήματος 5.4.4. Έστω $T_1 : X \to \tilde{X}_1$ και $T_2 : X \to \tilde{X}_2$ οι ισομετρικές και πυκνές εμφυτεύσεις του X στις πληρώσεις του $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ αντιστοίχως. Τότε, έχουμε το διάγραμμα

$$\tilde{X}_1 \quad \xrightarrow{\tau} \quad \tilde{X}_2$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ T_1(X) & & T_2(X) \\ \uparrow T_1 & & \uparrow T_2 \\ X & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Θεωρούμε την προφανή συνάρτηση $T_2 \circ T_1^{-1} : T_1(X) \to T_2(X) \subset \tilde{X}_2$ η οποία είναι καλά ορισμένη διότι η T_1 είναι ισομετρία επί του $T_1(X)$ και η T_2 ισομετρία επί του $T_2(X)$. Επομένως, η $T_2 \circ T_1^{-1}$ είναι μια ισομετρία από το $T_1(X)$ στο $\tilde{X}_2$. Επιπλέον, το $T_1(X)$ είναι πυκνό στο $\tilde{X}_1$ άρα, από την πρόταση 5.4.4 έπεται ότι η ισομετρία $T_2 \circ T_1^{-1}$ επεκτείνεται σε μια ισομετρία τ σ' όλο τον $\tilde{X}_1$.

Ισχυρισμός. Η ισομετρία $\tau : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ είναι επί.

Έστω $y \in \tilde{X}_2$. Αφού το $T_2(X)$ είναι πυκνό στο $\tilde{X}_2$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X ώστε $T_2(x_n) \to y$. Άρα, η $(T_2(x_n))$ είναι βασική. Έπεται ότι η (x_n) είναι βασική και τελικά η $(T_1(x_n))$ είναι βασική. Συνεπώς, υπάρχει $x \in \tilde{X}_1$ ώστε $T_1(x_n) \to x$. Έτσι, παίρνουμε

$$\tau(x) = \lim_{n\to\infty} \tau(T_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} (T_2 \circ T_1^{-1}(T_1(x_n))) = \lim_{n\to\infty} (T_2(x_n)) = y.$$

Δηλαδή, η τ είναι επί του $\tilde{X}_2$. Ο τελευταίος ισχυρισμός ολοκληρώνει την απόδειξη. □

5.5 Το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach το οποίο εξασφαλίζει ότι κάθε συνάρτηση συστολής σε έναν πλήρη μετρικό χώρο έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Τα θεωρήματα σταθερού σημείου έχουν ποικίλες εφαρμογές στην Αριθμητική Ανάλυση, στην επίλυση αριθμητικών εξισώσεων και στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

Ορισμός 5.5.1 (σταθερό σημείο). Έστω $f : X \to X$ συνάρτηση και έστω $x_0 \in X$. Το x_0 λέγεται *σταθερό σημείο* της f αν ισχύει $f(x_0) = x_0$.

Συμβολίζουμε με $\mathrm{Fix}(f)$ το σύνολο των σταθερών σημείων της f.

Πρόταση 5.5.2. *Έστω $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, το $\mathrm{Fix}(f)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία σταθερών σημείων της f με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Θα δείξουμε ότι το x είναι σταθερό σημείο της f. Από τη συνέχεια της f έχουμε ότι $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$. Αλλά $f(x_n) = x_n \xrightarrow{\rho} x$. Από τη μοναδικότητα του ορίου έχουμε ότι $f(x) = x$, δηλαδή $x \in \mathrm{Fix}(f)$. □

Θεώρημα 5.5.3 (Banach). *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $T : X \to X$ συνάρτηση με την ιδιότητα: υπάρχει $0 < c < 1$ ώστε*

$$d(T(x), T(y)) \leq c \cdot \rho(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Τότε, υπάρχει μοναδικό $z \in X$ ώστε $T(z) = z$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε τυχόν $x \in X$. Θεωρούμε την ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις $x_0 = x$ και $x_{n+1} = T(x_n)$ για $n = 0, 1, \ldots$. Δηλαδή,

$$(x_n) = (x, T(x), T^2(x), \ldots).$$

Ισχυρισμός. Η $(T^n(x))_n$ είναι βασική ακολουθία.
Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$\rho(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq c \cdot \rho(T^{n-1}(x), T^n(x))$$

και επαγωγικά παίρνουμε

$$\rho(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq c^n \cdot \rho(x, T(x))$$

για $n = 0, 1, \ldots$ Έτσι, για κάθε $m > n$ έχουμε

(5.1)
$$\rho(T^n(x), T^m(x)) \leq (c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{m-1})\rho(x, T(x)) \leq \frac{c^n}{1-c}\rho(x, T(x)) \to 0$$

καθώς τα $m, n \to \infty$. Άρα, η $(T^n(x))_n$ είναι βασική. Από την πληρότητα του X έπεται ότι υπάρχει $z \in X$ ώστε $T^n(x) \to z$. Αλλά, η T είναι συνεχής διότι είναι Lipschitz. Συνεπώς, $T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) \to T(z)$. Από τη μοναδικότητα του ορίου έχουμε ότι $T(z) = z$.

Για τη μοναδικότητα του σταθερού σημείου παρατηρούμε ότι, αν υπάρχει κάποιο άλλο σταθερό σημείο z' της T, τότε

$$\rho(z, z') = \rho(T(z), T(z')) \leq c \cdot \rho(z, z')$$

Αφού $0 < c < 1$, έπεται ότι $\rho(z, z') = 0$, δηλαδή $z = z'$. Άρα, το z είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της T. □

Παρατηρήσεις 5.5.4. (α) Οι όροι $T^n(x)$ της ακολουθίας που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη λέγονται διαδοχικές προσεγγίσεις του στοιχείου z. Παρατηρούμε ότι $T^n(x) \to z$ ανεξάρτητα από την αρχική επιλογή του x και ότι το σφάλμα στη n-οστή προσέγγιση δεν ξεπερνά τον $\frac{c^n}{1-c}\rho(x, T(x))$. Πράγματι, αν $m > n$ τότε είδαμε ότι

$$\rho(T^n(x), T^m(x)) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot \rho(x, T(x)).$$

Αν αφήσουμε το $m \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\rho(T^n(x), z) = \lim_{m\to\infty} \rho(T^n(x), T^m(x)) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot \rho(x, T(x)).$$

(β) Η συνθήκη $\rho(T(x), T(y)) < \rho(x, y)$ εξασφαλίζει ότι η T έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο, δεν μπορεί όμως να εγγυηθεί την ύπαρξη ενός τουλάχιστον σταθερού σημείου. Η συνάρτηση $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = \log(1+e^x)$ ικανοποιεί την ασθενέστερη συνθήκη, διότι $|T'(x)| < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά δεν έχει σταθερό σημείο.

(γ) Η πληρότητα του (X,ρ) δεν μπορεί να παραλειφθεί: αν θεωρήσουμε την $f : (0,1) \to (0,1)$ με $f(x) = \frac{x}{2}$ τότε ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{3}|x-y|$ για κάθε $x, y \in (0,1)$, αλλά η f δεν έχει σταθερό σημείο. Παρατηρήστε ότι ο $((0,1), |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.

5.6 Ασκήσεις

1. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών θεωρούμε τις μετρικές $d(m,n) = |m-n|$ και $\rho(m,n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$.

(α) Δείξτε ότι ο $(\mathbb{N}, d)$ είναι πλήρης αλλά ο $(\mathbb{N}, \rho)$ δεν είναι πλήρης.

(β) Δείξτε ότι κάθε μονοσύνολο $\{n\}$ είναι d-ανοικτό και ρ-ανοικτό.

(γ) Δείξτε ότι οι μετρικές ρ και d είναι ισοδύναμες (άρα, οι $(\mathbb{N}, d)$ και $(\mathbb{N}, \rho)$ είναι ομοιομορφικοί).

2. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με μετρική την $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$ αλλά ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης.

3. (α) Δείξτε ότι ο $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$ είναι πλήρης.

(β) Δείξτε ότι ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(γ) Δείξτε ότι ο $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι πλήρης.

4. Θεωρούμε τον $\mathcal{C}([0,1])$ με μετρική την

$$\rho_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt.$$

Δείξτε ότι η $(f_n)_{n\geq 2}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & , \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 & , \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

είναι ακολουθία Cauchy ως προς την ρ_1 αλλά δεν είναι συγκλίνουσα.

5. Θεωρούμε δύο μετρικές d_1 και d_2 στο ίδιο σύνολο X. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$,

$$ad_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq bd_1(x,y).$$

Δείξτε ότι μια ακολουθία (x_n) στον X είναι βασική στον (X, d_1) αν και μόνο αν είναι βασική στον (X, d_2).

6. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι: αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στοιχείων του D συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$, τότε ο X είναι πλήρης.

7. Δείξτε ότι ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε κλειστή μπάλα

$$\hat{B}(x, \varepsilon) = \{z \in X : \rho(z, x) \leq \varepsilon\},$$

όπου $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του X.

8. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε *αριθμήσιμο*, κλειστό υποσύνολο του X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.

9. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε ακολουθία φραγμένης κύμανσης στον X είναι συγκλίνουσα.

10. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x_n : n = 1, 2, \dots\} \cup \{x\}$. Αποδείξτε ότι ο $(A, \rho|_A)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

11. Έστω ρ μετρική στο $\mathbb{R}$ ώστε: (i) ο $(\mathbb{R}, \rho)$ είναι πλήρης και (ii) η ρ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\mathrm{diam}_\rho([n, \infty)) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

12. Έστω X πλήρης χώρος με νόρμα και $\hat{B}(x_n, r_n)$ φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες. Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^\infty \hat{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset$.

13. Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X, με $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$, τότε

$$f\left(\bigcap_{n=1}^\infty E_n\right) = \bigcap_{n=1}^\infty f(E_n).$$

14. Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και G μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\sigma(x, y) = \rho(x, y) + \left| \frac{1}{\mathrm{dist}(x, X \setminus G)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(y, X \setminus G)} \right|$$

στο $G \times G$. Δείξτε ότι ο (G, σ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και ότι η σ είναι ισοδύναμη με την $\rho|_G$.

15. Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X ώστε το $X\setminus D$ να είναι επίσης πυκνό. Δείξτε ότι τουλάχιστον ένα από τα D, $X\setminus D$ δεν είναι σύνολο F_σ.

16. Έστω (G_n) ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $G=\bigcap_{n=1}^\infty G_n$ είναι υπεραριθμήσιμο.

17. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής σε ένα σύνολο πρώτης κατηγορίας αν και μόνο αν είναι συνεχής σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

18. (α) Έστω $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$ αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F_A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$F_A(x)=\sum_{\{n:a_n\le x\}}2^{-n}$$

είναι αύξουσα, συνεχής από δεξιά παντού και ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του A.

(β) Έστω A αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε το σύνολο των σημείων ασυνέχειας $D(g)$ της g να είναι το $\mathbb{R}\setminus A$.

(γ) Έστω E κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θέτουμε $G=E^\circ\cap\mathbb{Q}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=\chi_E(x)-\chi_G(x)$. Αποδείξτε ότι $D(h)=E$.

(δ) Έστω $E=\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ ένα F_σ–υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f_E:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f_E(x)=\begin{cases}\frac{1}{\min\{n:x\in E_n\}}, & x\in\mathbb{Q}\cap E\\ -\frac{1}{\min\{n:x\in E_n\}}, & x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap E\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus E\end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $D(f_E)=E$.

19. Δείξτε ότι: αν (L_n) είναι ακολουθία ευθειών στο $\mathbb{R}^2$ τότε $\mathrm{int}\,(\bigcup_{n=1}^\infty L_n)=\emptyset$.

20. Δείξτε ότι δεν υπάρχει μετρική d στο $\mathbb{Q}$ ώστε η d να είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ο $(\mathbb{Q},d)$ να είναι πλήρης.

21. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιοτητα

$$\text{για κάθε } x\in\mathbb{R},\quad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

22. Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και δυο συναρτήσεις $f,g:X\to X$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν υπάρχει $k\in\mathbb{N}$ ώστε η $f^k=f\circ\cdots\circ f$ να είναι συστολή, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $x\in X$ ώστε $f(x)=x$.

(β) Αν η f είναι συστολή και $f \circ g = g \circ f$, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f(x) = g(x) = x$.

23. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα $(a,b) \subseteq [0,\infty)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $y \in (a,b)$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(ny) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

24. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_x$, $f^{(n)}(x) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο.

25. Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος, E πυκνό και G_δ–υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι για κάθε ομοιομορφισμό $h : X \to X$ ισχύει $E \cap h(E) \neq \emptyset$.

Κεφάλαιο 6

Συμπάγεια

6.1 Ορισμός της συμπάγειας

Όπως θα φανεί στην αμέσως επόμενη παράγραφο, υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορεί κανείς να εισάγει την έννοια του *συμπαγούς μετρικού χώρου*. Ο πλέον εύληπτος είναι αυτός της ακολουθιακής συμπάγειας, ο οποίος γενικεύει την «ιδιότητα Bolzano–Weierstrass» των κλειστών διαστημάτων $[a, b]$ της πραγματικής ευθείας στο πλαίσιο των μετρικών χώρων. Θα μπορούσαμε να δώσουμε τον εξής ορισμό:

> Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται (ακολουθιακά) συμπαγής αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

Ξεκινάμε από έναν διαφορετικό ορισμό της συμπάγειας, ο οποίος μπορεί να δοθεί και στο γενικότερο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων και βασίζεται στην ιδέα ότι οι συμπαγείς μετρικοί χώροι έχουν από πολλές απόψεις τη «δομή ενός πεπερασμένου μετρικού χώρου». Στην επόμενη παράγραφο δείχνουμε ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι και ότι η συμπάγεια συνδέεται στενά με την έννοια της πληρότητας (στους λεγόμενους «ολικά φραγμένους» μετρικούς χώρους).

Ορισμός 6.1.1 (κάλυμμα). Έστω X τυχόν μη κενό σύνολο και $A \subseteq X$. Μια οικογένεια $(U_i)_{i\in I}$ υποσυνόλων του X λέγεται *κάλυμμα* του A αν

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Αν για κάποιο $J \subseteq I$ ισχύει $A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$, τότε λέμε ότι η $(U_i)_{i\in J}$ είναι *υποκάλυμμα του* $(U_i)_{i\in I}$ *για το* A.

Ορισμός 6.1.2 (ανοικτό κάλυμμα). Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $(U_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X. Η $(U_i)_{i\in I}$ λέγεται *ανοικτό κάλυμμα* του X, αν $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Γενικότερα, αν $A \subseteq X$, η $(U_i)_{i\in I}$ λέγεται ανοικτό κάλυμμα του A, αν $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.

Ορισμός 6.1.3 (συμπάγεια). Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ο X λέγεται *συμπαγής* (*compact*) αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Με άλλα λόγια, αν ισχύει το εξής:

> Για κάθε οικογένεια $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X που ικανοποιεί την $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ μπορούμε να βρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$.

Ένα υποσύνολο K του X λέγεται συμπαγές, αν είναι συμπαγής μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική. Αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε κάθε κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του K από ανοικτά υποσύνολα του X, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $(V_{i_j})_{j=1}^m$, ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_{i_j}$ (άσκηση).

Παραδείγματα 6.1.4. (α) Ένας διακριτός μετρικός χώρος (X, δ) είναι συμπαγής αν και μόνον αν το X είναι πεπερασμένο σύνολο.

(β) Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το ανοικτό κάλυμμα $\{(-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, τότε αυτό δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(γ) Το σύνολο $S_{\ell_\infty} = \{x = (x_n) \in \ell_\infty : \|x\|_\infty = 1\}$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του ℓ_∞. Πράγματι· θεωρούμε το ανοικτό κάλυμμα $\{B(x, 1/2) : x \in S_{\ell_\infty}\}$, το οποίο δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, διότι $\|e_n - e_m\|_\infty = 1$ για $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.

(δ) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και (x_n) στον X ώστε $x_n \to x$. Το σύνολο

$$K = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{x\}$$

είναι συμπαγές στον X. Πράγματι· έστω $(G_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του K. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in G_{i_0}$. Αφού $x_n \to x$ και το G_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in G_{i_0}$ για κάθε $n > N$. Για κάθε $1 \leq j \leq N$ υπάρχει $i_j \in I$ ώστε $x_j \in G_{i_j}$. Τότε, $K \subseteq \bigcup_{j=0}^N G_{i_j}$.

Πρόταση 6.1.5. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω K συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε, το K είναι κλειστό στον X.*

Απόδειξη. Έστω $y \in X \setminus K$. Για κάθε $x \in K$ θέτουμε $\delta_x := \frac{\rho(x,y)}{2}$. Οι μπάλες $\{B(x, \delta_x) : x \in K\}$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του K. Άρα, υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m B(x_j, \delta_{x_j})$. Έστω $\delta = \min\{\delta_{x_j} : j = 1, 2, \ldots, m\} > 0$. Τότε, $B(y, \delta) \subseteq X \setminus K$. Πράγματι, αν $x \in K$ τότε υπάρχει $1 \leq j \leq m$ ώστε $\rho(x, x_j) < \delta_{x_j}$. Άρα,

$$\rho(x, y) \geq \rho(y, x_j) - \rho(x_j, x) > 2\delta_{x_j} - \delta_{x_j} \geq \delta,$$

δηλαδή $x \notin B(y, \delta)$. Δείξαμε ότι το $X \setminus K$ είναι ανοικτό, συνεπώς το K είναι κλειστό. □

Πρόταση 6.1.6. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω K συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε, το K είναι φραγμένο υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε τυχόν $x \in X$ και θεωρούμε την οικογένεια $\{B(x,n) : n \in \mathbb{N}\}$. Παρατηρήστε ότι αυτή είναι ανοικτό κάλυμμα του X, άρα και του K:

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x,n).$$

Αφού το K είναι συμπαγές, υπάρχουν $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$K \subseteq B(x,n_1) \cup \cdots \cup B(x,n_m).$$

Αν θέσουμε $r = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$ έχουμε $B(x,n_j) \subseteq B(x,r)$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$, δηλαδή

$$K \subseteq B(x,r).$$

Συνεπώς, το K είναι φραγμένο. □

Πρόταση 6.1.7. *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και F κλειστό υποσύνολο του X. Τότε, το F είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω (U_i) ανοικτό κάλυμμα του F. Τότε η οικογένεια $\{X \setminus F\} \cup \{U_i : i \in I\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του X (εξηγήστε γιατί). Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_k \in I$ ώστε $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus F)$. Τότε, $F \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}$. □

6.2 Χαρακτηρισμός της συμπάγειας

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να χαρακτηρίσουμε τους συμπαγείς μετρικούς χώρους μέσω ακολουθιών. Όπως θα δούμε, ένας μετρικός χώρος (X,ρ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα **Bolzano–Weierstrass**: δηλαδή, αν κάθε άπειρο υποσύνολο A του X έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο X ($A' \neq \emptyset$). Στην πορεία θα δώσουμε άλλον έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό της συμπάγειας: ο (X,ρ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν είναι πλήρης και *ολικά φραγμένος*. Δίνουμε πρώτα τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 6.2.1 (ακολουθιακά συμπαγής χώρος). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ο X λέγεται *ακολουθιακά συμπαγής* (*sequentially compact*) αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

Ορισμός 6.2.2 (ολικά φραγμένος χώρος). Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται *ολικά φραγμένος* (*totally bounded*) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_m \in X$ ώστε

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon).$$

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος σημεία στο χώρο ώστε οι μπάλες με κέντρα αυτά τα σημεία και ακτίνα το δοσμένο $\varepsilon > 0$ να καλύπτουν το χώρο. Γενικότερα, αν (X,ρ) είναι μετρικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε το A λέγεται ολικά φραγμένο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x_1,\ldots,x_m \in X$ ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\varepsilon).$$

Με βάση τον ορισμό που δώσαμε, αν το $A \subseteq X$ είναι ολικά φραγμένο τότε κάθε $B \subseteq A$ είναι επίσης ολικά φραγμένο (εξηγήστε γιατί).

Παρατηρήστε επίσης ότι μπορούμε να απαιτήσουμε τα «κέντρα» x_i να ανήκουν στο A: πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το A είναι ολικά φραγμένο και ας θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $x_1,\ldots,x_m \in X$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\varepsilon/2)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι $B(x_i,\varepsilon/2)$ έχουν μη κενή τομή με το A (αλλιώς θα «διώχναμε» τις περιττές από αυτές). Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $a_i \in B(x_i,\varepsilon/2) \cap A$, $i = 1,\ldots,m$. Τότε, $a_1,\ldots,a_m \in A$ και $B(x_i,\varepsilon/2) \subseteq B(a_i,\varepsilon)$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(a_i,\varepsilon).$$

Παραδείγματα 6.2.3. (α) Ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ δεν είναι είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Αν ήταν, θα υπήρχαν $x_1 < x_2 < \cdots < x_k \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{k}(x_i-1,x_i+1) \subseteq (x_1-1,x_k+1)$, άτοπο.

(β) Ένας διακριτός μετρικός χώρος (X,δ) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνον αν το X είναι πεπερασμένο σύνολο (εξηγήστε γιατί).

(γ) Ο n–διάστατος κύβος του Hamming H_n και ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$, είναι ολικά φραγμένοι χώροι (άσκηση).

Θεώρημα 6.2.4 (χαρακτηρισμός της συμπάγειας). *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο (X,ρ) είναι συμπαγής.*

(ii) *Κάθε άπειρο υποσύνολο A του X έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο X (δηλαδή, $A' \neq \emptyset$).*

(iii) *Ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής.*

(iv) *Ο X είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.*

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii): Έστω A υποσύνολο του X το οποίο δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης στο X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon_x) \cap (A\setminus\{x\}) = \emptyset$. Θεωρούμε το ανοικτό κάλυμμα $\{B(x,\varepsilon_x) : x \in X\}$ του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1,\ldots,x_m \in X$ ώστε

$$X = B(x_1,\varepsilon_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_m,\varepsilon_{x_m}).$$

Τότε,

$$A = (A \cap B(x_1, \varepsilon_{x_1})) \cup \cdots \cup (A \cap B(x_m, \varepsilon_{x_m})).$$

Όμως, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, από την $B(x_i, \varepsilon_{x_i}) \cap (A \setminus \{x_i\}) = \emptyset$ συμπεραίνουμε ότι

$$A \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i}) \subseteq \{x_i\}.$$

Έπεται ότι

$$A \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$$

δηλαδή το A είναι πεπερασμένο σύνολο.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Έστω (x_n) ακολουθία στον X. Θα δείξουμε ότι η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ των όρων της (x_n). Αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε υπάρχουν $x \in A$ και δείκτες $k_1 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $x_{k_n} = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, η (x_n) έχει σταθερή υπακολουθία και το ζητούμενο ισχύει προφανώς.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι το σύνολο A των όρων της (x_n) είναι άπειρο. Τότε, υπάρχει $x \in X$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του A. Συνεπώς, σε κάθε περιοχή του x υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας (x_n) (διότι περιέχει άπειρα στοιχεία του A). Επιλέγοντας διαδοχικά $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα του x, μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών (k_n) ώστε $\rho(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n}$. Άρα, $x_{k_n} \to x$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Υποθέτουμε ότι ο (X, ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής.

1. *Ο X είναι πλήρης.* Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Από την υπόθεση, η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Τότε, $x_n \to x$ (γνωρίζουμε ότι, σε κάθε μετρικό χώρο, αν μια βασική ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία τότε είναι συγκλίνουσα).

2. *Ο X είναι ολικά φραγμένος.* Με απαγωγή σε άτοπο: αν ο X δεν είναι ολικά φραγμένος, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $u_1, \ldots, u_m \in X$ ισχύει

$$(*) \qquad X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B(u_j, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Χρησιμοποιώντας την $(*)$ ορίζουμε επαγωγικά ακολουθία (x_n) στον X ως εξής: επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in X$ και χρησιμοποιώντας την $(*)$ επιλέγουμε

$$x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon).$$

Παρατηρήστε ότι $\rho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει $x_1, \ldots, x_n$ έτσι ώστε, αν $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ και $i \neq j$ τότε $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. Τότε, χρησιμοποιώντας και πάλι την $(*)$, επιλέγουμε

$$x_{n+1} \in X \setminus B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

Παρατηρήστε ότι $\rho(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Κατ' αυτό τον τρόπο, ορίζεται ακολουθία (x_n) στον X με την εξής ιδιότητα: αν $n \neq m$ τότε $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Η ακολουθία (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, καταλήγουμε σε άτοπο.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι ο X δεν είναι συμπαγής. Τότε, υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $(U_i)_{i\in I}$ του X το οποίο δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ αλλά, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $i_1, \ldots, i_m \in I$ ισχύει

$$X \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}) \neq \emptyset.$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι ο X είναι ολικά φραγμένος, βρίσκουμε $x_{11}, \ldots, x_{1N_1} \in X$ ώστε

$$X = \bigcup_{j=1}^{N_1} B(x_{1j}, 1/2).$$

Ισχυρισμός. Υπάρχει $j_0 \in \{1, \ldots, N_1\}$ ώστε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $i_1, \ldots, i_m \in I$ ισχύει

$$B(x_{1j_0}, 1/2) \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}) \neq \emptyset.$$

[Πράγματι, αν κάθε $B(x_{1j}, 1/2)$ καλυπτόταν από πεπερασμένα το πλήθος σύνολα της οικογένειας $(U_i)_{i\in I}$ τότε και ο $X = \bigcup_{j=1}^{N_1} B(x_{1j}, 1/2)$ θα καλυπτόταν από πεπερασμένα το πλήθος σύνολα της οικογένειας $(U_i)_{i\in I}$, άτοπο].

Θέτουμε $x_1 := x_{1j_0}$. Παρατηρούμε ότι, αφού $B(x_1, 1/2) \subseteq X$, υπάρχουν $x_{21}, \ldots, x_{2N_2} \in X$ ώστε

$$B(x_1, 1/2) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_2} B(x_{2j}, 1/2^2).$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B(x_1, 1/2) \cap B(x_{2j}, 1/2^2) \neq \emptyset$ για κάθε $j = 1, \ldots, N_2$, αλλιώς παραλείπουμε εκείνες τις $B(x_{2j}, 1/2^2)$ που δεν χρησιμοποιούνται για την κάλυψη της $B(x_1, 1/2)$.

Όπως και στο προηγούμενο βήμα, βρίσκουμε $j_1 \in \{1, \ldots, N_2\}$ ώστε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $i_1, \ldots, i_m \in I$ ισχύει

$$B(x_{2j_1}, 1/2^2) \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}) \neq \emptyset.$$

Θέτουμε $x_2 := x_{2j_0}$. Παρατηρήστε ότι

$$\rho(x_1, x_2) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2}$$

διότι $B(x_1, 1/2) \cap B(x_2, 1/2^2) \neq \emptyset$ (παίρνουμε w στην τομή τους και εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα).

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο (η απόδειξη του επαγωγικού βήματος είναι όμοια με αυτήν του δεύτερου βήματος). Επαγωγικά, ορίζεται ακολουθία (x_n) με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $i_1, \ldots, i_m \in I$ ισχύει

$$B(x_n, 1/2^n) \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}) \neq \emptyset$$

(η $B(x_n, 1/2^n)$ δεν καλύπτεται από καμία πεπερασμένη υποοικογένεια της $(U_i)_{i\in I}$).

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\rho(x_n, x_{n+1}) < \frac{3}{2^{n+1}}.$$

Έχουμε δει ότι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n+1}} < \infty$$

εξασφαλίζει ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X. Έχουμε υποθέσει ότι ο X είναι πλήρης, άρα, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$.

Καταλήγουμε σε άτοπο ως εξής: αφού η $(U_i)_{i\in I}$ καλύπτει τον X, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in U_{i_0}$. Το U_{i_0} είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x,\delta) \subseteq U_{i_0}$. Βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/2^n < \delta/2$ και $\rho(x_n, x) < \delta/2$ (αυτό είναι δυνατό, διότι $x_n \to x$ και $1/2^n \to 0$). Τότε, για κάθε $z \in B(x_n, 1/2^n)$ έχουμε

$$\rho(z, x) \leq \rho(z, x_n) + \rho(x_n, x) < \frac{1}{2^n} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$B(x_n, 1/2^n) \subseteq B(x,\delta) \subseteq U_{i_0},$$

το οποίο είναι άτοπο αφού, από την κατασκευή που κάναμε, η $B(x_n, 1/2^n)$ δεν καλύπτεται από καμία πεπερασμένη υποοικογένεια της $(U_i)_{i\in I}$. □

Σχετικοί με την απόδειξη του θεωρήματος 6.2.4 είναι οι παρακάτω χαρακτηρισμοί του ολικά φραγμένου και του πλήρους μετρικού χώρου:

(i) Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνον αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει βασική υπακολουθία.

(ii) Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε άπειρο, ολικά φραγμένο υποσύνολο του X έχει σημείο συσσώρευσης.

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου περιγράφουμε εν συντομία την απόδειξη αυτών των δύο προτάσεων.

Λήμμα 6.2.5. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας (x_n) στο X. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Αν η (x_n) είναι βασική ακολουθία, τότε το A είναι ολικά φραγμένο.*

(β) *Αν το A είναι ολικά φραγμένο, τότε η (x_n) έχει βασική υπακολουθία.*

Απόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η (x_n) είναι βασική υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m, n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0} B(x_i, \varepsilon),$$

άρα το A είναι ολικά φραγμένο.

(β) Αφού το A είναι ολικά φραγμένο υπάρχουν $C_1^1, \ldots, C_{k_1}^1 \subseteq A$ με $\mathrm{diam}(C_i^1) \leq 1$ για $i = 1, \ldots, k_1$ και $A = \bigcup_{i=1}^{k_1} C_i^1$ (ως $\{C_i^1\}$ παίρνουμε τις τομές του A με πεπερασμένες το πλήθος ανοικτές μπάλες ακτίνας $1/2$ που η ένωσή τους καλύπτει το A). Επειδή το A περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας (σαν σύνολο βέβαια μπορεί να είναι πεπερασμένο) και τα C_i^1 είναι πεπερασμένα το πλήθος, κάποιο από αυτά περιέχει άπειρους όρους της (x_n)– έστω το C^1. Τότε, το C^1 είναι υποσύνολο του ολικά φραγμένου συνόλου A και περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας (x_n). Δουλεύοντας τώρα με το C^1 έχουμε ότι αυτό είναι ολικά φραγμένο, άρα μπορούμε να το καλύψουμε με πεπερασμένα το πλήθος υποσύνολά του $C_1^2, \ldots, C_{k_2}^2$ διαμέτρου μικρότερης ή ίσης με $\frac{1}{2}$. Δηλαδή, $C^1 = \bigcup_{i=1}^{k_2} C_i^2$ με $\mathrm{diam}(C_i^2) \leq \frac{1}{2}$ για $i = 1, \ldots, k_2$. Όπως πριν, το C^1 περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας (x_n) και, επειδή τα C_i^2 είναι πεπερασμένα το πλήθος, κάποιο από αυτά περιέχει άπειρους όρους (από αυτούς που περιέχει το C^1) της (x_n). Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του A, την $C^1 \supseteq C^2 \supseteq \ldots \supseteq C^n \supseteq \ldots$ με $\mathrm{diam}(C^n) \leq \frac{1}{n}$ για $n = 1, 2, \ldots$, όπου κάθε C^n περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας (x_n). Από κάθε C^n επιλέγουμε ένα στοιχείο x_{m_n} ώστε να σχηματιστεί υπακολουθία της (x_n) δηλαδή να ισχύει $m_1 < m_2 < \cdots < m_n < \cdots$. Αυτό μπορεί να γίνει, διότι κάθε C^n περιέχει άπειρους όρους της (x_n).

Ισχυρισμός. Η υπακολουθία (x_{m_n}) είναι βασική.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Αν $i, j \geq n_0$ τότε $C^i, C^j \subseteq C^{n_0}$ και άρα $x_{m_i}, x_{m_j} \in C^{n_0}$. Συνεπώς $\rho(x_{m_i}, x_{m_j}) \leq \mathrm{diam}(C^{n_0}) \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. □

Σημείωση 6.2.6. Η ακολουθία $x_n = (-1)^n$ έχει ολικά φραγμένο σύνολο όρων και δεν είναι βασική. Άρα, η εύρεση βασικής υπακολουθίας είναι το καλύτερο στο οποίο μπορούμε να ελπίζουμε.

Πρόταση 6.2.7. *Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνον αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει βασική υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο ως υποσύνολο του X και από το λήμμα 6.2.5(β) έπεται το ζητούμενο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε ακολουθία στον X έχει βασική υπακολουθία. Θα δείξουμε ότι ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος. Αν όχι, τότε υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in X$ να ισχύει $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_0) \neq \emptyset$. Επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in X$. Τότε, $X \setminus B(x_1, \varepsilon_0) \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $x_2 \in X$ ώστε $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$.

Όμοια, $X \setminus \bigcup_{i=1}^{2} B(x_i, \varepsilon_0) \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $x_3 \in X$ ώστε $\rho(x_3, x_i) \geq \varepsilon_0$ για $i = 1, 2$. Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο, ορίζουμε επαγωγικά ακολουθία (x_n) στον X με την ιδιότητα $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$ για $n \neq m$. Προφανώς, αυτή η ακολουθία δεν έχει καμία βασική υπακολουθία και έτσι έχουμε καταλήξει σε άτοπο. □

Πρόταση 6.2.8. *Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε άπειρο, ολικά φραγμένο υποσύνολο του X έχει σημείο συσσώρευσης.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης. Έστω A άπειρο, ολικά φραγμένο υποσύνολο του X. Υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $a_n \neq a_m$ για $n \neq m$. Το σύνολο $B = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ περιέχεται στο ολικά φραγμένο σύνολο A, άρα είναι κι αυτό ολικά φραγμένο. Από το λήμμα 6.2.5(β) η (a_n) έχει βασική υπακολουθία (a_{k_n}). Αφού ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ ώστε $a_{k_n} \to x$. Η (a_{k_n}) αποτελείται από όρους διαφορετικούς ανά δύο και περιέχεται στο A. Έπεται ότι $x \in A'$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε άπειρο, ολικά φραγμένο υποσύνολο του X έχει σημείο συσσώρευσης. Θεωρούμε τυχούσα βασική ακολουθία (x_n) στον X. Το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη της συνεπαγωγής (ii) ⇒ (iii) του θεωρήματος 6.2.4 δείχνει ότι η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αφού είναι και βασική, είναι συγκλίνουσα. Άρα, ο (X, ρ) είναι πλήρης. □

6.3 Βασικές ιδιότητες των συμπαγών συνόλων

Έχουμε ήδη αποδείξει κάποιες βασικές ιδιότητες των συμπαγών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου. Αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, ρ) τότε:

(i) Το K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X.

(ii) Κάθε ακολουθία (x_n) στο K έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in K$.

Επίσης, κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης και ολικά φραγμένος. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι οι συμπαγείς μετρικοί χώροι είναι διαχωρίσιμοι.

Θεώρημα 6.3.1. *Κάθε ολικά φραγμένος μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος. Ειδικότερα, κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω (X, ρ) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Σύμφωνα με τον ορισμό, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $\mathcal{F}_\varepsilon$ του X ώστε οι ανοικτές μπάλες με κέντρα στο $\mathcal{F}_\varepsilon$ και ακτίνα $\varepsilon > 0$ να καλύπτουν τον X. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον ορισμό για $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ παίρνουμε μια ακολουθία $D_1, D_2, D_3, \ldots$ πεπερασμένων υποσυνόλων του X ώστε

$$X = \bigcup_{x \in D_n} B\Big(x, \frac{1}{n}\Big)$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Θέτουμε $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Το D είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.

Ισχυρισμός. Το D είναι πυκνό στον X.

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ανοικτή μπάλα τέμνει το D. Έστω $B(x, \varepsilon)$ μια ανοικτή μπάλα στον X. Τότε, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Επίσης, $X = \bigcup_{y \in D_n} B(y, \frac{1}{n})$. Συνεπώς, $x \in \bigcup_{y \in D_n} B(y, \frac{1}{n})$ δηλαδή υπάρχει $y \in D_n$ ώστε $x \in B(y, \frac{1}{n})$. Τότε, $x \in B(y, \varepsilon)$, ή ισοδύναμα, $y \in B(x, \varepsilon)$. Άρα, $D_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, δηλαδή $D \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. □

Ορισμός 6.3.2 (ιδιότητα πεπερασμένων τομών). Έστω X μη κενό σύνολο και $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Λέμε ότι η $(F_i)_{i \in I}$ έχει την **ιδιότητα πεπερασμένων τομών** αν για κάθε μη κενό πεπερασμένο $J \subseteq I$ ισχύει

$$\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset.$$

Για παράδειγμα, η οικογένεια $\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών. Το ίδιο ισχύει για την οικογένεια όλων των υποσυνόλων A του $\mathbb{N}$ για τα οποία το $\mathbb{N} \setminus A$ είναι πεπερασμένο σύνολο (εξηγήστε γιατί).

Θεώρημα 6.3.3. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο (X, ρ) είναι συμπαγής.*

(ii) *Αν $(F_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X που έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, τότε*
$$\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset.$$

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii): Υποθέτουμε ότι υπάρχει οικογένεια $(F_i)_{i \in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X που έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, αλλά $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Τότε,

$$X = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i).$$

Δηλαδή, η οικογένεια $(X \setminus F_i)_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε $X = \bigcup_{j=1}^{m} (X \setminus F_{i_j})$. Τότε, $\bigcap_{j=1}^{m} F_{i_j} = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Υποθέτουμε ότι ο X δεν είναι συμπαγής. Τότε, υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $(G_i)_{i \in I}$ του X για το οποίο δεν μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο υποκάλυμμα. Θέτουμε $F_i = X \setminus G_i$, $i \in I$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $i_1, \ldots, i_m \in I$ έχουμε $X \neq G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}$, άρα

$$F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} = (X \setminus G_{i_1}) \cap \cdots \cap (X \setminus G_{i_m}) = X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} G_{i_j} \neq \emptyset.$$

Δηλαδή, η οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών. Από την υπόθεση, $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$, άρα

$$\bigcup_{i\in I} G_i = X \setminus \bigcap_{i\in I} F_i \neq X,$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Ορισμός 6.3.4 (αριθμός Lebesgue). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Λέμε ότι ένα ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του X έχει **αριθμό Lebesgue**, αν υπάρχει $\delta > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα:

Για κάθε $E \subseteq X$ με $\mathrm{diam}(E) < \delta$ υπάρχει $i \in I$ ώστε $E \subseteq V_i$.

Κάθε αριθμός δ που ικανοποιεί το παραπάνω λέγεται αριθμός Lebesgue του καλύμματος. Λέμε επίσης ότι ο X είναι **χώρος Lebesgue** αν κάθε ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του X έχει αριθμό Lebesgue.

Για παράδειγμα, ο μετρικός χώρος $(\mathbb{Z}, d)$ με $d(n,m) = |n-m|$ είναι χώρος Lebesgue. Πράγματι, έστω $(V_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του $\mathbb{Z}$. Τότε, για $\delta = 1$ έχουμε: αν $E \subseteq \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ με $\mathrm{diam}(E) < 1$ έπεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $E = \{n\}$. Όμως, υπάρχει $i_n \in I$ ώστε $n \in V_{i_n}$, δηλαδή $E \subseteq V_{i_n}$. Παρόμοια, αν (X,δ) είναι ένας διακριτός χώρος, τότε αυτός είναι χώρος Lebesgue.

Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ δεν είναι χώρος Lebesgue. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $r : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ με $x \mapsto r_x := \frac{1}{1+|x|}$ και το ανοικτό κάλυμμα

$$U_x = B(x, r_x) = (x - r_x, x + r_x),\ x \in \mathbb{R}$$

τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $E_\delta \subseteq \mathbb{R}$ με $\mathrm{diam}(E_\delta) < \delta$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $E_\delta \nsubseteq U_x$. Πράγματι, αν μας δώσουν $\delta > 0$, τότε υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε $r_{x_0} < \delta/4$. Θεωρούμε $y_0 > x_0 + 1$. Θέτουμε $E_\delta = [y_0, y_0 + \delta/2]$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $E_\delta \nsubseteq U_x$. Πράγματι, αν υπήρχε $x \in \mathbb{R}$ ώστε $E_\delta \subseteq U_x$, τότε

$$x - r_x < y_0 < y_0 + \delta/2 < x + r_x$$

Από την τελευταία έπεται ότι $r_x > \delta/4$, άρα $x < x_0$ (εφόσον $r_{x_0} < \delta/4$). Έτσι, $y_0 < x + r_x < x_0 + 1$, άτοπο.

Θεώρημα 6.3.5 (Lebesgue). *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει αριθμό Lebesgue. Δηλαδή, κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι χώρος Lebesgue.*

Απόδειξη. Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\varepsilon_x > 0$ και $i_x \in I$ ώστε $B(x,\varepsilon_x) \subseteq U_{i_x}$. Η οικογένεια $\{B(x,\varepsilon_x/2)\}_{x\in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ ώστε $X = \bigcup_{j=1}^k B(x_j, \varepsilon_{x_j}/2)$. Θέτουμε

$$\delta := \frac{1}{2}\min\{\varepsilon_{x_j} : j = 1, 2, \ldots, k\} > 0$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $A \subseteq X$ με $\mathrm{diam}(A) < \delta$, υπάρχει $i \in I$ ώστε $A \subseteq U_i$. Έστω $A \subseteq X$ μη κενό, με $\mathrm{diam}(A) < \delta$. Αν $a \in A$ τότε υπάρχει $x_j \in X$ ώστε $a \in B(x_j, \varepsilon_{x_j}/2)$. Τότε, $A \subseteq U_{i_{x_j}}$. Πράγματι, αν $z \in A$ τότε ισχύει

$$\rho(z, x_j) \leq \rho(z, a) + \rho(a, x_j) < \delta + \varepsilon_{x_j}/2 \leq \varepsilon_{x_j}$$

δηλαδή, $z \in B(x_j, \varepsilon_{x_j}) \subseteq U_{i_{x_j}}$. □

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει, σε κάποιες περιπτώσεις, τη συμπάγεια για τον χώρο γινόμενο συμπαγών μετρικών χώρων.

Θεώρημα 6.3.6. (α) *Έστω $(X_i, d_i)_{i=1}^m$ συμπαγείς μετρικοί χώροι. Αν $X = \prod_{i=1}^m X_i$ είναι ο χώρος γινόμενο των X_i και d είναι οποιαδήποτε μετρική γινόμενο στο X, τότε ο (X, d) είναι συμπαγής.*

(β) *Έστω (X_n, d_n), $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία συμπαγών μετρικών χώρων με $d_n(x(n), y(n)) \leq 1$ για κάθε $x(n), y(n) \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Τότε, ο χώρος γινόμενο $\prod_{n=1}^\infty X_n$ με μετρική την $d(x, y) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} d_n(x(n), y(n))$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. (α) Θα δείξουμε ότι ο (X, d) είναι ακολουθιακά συμπαγής. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν του θεωρήματος 2.1.13. Έστω $x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(m))$ ακολουθία στον (X, d). Αφού ο X_1 είναι συμπαγής, η ακολουθία $(x_n(1))$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n}(1))$:

$$x_{k_n}(1) \to x(1) \in X_1.$$

Αφού ο X_2 είναι συμπαγής, η $(x_{k_n}(2))$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}}(2))$:

$$x_{k_{\lambda_n}}(2) \to x(2) \in X_2.$$

Παρατηρήστε ότι

$$x_{k_{\lambda_n}}(1) \to x(1),$$

διότι η $x_{k_n}(1) \to x(1)$ και η $(x_{k_{\lambda_n}}(1))$ είναι υπακολουθία της $x_{k_n}(1)$. Άρα, η υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}})$ έχει συγκλίνουσα πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη. Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο μέχρι την m-οστή συντεταγμένη και παίρνοντας m διαδοχικές υπακολουθίες της (x_n) βρίσκουμε υπακολουθία της η οποία έχει κάθε συντεταγμένη της συγκλίνουσα. Η d είναι μετρική γινόμενο στο X, άρα η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. □

(β) Αφήνεται για τις ασκήσεις. □

Πόρισμα 6.3.7. *Ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Στο κεφάλαιο 2 (θεώρημα 2.1.13) είδαμε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$ (με την Ευκλείδεια μετρική) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Από αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει ο εξής χαρακτηρισμός των συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$.

Θεώρημα 6.3.8. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, με την Ευκλείδεια μετρική. Ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}^m$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση ισχύει γενικά: σε κάθε μετρικό χώρο, κάθε συμπαγές σύνολο είναι κλειστό και φραγμένο. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Θα δείξουμε ότι το K είναι ακολουθιακά συμπαγές. Έστω (x_n) ακολουθία στο K. Αφού το K είναι φραγμένο, η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη. Από το θεώρημα 2.1.13, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^m$. Όμως, το K είναι κλειστό και η (x_{k_n}) περιέχεται στο K. Άρα, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} \in K$.

Αφού κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του K, το K είναι συμπαγές. □

Σημείωση. Ειδικότερα, κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όμοια, κάθε ορθογώνιο $R_m = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_m,b_m]$ και κάθε κλειστή μπάλα $\hat{B}_{\rho_2}(x,\varepsilon)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^m,\rho_2)$.

Στο γενικότερο πλαίσιο των πλήρων μετρικών χώρων δεν ισχύει ότι κάθε κλειστό και φραγμένο σύνολο είναι συμπαγές: στο παράδειγμα 6.1.4(γ) είδαμε ότι, στον $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, η σφαίρα S_{ℓ_∞}, άρα και η κλειστή μπάλα $\hat{B}(0,1)$, δεν είναι συμπαγές σύνολο.

6.4 Συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή σύνολα

Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε ότι τα περισσότερα αποτελέσματα που ισχύουν για συνεχείς συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ εξακολουθούν να ισχύουν για συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο.

Θεώρημα 6.4.1. *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y,σ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι χώρος Lebesgue, ενώ η δεύτερη βασίζεται στην ακολουθιακή συμπάγεια.

Πρώτη απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\delta_x = \delta_x(\varepsilon) > 0$ ώστε $f(B(x,\delta_x)) \subseteq B(f(x),\varepsilon/2)$. Η οικογένεια $\{B(x,\delta_x) : x \in X\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του X, άρα υπάρχει αριθμός Lebesgue $\delta > 0$ ώστε: αν $A \subseteq X$ με $\mathrm{diam}(A) < \delta$ τότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $A \subseteq B(x,\delta_x)$. Έστω $z_1, z_2 \in X$ με $\rho(z_1,z_2) < \delta$. Τότε, το $A = \{z_1,z_2\}$ έχει διάμετρο $\rho(z_1,z_2) < \delta$, οπότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $A \subseteq B(x,\delta_x)$. Έτσι, από τη συνέχεια της f στο x και την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\sigma(f(z_1),f(z_2)) \leq \sigma(f(z_1),f(x)) + \sigma(f(z_2),f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Δεύτερη απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ και ακολουθίες (x_n), (y_n) στον X ώστε $\rho(x_n,y_n) \to 0$ αλλά $\sigma(f(x_n),f(y_n)) \geq$

ε για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την (ακολουθιακή) συμπάγεια του X μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) και $x \in X$ ώστε $x_{k_n} \to x$. Τότε, από την

$$\rho(y_{k_n}, x) \leq \rho(y_{k_n}, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) \to 0 + 0 = 0$$

βλέπουμε ότι $y_{k_n} \to x$. Από τη συνέχεια της f στο x συμπεραίνουμε ότι $f(x_{k_n}) \to f(x)$ και $f(y_{k_n}) \to f(x)$. Τότε, $\sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \to 0$, το οποίο είναι άτοπο (θυμηθείτε ότι $\sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). □

Θεώρημα 6.4.2. *Έστω (X, d), (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f απεικονίζει συμπαγή υποσύνολα του X σε συμπαγή υποσύνολα του Y.*

Απόδειξη. Έστω $K \subseteq X$ συμπαγές. Θα δείξουμε ότι το $f(K)$ είναι συμπαγές στον Y. Αν $(V_i)_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $f(K)$, τότε το $\{f^{-1}(V_i) : i \in I\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K. Άρα, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(V_{i_j})$. Τότε, $f(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_{i_j}$. □

Πόρισμα 6.4.3. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, σ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.*

Θεώρημα 6.4.4. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη. Από το πόρισμα 6.4.3 έχουμε ότι το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα κλειστό και φραγμένο. Τότε, υπάρχουν τα $\min f(X)$ και $\max f(X)$ (εξηγήστε γιατί). □

Μια άλλη χρήσιμη συνέπεια του θεωρήματος 6.4.2 είναι η εξής:

Πρόταση 6.4.5. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής, $1-1$ και επί συνάρτηση. Αν ο (X, ρ) είναι συμπαγής, τότε η $g = f^{-1} : (Y, \sigma) \to (X, \rho)$ είναι επίσης συνεχής. Δηλαδή, η f είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω F κλειστό υποσύνολο του X. Από το θεώρημα 6.4.2, το $B = f(F)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό, υποσύνολο του Y. Αφού το $g^{-1}(F) = f(F) = B$ είναι κλειστό στον Y και το F ήταν τυχόν, έχουμε ότι τα κλειστά υποσύνολα του X αντιστρέφονται σε κλειστά υποσύνολα του Y μέσω της g, άρα η g είναι συνεχής. □

Σημείωση. Η υπόθεση ότι ο (X, ρ) είναι συμπαγής δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0,1) \cup [2,3] \to [0,2]$ με $f(x) = x$ αν $0 \leq x < 1$ και $f(x) = x - 1$ αν $2 \leq x \leq 3$. Παρατηρήστε ότι η f είναι συνεχής, 1-1 και επί, όμως η f^{-1} δεν είναι συνεχής (η f^{-1} είναι ασυνεχής στο σημείο $y = 1$).

6.5 Το σύνολο του Cantor

1. Κατασκευή. Θεωρούμε το διάστημα $C_0 = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα $\big(1/3, 2/3\big)$. Ονομάζουμε C_1 το σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_1 = \big[0, 1/3\big] \cup \big[2/3, 1\big].$$

Το C_1 είναι προφανώς κλειστό σύνολο. Χωρίζουμε καθένα από τα διαστήματα $\big[0, 1/3\big]$ και $\big[2/3, 1\big]$ σε τρία ίσα διαστήματα και αφαιρούμε, από καθένα, το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε C_2 το κλειστό σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_2 = \big[0, 1/9\big] \cup \big[2/9, 1/3\big] \cup \big[2/3, 7/9\big] \cup \big[8/9, 1\big].$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα κλειστό σύνολο C_n έτσι ώστε η ακολουθία (C_n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$.

(ii) Το C_n είναι η ένωση 2^n κλειστών ξένων διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $1/3^n$.

Το **σύνολο του Cantor** είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Τα διαστήματα της μορφής $\big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$, ονομάζονται *τριαδικά διαστήματα*.

2. Ιδιότητες. Το C είναι σίγουρα μη κενό, αφού περιέχει τα άκρα όλων των τριαδικών διαστημάτων που απαρτίζουν κάθε C_n (όπως θα δούμε παρακάτω περιέχει και πολλά άλλα σημεία). Επίσης το C είναι κλειστό, αφού η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, το C έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) *Το C είναι τέλειο σύνολο*, δηλαδή είναι κλειστό και κάθε σημείο του C είναι σημείο συσσώρευσης του C.

Είδαμε ότι το C είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του C, παρατηρούμε ότι για το τυχόν $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και μήκος $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Οι ακολουθίες $(\alpha_n(x))$ και $(\delta_n(x))$ των αριστερών και δεξιών άκρων των $I_n(x)$ αντίστοιχα περιέχονται στο C, καθεμία από αυτές συγκλίνει στο x, και η μία τουλάχιστον από τις δύο δεν είναι τελικά σταθερή. Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του C. $\square$

(2) *Το C δεν περιέχει κανένα διάστημα*. Ας υποθέσουμε ότι, για κάποια $a < b$ έχουμε $[a, b] \subseteq C$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $C \subset C_n$, άρα $[a, b] \subseteq C_n$. Αφού το C_n είναι ένωση 2^n ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων μήκους $1/3^n$, το $[a, b]$ πρέπει να περιέχεται σε κάποιο από αυτά, και συνεπώς, πρέπει να ισχύει η ανισότητα $b - a \leq 1/3^n$. Αυτό οδηγεί σε αντίφαση, αφού $b - a > 0$ και $1/3^n \to 0$. $\square$

(3) *Το C είναι υπεραριθμήσιμο*. Στις ασκήσεις του κεφαλαίου 3 είδαμε ότι κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αφού δείξαμε ότι το C είναι τέλειο, έπεται

ο ισχυρισμός. Θα δώσουμε όμως μια δεύτερη απόδειξη, η οποία μας δίνει την αφορμή να δούμε μια διαφορετική περιγραφή του συνόλου C: μπορούμε να ορίσουμε μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση Φ του C στο σύνολο

$$\{0,2\}^{\mathbb{N}} = \big\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \mid \text{για κάθε } n,\ \alpha_n = 0 \text{ ή } \alpha_n = 2\big\}.$$

Το $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο (θυμηθείτε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor). Άρα, το C είναι υπεραριθμήσιμο. Η απεικόνιση Φ ορίζεται ως εξής:

Για κάθε $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, τέτοια ώστε: $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \cdots$, και για κάθε n, $x \in I_n(x)$ και το $I_n(x)$ είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n.

Με βάση αυτήν την ακολουθία διαστημάτων ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $\alpha_1^x = 0$ αν $I_1(x) = \big[0, 1/3\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[0, 1/3\big]$) και $\alpha_1^x = 2$ αν $I_1(x) = \big[2/3, 1\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[2/3, 1\big]$).

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Για κάθε n, αν $I_n(x) = \big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$ τότε το $I_{n+1}(x)$ είναι ένα από τα δύο διαστήματα $\big[k/3^n, (k/3^n) + (1/3^{n+1})\big]$, $[(k/3^n) + (2/3^{n+1}), (k+1)/3^n\big]$: εκείνο που περιέχει το x. Θέτουμε $\alpha_{n+1}^x = 0$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το πρώτο διάστημα, και $\alpha_{n+1}^x = 2$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το δεύτερο διάστημα.

Παρατηρούμε ότι αν $x \neq y$, τότε για κάποιο n θα ισχύει $I_n(x) \neq I_n(y)$, αλλιώς θα έπρεπε να έχουμε $|x - y| \leq \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν n_0 είναι ο πρώτος φυσικός για τον οποίο $I_{n_0}(x) \neq I_{n_0}(y)$, τότε από τον ορισμό των α_n^x βλέπουμε ότι $\alpha_{n_0}^x \neq \alpha_{n_0}^y$, άρα οι δύο ακολουθίες $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ και $(\alpha_n^y)_{n=1}^{\infty}$ είναι διαφορετικές. Αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $\Phi : C \to \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ με $\Phi(x) = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα προς ένα.

Για το επί, αν $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία από 0 ή 2, η ακολουθία αυτή ορίζει μοναδική ακολουθία τριαδικών διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ με $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, και τέτοια ώστε για κάθε n το I_n να είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $I_1 = \big[0, 1/3\big]$ αν $\alpha_1 = 0$ ή $I_1 = \big[2/3, 1\big]$ αν $\alpha_1 = 2$.

(β) Γενικά, το I_{n+1} είναι ένα από τα δύο τριαδικά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n+1}}$ του I_n που περιέχονται στο C_{n+1}: το αριστερό αν $\alpha_{n+1} = 0$, ή το δεξιό αν $\alpha_{n+1} = 2$.

Αφού τα μήκη των διαστημάτων I_n φθίνουν στο 0, η τομή τους είναι μονοσύνολο: έστω

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

(Θυμηθείτε ότι η τομή είναι μη κενή λόγω του θεωρήματος των κιβωτισμένων διαστημάτων). Αφού $I_n \subset C_n$ για κάθε n, είναι φανερό ότι $x \in C$. Επίσης, $I_n(x) = I_n$ για κάθε n, και από τον τρόπο ορισμού των I_n έχουμε

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} = \Phi(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η Φ είναι επί του $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, άρα το C είναι υπεραριθμήσιμο.

Ο τρόπος ορισμού της Φ μας οδηγεί σε μια άλλη περιγραφή του συνόλου του Cantor.

3. Τριαδική παράσταση αριθμού. Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $x \in [0,1]$. Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε n, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ (ή η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$) λέγεται **τριαδική παράσταση** του x. Γράφουμε $x = (a_1, a_2, \ldots)$ αντί της $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Κάθε αριθμός x στο διάστημα $[0,1]$ έχει μία τριαδική παράσταση. Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μπορεί να επιλεγεί ως εξής: Χωρίζουμε το $[0,1]$ στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/3]$, $(1/3,2/3)$ και $[2/3,1]$. Θέτουμε

$$a_1 = \begin{cases} 0 & , x \in [0,1/3] \\ 1 & , x \in (1/3,2/3) \\ 2 & , x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

Με αυτόν τον ορισμό, σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\frac{a_1}{3} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in [0,1/3]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/9]$, $(1/9,2/9)$, $[2/9,1/3]$ και θέτουμε $a_2 = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα αν το x ανήκει στο αριστερό, στο μεσαίο ή στο δεξιό από αυτά τα διαστήματα. Ανάλογα ορίζεται το a_2 όταν $x \in (1/3,2/3)$ ή $x \in [2/3,1]$, έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση να έχουμε

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}.$$

Συνεχίζουμε την επιλογή των a_n με αυτόν τον τρόπο έτσι ώστε για κάθε n να έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}.$$

Αφού λοιπόν

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq \frac{1}{3^n},$$

έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ συγκλίνει στον x, δηλαδή

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}.$$

Παραδείγματα. Ελέγξτε ότι $1/8 = (0,1,0,1,0,1,\ldots)$ και $1/4 = (2,0,2,0,2,0,\ldots)$.

Είναι φανερό ότι αν $x \neq y$ τότε η τριαδική παράσταση του x είναι διαφορετική από αυτήν του y, αφού μια σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια. Υπάρχουν όμως αριθμοί $x \in [0,1]$ που έχουν δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, αν $x = 1/3$ τότε

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0}{3^k} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}.$$

(Με τον τρόπο επιλογής της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ που παρουσιάσαμε παραπάνω, θα βρίσκαμε τη δεύτερη παράσταση).

Γενικότερα, ισχύει το εξής: Ο $x \in [0,1]$ έχει δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις αν και μόνο αν ο x είναι τριαδικός ρητός: δηλαδή αν $x = k/3^n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιον $1 \leq k \leq 3^n$ (άσκηση).

Το Θεώρημα που ακολουθεί δίνει έναν άλλο τρόπο περιγραφής του συνόλου του Cantor.

Θεώρημα 6.5.1. *Έστω $x \in [0,1]$. Τότε, $x \in C$ αν και μόνο αν ο x έχει μία τριαδική παράσταση η οποία περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2.* □

Απόδειξη. Έστω $x \in [0,1]$. Αν η ακολουθία (a_n) επιλεγεί με τον τρόπο που παρουσιάσαμε παραπάνω, τότε ισχύει το εξής: $x \in C$ αν και μόνο αν $a_n \neq 1$ για κάθε n. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $x \in C$ τότε ο x έχει μία τριαδική παράσταση που περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2. Η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται σαν άσκηση. □

6.6 Ασκήσεις

1. Ένα υποσύνολο K του X λέγεται συμπαγές, αν είναι συμπαγής μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική. Δείξτε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε κάθε ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του K υπάρχουν $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_{i_j}$.

2. Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του συμπαγούς μετρικού χώρου δείξτε ότι το $[a,b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, ενώ τα διαστήματα (a,b), $[a,b)$ και $[a,\infty)$ δεν είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.

3. Αν A, B είναι συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,ρ), αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι συμπαγές.

4. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και E, F υποσύνολα του X ώστε το E να είναι συμπαγές, το F κλειστό και $E \cap F = \emptyset$. Αποδείξτε ότι $\text{dist}(E,F) > 0$.

Δείξτε επίσης ότι υπάρχουν A, B κλειστά, ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ ώστε $\text{dist}(A,B) = 0$.

5. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $x \in X$ και A συμπαγές υποσύνολο του X, τότε υπάρχει $y \in A$ ώστε $\text{dist}(x,A) = \rho(x,y)$.

(β) Αν A, B είναι συμπαγή υποσύνολα του X τότε, υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $\mathrm{dist}(A,B) = \rho(x,y)$.

6. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.

(α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\overline{B}(x,\varepsilon)$ να είναι συμπαγές. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(β) Αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε το σύνολο $\overline{B}(x,\varepsilon)$ να είναι συμπαγές, τότε είναι ο X κατ' ανάγκην πλήρης;

7. Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to Y$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Η συνάρτηση *γράφημα* $G_f : X \to X \times Y$ με $G_f(x) = (x, f(x))$ είναι συνεχής.

(γ) Το γράφημα $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ είναι συμπαγές στον $X \times Y$.

Είναι αναγκαία υπόθεση ο μετρικός χώρος X να είναι συμπαγής;

8. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνον αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X το $F \cap K$ είναι κλειστό.

9. Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε ισομετρία $f : X \to X$ είναι επί.

(β) Αν (Y,σ) είναι μετρικός χώρος ώστε να υπάρχουν ισομετρίες $g : X \to Y$ και $h : Y \to X$, τότε και ο Y είναι συμπαγής.

10. Γνωρίζουμε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου (X,ρ) είναι φραγμένο. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in K$ ώστε $\rho(x,y) = \mathrm{diam}(K)$.

11. Έστω (X,d), (Y,ρ) μετρικοί χώροι με τον Y συμπαγή και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ της f είναι κλειστό στον $(X \times Y, \rho_1)$.

12. Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και (F_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X. Δείξτε ότι:

(α) Αν G είναι ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq G$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $F_{n_0} \subseteq G$.

(β) Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, τότε υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $F_{m_0} = \emptyset$.

(γ) Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μονοσύνολο, τότε $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$.

13. Έστω $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ συνεχής και $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n).$$

14. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μη συμπαγές. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ η οποία:

(α) δεν είναι φραγμένη.

(β) είναι φραγμένη αλλά δεν παίρνει μέγιστη τιμή.

15. Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και συνάρτηση $f : X \to X$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$. Αποδείξτε ότι η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

16. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι συμπαγής.

(β) Κάθε φθίνουσα ακολουθία (F_n) μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X έχει μη κενή τομή, δηλαδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

17. (α) Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Δείξτε ότι το A είναι συμπαγές αν και μόνον αν είναι κλειστό και ολικά φραγμένο.

(β) Έστω (X,ρ) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Δείξτε ότι η πλήρωσή του $(\tilde{X},\tilde{\rho})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

18. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:

(α) Αν $A_1, \dots, A_m$ είναι ολικά φραγμένα υποσύνολα του X τότε το $A_1 \cup \dots \cup A_m$ είναι επίσης ολικά φραγμένο.

(β) Αν A είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X τότε το $\overline{A}$ είναι επίσης ολικά φραγμένο.

19. (α) Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f απεικονίζει τα ολικά φραγμένα υποσύνολα του X σε ολικά φραγμένα υποσύνολα του Y.

(β) Δείξτε ότι η ιδιότητα του ολικά φραγμένου δεν διατηρείται από ομοιομορφισμούς. (*Υπόδειξη:* Τα $\mathbb{R}$ και $(0,1)$ είναι ομοιομορφικά.)

20. Δείξτε ότι ο μετρικός χώρος (X,d) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνον αν ο (X,ρ) είναι ολικά φραγμένος, όπου $\rho = \frac{d}{1+d}$.

21. (α) Έστω $(X_1,d_1), \dots, (X_k,d_k)$ πεπερασμένη οικογένεια ολικά φραγμένων μετρικών χώρων. Δείξτε ότι ο χώρος (X,ρ_1), όπου $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ και $\rho_1 = \sum_{i=1}^{k} d_i$ είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος.

(β) Δείξτε ότι ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^k$ είναι ολικά φραγμένο αν και μόνον αν είναι φραγμένο.

22. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και (x_n) βασική ακολουθία στον X. Δείξτε ότι το σύνολο $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.

23. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές.

(β) Ο X είναι πλήρης και κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι ολικά φραγμένο.

24. (α) Έστω $\{(X_n,\rho_n)\}$ ακολουθία μετρικών χώρων με $\rho_n(x,y)\leq 1$ για κάθε $x,y\in X_n$ και $n=1,2,\ldots$. Δείξτε ότι ο χώρος γινόμενο $(\prod_{n=1}^{\infty} X, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\rho_n)$ είναι συμπαγής.

(β) Δείξτε ότι κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^{\infty}$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Συμπληρωματικές ασκήσεις

25. Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $(G_i)_{i=1}^{n}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Θέτουμε $f:X\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\max\{\mathrm{dist}(x,X\setminus G_i) : i=1,\ldots,n\}$ για $x\in X$. Αποδείξτε ότι

(α) Για κάθε $x\in X$ ισχύει $f(x)>0$.

(β) Η f είναι συνεχής.

(γ) Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) αποδείξτε το λήμμα του Lebesgue.

26. (α) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ ώστε κάθε συνεχής συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ να είναι ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Είναι κατ' ανάγκην φραγμένο;

(β) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ φραγμένο και όχι κλειστό. Δείξτε ότι υπάρχει $g:A\to\mathbb{R}$ Lipschitz και φραγμένη, η οποία δεν παίρνει μέγιστη τιμή.

(γ) Έστω $K\subseteq\mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο. Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f:K\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(δ) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και $A\subseteq\mathbb{R}$ φραγμένο. Δείξτε ότι το $f(A)$ είναι επίσης φραγμένο.

27. (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $R:[0,2\pi)\to S^1$, με $R(t)=(\cos t,\sin t)$, όπου $S^1=\{x\in\mathbb{R}^2 : \|x\|_2=1\}$ ο μοναδιαίος κύκλος είναι συνεχής, 1-1 και επί. Είναι οι χώροι $[0,2\pi)$ και S^1 ομοιομορφικοί;

(β) Εξετάστε αν οι χώροι $([0,2\pi],|\cdot|)$ και $(S^1,\|\cdot\|_2)$ είναι ομοιομορφικοί.

28. (α) Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f:X\to X$ συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\rho(f(x),f(y))\geq\rho(x,y)$$

για κάθε $x,y\in X$. Δείξτε ότι η f είναι ισομετρία και επί.

(β) Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ 1-1, επί ώστε

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x,y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Δείξτε ότι η f είναι ισομετρία.

29. (α) Έστω (E_n) ακολουθία ξένων ανά δυο διαστημάτων του $[0,1]$. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Έστω $\delta > 0$. Βρείτε ακολουθία (F_n) ξένων ανά δύο κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$ ώστε $\mathrm{diam}(F_n) \geq 1 - \delta$ για $n = 1, 2, \ldots$. Εξηγήστε που οφείλεται η διαφορά των αποτελεσμάτων (α) και (β).

(γ) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο κλειστών υποσυνόλων (F_n) του μοναδιαίου δίσκου $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ώστε $\mathrm{diam}(F_n) \geq 2 - \varepsilon$ για $n = 1, 2, \ldots$.

(δ) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ φραγμένο και (B_n) ακολουθία από ξένες ανά δύο κλειστές μπάλες στο K. Δείξτε ότι $\mathrm{diam(B_n)} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(ε) Έστω (X,ρ) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και B_n ακολουθία από ξένες ανά δύο μπάλες στον X. Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\mathrm{diam}(B_n)\big) = 0$.

30. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\delta > 0$. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται δ–διαχωρισμένο αν για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$ ισχύει $\rho(x,y) \geq \delta$.

(α) Δείξτε ότι αν κάθε δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο και αν το $A \subseteq X$ είναι δ–διαχωρισμένο, τότε υπάρχει $B \subseteq X$ μεγιστικό δ–διαχωρισμένο ώστε $A \subseteq B$.

(β) Δείξτε ότι αν κάθε δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο, τότε ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος.

31. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι ολικά φραγμένος.

(β) Για κάθε $\delta > 0$, κάθε δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο.

32. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A λέγεται *σχετικά συμπαγές* υποσύνολο του X αν το $\overline{A}$ είναι είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

(α) Αποδείξτε ότι το A είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνον αν κάθε ακολουθία (a_n) στοιχείων του A έχει υπακολουθία που συγκλίνει (όχι κατ' ανάγκην σε στοιχείο του A).

(β) Έστω (Y,ρ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής. Δείξτε ότι η f απεικονίζει σχετικά συμπαγή υποσύνολα του X σε σχετικά συμπαγή υποσύνολα του Y.

(γ) Αποδείξτε ότι κάθε σχετικά συμπαγές υποσύνολο είναι ολικά φραγμένο. Ισχύει το αντίστροφο;

Μέρος III

Χώροι συναρτήσεων

Κεφάλαιο 7

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

7.1 Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

Ορισμός 7.1.1. Έστω X σύνολο, (Y,ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \to Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Λέμε ότι η *ακολουθία συναρτήσεων* (f_n) συγκλίνει *κατά σημείο* (*pointwise*) στη συνάρτηση f αν για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Ισοδύναμα, αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Γράφουμε τότε ότι $f_n \xrightarrow{pw} f$ ή $f_n \to f$ κατά σημείο ή ακόμη ότι $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$.

Παραδείγματα 7.1.2. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = d(t, x_n)$ και $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(t) = d(t,x)$ για $t \in X$. Τότε, $f_n \to f$ κατά σημείο. Πράγματι, για κάθε $t \in X$ έχουμε

$$f_n(t) = d(t, x_n) \to d(t,x) = f(t)$$

όταν $n \to \infty$.

(β) Έστω $X \neq \emptyset$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Αν θέσουμε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n : X \to \mathbb{R}$ και $f_n \to f$ κατά σημείο: για κάθε $x \in X$ έχουμε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \to f(x)$.

(γ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Τότε, $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή $f_n \to 0$ κατά σημείο.

(δ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$. Τότε, $f_n \to 0$ κατά σημείο (εξηγήστε γιατί).

(ε) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Παρατηρούμε ότι: αν $x = 1$, τότε $f_n(1) = 1 \to 1$. Αν $0 \leq x < 1$, τότε $f_n(x) = x^n \to 0$. Άρα, $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

(στ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+nx}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ \frac{nx}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι: αν $x = 0$, τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $0 < x \leq 1$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 \geq \frac{1}{x}$. Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$. Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0.$$

Άρα, $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δηλαδή $f_n \to 0$ κατά σημείο.
(ζ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)x-1}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $x = 0$, τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $0 < x \leq 1$, τότε αν το n είναι αρκετά μεγάλο ισχύει $\frac{1}{n} \leq x$, άρα $f_n(x) = \frac{1}{(n+1)x-1} \to 0$. Δηλαδή $f_n \to 0$ κατά σημείο.

Πρόταση 7.1.3. *Εστω X σύνολο, $f, g : X \to \mathbb{R}$ και (f_n), (g_n) ακολουθίες συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και $g_n \to g$ κατά σημείο, τότε:* (i) *για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ ισχύει $tf_n + sg_n \to tf + sg$ κατά σημείο, και* (ii) *$f_n g_n \to fg$ κατά σημείο.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Τότε,

$$(tf_n + sg_n)(x) = tf_n(x) + sg_n(x) \to tf(x) + sg(x) = (tf + sg)(x)$$

και

$$(f_n g_n)(x) = f_n(x) g_n(x) \to f(x)g(x) = (fg)(x),$$

από τις αντίστοιχες ιδιότητες των ορίων ακολουθιών πραγματικών αριθμών. □

Όπως θα διαπιστώσουμε, η κατά σημείο σύγκλιση είναι ασθενής: δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα, την παραγώγιση και την εναλλαγή ορίων. Τα βασικά ερωτήματα που συζητάμε παρακάτω έχουν αρνητική απάντηση:

> *Πρόβλημα 1:* Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, είναι σωστό ότι η f είναι συνεχής;

Η απάντηση είναι αρνητική: ένα παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Είδαμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. Μπορούμε μάλιστα να δώσουμε παράδειγμα ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει σε συνάρτηση με άπειρα το πλήθος σημεία ασυνέχειας: θεωρούμε το σύνολο $A = \{1/k : k = 1, 2, \ldots\}$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής: με κέντρο καθένα από τα σημεία $1/k$, $k = 1, \ldots, n$ θεωρούμε το διάστημα $I_{k,n} = [\frac{1}{k} - \frac{1}{3n(n+1)}, \frac{1}{k} + \frac{1}{3n(n+1)}]$ και ορίζουμε την f_n να είναι «τριγωνική» σε κάθε $I_{k,n}$ ώστε στο σημείο $1/k$ να παίρνει την τιμή 1 και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin \bigcup_{k=1}^n I_{k,n}$. Τότε, κάθε f_n είναι συνεχής και συγκλίνει (κατά σημείο) στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in [0,1] \setminus A \end{cases}$$

η οποία είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του A.

Πρόβλημα 2: Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο, και κάθε f_n είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, είναι σωστό ότι η f είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι

$$\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx\,;$$

Η απάντηση είναι αρνητική: για παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2n^2\left(x - \frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2} \not\to 0 \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Ένα άλλο παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$. Αν $x = 0$ τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Όμοια, αν $x = 1$ τότε $f_n(1) = 0 \to 0$. Στην περίπτωση $0 < x < 1$ εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^2 x(1-x)^{n+1}}{n^2 x(1-x)^n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}(1-x) \to 1 - x < 1.$$

Συνεπώς, $f_n(x) \to 0$ όταν $n \to \infty$.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)\,dx &= n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dx = n^2 \int_0^1 (1-t)t^n dt = n^2 \int_0^1 (t^n - t^{n+1})\,dt \\ &= n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \to 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Πρόβλημα 3: Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I, ισχύει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $f_n' \to f'$ κατά σημείο;

Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, η απάντηση είναι αρνητική:

(α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n), όπου η $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$. Τότε: (i) αν $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$ και (ii) αν $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n} \frac{x}{\frac{1}{n} + x} \to 0.$$

Άρα, $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$. Συνεπώς, $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως, $f_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}$ και για $x = 0$ έχουμε $f_n'(0) = 1 \to 1$, ενώ για $x > 0$ ισχύει ότι $f_n'(x) \to 0$. Δηλαδή, η (f_n') δεν συγκλίνει κατά σημείο στην $f' \equiv 0$.

(β) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$. Άρα, $f_n \to 0$ κατά σημείο.

Όμως, η ακολουθία $f_n' : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ με $f_n'(x) = \cos nx$ *δεν* συγκλίνει για καμιά τιμή του $x \in (0,\pi)$. Πράγματι· αν υπάρχει $x \in (0,\pi)$ ώστε $\cos nx \to \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\cos(3nx) \to \alpha$. Από την ταυτότητα

$$\cos(3nx) = 4\cos^3(nx) - 3\cos(nx)$$

βλέπουμε ότι $\alpha = 4\alpha^3 - 3\alpha$. Συνεπώς, $\alpha = 0$ ή $\alpha^2 = 1$. Αν $\alpha = 0$ τότε από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ συμπεραίνουμε ότι $\sin^2(nx) \to 1$. Όμως,

$$\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2}$$

οπότε $\cos(2nx) \to -1$, άτοπο. Αν $\alpha^2 = 1$, από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ έχουμε ότι $\sin(nx) \to 0$. Τότε, από την

$$\sin(n+1)x = \sin(nx)\cos x + \sin x \cos(nx)$$

παίρνουμε
$$\sin x \cos(nx) \to 0$$
και επειδή $\sin x \neq 0$ για $x \in (0, \pi)$ έπεται ότι $\cos(nx) \to 0$, άτοπο.

(γ) Θεωρούμε την $g_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με
$$g_n(t) = \begin{cases} t^{1+1/n}, & 0 \leq t < 1 \\ -(-t)^{1+1/n}, & -1 < t < 0 \end{cases}$$
Παρατηρούμε ότι $g_n(t) \to t$ για κάθε $t \in (-1, 1)$, αλλά $g_n'(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ενώ $g'(0) = 1$.

Σημείωση. Η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται καλά ούτε ως προς την εναλλαγή ορίων: υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) \neq f(0)$. Με άλλα λόγια δεν ισχύει η εναλλαγή των ορίων
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t).$$
Ένα παράδειγμα μας δίνουν οι $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = (1 - t)^n$. Έχουμε $f_n(t) \to f(t)$ για κάθε $t \in [0, 1]$ όπου
$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$
Παρατηρήστε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to 0} f_n(t) = 1 \neq 0 = \lim_{t\to 0} f(t).$$
Πολύ περισσότερο, μπορούμε να έχουμε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, η οποία να συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ η οποία να μην έχει όριο στο σημείο 0. Για παράδειγμα, θεωρήστε τις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με
$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/n \\ \sin(\pi/t), & 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$
Εύκολα βλέπουμε ότι
$$f_n(t) \to f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \sin(\pi/t), & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

7.2 Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 7.2.1. Έστω X σύνολο, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$. Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει *ομοιόμορφα* (*uniformly*) στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ να ισχύει $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Γράφουμε τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα (στο X) ή $f_n \xrightarrow{uni} f$.

Ασχολούμαστε κυρίως με την περίπτωση που το X είναι μετρικός χώρος και (Y,ρ) είναι το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Τότε, ο ορισμός της ομοιόμορφης σύγκλισης παίρνει την ακόλουθη μορφή:

> *Έστω $f_n, f : (X,\rho) \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$. Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Υπενθυμίζουμε ότι $\ell_\infty(X)$ είναι ο χώρος των φραγμένων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ με νόρμα την

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| : x \in X\}.$$

Συνεπώς, ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ο εξής:

> *Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$.*

Σχόλια 7.2.2. (α) *Γεωμετρική ερμηνεία:* Ας υποθέσουμε ότι το X είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η ανισότητα $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ σημαίνει ότι το γράφημα της f_n βρίσκεται ολόκληρο ανάμεσα στο γράφημα της $f - \varepsilon$ και το γράφημα της $f + \varepsilon$, δηλαδή μέσα στη ζώνη που δημιουργείται γύρω από το γράφημα της f και έχει κατακόρυφο πλάτος 2ε. Δηλαδή, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X αν για κάθε $\varepsilon > 0$, από έναν δείκτη και πέρα, τα γραφήματα όλων των f_n βρίσκονται ολόκληρα μέσα στη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ε γύρω από το γράφημα της f.

(β) *Σύγκριση με την κατά σημείο σύγκλιση:* Παρατηρήστε ότι, αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0, *το οποίο εξαρτάται από το* ε, ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$ *και για όλα τα* $x \in X$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο στο X τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει n_0, το οποίο εξαρτάται από το ε *και από το* x, ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Με άλλα λόγια, στην ομοιόμορφη σύγκλιση η επιλογή του n_0 εξαρτάται από το ε αλλά είναι «ομοιόμορφη» ως προς $x \in X$. Υπάρχει *κάποιο* n_0 που «δουλεύει» για *όλα* τα $x \in X$. Όμως, στην κατά σημείο σύγκλιση, για διαφορετικά x χρειάζεται ίσως να επιλέξουμε διαφορετικά n_0 (για το ίδιο $\varepsilon > 0$) ώστε να ικανοποιείται η $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Συγκρίνοντας τους δύο ορισμούς βλέπουμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση:

Πρόταση 7.2.3. *Έστω $f_n, f : (X,\rho) \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, τότε $f_n \to f$ κατά σημείο στο X.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Όμως,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Έπεται ότι $f_n(x) \to f(x)$. □

Σημείωση. Σύμφωνα με την πρόταση 7.2.3, προκειμένου να εξετάσουμε αν μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα κάνουμε δύο απλά βήματα:

(i) Εξετάζουμε αν υπάρχει f ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο. Αυτό είναι εύκολο: για κάθε $x \in X$ έχουμε μια ακολουθία *αριθμών*, την $(f_n(x))$. Βρίσκουμε το όριό της, αν υπάρχει.

(ii) Αν το $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in X$, ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ και μένει να εξετάσουμε αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Πολύ συχνά, αυτό είναι επίσης απλό: θεωρούμε τη συνάρτηση $f_n - f$ και υπολογίζουμε την $\|f_n - f\|_\infty$. Έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n) στην f αν και μόνο αν η ακολουθία *πραγματικών αριθμών* $(\|f_n - f\|_\infty)$ συγκλίνει στο 0 όταν $n \to \infty$.

Παραδείγματα 7.2.4. Παρακάτω εξετάζουμε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τα παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου (βλέπε §7.1.2).

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$. Για την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = d(t, x_n)$ είδαμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(t) = d(t, x)$ για $t \in X$. Παρατηρούμε ότι $|f_n(t) - f(t)| = |d(t, x_n) - d(t, x)| \leq d(x_n, x)$ για κάθε $t \in X$. Συνεπώς,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(t) - f(t)| : t \in X\} \leq d(x_n, x) \to 0.$$

Έπεται ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

(β) Έστω $X \neq \emptyset$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Για την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$ είδαμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο. Παρατηρούμε ότι $f_n - f \equiv \frac{1}{n}$, άρα

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0.$$

Έπεται ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

(γ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Είδαμε ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup\left\{\frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(δ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$. Ελέγχουμε εύκολα ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο. Το ίδιο ουσιαστικά επιχείρημα δείχνει ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη: για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$|f_n(x)| = \frac{n}{x+n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Συνεπώς, $\|f_n - 0\|_\infty \leq \frac{1}{n} \to 0$.
(ε) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Είδαμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|f_n - f\|_\infty \geq \sup\{x^n : 0 \leq x < 1\} = \lim_{x\to 1^-} x^n = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.
(στ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+nx}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ \frac{nx}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Είδαμε ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο. Παρατηρούμε ότι

$$\|f_n - 0\|_\infty = f_n(1/n) = 1/2.$$

Αφού $\|f_n - 0\|_\infty \not\to 0$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.
(ζ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)x-1}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Είδαμε ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο. Παρατηρούμε ότι

$$\|f_n - 0\|_\infty = f_n(1/n) = n \to \infty.$$

Αφού $\|f_n - 0\|_\infty \not\to 0$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Ορισμός 7.2.5. Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) λέγεται *ομοιόμορφα φραγμένη στο* X αν υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f_n(x)| \leq M \text{ για κάθε } x \in X \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή, αν ο M είναι κοινό φράγμα για όλες τις $|f_n|$.

Πρόταση 7.2.6. *Έστω X σύνολο, $f,g : X \to \mathbb{R}$ και (f_n), (g_n) ακολουθίες συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{R}$ και $t,s \in \mathbb{R}$.*
(α) *Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα και $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο X, τότε $tf_n + sg_n \to tf + sg$ ομοιόμορφα στο X.*
(β) *Αν, επιπλέον, οι $(f_n),(g_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_ng_n \to fg$ ομοιόμορφα στο X.*

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\|(tf_n+sg_n)-(tf+sg)\|_\infty = \|t(f_n-f)+s(g_n-g)\|_\infty \leq |t|\,\|f_n-f\|_\infty+|s|\,\|g_n-g\|_\infty \to 0.$$

(β) Υπάρχει $M>0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ και $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$. Δηλαδή, $\|f_n\|_\infty \leq M$ και $\|g_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, έχουμε $f_n \to f$ κατά σημείο. Άρα, για κάθε $x \in X$ ισχύει $|f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq M$. Δηλαδή, $\|f\|_\infty \leq M$. Τώρα γράφουμε

$$\|f_ng_n - fg\|_\infty \leq \|(f_n-f)g_n\|_\infty + \|f(g_n-g)\|_\infty \leq M\|f_n-f\|_\infty + M\|g_n-g\|_\infty \to 0,$$

χρησιμοποιώντας και την

$$\begin{aligned} \|(f_n-f)g_n\|_\infty &= \sup\{|f_n(x)-f(x)||g_n(x)| : x \in X\} \\ &\leq \sup M \sup\{|f_n(x)-f(x)| : x \in X\} \\ &= M\|f_n-f\|_\infty \end{aligned}$$

(όμοια βλέπουμε ότι $\|f(g_n-g)\|_\infty \leq M\|g_n-g\|_\infty$). □

7.2.1 Κριτήρια ομοιόμορφης σύγκλισης

Σε αυτή την παράγραφο συζητάμε χρήσιμες ικανές ή/και αναγκαίες συνθήκες για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων (f_n).

Θεώρημα 7.2.7 (κριτήριο Cauchy). *Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n,m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/2$. Συνεπώς, για κάθε $n,m \geq n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \|(f_n-f)+(f-f_m)\|_\infty \leq \|f_n-f\|_\infty + \|f-f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n,m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. *Σταθεροποιούμε* $x \in X$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε: αν $n,m \geq n_0$ τότε

$$(*) \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Άρα, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από το x. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Προφανώς, $f_n \to f$ κατά σημείο.

Αφήνοντας το $m \to \infty$ στην $(*)$ παρατηρούμε ότι (για τυχόν $\varepsilon > 0$ και το $n_0 = n_0(\varepsilon)$ που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως): για κάθε $x \in X$ και για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα. □

Πρόταση 7.2.8. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα, για κάποια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $x_0 \in X$ και κάθε $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \to x_0$ ισχύει $f_n(x_n) \to f(x_0)$.*

Απόδειξη. Γράφουμε

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x_0)|.$$

Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n) στην f έχουμε $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ και από τη συνέχεια της f στο x_0 (και την υπόθεση ότι $x_n \to x$) έχουμε $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$. Έπεται ότι $|f_n(x_n) - f(x_0)| \to 0$. □

Θεώρημα 7.2.9 (Dini). *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Τότε, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στον X.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $f = 0$ (διαφορετικά, θεωρούμε την $g_n = f_n - f$, η οποία είναι μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με $g_n \to 0$ κατά σημείο). Επίσης υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι φθίνουσα (διαφορετικά θεωρούμε την $-f_n$). Συνεπώς, $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρώτη απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής άμεση συνέπεια του θεωρήματος 6.3.3: αν μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων ενός συμπαγούς μετρικού χώρου έχει κενή τομή, τότε κάποιο από αυτά τα σύνολα είναι κενό (άρα και όλα τα επόμενα).

Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία των συνόλων

$$K_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

Κάθε K_n είναι κλειστό σύνολο από τη συνέχεια της f_n. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $K_{n+1} \subseteq K_n$ από τη μονοτονία της f_n (αν $x \in K_{n+1}$ τότε $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq \varepsilon$, άρα $x \in K_n$). Επίσης $\bigcap_{n=1}^\infty K_n = \emptyset$ (για κάθε $x \in X$ έχουμε $f_n(x) \to 0$, άρα $f_n(x) < \varepsilon$ τελικά· δηλαδή, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin K_n$). Αφού ο (X, d) είναι συμπαγής, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $K_{n_0} = \emptyset$ και το ίδιο ισχύει για κάθε K_n, $n \geq n_0$. Δηλαδή, $0 \leq f_n(x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$. Έπεται ότι $\|f_n\|_\infty < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. □

Δεύτερη απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$B_n(\varepsilon) = \{x \in X : f_n(x) < \varepsilon\},\ n = 1, 2 \ldots$$

Η $(B_n(\varepsilon))$ είναι αύξουσα ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων του X (διότι κάθε f_n είναι συνεχής και $f_n \geq f_{n+1}$). Επίσης, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon)$. Πράγματι· αν $x \in X$, από την $f_n(x) \to 0$ βλέπουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) < \varepsilon$, δηλαδή $x \in B_n(\varepsilon)$. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $X = \bigcup_{j=1}^{k} B_{n_j}(\varepsilon) = B_{n_0}(\varepsilon)$, όπου $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $B_n(\varepsilon) = X$, δηλαδή $f_n(x) < \varepsilon$ για κάθε $x \in X$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $f_n \to 0$ ομοιόμορφα. □

Σημείωση: Η υπόθεση ότι η οριακή συνάρτηση f είναι κι αυτή συνεχής δεν μπορεί να παραλειφθεί. Αυτό φαίνεται από το παράδειγμα της *φθίνουσας* ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Έχουμε δει ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα (η οριακή συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 1$).

7.2.2 Συνέχεια, ολοκλήρωμα και παράγωγος

Στην παράγραφο §7.1 είδαμε ότι η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα και την παραγώγιση. Όπως θα δούμε σε αυτή την παράγραφο, αν υποθέσουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στη θέση της κατά σημείο σύγκλισης τότε έχουμε ισχυρά θετικά αποτελέσματα.

Θεώρημα 7.2.10. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι:*

(i) *$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, και*

(ii) *κάθε f_n είναι συνεχής στο x_0.*

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0.

Ειδικότερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο X, τότε η f είναι συνεχής στο X.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f_{n_0} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in B(x_0, \delta)$,

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τότε, για κάθε $x \in B(x_0, \delta)$ γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(t_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_\infty + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \|f_{n_0} - f\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0. □

Σημείωση. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, αν μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει κατά σημείο σε ασυνεχή συνάρτηση, τότε η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

Θεώρημα 7.2.11. *Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Αυτό είναι δυνατό, διότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Αφού η f_n είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$U(f_n, P) - L(f_n, P) = \sum_{k=0}^{m-1} (M_k(f_n) - m_k(f_n))(x_{k+1} - x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

όπου $M_k = \sup\{f_n(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ και $m_k = \inf\{f_n(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ (θυμηθείτε το κριτήριο του Riemann). Χρησιμοποιώντας την $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, ελέγχουμε ότι

$$m_k(f_n) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq m_k(f) \leq M_k(f) \leq M_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Έπεται ότι

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f_n, P) - L(f_n, P) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (x_{k+1} - x_k) < \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Η σύγκλιση των ολοκληρωμάτων είναι τώρα άμεση συνέπεια της $\|f_n - f\|_\infty \to 0$: παρατηρούμε ότι

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx = (b-a)\|f_n - f\|_\infty \to 0,$$

απ' όπου έπεται το θεώρημα. □

Το παράδειγμα της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $(0,\pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογα καλή συμπεριφορά για τις παραγώγους: έχουμε $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $(0,\pi)$, αλλά η ακολουθία $f_n'(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0,\pi)$. Παρ' όλα αυτά, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 7.2.12. *Έστω $f_n, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και ότι η παράγωγός της, f_n', είναι συνεχής στο $[a,b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:*

(i) *$f_n' \to g$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, και*

(ii) *υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε η $(f_n(x_0))$ να είναι συγκλίνουσα σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.*

Τότε, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $f' \equiv g$.

Απόδειξη. Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(s)\,ds, \qquad x \in [a,b].$$

Από το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(s)\,ds \to \int_{x_0}^{x} g(s)\,dx, \qquad x \in [a,b].$$

Συνεπώς,

$$f_n(x) \to \xi + \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds.$$

Ορίζουμε

$$f(x) = \xi + \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds.$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Μένει να δείξουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(s)\,ds - \xi - \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + \left| \int_{x_0}^{x} (f_n'(s) - g(s))\,ds \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + |x - x_0|\,\|f_n' - g\|_\infty \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + |b - a|\,\|f_n' - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|f_n - f\|_\infty \leq |f_n(x_0) - \xi| + |b-a|\,\|f_n' - g\|_\infty \to 0$. □

7.3 Σειρές Συναρτήσεων

Ορισμός 7.3.1. Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $s_n : X \to \mathbb{R}$ με

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ ώστε $s_n \to s$ κατά σημείο στο X, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει κατά σημείο στην s στο X* και γράφουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Αν, επιπλέον, $s_n \to s$ ομοιόμορφα στο A, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο X.*

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, η σύγκλιση μιας σειράς συναρτήσεων ανάγεται στη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων, της ακολουθίας (s_n) των μερικών αθροισμάτων.

Παράδειγμα 7.3.2. Η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Έχουμε

$$f_k(x) = x^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Γνωρίζουμε ότι στο διάστημα $(-1, 1)$ η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $s(x) = \frac{1}{1-x}$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Εξετάζουμε αν η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στο $(-1, 1)$. Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

και

$$s_n(x) - s(x) = -\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty,$$

άρα

$$\sup\{|s_n(x) - s(x)| : x \in (-1, 1)\} = +\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η σύγκλιση της (s_n) στην s δεν είναι ομοιόμορφη.

Πρόταση 7.3.3. *Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο X, τότε συγκλίνει κατά σημείο στην s στο X.*

Απόδειξη. Αρκεί να θυμηθούμε ότι αν $s_n \to s$ ομοιόμορφα τότε $s_n \to s$ κατά σημείο. □

Πρόταση 7.3.4. *Έστω $f_k, g_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Αν $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s$ και $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = t$ ομοιόμορφα στο X, τότε $\sum_{k=1}^{\infty}(af_k + bg_k) = as + bt$ ομοιόμορφα στο X. Το ίδιο ισχύει για την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη. Άμεση από τις αντίστοιχες προτάσεις για ακολουθίες συναρτήσεων. □

Πρόταση 7.3.5 (κριτήριο Cauchy). *Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο X αν και μόνον αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$,*

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy στην ακολουθία συναρτήσεων (s_n). Παρατηρήστε ότι: αν $n > m$ τότε $s_n - s_m = f_{m+1} + \cdots + f_n$. □

Θεώρημα 7.3.6 (κριτήριο Weierstrass). *Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις, $k \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sup\{|f_k(x)| : x \in X\} \leq M_k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

δηλαδή ότι ο M_k είναι άνω φράγμα της $|f_k|$, και ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

Συνεπώς, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει κατά σημείο στο X. Θέτουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} |s(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k. \end{aligned}$$

Από την $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty$ έχουμε

$$\|s - s_n\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \to 0$$

όταν $n \to \infty$. Άρα, η σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ είναι ομοιόμορφη. □

Παράδειγμα 7.3.7. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε Εδώ $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k^2}$, οπότε

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Τα επόμενα τρία θεωρήματα προκύπτουν άμεσα από τα θεωρήματα 7.2.10, 7.2.11 και 7.2.12 (αν τα εφαρμόσουμε για την ακολουθία των συναρτήσεων $s_n = f_1 + \cdots + f_n$).

Θεώρημα 7.3.8. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f, f_k : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι:*

(i) *η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο X, και*

(ii) *κάθε f_k είναι συνεχής στο x_0.*

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0.

Ειδικότερα, αν κάθε f_k είναι συνεχής στο X, τότε η f είναι συνεχής στο X.

Θεώρημα 7.3.9. *Έστω (f_k) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι Riemann=-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Θεώρημα 7.3.10. *Έστω $f_k, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_k είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι η παράγωγός της, f_k', είναι συνεχής στο $[a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:*

(i) *η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην g στο $[a, b]$, και*

(ii) *υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ να συγκλίνει σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.*

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $f' \equiv g$. Δηλαδή,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'.$$

7.4 Ασκήσεις

1. Έστω $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$, $t \in [0,1]$. Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση f στο $[0,1]$. Ποιά είναι η f;

2. Έστω $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{1+t^{2n}}$, $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι η f;

3. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{n+1} \text{ ή } \frac{1}{n} < t \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{t}\right), & \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \end{cases}$. Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f συνεχή στο $\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$;

4. Έστω $f_n(t) = n^p t(1-t^2)^n$, $t \in [0,1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f στο $[0,1]$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιές τιμές του p ισχύει ότι $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$;

5. Έστω $f_n(t) = \frac{t}{1+nt^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει f ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n'(t) \to f'(t)$ αν $t \neq 0$, αλλά $f_n'(0) \not\to f'(0)$. Για ποιά διαστήματα $[a,b]$ ισχύει ότι $f_n' \to f'$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$;

6. Έστω $f_n(t) = \frac{1}{n} e^{-n^2 t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και $f_n' \to 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι σε κάθε διάστημα το οποίο περιέχει το 0 η f_n' *δεν* συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση, ενώ σε κάθε κλειστό διάστημα το οποίο *δεν* περιέχει το 0 η f_n' συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση.

7. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$$

συγκλίνει κατά σημείο, και βρείτε την οριακή συνάρτηση.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

9. Έστω $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ακολουθία αυξουσών συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση f. Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα και ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

10. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt \to \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Ισχύει πάντα το ίδιο αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο;

11. Ορίζουμε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^{nx}.$$

Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο και βρείτε την οριακή συνάρτηση f. Βρείτε το όριο των ολοκληρωμάτων

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

Είναι η σύγκλιση της (f_n) στην f ομοιόμορφη;

12. Ορίζουμε $f_n : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ θέτοντας $f_1(x) = \sin x$ και

$$f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)). \quad n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε την (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

13. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Δείξτε ότι οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kt)$ και $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

14. Δείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^k$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,1]$. Αντιθέτως, δείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)$ συγκλινει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

15. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-A,A]$, $A>0$.

16. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x=0$. Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[A,\infty)$ ή $(-\infty,-A]$, όπου $A>0$.

17. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[-A,A]$, $A>0$, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x.

18. Έστω $\alpha > 1/2$. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

19. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{k+1}}{2k+2} \right)$$

συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,1]$.

20. Ορίζουμε $I(x) = 0$ αν $x \leq 0$ και $I(x) = 1$ αν $x > 0$. Έστω (x_k) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων σε κάποιο διάστημα (a,b) και έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ απολύτως συγκλίνουσα σειρά. Δείξτε ότι η

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k I(x - x_k)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο (a,b) και ότι η συνάρτηση που ορίζεται από αυτή τη σειρά είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (a,b) \setminus \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

21. Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι: αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X και κάθε f_n είναι φραγμένη στο X, τότε η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο X.

22. Έστω $f, f_n : (X,\rho) \to [a,b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι $g \circ f_n \to g \circ f$ ομοιόμορφα στο X.

23. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$, $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Έστω t_0 σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{t \to t_0} f_n(t) = x_n \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

α. Η (x_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και

β. $\lim_{t \to t_0} f(t) = \lim_{n \to \infty} x_n$. Δηλαδή,

$$\lim_{t \to t_0} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to t_0} f_n(t).$$

24. Βρείτε ακολουθίες $(f_n), (g_n)$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η $(f_n g_n)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

25. Έστω $f_n(t) = t^n$ στο $[0,1]$ και $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ με $g(1) = 0$. Δείξτε ότι η (gf_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

26. Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο του X. Ορίζουμε την ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ με

$$f_n(x) = \mathrm{dist}(x, \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}),\ x \in X.$$

Δείξτε ότι:

(α) Η (f_n) είναι φθίνουσα και $f_n \to 0$ κατά σημείο.

(β) $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στον X αν και μόνον αν ο X είναι ολικά φραγμένος.

27. (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ασυνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

28. (α) Έστω X σύνολο, $f_n : X \to \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \ldots$ και $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Αποδείξτε ότι $|f_n| \to |f|$ ομοιόμορφα στο X.

(β) Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (-1)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ για $n = 1, 2, \ldots$ Αποδείξτε ότι η $(|f_n|)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ ενώ η (f_n) δεν συγκλίνει.

29. Έστω X σύνολο, $f_n, g_n, f, g : X \to \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \ldots$ ώστε $f_n \to f$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο X. Αποδείξτε ότι αν οι f, g είναι φραγμένες τότε $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα στο X.

30. Έστω $\delta > 0$ και $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $|f_n(x)| \geq \delta$ για κάθε $x \in X$ και $n = 1, 2, \ldots$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, δείξτε ότι:

(α) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$.

(β) $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα στο X.

31. Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n, f : X \to Y$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

32. (α) Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι με τον X συμπαγή. Αν $f_n : X \to Y$ για $n = 1, 2, \ldots$ και $f : X \to Y$ συνεχής ώστε για κάθε $x \in X$ και για κάθε (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to x$ ισχύει $f_n(x_n) \to f(x)$, αποδείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

(β) Αποδείξτε ότι η συμπάγεια είναι απαραίτητη, θεωρώντας την ακολουθία $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

και την $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$. Διαπιστώστε ότι ικανοποιείται η υπόθεση, αλλά $f_n \not\to f$ ομοιόμορφα.

Κεφάλαιο 8

Συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγείς μετρικούς χώρους

8.1 Ο χώρος $\mathcal{C}(K)$

Σε αυτό το Κεφάλαιο συμβολίζουμε με (K,d) έναν συμπαγή μετρικό χώρο. Στο Κεφάλαιο 5 θεωρήσαμε το χώρο $\ell_\infty(K)$ των *φραγμένων συναρτήσεων* $f : K \to \mathbb{R}$ με νόρμα την

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$$

και αποδείξαμε ότι ο $\ell_\infty(K)$ είναι πλήρης ως προς τη μετρική που επάγεται από την $\|\cdot\|_\infty$:

1. *Ο $(\ell_\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.*

Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}(K)$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{R}$. Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 6, αφού ο (K,d) είναι συμπαγής, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Έπεται ότι:

2. *Ο $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι υπόχωρος του $(\ell_\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$.*

Στο Κεφάλαιο 7 είδαμε ότι αν $f_n, f : K \to \mathbb{R}$ τότε $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ αν και μόνο αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο K. Δηλαδή, η σύγκλιση ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ είναι η ομοιόμορφη σύγκλιση. Είδαμε επίσης ότι: αν (f_n) είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε η f είναι επίσης συνεχής. Μια ισοδύναμη διατύπωση (εξηγήστε γιατί) είναι η εξής: αν (f_n) είναι ακολουθία στον $\mathcal{C}(K)$ και $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \in \ell_\infty(K)$ τότε $f \in \mathcal{C}(K)$. Συνεπώς:

3. *Ο $\mathcal{C}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $(\ell_\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$.*

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε αμέσως το εξής:

Θεώρημα 8.1.1. *Έστω (K,d) συμπαγής μετρικός χώρος. Ο χώρος $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι κάθε κλειστό υποσύνολο ενός πλήρους μετρικού χώρου είναι πλήρης μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική, σε συνδυασμό με τα προηγούμενα τρία αποτελέσματα: ο $\ell_\infty(K)$ είναι πλήρης με την $\|\cdot\|_\infty$ και ο $\mathcal{C}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολό του. □

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να δούμε κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη δομή του χώρου $\mathcal{C}(K)$. Στην επόμενη παράγραφο θεωρούμε την περίπτωση που το K είναι ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ στο $\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια των πολυωνύμων (περιορισμένων στο $[a,b]$) είναι πυκνή στον $\mathcal{C}([a,b])$.

8.2 Το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass

Αποδεικνύουμε εδώ το **θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass**.

Θεώρημα 8.2.1 (Weierstrass). *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε ο περιορισμός του p στο $[a,b]$ να ικανοποιεί την*

$$\|f-p\|_\infty \le \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x\in[a,b]$,

$$|f(x)-P(x)|\le\varepsilon.$$

Σημείωση. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα με $\varepsilon=\frac{1}{n}$ ($n\in\mathbb{N}$) μπορούμε να βρούμε ακολουθία πολυωνύμων (p_n) με την ιδιότητα

$$\|f-p_n\|_\infty \le \frac{1}{n},\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Έτσι, παίρνουμε την ακόλουθη ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος 8.2.1:

Θεώρημα 8.2.2 (Weierstrass). *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n\to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.*

Για την απόδειξη, παρατηρούμε ότι αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση του $\mathcal{C}([0,1])$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 8.2.3. *Έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει γραμμική ισομετρία $T:\mathcal{C}([a,b])\to\mathcal{C}([0,1])$ που απεικονίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός $\sigma:[0,1]\to[a,b]$ με $\sigma(x)=a+x(b-a)$ είναι 1-1 και επί, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό $\sigma^{-1}(y)=\frac{y-a}{b-a}$. Ορίζουμε $T:\mathcal{C}([a,b])\to\mathcal{C}([0,1])$ με $T(f)=g$, όπου $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση $g=f\circ\sigma$. Η $g=T(f)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων: για κάθε $x\in[0,1]$,

$$g(x)=f(\sigma(x))=f(a+x(b-a)).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\|T(f)\|_\infty = \max\{|f(a+x(b-a))| : x \in [0,1]\} = \max\{|f(y)| : y \in [a,b]\} = \|f\|_\infty$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Επίσης, η T είναι γραμμική απεικόνιση: αν $f_1, f_2 \in \mathcal{C}([a,b])$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$T(af_1 + bf_2) = aT(f_1) + bT(f_2).$$

Τέλος, αν $p(y) = \sum_{k=0}^n \lambda_k y^k$ είναι ένα πολυώνυμο, έχουμε

$$[T(p)](x) = p(a+x(b-a)) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (a+x(b-a))^k,$$

δηλαδή η συνάρτηση $T(p)$ είναι επίσης πολυώνυμο. □

Σημείωση. Με βάση το λήμμα 8.2.3 βλέπουμε εύκολα ότι, αν αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $\mathcal{C}([0,1])$ τότε έχουμε το ίδιο συμπέρασμα για οποιονδήποτε $\mathcal{C}([a,b])$. Πράγματι, έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα υπάρχει πολυώνυμο q ώστε

$$\|T(f) - q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ορίζουμε $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $p(y) = q(\sigma^{-1}(y))$. Τότε, η p είναι πολυώνυμο (ακριβέστερα, περιορισμός πολυωνύμου στο $[0,1]$) και $T(p) = q$ (εξηγήστε γιατί). Τότε,

$$\|f - p\|_\infty = \|T(f-p)\|_\infty = \|T(f) - T(p)\|_\infty = \|T(f) - q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $\mathcal{C}([0,1])$. Θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 8.2.4. *Για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:*

(α) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

(β) $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x$.

(γ) $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x$.

Απόδειξη. (α) Προκύπτει άμεσα από τον διωνυμικό τύπο:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1.$$

(β) Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\ &= x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{j}(1-x)^{n-1-j}\\ &= x.\end{aligned}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι, αν $k\geq 1$,

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}=\frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1}=\frac{n-1}{n}\frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1}+\frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1},$$

και, αν $k\geq 2$, η τελευταία ποσότητα ισούται με

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{k-2}+\frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\quad +\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x.\end{aligned}$$

Λήμμα 8.2.5. *Για κάθε* $x\in[0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{4n}.$$

Απόδειξη. Από την $\left(\frac{k}{n}-x\right)^2=\left(\frac{k}{n}\right)^2-2\frac{k}{n}x+x^2$ και το προηγούμενο λήμμα, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x-2x^2+x^2\\ &= \frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{4n},\end{aligned}$$

αφού $4x(1-x)\leq 1$ για κάθε $x\in[0,1]$. □

Λήμμα 8.2.6. *Έστω $\delta > 0$ και $x \in [0,1]$. Αν $F = F(\delta, x)$ είναι το σύνολο των $k \in \{0,1,\dots,n\}$ για τα οποία $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$, τότε*

$$\sum_{k\in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k\in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k\in F} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{1}{4n\delta^2}\end{aligned}$$

από το προηγούμενο λήμμα. □

Ορισμός 8.2.7. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το **n-οστό πολυώνυμο Bernstein** $B_n(f)$ της f ως εξής:

$$[B_n(f)](x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

Παρατηρήστε ότι το $B_n(f)$ είναι όντως πολυώνυμο (με βαθμό το πολύ ίσο με n) και ότι $[B_n(f)](0) = f(0)$ και $[B_n(f)](1) = f(1)$.

Επίσης, το λήμμα 8.2.4 δείχνει ότι: αν $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(f_0) = f_0, \quad B_n(f_1) = f_1, \quad B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1.$$

Ειδικότερα, για $k = 0, 1, 2$,

$$\|f_k - B_n(f_k)\|_\infty \to 0$$

όταν $n \to \infty$.

Θεώρημα 8.2.8 (Bernstein). *Για κάθε $f \in \mathcal{C}([0,1])$ ισχύει ότι $B_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.*

Απόδειξη. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [0,1]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Λόγω της $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε

$$|f(x) - [B_n(f)](x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=0}^{n} f(x) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Έστω $F = F(\delta, x)$ το σύνολο των $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ για τα οποία $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$. Από το λήμμα 8.2.6,

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Επίσης, παρατηρήστε ότι:

(α) Αν $k \in F$ τότε $|f(x) - f(k/n)| \leq 2\|f\|_\infty$, και

(β) Αν $k \notin F$ τότε $|f(x) - f(k/n)| < \varepsilon/2$.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}
|f(x) - [B_n(f)](x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \frac{1}{4n\delta^2} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

αν $n > n_0 = \left[\|f\|_\infty / (\varepsilon\delta^2)\right] + 1$. Η επιλογή του n_0 είναι ανεξάρτητη από το $x \in [0, 1]$, άρα, για κάθε $n > n_0$ έχουμε

$$\|f - B_n(f)\|_\infty < \varepsilon.$$

□

Αφού κάθε $B_n(f)$ είναι πολυώνυμο, το θεώρημα 8.2.1 είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Bernstein.

8.3 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι ο $\mathcal{C}([0, 1])$ είναι διαχωρίσιμος.

2. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

3. Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις.
(α) Αν ισχύει $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^1 x^n g(x)\,dx$ για $n = 0, 1, \ldots$ δείξτε ότι $f \equiv g$.
(β) Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = 0$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$ δείξτε ότι $f \equiv 0$.

4. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας πολυωνύμων $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $p_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\int_0^1 p_n(x)\,dx \to 1$.

5. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι $\deg(p_n) \to \infty$.

6. (α) Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.
(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leq q(x) \leq e^{2x}$ για κάθε $x \in [0,1]$.
(γ) Αν $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to h$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

7. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.
(α) Δείξτε ότι $|B_n(f)| \leq B_n(|f|)$ και $B_n(f) \geq 0$ αν $f \geq 0$.
(β) Δείξτε ότι $\|B_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

8. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

9. Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων *με ακέραιους συντελεστές*, ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

10. Δώστε παράδειγμα συνεχούς και φραγμένης συνάρτησης $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε να μην υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $(0,1]$.

11. Έστω $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.
(α) Αν η f δεν είναι σταθερή, δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[1,\infty)$.
(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n(\frac{1}{x}) \to f(x)$ ομοιόμορφα ως προς x στο $[1,\infty)$.

12. Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων (των περιορισμών τους στο $[0,1]$) είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον $\mathcal{C}([0,1])$.

Μέρος IV

Παραρτήματα

Παράρτημα Α΄

Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Α΄.1 Ισοπληθικά σύνολα

Ορισμός Α΄.1.1 (ισοπληθικότητα). Έστω A, B δύο μη κενά σύνολα. Τα A, B λέγονται *ισοπληθικά* αν υπάρχει μια συνάρτηση $f : A \to B$, η οποία είναι 1-1 και επί[1]. Τότε, γράφουμε $A =_c B$ ή $|A| = |B|$ ή και $A \sim B$.

Παραδείγματα Α΄.1.2. (α) Τα σύνολα $(0,1)$ και $(0,2)$ είναι ισοπληθικά, μέσω της αντιστοιχίας $f : (0,1) \to (0,2)$ με $f(x) = 2x$. Γενικότερα, κάθε ανοικτό διάστημα (a,b), $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, είναι ισοπληθικό με το $(0,1)$ μέσω της αντιστοιχίας $f : (0,1) \to (a,b)$ με $f(t) = (1-t)a + tb$.

(β) Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ είναι ισοπληθικό με το σύνολο των αρτίων $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ μέσω της αντιστοιχίας $\mathbb{N} \rightarrowtail A$ με $n \mapsto 2n$.

(γ) Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι ισοπληθικό με το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$. Πράγματι: θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ με

$$f(n) = \begin{cases} k, & \text{αν } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ 1-k, & \text{αν } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Η συνάρτηση f αντιστοιχίζει τους περιττούς φυσικούς στους θετικούς ακεραίους και τους άρτιους φυσικούς στους μη θετικούς ακεραίους.

(δ) Τα σύνολα $[0,1]$ και $[0,1)$ είναι ισοπληθικά. Πράγματι: θεωρούμε το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$, το οποίο είναι υποσύνολο του $[0,1]$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to$

[1] Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται αντιστοιχία. Λέμε τότε ότι έχουμε μια αντιστοιχία από το A στο B και γράφουμε $A \rightarrowtail B$.

$[0,1)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{αν } x \in A \text{ και } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι αντιστοιχία.

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι η ισοπληθικότητα μεταξύ συνόλων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση Α′.1.3. *Έστω A, B, C μη κενά σύνολα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*
(α) $A \sim A$,
(β) *αν $A \sim B$, τότε $B \sim A$ και*
(γ) *αν $A \sim B$ και $B \sim C$, τότε $A \sim C$.*

Απόδειξη. Άμεση. □

Συμβολισμός. Συμβολίζουμε με T_n το σύνολο των πρώτων n φυσικών, δηλαδή $T_n = \{1, 2, \dots n\}$.

Ορισμός Α′.1.4 (πεπερασμένα και άπειρα σύνολα). (α) Έστω A μη κενό σύνολο[2]. Το A λέγεται *πεπερασμένο* αν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $f : A \to T_n$ η οποία είναι 1-1 και επί. Τότε, λέμε ότι ο *πληθάριθμος* του A είναι n ή ότι το A έχει n στοιχεία και γράφουμε $\mathrm{card}(A) = n$ ή $\#A = n$ ή και $|A| = n$.

(β) Ένα σύνολο A λέγεται *άπειρο* αν δεν είναι πεπερασμένο.

Πρόταση Α′.1.5. *Ένα σύνολο A είναι άπειρο αν και μόνο αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, δηλαδή υπάρχει $B \subseteq A$ ώστε $B \sim \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το A είναι άπειρο. Ειδικότερα, το A είναι μη κενό. Άρα, υπάρχει $a_1 \in A$. Τότε, το σύνολο $A \setminus \{a_1\}$ είναι μη κενό. Άρα, υπάρχει $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Ομοίως, $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$ και μπορούμε να επιλέξουμε $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$. Επαγωγικά, ορίζεται ακολουθία (a_n) στοιχείων του A. Πράγματι: αν υπήρχε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \emptyset$ τότε θα είχαμε $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ και το A θα ήταν πεπερασμένο.

Ορίζουμε τότε $f : \mathbb{N} \to A$ με $f(n) = a_n$. Η f είναι 1-1 διότι τα a_n είναι διαφορετικά ανά δύο. Αν θέσουμε $B = f(\mathbb{N})$ τότε $B \subseteq A$ και η $f : \mathbb{N} \to B$ είναι 1-1 και επί. Δηλάδή, $B \sim \mathbb{N}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$. Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $g : A \to T_m$ η οποία είναι 1-1 και επί. Τότε, η συνάρτηση $g \circ f : \mathbb{N} \to T_m$ είναι 1-1, άτοπο (εξηγήστε γιατί). □

[2] Για το κενό σύνολο δεχόμαστε ότι είναι πεπερασμένο με πληθάριθμο 0.

Συμβολισμός. Έστω A, B δύο σύνολα. Αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \to B$, γράφουμε $A \leq_c B$ ή $A \preceq B$ και λέμε ότι το A έχει πληθάριθμο το πολύ ίσο με αυτόν του B. Ο συμβολισμός και η ορολογία δικαιολογούνται από το γεγονός ότι το A είναι ισοπληθικό με το $f(A)$ το οποίο είναι υποσύνολο του B.

Παραδείγματα Α΄.1.6. (α) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι άπειρο, διότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

(β) Το σύνολο των ρητών είναι άπειρο διότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

(γ) Κάθε μη τετριμμένο διάστημα είναι άπειρο σύνολο.

Σχόλια Α΄.1.7. Κάθε άπειρο σύνολο A είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του. Πράγματι, στην πρόταση Α΄.1.6. δείξαμε ότι αν το A είναι άπειρο τότε υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$. Γράφουμε $b_n = f(n)$ για $n = 1, 2, \ldots$ και θέτουμε $B = f(\mathbb{N}) = \{b_1, b_2, \ldots\} \subseteq A$. Θεωρούμε το σύνολο $C = A \setminus \{b_1\}$, το οποίο είνα γνήσιο υποσύνολο του A και ορίζουμε μια συνάρτηση $g : A \to C$ ως εξής:

$$g(x) = \begin{cases} b_{n+1}, & \text{αν } x = b_n \text{ για κάποιο } n \\ x, & \text{αν } x \in A \setminus B \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η g είναι 1-1 και επί (άσκηση).

Α΄.2 Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός Α΄.2.1 (αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα). Έστω A ένα άπειρο σύνολο. Το A θα λέγεται *αριθμήσιμο* αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, δηλαδή αν $A \sim \mathbb{N}$. Διαφορετικά, το σύνολο A θα λέγεται *υπεραριθμήσιμο*.

Συμβολισμός. Τον πληθάριθμο των φυσικών αριθμών των συμβολίζουμε με ω ή $\aleph_0$ (άλεφ 0). Έτσι, αν το σύνολο A είναι αριθμήσιμο γράφουμε $|A| = \aleph_0$.

Παραδείγματα Α΄.2.2. (α) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι αριθμήσιμο.

(β) Το $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο: η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$ είναι 1-1 και επί. Το γεγονός ότι είναι επί έπεται από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής (δείξτε ότι είναι 1-1).

(γ) Αν A, B είναι αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ είναι επίσης αριθμήσιμο. Πράγματι, αν τα A, B είναι αριθμήσιμα τότε υπάρχουν $f : A \to \mathbb{N}$ και $g : B \to \mathbb{N}$ συναρτήσεις 1-1 και επί. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ όπου $h(a, b) = (f(a), g(b))$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι f και g είναι 1-1 και επί μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η h είναι 1-1 και επί. Άρα, $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, οπότε από την πρόταση Α΄.1.3. έπεται ότι $A \times B \sim \mathbb{N}$.

Η επόμενη πρόταση δίνει χρήσιμους χαρακτηρισμούς για τα αριθμήσιμα σύνολα.

Πρόταση Α΄.2.3. *Έστω A άπειρο σύνολο. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*
(α) *Το A είναι αριθμήσιμο.*
(β) *Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, η οποία είναι επί.*
(γ) *Υπάρχει συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$, η οποία είναι 1-1.*

Για την απόδειξη της πρότασης θα χρειαστούμε ένα λήμμα το οποίο παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Λήμμα Α΄.2.4. *Έστω A άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε, το A είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το A είναι άπειρο, επομένως είναι μη κενό. Από την αρχή της καλής διάταξης (αρχή του ελαχίστου) υπάρχει το $a_1 = \min A$. Το σύνολο $A \setminus \{a_1\}$ είναι επίσης μη κενό (αλλιώς το A θα ήταν πεπερασμένο) οπότε, πάλι από την αρχή της καλής διάταξης, υπάρχει το $a_2 = \min A \setminus \{a_1\}$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ΄ άπειρον, γιατί αν σταματούσε σε κάποιο βήμα n_0 θα είχαμε $A \setminus \{a_1, \ldots, a_{n_0}\} = \emptyset$, δηλαδή το A θα ήταν πεπερασμένο. Έτσι, ορίζεται επαγωγικά μια ακολουθία (a_n) στοιχείων του A. Παρατηρήστε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών, άρα $a_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Είναι προφανές ότι $\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\} \subseteq A$. Αν υποθέσουμε ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος, τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $a \neq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, είναι $a > a_1$ και επίσης υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n > a$ (διότι $a_n \geq n$). Άρα, υπάρχει μέγιστος n με την ιδιότητα $a > a_n$. Τότε, $a_n < a < a_{n+1}$. Αυτό είναι άτοπο, διότι έχουμε $a \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ και $a < \min A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Από τον ισχυρισμό έπεται άμεσα ότι το A είναι αριθμήσιμο. □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την πρόταση Α΄.2.3.

Απόδειξη της πρότασης Α΄.2.3. Η συνεπαγωγή (α) ⇒ (β) είναι άμεση από τον ορισμό του αριθμήσιμου συνόλου.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το (β), δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, η οποία είναι επί. Τότε, για κάθε $a \in A$ ισχύει $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$. Θέτουμε $n_a = \min f^{-1}(\{a\})$, $a \in A$ (το min υπάρχει από την αρχή της καλής διάταξης). Η συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$, με $g(a) = n_a$ είναι καλά ορισμένη και 1-1. Πράγματι: παρατηρούμε ότι αν $a, b \in A$ με $a \neq b$, τότε $f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ και άρα $n_a \neq n_b$.

Έστω ότι ισχύει το (γ) δηλαδή, υπάρχει 1-1 συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$. Τότε, το $B = g(A)$ είναι άπειρο υποσύνολο των φυσικών. Από το λήμμα είναι αριθμήσιμο, δηλαδή υπάρχει $h : B \to \mathbb{N}$, η οποία είναι 1-1 και επί. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : A \to \mathbb{N}$ με $\phi(a) = h(g(a))$. Εύκολα ελέγχουμε ότι είναι 1-1 και επί, άρα το A είναι αριθμήσιμο. □

Παραδείγματα Α΄.2.5. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι άπειρο, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Αφού $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ με $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ και $\gcd(m, n) = 1$.

Το επόμενο θεώρημα οφείλεται στον Cantor και δείχνει ότι αριθμήσιμες το πλήθος πράξεις μεταξύ αριθμήσιμων συνόλων παράγουν αριθμήσιμα σύνολα. Το επιχείρημα που χρησιμοποιείται για την απόδειξη είναι γνωστό ως *πρώτο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor.*

Θεώρημα Α΄.2.6 (Cantor, 1899). *Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια αριθμήσιμων συνόλων. Αν το I είναι αριθμήσιμο, τότε και το $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το I είναι αριθμήσιμο, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι είναι το $\mathbb{N}$. Έτσι, έχουμε την οικογένεια $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Επίσης, κάθε A_i είναι αριθμήσιμο, επομένως μπορούμε να απαριθμήσουμε τα στοιχεία του ως

$$A_i = \{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_k^i, \ldots\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Αριθμώντας με αυτόν τον τρόπο τα στοιχεία του εκάστοτε συνόλου παίρνουμε έναν άπειρο πίνακα, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & : & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_k^1 & \ldots \\
A_2 & : & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_k^2 & \ldots \\
A_3 & : & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & a_k^3 & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
A_n & : & a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_k^n & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Τότε, είναι προφανές ότι ο πίνακας αυτός περιέχει όλα τα στοιχεία του $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (ενδεχομένως με επαναλήψεις). Απαριθμούμε τα στοιχεία αυτού του πίνακα κατά μήκος των διαγωνίων με κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά, ως εξής:

$$\pi : \{a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_1^3, a_2^2, a_3^1, \ldots\}$$

όπου με $\pi : \mathbb{N} \to A$ συμβολίζουμε την επί απεικόνιση που προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία αρίθμησης. Το συμπέρασμα έπεται από το (β) της πρότασης Α΄.2.3. □

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύει ότι υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν είναι αριθμήσιμα. Αυτό μάλιστα ισχύει για τα μη τετριμμένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση Α΄.2.7. *Το σύνολο $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το σύνολο $[0,1]$ είναι άπειρο. Έστω ότι είναι αριθμήσιμο. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1] = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Χωρίζουμε το $[0,1]$ σε τρία ίσα μέρη ως εξής: $[0,1] = [0,1/3] \cup [1/3,2/3] \cup [2/3,1]$. Τότε, τουλάχιστον ένα από αυτά τα τρία διαστήματα δεν περιέχει το x_1. Ονομάζουμε αυτό το διάστημα I_1 και το χωρίζουμε σε τρία ισομήκη διαδοχικά κλειστά διαστήματα μήκους $1/9$. Τουλάχιστον ένα από αυτά δεν περιέχει το x_2. Ονομάζουμε αυτό το διάστημα I_2. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, οπότε παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$ με $x_n \notin I_n$ και $b_n - a_n = 3^{-n} \to 0$. Από την αρχή κιβωτισμού ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$. Αφού $x \in [0,1]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x = x_{n_0}$. Άτοπο, διότι $x \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ενώ $x_{n_0} \notin I_{n_0}$. □

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι η πληρότητα των πραγματικών αριθμών παίζει ουσιαστικό ρόλο στην απόδειξη: χρησιμοποιήσαμε την αρχή του κιβωτισμού. Σε αντιδιαστολή, το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι αριθμήσιμο.

Πόρισμα Α΄.2.8. *Το σύνολο των πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}$ *και το σύνολο των αρρήτων* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *είναι υπεραριθμήσιμα.*

Τέλος, δείχνουμε ότι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών είναι υπεραριθμήσιμο.

Θεώρημα Α΄.2.9 (Cantor). *Το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών*

$$2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x(n)) : x(n) \in \{0,1\},\ n = 1, 2, \ldots\}$$

είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη. Το επιχείρημα της απόδειξης είναι γνωστό ως *δεύτερο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor*. Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύνολο $2^{\mathbb{N}}$ είναι άπειρο. Έστω ότι είναι αριθμήσιμο. Τότε, υπάρχει μια αρίθμηση των στοιχείων του: $2^{\mathbb{N}} = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$, όπου κάθε x_n είναι δυαδική ακολουθία. Μπορούμε τότε να παραστήσουμε τα στοιχεία x_n και τις συντεταγμένες τους σε μορφή άπειρου πίνακα:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (x_1(1), x_1(2), x_1(3), \ldots, x_1(k), \ldots)\\
x_2 &= (x_2(1), x_2(2), x_2(3), \ldots, x_2(k), \ldots)\\
x_3 &= (x_3(1), x_3(2), x_3(3), \ldots, x_3(k), \ldots)\\
&\ \vdots\\
x_n &= (x_n(1), x_n(2), x_n(3), \ldots, x_n(k), \ldots)\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Κοιτάμε το πρώτο στοιχείο στην πρώτη συντεταγμένη, το δεύτερο στοιχείο στη δεύτερη συντεταγμένη, το τρίτο στοιχείο στην τρίτη συντεταγμένη κ.ο.κ. Δηλαδή, κινούμαστε στην «κύρια διαγώνιο» του πίνακα και βάσει αυτής ορίζουμε το εξής στοιχείο του $2^{\mathbb{N}}$:

$$y = (1 - x_1(1), 1 - x_2(2), \ldots, 1 - x_k(k), \ldots)$$

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $x_n \neq y$ διότι $x_n(n) \neq 1 - x_n(n) = y(n)$. Με άλλα λόγια, το y διαφέρει από το x_1 στην πρώτη θέση, από το x_2 στη δεύτερη θέση κ.ο.κ. Έτσι οδηγούμαστε σε αντίφαση. □