Φασματική αραιοποίηση και το πρόβλημα των **Kadison-Singer**

Διπλωματική Εργασία
Κωνσταντίνος Στούμπος

Επιβλέπων: Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2015

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Αντικείμενο της εργασίας αυτής αποτελεί η λύση του προβλήματος των Kadison και Singer όπως αυτή δόθηκε από τους Marcus, Spielman και Srivastava, καθώς και η μέθοδος των «διαπλεκόμενων οικογενειών πολυωνύμων» (interlacing families), την οποία ανέπτυξαν προκειμένου να απαντήσουν σε αυτό το πρόβλημα, που διατυπώνεται ως εξής:
Πρόβλημα Kadison-Singer (KS): Είναι αλήθεια ότι καθε pure state στη $\mathcal{D}$ επεκτείνεται μοναδικά σε state της $B(\ell^2)$;
Ακολουθεί μία σύντομη περιγραφή των κεφαλαίων της εργασίας.

Στο **κεφάλαιο 2** παραθέτουμε βασικές προτάσεις από τη γραμμική άλγεβρα που θα μας φανούν χρήσιμες στα επόμενα καεφάλαια.

Στο **κεφάλαιο 3** μελετάμε τα ακόλουθα θωρήματα:
Θεώρημα (φασματική αραιοποίηση). *Υπάρχει διαγώνιος πίνακας $S_{m\times m} \succeq 0$ με το πολύ $\lceil \frac{n}{\epsilon^2} \rceil$ μη μηδενικά στοιχεία, ώστε*

$$(1-\epsilon)^2 BB^T \preceq BSB^T \preceq (1+\epsilon)^2 BB^T.$$

Θεώρημα (περιορισμένη αντιστρεψιμότητα). *Υπάρχει διαγώνιος πίνακας $S_{m\times m}$ με τουλάχιστον $k = (1-\epsilon)^2 \frac{\|B\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|B\|_2^2}$ μη μηδενικά στοιχεία όλα ίσα με 1, ώστε ο πίανακας BSB^T να έχει k μη μηδενικές ιδιοτιμές μεγαλύτερες ή ίσες από $\epsilon^2 \frac{\|B\|_{\mathrm{HS}}^2}{m}$.*

Τα θεωρήματα αυτά αποτελούν ασθενέστερες μορφές της εικασίας του Weaver, η όποία είναι (εκ των υστέρων) ισοδύναμη με τη θετική απάντηση στο πρόβλήμα Kadison-Singer. Μέσω της απόδειξης που δίνουμε, η οποία είναι παρμένη από το διδακτορικό του Srivastava, κερδίζουμε μία πρώτη ενόραση για την μέθοδο των εμποδίων (barrier method), ένα κρίσιμο βήμα για τη λύση του προβλήματος Kadison-Singer.

Στο **κεφάλαιο 4** δίνονται δύο εφαρμογές των προηγούμενων θεωρημάτων στην ασυμπτωτική γεωμετρική ανάλυση. Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας το πρώτο από τα παραπάνω θεώρήματα ο Srivastava δείχνει το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.0.1 (Srivastava). *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει ένα κυρτό σώμα H τέτοιο ώστε $H \subseteq K \subseteq (1+\epsilon)H$ και το H έχει το πολύ $m \leqslant 32n/\epsilon^2$ σημεία επαφής με το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του.*

Αντιστοίχως, με τη χρήση μίας γενίκευσης του παραπάνω θεωρήματος περιορισμένης αντιστρεψιμότητας, δίνεται από των Youssef μία διαφορετική απόδειξη στο ακόλουθο Θεώρημα παραγοντοποίησης Dvoretzky-Rogers:

Θεώρημα 1.0.2. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k \geqslant (1-\varepsilon)^2 n$ τέτοιος ώστε ο ταυτοτικός τελεστής $i_{2,\infty} : \ell_2^k \to \ell_\infty^k$ να παραγοντοποιείται στη μορφή $i_{2,\infty} = \alpha \circ \beta$, όπου $\beta : \ell_2^k \to X$, $\alpha : X \to \ell_\infty^k$ και $\|\alpha\| \cdot \|\beta\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.*

Στο κεφάλαιο 5 μελετάμε το πρόβλημα Kadison-Singer. Η κύρια πρόταση του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 1.0.3. *Έστω $\varepsilon > 0$ και $v_1, \ldots, v_m$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα στο $\mathbb{C}^d$ με πεπερασμένο φορέα ώστε*

$$\sum_{i=1}^m \mathbb{E}(v_i v_i^*) = I_d$$

και

$$\mathbb{E}(v_i^* v_i) \leqslant \varepsilon$$

για κάθε i. Τότε,

$$P\left[\Big\| \sum_{i=1}^m v_i v_i^* \Big\|_2 \leqslant (1+\sqrt{\varepsilon})^2\right] > 0.$$

Για την απόδειξή, αναλύεται η μέθοδος των διαπλεκόμενων οικογενειών πολυωνύμων. Ειδικότερα, δίνεται ο ορισμός της διαπλεκόμενης οικογένειας πολυωνύμων και αποδεικνύονται χρήσιμες ιδιότητες των οικογενειών αυτών. Στη συνέχεια μελετώνται οι ιδιότητες των πραγματικών ευσταθών πολυωνύμων. Ορίζεται το μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο το οποίο αποδεικνύεται ότι είναι πραγματικό ευσταθές και τέλος, μέσω ενός πολυδιάστατου επιχειρήματος εμποδίων, δίνεται άνω φράγμα για τη μέγιστη ρίζα του μεικτού χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Στη συνέχεια με ένα επιχείρημα αναγωγής της διάστασης προκύπτει το παραπάνω θεώρημα. Με βάση το θεώρημα αυτό, στη συνέχεια του κεφαλαίου αποδεικνύονται οι εικασίες Weaver και paving, άρα και η εικασία Kadison-Singer.

Στο **κεφάλαιο 6** δίνουμε σαν εφάρμογή μίας απλούστερης και πρώτερης παραλλαγής της παραπάνω μεθόδου το ακόλουθο θεώρημα που οφείλεται στους ίδιους συγγραφείς:

Θεώρημα 1.0.4. *Έστω G ένα γράφημα με πίνακα γειτνίασης τον A και καθολικό κάλυμμα το T. Τότε, υπάρχει απεικόνιση προσήμου s ώστε όλες οι ιδιοτιμές του $A^{(s)}$ να είναι το πολύ ίσες με $\rho(T)$. Ειδικότερα, αν το G είναι k-κανονικό τότε υπάρχει $s : E \to \{\pm 1\}$ ώστε οι ιδιοτιμές του $A^{(s)}$ να είναι το πολύ ίσες με $2\sqrt{k-1}$.*

Για το σκοπό αυτό κάνουμε μία ανασκόπηση στον κλάδο της φασματικής θεωρίας γραφημάτων, αποδεικνύουμε το θεώρημα Alon-Boppana, ορίζουμε την έννοια του γραφήματος Ramanujan και των expander οικογενειών γραφημάτων και αναφερόμαστε σε ιδιότητες των πολυωνύμων ταιριάσματος ενός γραφήματος G.

Τέλος, στο παράρτημα δίνουμε μία εναλλακτική απόδειξη του Tao, η οποία αφορά το πιο τεχνικό μέρος της μεθόδου.

Στο σημείο αυτό έχω τη χαρά και την ανάγκη να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε ορισμένους ανθρώπους.

Αρχικά, θέλω να ευχαριστήσω από το βάθος της καρδιάς μου τον κ. Απόστολο Γιαννόπουλο για την πολύτιμη βοήθειά του σε όλα τα στάδια της εργασίας, τη στήριξη, τις συμβουλές, την υπομονή και το χρόνο του, που πάντα πρόσφερε απλόχερα. Τον ευχαριστώ ακόμα για όσα έμαθα από αυτόν καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου και ειδικότερα του τελευταίου χρόνου. Αποτελεί για μένα διαχρονικά πρότυπο δασκάλου και κίνητρο για να προσπαθώ περισσότερο.

Ευχαριστώ επίσης θερμά τους κυρίους Αριστείδη Κατάβολο και Παντελή Δοδό για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή αυτής της εργασίας. Επιπλέον, ευχαριστώ τον κύριο Κατάβολο για το ήθος του, το ενδιαφέρον του και όλα όσα διδάχτηκα από αυτόν. Ευχαριστώ ακόμα όλους τους καθηγητές, δασκάλους και φίλους που ενέπνευσαν και ενίσχυσαν την αγάπη μου για τα μαθηματικά.

Ακόμα ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους φίλους και φίλες μου, μαθηματικούς και μη, για τις κουβέντες, την παρέα, το γέλιο, τη μουσική, τα ταξίδια και τις εμπειρίες που μοιραστήκαμε και για όλα όσα πρόκειται να έρθουν.

Κλείνοντας αυτόν τον πρόλογο, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου Γιάννη και Χριστίνα και τον αδερφό μου Παναγιώτη για όλη την αγάπη, τη φροντίδα και την υποστήριξή τους.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Θα χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για πίνακες στον $\mathbb{R}^{n\times n}$ και πεζά για διανύσματα στήλες στον $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

2.1 Βασικές έννοιες

Ορισμοί 2.1.1. Ο *ανάστροφος* ενός πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ο $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ένας πίνακας A λέγεται *συμμετρικός* αν $A = A^T$. Αν $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ είναι ένα διάνυσμα στήλη με συντεταγμένες $v_1, \ldots, v_n$, θέτουμε $v^T = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

Έστω $v^T = (v_1, \ldots, v_n)$, $w^T = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Το *εσωτερικό γινόμενο* των v, w είναι η ποσότητα:

$$v \cdot w = \langle v, w\rangle = v^T w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Η *Ευκλείδεια νόρμα* του διανύσματος v συμβολίζεται με $\|v\|_2 = \sqrt{v^T v}$.

Το *εξωτερικό* ή *τανυστικό γινόμενο* των v, w είναι ο $n \times n$ πίνακας $vw^T = (v_i w_j)_{i,j}$.

Ίχνος ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ καλείται η ποσότητα

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

όπου λ_i είναι οι *ιδιοτιμές* του πίνακα A.

Η *ορίζουσα* ενός πίνακα A είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών του, και συμβολίζεται με

$$\det(A) := \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* ενός πίνακα A είναι το πολυώνυμο $\chi[A](x) = \det(xI - A)$ το οποίο έχει ρίζες τις ιδιοτιμές του A.

Πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης που αντιστοιχεί στον A λέγεται ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

Κατά τα γνωστά επίσης, *εικόνα* του A θα ονομάζουμε καταχρηστικά τον υπόχωρο

$$\mathrm{Im}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου ο A είναι συμμετρικός, ο πυρήνας του A είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα της εικόνας του A.

Η *τάξη* του A είναι ίση με το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του, δηλαδή με την διάσταση της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης που αντιστοιχεί στον πίνακα A. Ισοδύναμα, είναι το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών του A.

Η *νόρμα* του *πίνακα* A είναι η ποσότητα:

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

Όταν ο A είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος, ισχύει

$$\|A\|_2 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i,$$

δηλαδή η νόρμα του πίνακα A είναι ίση με τη μέγιστη ιδιοτιμή του.

Η *νόρμα Frobenius* ή *νόρμα Hilbert-Schmidt* του A ορίζεται από τη σχέση

$$\|A\|_{\mathrm{HS}} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2} = \left(\mathrm{Tr}(A^TA)\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right)^{1/2}.$$

Ορίζουμε το *κατά σημείο γινόμενο* των πινάκων A και B ως εξής:

$$A \bullet B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij} = \mathrm{Tr}(A^TB),$$

όπου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Η τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στον A είναι η απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^{n\times n}$ στο $\mathbb{R}$ με

$$v \longmapsto v^TAv = \mathrm{Tr}(A^Tvv^T) = A \bullet vv^T.$$

Θεώρημα 2.1.2 (**φασματικό θεώρημα για συμμετρικούς πίνακες**). *Έστω $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρικός γραμμικός τελεστής. Τότε ο A έχει n πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ τα οποία αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, ισχύουν οι σχέσεις*

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

για $i = 1, \ldots, n$, και

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Απόδειξη. Με επαγωγή στη διάσταση n. Για $n = 1$ ο ισχυρισμός είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για κάθε συμμετρικό $(n-1)$-διάστατο γραμμικό τελεστή. Έστω $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$u^T Au = \max_{\|v\|_2=1} v^T Av.$$

Τέτοιο u πράγματι υπάρχει από τη συνέχεια της τετραγωνικής μορφής που ορίζει ο A και τη συμπάγεια της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^n$. Από τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange έχουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το u να είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$f(v) = v^T Av - \lambda v^T v.$$

Υπολογίζοντας την κλίση της f στο u, έχουμε

$$\nabla f(u) = 2Au - 2\lambda u = 0,$$

οπότε το u είναι ένα μοναδιαίο πραγματικό ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Παρατηρούμε τώρα ότι αν $w \in u^\perp = \{v : \langle u, v\rangle = 0\}$ τότε $Aw \in u^\perp$. Πράγματι, αφού $A = A^T$ έχουμε ότι

$$w^T A^T u = w^T Au = \lambda w^T u = 0.$$

Επίσης, ο $B = A\,|_{u^\perp}$ ικανοποιεί την $x^T B^T y = x^T By$ για κάθε $x, y \in u^\perp$. Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση για τον $A\,|_{u^\perp}$, παίρνουμε το συμπέρασμα. □

2.2 Χρήσιμες προτάσεις

Λήμμα 2.2.1 (τύπος Sherman-Morrison). *Αν A είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και $v \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα, τότε*

$$(A + vv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}vv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} v} \tag{2.2.1}$$

Απόδειξη. Ζητάμε $n \times n$ πίνακα X ώστε $X = (A + vv^T)^{-1}$, ισοδύναμα $(A + vv^T)X = I$. Για το σκοπό αυτό αρκεί να βρούμε πίνακα X και $y \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ώστε

$$\begin{cases} AX + vy = I \\ v^T X - y = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} A & v \\ v^T & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνουμε:

$$\begin{aligned} X = A^{-1}(I - vy) \Longrightarrow v^T X = v^T A^{-1}(I - vy) \Longrightarrow y = v^T A^{-1}(I - vy) \\ \iff (1 + v^T A^{-1} v)y = v^T A^{-1} \end{aligned}$$

και αφού $v^T A^{-1} v \neq -1$, έπεται ότι

$$y = \frac{v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} v}.$$

Άρα,

$$X = A^{-1} - \frac{A^{-1} v v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} v}.$$

□

Λήμμα 2.2.2. *Αν A είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και $v \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα, τότε*

$$\det(A + vv^T) = \det(A)(1 + v^T A^{-1} v). \tag{2.2.2}$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα οτι ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} I & O \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + A^{-1}vv^T & A^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & O \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}v \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}v \\ 0 & 1 + v^T A^{-1} v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Παίρνοντας ορίζουσες και στα δύο μέλη έχουμε:

$$\det(I + A^{-1} vv^T) = 1 + v^T A^{-1} v,$$

και πολλαπλασιάζοντας με $\det(A)$ και τα δύο μέλη παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Πρόταση 2.2.3. *Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα A και κάθε πίνακα B ίδιας διάστασης με τον A έχουμε*

$$\partial_t \det(A + tB) = \det(A + tB)\,\mathrm{Tr}((A + tB)^{-1} B).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\partial_t \det(A+tB) &= \partial_s \det(A+tB+sB)\big|_{s=0}\\ &= \det(A+tB)\cdot \partial_s \det(I+s(A+tB)^{-1}B)\big|_{s=0}.\end{aligned}$$

Θέτουμε $C=(A+tB)^{-1}B$. Τότε παίρνουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned}\partial_s \det(I+sC)\big|_{s=0} &= \partial_s \det s^n(\frac{1}{s}I+C)\big|_{s=0}\\ &= \partial_s \chi[-C](\frac{1}{s})\big|_{s=0},\end{aligned}$$

όπου $\chi[-C](\frac{1}{s})$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $-C$ υπολογισμένο στην τιμή $\frac{1}{s}$. Χρησιμοποιώντας γνωστή από τη γραμμική άλγεβρα σχέση για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\chi[-C](\frac{1}{s}) = \frac{1}{s^n} + \mathrm{Tr}(C)\frac{1}{s^{n-1}} + \cdots + (1)^{n+1}\det(-C).$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\partial_s \chi[-C](\frac{1}{s})\big|_{s=0} &= \partial_s(1+\mathrm{Tr}(C)s+\cdots+(-1)^{n+1}\det(-C)s^n)\big|_{s=0}\\ &= \mathrm{Tr}(C).\end{aligned}$$

Τελικά

$$\partial_t \det(A+tB) = \det(A+tB)\,\mathrm{Tr}((A+tB)^{-1}B)$$

□

Θεώρημα 2.2.4 (Courant-Fisher). *Οι ιδιοτιμές $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ενός συμμετρικού πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ χαρακτηρίζονται ως εξής:*

$$\lambda_k = \max_{\{S:\dim S=n-k+1\}} \min_{v\in S\setminus\{0\}} \frac{v^TAv}{v^Tv} = \min_{\{S:\dim S=k\}} \max_{v\in S\setminus\{0\}} \frac{v^TAv}{v^Tv},$$

όπου με S συμβολίζουμε υποχώρους του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι τα $u_1,\ldots,u_n$ είναι ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του A (από το φασματικό θεώρημα), που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.

Θέτουμε $W_k = \mathrm{span}\{u_1,\ldots,u_k\}$ να είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα πρώτα k ιδιοδιανύσματα $u_1,\ldots,u_k$. Αν S είναι τυχών υπόχωρος διάστασης $n-k+1$, παρατηρούμε ότι $\dim(W_k\cap S)\geqslant 1$, αφού

$$n \geqslant \dim(W_k+S) = \dim W_k + \dim S - \dim(W_k\cap S) = n+1-\dim(W_k\cap S).$$

Έστω $v \in W_k \cap S$. Παρατηρούμε ότι $v = \sum_{j=1}^{k} \langle v, u_j \rangle u_j$ και $Au_j = \lambda_j u_j$. Άρα,

$$\frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|^2} = \frac{\langle \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle v, u_j\rangle u_j, v\rangle}{\|v\|_2^2} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j |\langle v, u_j\rangle|^2}{\sum_{j=1}^{k} |\langle v, u_j\rangle|^2} \leqslant \lambda_k.$$

Άρα,

$$\min_{v\in S\setminus\{0\}} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_2^2} = \inf_{v\in S\setminus\{0\}} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_2^2} \leqslant \lambda_k,$$

όπου η ισότητα ισχύει αφού

$$\inf_{v\in S\setminus\{0\}} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_2^2} = \inf_{v\in S, \|v\|_2=1} \langle Av, v\rangle = \min_{v\in S, \|v\|_2=1} \langle Av, v\rangle,$$

επειδή το σύνολο $\{v \in S, \|v\|_2 = 1\}$ είναι συμπαγές. Δηλαδή,

$$\sup_{\{S:\dim S=n-k+1\}} \min_{v\in S\setminus\{0\}} \frac{v^T Av}{v^T v} \leqslant \lambda_k.$$

Παρατηρούμε ότι για $S = \mathrm{span}\{u_k, \dots, u_n\}$ έχουμε ότι

$$\min_{v\in S\setminus\{0\}} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_2^2} = \lambda_k.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\sup_{\{S:\dim S=n-k+1\}} \min_{v\in S\setminus\{0\}} \frac{v^T Av}{v^T v} &= \sup_{\{S:\dim S=n-k+1\}} \min_{v\in S\setminus\{0\}} \frac{\langle Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \\ &= \max_{\{S:\dim S=n-k+1\}} \min_{v\in S\setminus\{0\}} \frac{\langle Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \lambda_k.\end{aligned}$$

Για την άλλη ισότητα δουλεύουμε ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, θέτοντας αρχικά $W_k = \mathrm{span}\{u_k, \dots, u_n\}$. □

Κεφάλαιο 3

Φασματική αραιοποίηση και περιορισμένη αντιστρεψιμότητα

Έστω B τυχών $n \times m$ πίνακας με $m \geqslant n$ και έστω $0 < \epsilon < 1$. Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Θεώρημα (φασματική αραιοποίηση). *Υπάρχει διαγώνιος πίνακας $S_{m\times m} \succeq 0$ με το πολύ $\lceil \frac{n}{\epsilon^2} \rceil$ μη μηδενικά στοιχεία, ώστε*

$$(1-\epsilon)^2 BB^T \preceq BSB^T \preceq (1+\epsilon)^2 BB^T.$$

Θεώρημα (περιορισμένη αντιστρεψιμότητα). *Υπάρχει διαγώνιος πίνακας $S_{m\times m}$ με τουλάχιστον $k = (1-\epsilon)^2 \frac{\|B\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|B\|_2^2}$ μη μηδενικά στοιχεία όλα ίσα με 1, ώστε ο πίανακας BSB^T να έχει k μη μηδενικές ιδιοτιμές μεγαλύτερες ή ίσες από $\epsilon^2 \frac{\|B\|_{\mathrm{HS}}^2}{m}$.*

Τα δύο αυτά θεωρήματα αποτελούν τον πυρήνα της διδακτορικής διατριβής του N. Srivastava [52], η οποία είναι η βασική αναφορά μας για το κεφάλαιο. Η απόδειξη των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων βασίζεται σε μια καινούρια μέθοδο που αναπτύχθηκε στα [7], [51], τη «μέθοδο των εμποδίων». Μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας οι συγγραφείς προσδιορίζουν άνω και κάτω φράγματα (εμπόδια) για τις ιδιοτιμές ενός θετικά ημιορισμένου συμμετρικού πίνακα, μελετώντας σε κάθε βήμα τη συμπεριφορά κατάλληλων «συναρτήσεων δυναμικού» όταν τα ορίσματα αυτών διαταράσσονται από πίνακες τάξης 1. Το πολυδιάστατο ανάλογο της μεθόδου, που εμφανίζεται για πρώτη φορά στα [43] και [44], θα μας απασχολήσει στη συνέχεια της εργασίας, ειδικότερα στην απόδειξη της εικασίας των Kadison και Singer.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι αποδείξεις είναι κατασκευαστικές και μπορούν να μετατραπούν σε αλγόριθμους που τρέχουν σε πολυωνυμικό χρόνο.

3.1 Φασματική αραιοποίηση

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω A ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας τάξης n που γράφεται στη μορφή*

$$A = \sum_{j=1}^{m} w_j w_j^T,$$

όπου $w_j \in \mathbb{R}^n$. Για κάθε $0 < \epsilon < 1$ υπάρχουν μη αρνητικοί αριθμοί $\{s_j\}_{j \leqslant m}$, το πολύ $\lceil \frac{n}{\epsilon^2} \rceil$ από τους οποίους είναι μη μηδενικοί, ώστε να ισχύει:

$$(1-\epsilon)^2 A \preceq \tilde{A} := \sum_{j=1}^{m} s_j w_j w_j^T \preceq (1+\epsilon)^2 A. \tag{3.1.1}$$

Στο υπόλοιπο της ενότητας θα ασχοληθούμε με την απόδειξη του εξής ισοδύναμου, όπως θα δούμε, αποτελέσματος, το οποίο μας λέει ότι αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $A = I$.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω $d > 1$ και $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ ώστε*

$$I = \sum_{j=1}^{m} v_j v_j^T.$$

Τότε, υπάρχουν μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί $\{s_j\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$, με $|\{j : s_j \neq 0\}| \leqslant dn$, ώστε

$$I \preceq \sum_{j=1}^{m} s_j v_j v_j^T \preceq \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1} \right)^2 I.$$

Το επιχείρημα που ακολουθεί μας επιτρέπει να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.1.1 από το Θεώρημα 3.1.2.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν πίνακα A τάξης n, ο οποίος είναι της μορφής

$$A = \sum_{j=1}^{m} w_j w_j^T.$$

Θέτουμε $v_j = A^{-1/2} w_j$ και παρατηρούμε ότι

$$\sum_{j=1}^{m} v_j v_j^T = A^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^{m} w_j w_j^T \right) A^{-1/2} = I.$$

Για $d = \frac{1}{\epsilon^2}$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.2 βλέπουμε ότι υπάρχουν αριθμοί $\{s_j \geqslant 0\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$, από τους οποίους το πολύ $\lceil \frac{n}{\epsilon^2} \rceil$ είναι μη μηδενικοί, ώστε

$$I \preceq \sum_{j=1}^{m} s_j v_j v_j^T \preceq \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1} \right)^2 I = \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^2 I.$$

Ορίζοντας λοιπόν $\tilde{A} = (1-\epsilon)^2 \sum_{j=1}^{m} s_j w_j w_j^T$ έχουμε ότι

$$I \preceq (1-\epsilon)^{-2} A^{-1/2} \tilde{A} A^{-1/2} \preceq \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^2 I,$$

και άρα το συμπέρασμα. □

3.1α΄ Διαισθητική περιγραφή της μεθόδου

Είναι γνωστό ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A + vv^T$ διαπλέκονται με τις ιδιοτιμές του A. Για να το δούμε αυτό, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2.2.2 για να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A + vv^T$: έχουμε

$$\chi[A + vv^T](x) = \det(xI - A - vv^T) = \chi[A](x) \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, u_i \rangle^2}{x - \lambda_i} \right), \tag{3.1.2}$$

όπου λ_i είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A και u_i τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Το πολυώνυμο $\chi[A + vv^T](x)$ έχει ρίζες λ δύο ειδών:

(i) Εκείνες για τις οποίες ισχύει ταυτόχρονα $\chi[A](\lambda) = 0$. Αυτό συμβαίνει για εκείνες τις ιδιοτιμές λ_i του A που τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους u_i είναι κάθετα στο v.

(ii) Εκείνες για τις οποίες $\chi[A](\lambda) \neq 0$ και

$$f(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, u_i \rangle^2}{\lambda - \lambda_i} = 0. \tag{3.1.3}$$

Αυτά τα λ είναι οι ιδιοτιμές οι οποίες έχουν μετακινηθεί και έχουν βρεθεί σε θέσεις ανάμεσα στις σταθερές ιδιοτιμές της περίπτωσης (i), χωρίς να αλλάξει συνολικά η αντιστοιχία στη διάταξη μεταξύ παλιών και νέων ιδιοτιμών. Πράγματι, υποθέτουμε προς άτοπο ότι για κάποιο s υπάρχουν λ_s, λ_{s+1} σταθερές ιδιοτιμές της περίπτωσης (i) ώστε στο διάστημα $(\lambda_s, \lambda_{s+1})$ να υπάρχουν δύο λύσεις $x_1 < x_2$ της (3.1.3). Τότε προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, u_i \rangle^2}{x_1 - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, u_i \rangle^2}{x_2 - \lambda_i}.$$

Ισοδύναμα, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle^2 \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - \lambda_i)(x_2 - \lambda_i)} = 0,$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο αφού σε κάθε όρο του αθροίσματος η ποσότητα $(x_1 - \lambda_i)(x_2 - \lambda_i)$ παραμένει θετική.

Στη συνέχεια, ο Srivastava δίνει ένα φυσικό μοντέλο που εξηγεί την (3.1.3). Στο μοντέλο αυτό οφείλεται το όνομα της μεθόδου των εμποδίων. Κάνουμε μια απόπειρα να το περιγράψουμε. Για περισσότερες λεπτομέριες παραπέμπουμε στα [52] και [46, σελ. 7].

Φανταστείτε ένα κεκλιμένο επίπεδο, του οποίου την ευθεία κλίσης ταυτίζουμε με τους πραγματικούς αριθμούς. Στις θέσεις όπου βρίσκονται οι ιδιοτιμές του πίνακα A, τοποθετούμε εγκάρσια, αφόρτιστα αρχικά, εμπόδια. Θεωρούμε τώρα n αρνητικά φορτισμένα σωματίδια ίσης μάζας τα οποία ισορροπούν στις θέσεις λ_j, $j = 1, \ldots, n$ που ορίζουν τα εμπόδια, λόγω της επίδρασης της βαρύτητας. Η πρόσθεση του τάξης 1 πίνακα vv^T στον A, αντιστοιχεί στο να φορτίσουμε με αρνητικό φορτίο μεγέθους $\langle v, u_j \rangle^2$ τα εμπόδια στις θέσεις λ_j. Υποθέτουμε ότι κάθε φορτίο στα εμπόδια απωθεί το αντίστοιχο φορτίο του σωματιδίου με δύναμη ανάλογη με το φορτίο του εμποδίου και αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης του σωματιδίου από το εμπόδιο. Δηλαδή η δύναμη που δέχεται το σωματίδιο j από το εμπόδιο λ_j είναι ίση με

$$\frac{\langle v, u_j \rangle^2}{\lambda - \lambda_j},$$

με θετική φορά την διεύθυνση προς τα πάνω, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Επομένως, τα σωματίδια στα οποία αντιστοιχεί μη μηδενικό φορτίο στο εμπόδιο, μετακινούνται προς τα πάνω μέχρι να φτάσουν στο σημείο ισορροπίας τους, το οποίο δίνεται από τη συνισταμένη των απωστικών δυνάμεων από τα εμπόδια και της δύναμης της βαρύτητας που δέχονται τα σωματίδια. Τα σημεία ισορροπίας των σωματιδίων που μετακινήθηκαν, προσδιορίζονται από τις λύσεις της εξίσωσης (3.1.3) και αντιστοιχούν στις νέες ιδιοτιμές.

Με το παραπάνω μοντέλο στο νου μας, υπολογίζουμε το αναμενόμενο φορτίο που συνεισφέρει ένα τυχαία επιλεγμένο διάνυσμα $v \in \{v_i\}_{i=1}^m$ στο εμπόδιο λ_j ή πιο ορθά τη μέση τιμή του τετραγώνου της προβολής του τυχαίου v στο ιδιοδιάνυσμα u_j. Έχουμε:

$$\mathbb{E}_v \langle v, u_j \rangle^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, u_j \rangle^2 = \frac{1}{m} u_j^T \left(\sum_{i=1}^{m} v_i v_i^T \right) u_j = \frac{\|u_j\|_2^2}{m} = \frac{1}{m}.$$

Φυσικά, δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει v στο σύνολο των διανυσμάτων μας που να υλοποιεί την αναμενόμενη συμπεριφορά, ωστόσο αν υπήρχε, αυτό θα σήμαινε τη σταθερή μετακίνηση προς τα εμπρός όλων των εμποδίων σε κάθε βήμα. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να περιμένουμε ότι ύστερα από αρκετά μεγάλο πλήθος επαναλήψεων της παραπάνω διαδικασίας όλες οι ιδιοτιμές θα μετακινούνται προς τα εμπρός, χωρίς καμία να βρίσκεται πολύ μπροστά, ή πολύ πίσω, δηλαδή ο λόγος $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ θα παραμένει φραγμένος.

Η παραπάνω διαίσθηση πράγματι επαληθεύεται. Από τη σχέση (3.1.2) και το γεγονός ότι $\chi[A]'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i}(x - \lambda_j)$, για το διάνυσμα $v_{\text{avg}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{n} u_j$ με ίσες προβολές στα u_j έχουμε

$$\chi[A + v_{\text{avg}} v_{\text{avg}}^T](x) = \chi[A](x) \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1/m}{x - \lambda_i}\right) = \chi[A](x) - \frac{1}{m}\chi[A]'(x).$$

Αν ξεκινήσουμε με $A = 0$, δηλαδή με $\chi_0(x) = x^n$, μετά από k επαναλήψεις παίρνουμε το πολυώνυμο

$$\chi_k(x) = (I - 1/mD)^k x^n,$$

όπου D ο τελεστής παραγώγισης ώς προς x. Δημιουργούμε έτσι μια γνωστή ορθογώνια οικογένεια πολυωνύμων, τα πολυώνυμα Laguerre.([19]). Τα πολυώνυμα αυτά έχουν μελετηθεί αρκετά και η θέση των ριζών τους είναι γνωστή. Ειδικότερα, μετά από $k = dn$ επαναλήψεις, ο λόγος της μεγαλύτερης ρίζας προς τη μικρότερη τείνει στην τιμή

$$\left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}\right)^2,$$

καθώς $n \to \infty$, που είναι ακριβώς το ζητούμενο φράγμα.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.1.2 θα δείξουμε ότι μπορούμε να διαλέξουμε μια πεπερασμένη ακολουθία διανυσμάτων v_i με κατάλληλα βάρη s_i στο καθένα, ώστε να υλοποιούν την αναμενόμενη συμπεριφορά που περιγράφηκε παραπάνω. Θα ελέγχουμε τις ιδιοτιμές του νέου πίνακα που προκύπτει σε κάθε βήμα, διατηρώντας μόνο δύο από τα αρχικά εμπόδια, το πρώτο και το τελευταίο, και κρατώντας τις ιδιοτιμές ανάμεσά τους. Το κάτω εμπόδιο θα απωθεί τις ιδιοτιμές, σπρώχνοντάς τες προς τα εμπρός, ενώ το άνω εμπόδιο θα τις συγκρατεί ώστε να μην φύγουν πολυ μακρυά. Σε κάθε βήμα, και τα δύο εμπόδια θα μετακινούνται προς τα εμπρός, με σταθερό ρυθμό. Κρατώντας φραγμένη την «ολική απώθηση»(δυναμικό) σε κάθε βήμα, θα δείξουμε ότι υπάρχει κατάλληλο διάνυσμα και κατάλληλο βάρος για αυτό, ώστε ο τάξης 1 πίνακας που δημιουργεί, προστιθέμενος στον πίνακα του προηγούμενου βήματος, να επιτρέπει να συνεχιστεί η διαδικασία. Η διαδικασία θα τελειώσει όταν πετύχουμε το κατάλληλο φράγμα για το δυναμικό.

3.1β′ Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2

Έστω $u, \ell \in \mathbb{R}$ και έστω A ένας συμμετρικός $n\times n$ πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ξεκινάμε ορίζοντας τις εξής ποσότητες:

Ορισμός 3.1.3 (άνω δυναμικό)**.**

$$\Phi^u(A) := \mathrm{Tr}(uI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u - \lambda_i}.$$

Ορισμός 3.1.4 (κάτω δυναμικό)**.**

$$\Phi_\ell(A) := \mathrm{Tr}(A - \ell I)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i - \ell}.$$

Παρατήρηση 3.1.5. Οι δύο αυτές συναρτήσεις μετράνε πόσο μακρυά βρίσκονται οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ από τις θέσεις των εμποδίων u και ℓ. Όταν, λόγου χάρη, μια ιδιοτιμή λ_k πλησιάζει το u, το $\Phi^u(A)$ εκρήγνυται αφού ο πίνακας $uI - A$ τείνει να γίνει ιδιάζων.

Παρατήρηση 3.1.6. Έχουμε

$$\ell I \prec A \prec uI \iff \ell < \lambda_{\min}(A) \leqslant \lambda_{\max}(A) < u.$$

Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{\lambda_{\max}(\tilde{A})}{\lambda_{\min}(\tilde{A})} \leqslant \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}\right)^2,$$

όπου $\tilde{A} = \sum_{j=1}^{m} s_j v_j v_j^T$. Για να δείξουμε το ζητούμενο θα ακολουθήσουμε την εξής επαναληπτική διαδικασία: θα κατασκευάσουμε τον πίνακα $\tilde{A}$ προσθέτοντας έναν όρο της μορφής $v_j v_j^T$ σε κάθε βήμα και προσδιορίζοντας το κατάλληλο βάρος s_j. Πιο συγκεκριμένα, έστω u_0, δ_U, δ_L, ϵ_U και ϵ_L θετικές σταθερές και $\ell_0 < 0$ (θα επιλεγούν στη συνέχεια) για τις οποίες ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Αρχικά $A^{(0)} = 0$, τα εμπόδια βρίσκονται στις θέσεις $u = u_0$, $\ell = \ell_0$ και τα δυναμικά έχουν τις τιμές $\Phi^{u_0}(A^{(0)}) = \epsilon_U$ και $\Phi_{\ell_0}(A^{(0)}) = \epsilon_L$.

(ii) Κάθε πίνακας $A^{(q+1)}$ προκύπτει από τον προηγούμενο $A^{(q)}$ θέτοντας $A^{(q+1)} = A^{(q)} + svv^T$ για κατάλληλο $s > 0$ και $v \in \{v_j : j = 1, \ldots, m\}$.

(iii) Για κάθε βήμα $q = 0, 1, \ldots, Q$, όπου $Q = dn$,

$$\Phi^{u+\delta_U}(A^{(q+1)}) \leqslant \Phi^u(A^{(q)}) \leqslant \epsilon_U$$

και

$$\Phi_{\ell+\delta_L}(A^{(q+1)}) \leqslant \Phi_\ell(A^{(q)}) \leqslant \epsilon_L,$$

δηλαδή αν μετακινήσουμε τα εμπόδια κατά δ_U και δ_L, τα αντίστοιχα δυναμικά $\Phi^u(A^{(q)})$ και $\Phi_\ell(A^{(q)})$ δεν αυξάνονται στο επόμενο βήμα.

(iv) Καμία ιδιοτιμή δεν ξεπερνά ποτέ κανένα εμπόδιο, δηλαδή για κάθε $q = 0, 1, \cdots, Q$:

$$\ell_0 + q\delta_L < \lambda_{\min}(A^{(q)}) \leqslant \lambda_{\max}(A^{(q)}) < u_0 + q\delta_U.$$

Για να τελειώσει η απόδειξη, μένει να επιλεγούν τα u_0, v_0, δ_U, δ_L, ϵ_U και ϵ_L έτσι ώστε μετά από $Q = dn$ βήματα να ισχύει:

$$\frac{\lambda_{\max}(A^{(Q)})}{\lambda_{\min}(A^{(Q)})} \leqslant \frac{u_0 + dn\delta_U}{\ell_0 + dn\delta_L} \leqslant \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}\right)^2. \tag{3.1.4}$$

Η μεγαλύτερη τεχνική δυσκολία της απόδειξης έγκειται στο να ικανοποιούνται τα (ii) και (iii) ταυτόχρονα, δηλαδή να είναι πάντα δυνατή η επιλογή ενός πίνακα vv^T που μπορεί να προστεθεί στον εκάστοτε πίνακα A ώστε να μπορούμε να προωθήσουμε και τα δύο εμπόδια με σταθερό ρυθμό σε κάθε βήμα, χωρίς να αυξάνονται τα αντίστοιχα δυναμικά. Η δυσκολία αυτή γίνεται εφικτό να ξεπεραστεί με τα ακόλουθα τρία λήμματα.

Λήμμα 3.1.7 (προώθηση άνω εμποδίου)**.** *Έστω ότι $\lambda_{\max}(A) \leqslant u$ και έστω v τυχόν διάνυσμα. Αν*

$$\mathbb{U}_A(v) := \frac{v^T((u+\delta_U)I - A)^{-2}v}{\Phi^u(A) - \Phi^{u+\delta_U}(A)} + v^T((u+\delta_U)I - A)^{-1}v \leqslant \frac{1}{t} \tag{3.1.5}$$

τότε

$$\Phi^{u+\delta_U}(A + tvv^T) \leqslant \Phi^u(A)$$

και

$$\lambda_{\max}(A + tvv^T) < u + \delta_U.$$

Δηλαδή, αν προσθέσουμε t φορές τον πίνακα vv^T στον A και μετακινήσουμε το άνω εμπόδιο κατά δ_U, τότε το άνω δυναμικό δεν αυξάνεται.

Απόδειξη. Έστω $u' = u + \delta_U$. Από την Πρόταση 2.2.1 έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Phi^{u+\delta_U}(A + tvv^T) &= \mathrm{Tr}(u'I - A - tvv^T)^{-1} \\
&= \mathrm{Tr}\left((u'I - A)^{-1} + \frac{t(u'I - A)^{-1}vv^T(u'I - A)^{-1}}{1 - tv^T(u'I - A)^{-1}v}\right) \\
&= \mathrm{Tr}((u'I - A)^{-1}) + \frac{t\mathrm{Tr}(v^T(u'I - A)^{-1}(u'I - A)^{-1}v)}{1 - tv^T(u'I - A)^{-1}v} \\
&= \mathrm{Tr}((u'I - A)^{-1}) + \frac{tv^T(u'I - A)^{-2}v}{1 - tv^T(u'I - A)^{-1}v} \\
&= \Phi^{u+\delta_U}(A) + \frac{tv^T(u'I - A)^{-2}v}{1 - tv^T(u'I - A)^{-1}v} \\
&= \Phi^u(A) - (\Phi^u(A) - \Phi^{u+\delta_U}(A)) + \frac{v^T(u'I - A)^{-2}v}{1/t - v^T(u'I - A)^{-1}v},
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

όπου για τις παραπάνω ισότητες χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα του ίχνους, το γεγονός ότι $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, το ότι ο πίνακας $(u'I - A)^{-2}$ είναι συμμετρικός και τέλος τους ορισμούς του εξωτερικού γινομένου και του άνω δυναμικού. Παρατηρούμε τώρα ότι λόγω της υπόθεσης έχουμε:

$$\frac{1}{t} - v^T(u'I - A)^{-1}v > 0,$$

επομένως η (3.1.5) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{v^T(u'I - A)^{-2}v}{\Phi^u(A) - \Phi^{u+\delta_U}(A)} \leqslant \frac{1}{t} - v^T(u'I - A)^{-1}v,$$

δηλαδή

$$\frac{v^T(u'I - A)^{-2}v}{1/t - v^T(u'I - A)^{-1}v} - (\Phi^u(A) - \Phi^{u+\delta_U}(A)) \leqslant 0.$$

Τότε, η (3.1.6) μας δίνει

$$\Phi^{u+\delta_U}(A + tvv^T) \leqslant \Phi^u(A).$$

Η παραπάνω σχέση δίνει επιπλέον ότι

$$\lambda_{\max}(A + tvv^T) < u + \delta_U,$$

γιατί σε διαφορετική περίπτωση θα υπήρχε $t' \leqslant t$ ώστε $\lambda_{\max}(A+t'vv^T) = u+\delta_U$ (λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας της συνάρτησης $\lambda_{\max}(A + tvv^T)$ ως προς t, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής). Όμως για ένα τέτοιο t' η $\Phi^{u+\delta_U}(A + t'vv^T)$ εκρήγνυται, ενώ το t' ικανοποιεί την (3.1.5) και ο προηγούμενος υπολογισμός δείχνει ότι θα έπρεπε να ισχύει η $\Phi^{u+\delta_U}(A + t'vv^T) \leqslant \Phi^u(A)$. □

Το δεύτερο λήμμα αφορά τη μετακίνηση του κάτω εμποδίου. Μετακινώντας το ℓ στη θέση $\ell+\delta_L$ και κρατώντας τον πίνακα A σταθερό, το κάτω δυναμικό $\Phi_\ell(A)$ αυξάνεται καθώς το εμπόδιο ℓ πλησιάζει τις ιδιοτιμές του A. Έτσι, προσθέτοντας στον A έναν πίνακα της μορφής tvv^T οι ιδιοτιμές του $A+vv^T$ μετακινούνται μπροστά και μακρυά από το εμπόδιο, με αποτέλεσμα το δυναμικό να μειώνεται. Παρακάτω υπολογίζεται η τιμή του t έτσι ώστε μετά τη μετακίνηση του εμποδίου στη νέα του θέση, το νέο δυναμικό $\Phi_{\ell+\delta_L}(A+tvv^T)$ να μην έχει αυξηθεί.

Λήμμα 3.1.8 (προώθηση κάτω εμποδίου)**.** *Έστω ότι $\lambda_{\min}(A)\geqslant \ell$, $\Phi_\ell(A)<\frac{1}{\delta_L}$ και έστω $v\in\mathbb{R}^n$ τυχόν διάνυσμα. Αν*

$$\mathbb{L}_A(v):=\frac{v^T(A-(\ell+\delta_L)I)^{-2}v}{\Phi_{\ell+\delta_L}(A)-\Phi_\ell(A)}-v^T(A-(\ell+\delta_L)I)^{-1}v\geqslant\frac{1}{t}>0,$$

τότε

$$\Phi_{\ell+\delta_L}(A+tvv^T)\leqslant\Phi_\ell(A) \tag{3.1.7}$$

και

$$\lambda_{\min}(A+tvv^T)>\ell+\delta_L.$$

Δηλαδή, αν προσθέσουμε t φορές τον πίνακα vv^T στον A και μετακινήσουμε το κάτω εμπόδιο κατά δ_L, τότε το κάτω δυναμικό δεν αυξάνεται.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι από τις υποθέσεις του λήμματος ισχύει

$$\lambda_{\min}(A)>\ell+\delta_L.$$

Άρα, για κάθε $t>0$,

$$\lambda_{\min}(A+tvv^T)>\ell+\delta_L.$$

Για την απόδειξη της (3.1.7) δουλεύουμε όπως στο προηγούμενο λήμμα. Θέτουμε $\ell'=\ell+\delta_L$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\Phi_{\ell+\delta_L}(A+tvv^T)&=\mathrm{Tr}(A+tvv^T-\ell' I)^{-1}\\
&=\mathrm{Tr}\left((A-\ell' I)^{-1}-\frac{t(A-\ell' I)^{-1}vv^T(A-\ell' I)^{-1}}{1+tv^T(A-\ell' I)^{-1}v}\right)\\
&=\mathrm{Tr}(A-\ell' I)^{-1}-\frac{t\mathrm{Tr}(v^T(A-\ell' I)^{-1}(A-\ell' I)^{-1}v)}{1+tv^T(A-\ell' I)^{-1}v}\\
&=\Phi_{\ell+\delta_L}(A)-\frac{tv^T(A-\ell' I)^{-2}v}{1+tv^T(A-\ell' I)^{-1}v}\\
&=\Phi_\ell(A)+(\Phi_{\ell+\delta_L}(A)-\Phi_\ell(A))-\frac{v^T(A-\ell' I)^{-2}v}{1/t+v^T(A-\ell' I)^{-1}v}
\end{aligned}$$

Αναδιατάσσοντας την ανισότητα $\mathbb{L}_A(v) \geqslant \frac{1}{t}$ της υπόθεσης έχουμε το συμπέρασμα όπως πριν. $\square$

Το τρίτο λήμμα προσδιορίζει τις συνθήκες εκείνες κάτω από τις οποίες μπορούμε να βρούμε κατάλληλο πίνακα tvv^T ώστε και τα δύο δυναμικά να διατηρούνται φραγμένα καθώς μετακινούνται τα εμπόδια, ώστε να μπορούμε να συνεχίσουμε την διαδικασία. Η απόδειξη βασίζεται σε ένα επιχείρημα μέσης τιμής.

Λήμμα 3.1.9. *Αν τα $\lambda_{\max}(A) < u$, $\lambda_{\min}(A) > \ell$, $\Phi^u(A) \leqslant \epsilon_U$, $\Phi^\ell(A) \leqslant \epsilon_L$ και $\epsilon_U, \epsilon_L, \delta_U, \delta_L$ ικανοποιούν τη σχέση*

$$0 \leqslant \frac{1}{\delta_U} + \epsilon_U \leqslant \frac{1}{\delta_L} - \epsilon_L, \tag{3.1.8}$$

τότε υπάρχουν $i \in [m]$ και $t > 0$ για τα οποία

$$\mathbb{L}_A(v_j) \geqslant \frac{1}{t} \geqslant \mathbb{U}_A(v_j), \quad \lambda_{\max}(A + tv_jv_j^T) < u + \delta_U \quad \textit{και} \quad \lambda_{\min}(A + tv_jv_j^T) \geqslant \ell + \delta_L.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{j=1}^m \mathbb{L}_A(v_j) \geqslant \sum_{j=1}^m \mathbb{U}_A(v_j),$$

απ' όπου παίρνουμε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 3.1.7 και 3.1.8. Ξεκινάμε φράσσοντας το $\sum_{j=1}^m \mathbb{U}_A(v_j)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m \mathbb{U}_A(v_j) &= \frac{\sum_{j=1}^m v_j^T((u+\delta_U)I - A)^{-2}v_j}{\Phi^u(A) - \Phi^{u+\delta_U}(A)} + \sum_{j=1}^m v_j^T((u+\delta_U)I - A)^{-1}v_j \\
&= \frac{((u+\delta_U)I - A)^{-2} \bullet (\sum_{j=1}^m v_jv_j^T)}{\Phi^u(A) - \Phi^{u+\delta_U}(A)} + ((u+\delta_U)I - A)^{-1} \bullet \left(\sum_{j=1}^m v_jv_j^T\right) \\
&= \frac{\mathrm{Tr}\left(((u+\delta_U)I - A)^{-2}\right)}{\Phi^u(A) - \Phi^{u+\delta_U}(A)} + \mathrm{Tr}\left(((u+\delta_U)I - A)^{-1}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(u+\delta_U-\lambda_i)^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{u-\lambda_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{u+\delta_U-\lambda_i}} + \Phi^{u+\delta_U}(A) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (u+\delta_U-\lambda_i)^{-2}}{\delta_U \sum_{i=1}^n (u-\lambda_i)^{-1}(u+\delta_U-\lambda_i)^{-1}} + \Phi^{u+\delta_U}(A) \\
&\leqslant \frac{1}{\delta_U} + \Phi^{u+\delta_U}(A) \leqslant \frac{1}{\delta_U} + \Phi^u(A) \\
&\leqslant \frac{1}{\delta_U} + \epsilon_U,
\end{aligned}$$

όπου: για την δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις $\sum_{j=1}^m v_j v_j^T = I$ και $X \bullet I = \mathrm{Tr}(X)$, όπου X τυχών πίνακας, και για την πρώτη ανισότητα η

$$\sum_{i=1}^n (u+\delta_U-\lambda_i)^{-2} \leqslant \sum_{i=1}^n (u-\lambda_i)^{-1}(u+\delta_U-\lambda_i)^{-1}.$$

Για να φράξουμε το $\sum_{j=1}^m \mathbb{L}_A(v_j)$ θα χρειαστεί ο ακόλουθος ισχυρισμός:

Ισχυρισμός 3.1.10. *Αν* $\lambda_1 > \ell$ *για κάθε* $i = 1, \ldots, n$, *αν* $0 \leqslant \sum_{i=1}^n (u-\lambda_i)^{-1} \leqslant \epsilon_L$ *και* $\frac{1}{\delta_L} - \epsilon_L \geqslant 0$, *τότε*

$$\frac{\sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell-\delta_L)^{-2}}{\sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell-\delta_L)^{-1} - \sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell)^{-1}} - \sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell-\delta_L)^{-1} \geqslant \frac{1}{\delta_L} - \sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell)^{-1}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\delta_L \leqslant \frac{1}{\epsilon_L} \leqslant \lambda_i - \ell$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$, άρα

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell-\delta_L)^{-1} - \sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell)^{-1} \geqslant 0.$$

Η ανισότητα του ισχυρισμού είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell-\delta_L)^{-2} &\geqslant \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell-\delta_L)^{-1} - \sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell)^{-1}\right) \\
&\qquad \times \left(\frac{1}{\delta_L} + \sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell-\delta_L)^{-1} - \sum_{i=1}^n (\lambda_i-\ell)^{-1}\right) \\
&= \left(\delta_L \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda_i-\ell-\delta_L)(\lambda_i-\ell)}\right) \\
&\qquad \times \left(\frac{1}{\delta_L} + \delta_L \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda_i-\ell-\delta_L)(\lambda_i-\ell)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda_i-\ell-\delta_L)(\lambda_i-\ell)} + \left(\delta_L \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda_i-\ell-\delta_L)(\lambda_i-\ell)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$\delta_L \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda_i-\ell-\delta_L)^2(\lambda_i-\ell)} \geqslant \left(\delta_L \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda_i-\ell-\delta_L)(\lambda_i-\ell)}\right)^2.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\delta_L\sum_{i=1}^n\frac{1}{(\lambda_i-\ell-\delta_L)(\lambda_i-\ell)}\right)^2 &= \left(\delta_L\sum_{i=1}^n\frac{1}{(\lambda_i-\ell-\delta_L)\sqrt{\lambda_i-\ell}\sqrt{\lambda_i-\ell}}\right)^2\\ &\leqslant \left(\delta_L\sum_{i=1}^n(\lambda_i-\ell)^{-1}\right)\left(\delta_L\sum_{i=1}^n\frac{1}{(\lambda_i-\ell-\delta_L)^2(\lambda_i-\ell)}\right)\\ &\leqslant (\delta_L\epsilon_L)\left(\delta_L\sum_{i=1}^n\frac{1}{(\lambda_i-\ell-\delta_L)^2(\lambda_i-\ell)}\right)\\ &\leqslant \delta_L\sum_{i=1}^n\frac{1}{(\lambda_i-\ell-\delta_L)^2(\lambda_i-\ell)},\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ανισότητα ισχύει διότι $\sum_{i=1}^n(\lambda_i-\ell)^{-1}\leqslant\epsilon_L$, και η τελευταία λόγω της σχέσης $\frac{1}{\delta_L}-\epsilon_L\geqslant 0$. Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης. □

Μένει να δειχθεί ότι

$$\sum_{j=1}^m\mathbb{L}_A(v_j)\geqslant\frac{1}{\delta_L}-\epsilon_L,$$

οπότε από την (3.1.8) έχουμε το λήμμα. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m\mathbb{L}_A(v_j) &= \frac{\sum_{j=1}^m v_j^T(A-(\ell+\delta_L)I)^{-2}v_j}{\Phi_{\ell+\delta_L}(A)-\Phi_\ell(A)}-\sum_{j=1}^m v_j^T(A-(\ell+\delta_L)I)^{-1}v_j\\ &= \frac{\mathrm{Tr}\left((A-(\ell+\delta_L)I)^{-2}\right)}{\Phi_{\ell+\delta_L}(A)-\Phi_\ell(A)}-\mathrm{Tr}\left((A-(\ell+\delta_L)I)^{-1}\right)\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n(\lambda_i-\ell-\delta_L)^{-2}}{\sum_{i=1}^n(\lambda_i-\ell-\delta_L)^{-1}-\sum_{i=1}^n(\lambda_i-\ell)^{-1}}-\sum_{i=1}^n(\lambda_i-\ell-\delta_L)^{-1}\\ &\geqslant \frac{1}{\delta_L}-\sum_{i=1}^n(\lambda_i-\ell)^{-1}\geqslant\frac{1}{\delta_L}-\epsilon_L\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει το Λήμμα 3.1.9. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. Επιλέγουμε $\delta_U=\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$, $\delta_L=1$, $\epsilon_U=\frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+d}$, $\epsilon_L=\frac{1}{\sqrt{d}}$, $u_0=\frac{n}{\epsilon_U}$ και $\ell_0=-\frac{n}{\epsilon_L}$. Με αυτήν την επιλογή έχουμε

$$\frac{1}{\delta_U}+\epsilon_U=\frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}+\frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}(\sqrt{d}+1)}=1-\frac{1}{\sqrt{d}}=\frac{1}{\delta_L}-\epsilon_L.$$

Τα αρχικά δυναμικά είναι:

$$\Phi^{\frac{n}{\epsilon_U}}(0) = \operatorname{Tr}\left(\left((n/\epsilon_U)I\right)^{-1}\right) = \epsilon_U$$

και

$$\Phi_{-\frac{n}{\epsilon_L}}(0) = \epsilon_L.$$

Επιπλέον, $\lambda_{\max}(0) = 0$ και $\lambda_{\min}(0) = 0$. Άρα, οι υποθέσεις του Λήμματος 3.1.9 ικανοποιούνται τετριμμένα, οπότε βρίσκουμε τα ζητούμενα v_1 και s_1.

Υποθέτοντας τώρα ότι έχει κατασκευασθεί ο $A^{(q)}$, βρίσκουμε τον $A^{(q+1)}$ διαλέγοντας v_j έτσι ώστε

$$\mathbb{L}_{A^{(q)}}(v_j) \geqslant \mathbb{U}_{A^{(q)}}(v_j),$$

και θέτοντας

$$A^{(q+1)} = A^{(q)} + tv_jv_j^T$$

για κάποιον $t > 0$ ο οποίος ικανοποιεί την

$$\mathbb{L}_{A^{(q)}}(v_j) \geqslant \frac{1}{t} \geqslant \mathbb{U}_{A^{(q)}}(v_j).$$

Τέλος, από τη σχέση (3.1.4) έχουμε:

$$\frac{\lambda_{\max}(A^{(dn)})}{\lambda_{\min}(A^{(dn)})} \leqslant \frac{\frac{d+\sqrt{d}}{\sqrt{d}-1} + \frac{d\sqrt{d}+d}{\sqrt{d}-1}}{d-\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{d}(d+2\sqrt{d}+1)}{\sqrt{d}(\sqrt{d}-1)^2} = \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}\right)^2.$$

3.2 Περιορισμένη Αντιστρεψιμότητα

3.2α΄ Το Πρόβλημα

Αφετηρία μας είναι το επόμενο θεώρημα των Bourgain και Tzafriri.

Θεώρημα 3.2.1 (Bourgain-Tzafriri). *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c, d > 0$ ώστε αν B είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στήλες μοναδιαίου μήκους, τότε υπάρχει $S \subseteq [n]$ με πλήθος στοιχείων $|S| \geqslant \frac{cn}{\|B\|_2^2}$ ώστε να ισχύει $\sigma_{\min}(B_S) \geqslant d$, όπου B_S είναι ο $n \times |S|$ πίνακας που προκύπτει αν επιλέξουμε τις στήλες του B από το σύνολο δεικτών S, και $\sigma_{\min}(B_S)$ είναι η ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή του B_S.*

Ο Vershynin γενίκευσε αυτό το αποτέλεσμα προκειμένου να μελετήσει τα σημεία επαφής ενός κυρτού σώματος με το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του, μέσω της αναπαράστασης του John για την ταυτοτική απεικόνιση (βλέπε Κεφάλαιο 4). Ο Vershynin απέδειξε ότι, για κάθε αναπαράσταση της μορφής

$$I = \sum_{j=1}^{m} v_jv_j^T$$

και για κάθε γραμμικό τελεστή $L : \ell_2^n \longrightarrow \ell_2^n$, υπάρχει κάποιο σύνολο $S \subset [m]$ ώστε ο L να είναι αντιστρέψιμος στον υπόχωρο που παράγεται από το $\{v_j : j \in S\}$. Επιπλέον, το πλήθος των στοιχείων του S είναι τουλαχιστον ίσο με την ποσότητα $\frac{\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|L\|_2^2}$, η οποία ονομάζεται *ευσταθής δείκτης* του L και έχει την εξής φυσική ερμηνεία: είναι το πλήθος των διευθύνσεων τις οποίες ο τελεστής L διατηρεί ή διαστέλλει.

Θεώρημα 3.2.2 (Vershynin, Spielman-Srivastava)**.** *Έστω $v_1, \ldots, v_m$ διανύσματα στήλες στον $\mathbb{R}^n$ ώστε*

$$I = \sum_{j=1}^m v_j v_j^T,$$

και έστω $\epsilon \in (0,1)$. Έστω ακόμα $L : \ell_2^n \to \ell_2^n$ γραμμικός τελεστής. Υπάρχει $S \subseteq [m]$ μεγέθους $|S| \geqslant \epsilon^2 \frac{\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|L\|_2^2}$ ώστε το σύνολο $\{Lv_j : j \in S\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και

$$\lambda_{\min}\left(\sum_{j\in S}(Lv_j)(Lv_j)^T\right) > (1-\epsilon)^2 \frac{\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{m},$$

όπου η ιδιοτιμή $\lambda_{\min}$ υπολογίζεται στον υπόχωρο $\langle Lv_j : j \in S\rangle$.

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το Θεώρημα 3.2.1 προκύπτει από το Θεώρημα 3.2.2 με σταθερές $c(\varepsilon) = \varepsilon^2$ και $d(\varepsilon) = (1-\varepsilon)^2$, αν θεωρήσουμε την αναπαράσταση $I = \sum_{j=1}^n e_j e_j^T$, όπου $\{e_j : j = 1, \ldots, n\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και υποθέσουμε ότι ο τελεστής L ικανοποιεί την $\|Le_j\|_2 = 1$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$.

3.2β′ Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2

Η απόδειξη των Spielman και Srivastava που παρουσιάζουμε εδώ, είναι αρκετά σύντομη, βασίζεται σε στοιχειώδη γραμμική άλγεβρα και πετυχαίνει πολύ καλύτερες σταθερές από αυτήν του Vershynin. Ταυτόχρονα, δίνει και έναν ντετερμινιστικό αλγόριθμο για την εύρεση του συνόλου S. Για την απόδειξη κατασκευάζουμε επαγωγικά μια συνάρτηση δυναμικού (εμπόδιο), παρόμοια με αυτήν της απόδειξης του αποτελέσματος της προηγούμενης ενότητας, με τις εξής όμως διαφορές:

- Εδώ χρησιμοποιούμε μόνο ένα εμπόδιο, αντί για δύο, μιας και αναζητείται μόνο κάτω φράγμα για τις ιδιοτιμές που συνεισφέρει κάθε καινούριο στοιχείο του συνόλου S.

- Η επιπλέον ελευθερία που προκύπτει από το γεγονός ότι έχουμε μόνο ένα εμπόδιο, μας επιτρέπει να διασφαλίσουμε ότι τα βάρη (στην απόδειξη) είναι είτε 0 ή 1, χαρακτηρίζοντας με αυτήν την έννοια το σύνολο των διανυσμάτων στηλών που επιλέγονται.

Περιγράφουμε τώρα την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2.

Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά τον πίνακα $A = \sum_{j \in S}(Lv_j)(Lv_j)^T$ προσθέτοντας σε κάθε βήμα κατάλληλο διάνυσμα στο S. Ορίζουμε τη συνάρτηση δυναμικού

$$\begin{aligned}\Phi_b(A) &= \sum_{j=1}^{m}(Lv_j)^T(A-bI)^{-1}(Lv_j) = \sum_{j=1}^{m} v_j^T L^T (A-bI)^{-1} L v_j \\ &= L^T(A-bI)^{-1}L \bullet \sum_{j=1}^{m} v_j v_j^T = \mathrm{Tr}[(L^T(A-bI)^{-1}L)^T \bullet I] \\ &= \mathrm{Tr}[L^T(A-bI)^{-1}L],\end{aligned}$$

όπου το εμπόδιο b είναι ένας πραγματικός αριθμός που μεταβάλλεται από βήμα σε βήμα. Αρχικά θεωρούμε ότι $A = 0$ και $b = b_0 > 0$. Άρα, το παραπάνω δυναμικό είναι

$$\Phi_{b_0}(0) = \mathrm{Tr}[L^T(-b_0 I)^{-1}L] = -\frac{\mathrm{Tr}[L^T L]}{b_0} = -\frac{\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_0}.$$

Σε κάθε βήμα της διαδικασίας θα προσθέτουμε έναν πίνακα ww^T τάξης 1, όπου $w \in \{Lv_j\}_{j=1}^m$, και θα μετακινούμε το εμπόδιο b προς το 0 με σταθερό βήμα $\delta > 0$, εξασφαλίζοντας ότι δεν αυξάνεται το δυναμικό. Θέλουμε δηλαδή, σε κάθε βήμα, να ισχύει

$$\Phi_{b-\delta}(A + ww^T) \leqslant \Phi_b(A).$$

Η επιλογή του $w = Lv_j$ αντιστοιχεί στην επιλογή $j \in S$. Απαιτούμε μετά από k βήματα της διαδικασίας ο πίνακας A να έχει ακριβώς k μη μηδενικές ιδιοτιμές, όλες μεγαλύτερες από b. Κρατώντας το παραπάνω δυναμικό αρκούντως αρνητικό διασφαλίζουμε ότι υπάρχει κατάλληλο w για να προσθέσουμε σε κάθε βήμα.

Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου ενδιαφερόμαστε μόνο για διανύσματα w που προσθέτουν μία καινούρια ιδιοτιμή που είναι μεγαλύτερη από $b' = b - \delta$. Η αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα διανύσματα αυτά δίνεται στο λήμμα που ακολουθεί.

Λήμμα 3.2.3. *Έστω $A \succeq 0$ θετικά ημιορισμένος $n \times n$ πίνακας με k θετικές ιδιοτιμές όλες μεγαλύτερες από $b' > 0$. Αν $w \neq 0$ και*

$$w^T(A - b'I)^{-1}w < -1 \tag{3.2.1}$$

τότε ο $A + ww^T$ έχει $k+1$ θετικές ιδιοτιμές μεγαλύτερες από b'.

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$ οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του πίνακα A και έστω $\lambda'_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda'_{k+1}$ οι μεγαλύτερες (σε φθίνουσα διάταξη) ιδιοτιμές του $A + ww^T$. Από την Ενότητα

3.1 (α) έχουμε ότι οι καινούριες ιδιοτιμές του πίνακα $A + ww^T$ διαπλέκονται με τις παλιές, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$\lambda_1' \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2' \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant \lambda_{k+1}' \geqslant 0. \tag{3.2.2}$$

Θεωρούμε την ποσότητα

$$\mathrm{Tr}((A - b'I)^{-1}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i - b'} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{0 - b'}.$$

Από τον τύπο Sherman-Morisson έχουμε ότι

$$\mathrm{Tr}((A + ww^T - b'I)^{-1}) - \mathrm{Tr}((A - b'I)^{-1}) = -\frac{w^T(A - b'I)^{-2}w}{1 + w^T(A - b'I)^{-1}w}. \tag{3.2.3}$$

Από την υπόθεση (3.2.1) έχουμε ότι ο παρονομαστής στο δεξιό μέλος είναι αρνητικός. Επιπλέον, ο αριθμητής είναι θετικός αφού ο πίνακας $A - b'I$ είναι μη ιδιάζων και οι ιδιοτιμές του είναι $(-b', \dots, -b', \lambda_k - b', \dots, \lambda_1 - b')$, δηλαδή ο πίνακας $(A - b'I)^{-2}$ είναι θετικά ορισμένος. Αρα,

$$\mathrm{Tr}((A + ww^T - b'I)^{-1}) - \mathrm{Tr}((A - b'I)^{-1}) > 0.$$

Από την άλλη πλευρά, αν υπολογίσουμε απευθείας την παραπάνω διαφορά, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
0 &< \mathrm{Tr}((A + ww^T - b'I)^{-1}) - \mathrm{Tr}((A - b'I)^{-1}) \\
&= \frac{1}{\lambda_{k+1}' - b'} - \frac{1}{0 - b'} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i' - b'} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i - b'} \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda_{k+1}' - b'} + \frac{1}{b'},
\end{aligned}$$

διότι

$$\frac{1}{\lambda_i' - b'} - \frac{1}{\lambda_i - b'} \leqslant 0$$

για κάθε i, από την (3.2.2). Εφόσον $\lambda_{k+1}' \geqslant 0$, προκύπτει ότι $\lambda_{k+1}' > b'$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Υπολογίζουμε το καινούριο δυναμικό μετά από ένα βήμα, καθώς το εμπόδιο μετακινείται από τη θέση b στη θέση $b' = b - \delta$, χρησιμοποιώντας τον τύπο Sherman-Morisson ως εξής:

$$\begin{aligned}
\Phi_{b'}(A + ww^T) &= \mathrm{Tr}(L^T(A - b'I + ww^T)^{-1}L) \\
&= \mathrm{Tr}(L^T(A - b'I)^{-1}L) - \frac{\mathrm{Tr}(L^T(A - b'I)^{-1}ww^T(A - b'I)^{-1}L)}{1 + w^T(A - b'I)^{-1}w} \\
&= \Phi_{b'}(A) - \frac{w^T(A - b'I)^{-1}LL^T(A - b'I)^{-1}w}{1 + w^T(A - b'I)^{-1}w}.
\end{aligned}$$

Επομένως, για να αποφύγουμε να αυξήσουμε το δυναμικό, ζητάμε w τέτοιο ώστε

$$\Phi_{b'}(A) - \frac{w^T(A-b'I)^{-1}LL^T(A-b'I)^{-1}w}{1+w^T(A-b'I)^{-1}w} \leqslant \Phi_b(A). \tag{3.2.4}$$

Μπορούμε λοιπόν τώρα να προσδιορίσουμε πόσο μικρό χρειάζεται να είναι το δυναμικό ώστε να είμαστε σίγουροι ότι υπάρχει κατάλληλο w που μπορεί να επιλεγεί, και άρα μπορεί να συνεχιστεί η διαδικασία. Ο προσδιορισμός γίνεται με το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.2.4. *Έστω A θετικά ημιορισμένος $n \times n$ πίνακας με k θετικές ιδιοτιμές, όλες μεγαλύτερες από $b > 0$, και έστω Z η ορθογώνια προβολή επί του πυρήνα του A. Αν*

$$\Phi_b(A) \leqslant -m - \frac{\|L\|_2^2}{\delta} \tag{3.2.5}$$

και

$$0 < \delta < b \leqslant \delta \frac{\|LZ\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|L\|_2^2}, \tag{3.2.6}$$

τότε υπάρχει $w \in \{Lv_j\}_{j\leqslant m}$ για το οποίο ο πίνακας $A + ww^T$ έχει $k+1$ μη μηδενικές ιδιοτιμές μεγαλύτερες από $b' = b - \delta$, και επιπλέον ισχύει ότι $\Phi_{b'}(A + ww^T) \leqslant \Phi_b(A)$.

Απόδειξη. Ζητάμε w που να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις (3.2.1) και (3.2.4). Ισοδύναμα, ζητάμε w που να ικανοποιεί τη σχέση

$$w^T(A-b'I)^{-1}LL^T(A-b'I)^{-1}w \leqslant (\Phi_b(A) - \Phi_{b'}(A))(-1 - w^T(A-b'I)^{-1}w). \tag{3.2.7}$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει τέτοιο w, αθροίζοντας πάνω από όλα τα $w \in \{Lv_j\}_{j\leqslant m}$. Πράγματι, για το αριστερό μέλος της (3.2.7) έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{w\in\{Lv_j\}_{j\leqslant m}} w^T(A-b'I)^{-1}LL^T(A-b'I)^{-1}w &= \sum_{j=1}^m v_j^T L^T(A-b'I)^{-1}LL^T(A-b'I)^{-1}Lv_j \\ &= \mathrm{Tr}(L^T(A-b'I)^{-1}LL^T(A-b'I)^{-1}L).\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\Delta_b = \Phi_b(A) - \Phi_{b'}(A). \tag{3.2.8}$$

Για το δεξιό μέλος της (3.2.7) έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned}&\sum_{w\in\{Lv_j\}_{j\leqslant m}} (\Phi_b(A) - \Phi_{b'}(A))(-1 - w^T(A-b'I)^{-1}w) \\ &\qquad = \Delta_b\left(-m - \sum_{j=1}^m v_j^T L^T(A-b'I)^{-1}Lv_j\right) \\ &\qquad = \Delta_b(-m - \mathrm{Tr}(L^T(A-b'I)^{-1}L)).\end{aligned}$$

Άρα, αρκεί να ισχύει η σχέση

$$\operatorname{Tr}(L^T(A-b'I)^{-1}LL^T(A-b'I)^{-1}L) \leqslant \Delta_b(-m-\operatorname{Tr}(L^T(A-b'I)^{-1}L)) \tag{3.2.9}$$

Από την υπόθεση (3.2.5) έχουμε ότι

$$\Delta_b \leqslant -m - \frac{\|L\|_2^2}{\delta} - \Phi_{b'}(A),$$

οπότε

$$\Phi_{b'}(A) \leqslant -m - \frac{\|L\|_2^2}{\delta} - \Delta_b.$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$-\operatorname{Tr}(L^T(A-b'I)^{-1}L) \geqslant m + \frac{\|L\|_2^2}{\delta} + \Delta_b. \tag{3.2.10}$$

Επιπλέον, ισχύει η σχέση $LL^T \preceq \|L\|_2^2 I$, επομένως, αρκεί τελικά να δείξουμε ότι

$$\|L\|_2^2 \operatorname{Tr}(L^T(A-b'I)^{-2}L) \leqslant \Delta_b\left(-m+m+\frac{\|L\|_2^2}{\delta}+\Delta_b\right),$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\|L\|_2^2 \operatorname{Tr}(L^T(A-b'I)^{-2}L) \leqslant \Delta_b\left(\frac{\|L\|_2^2}{\delta}+\Delta_b\right). \tag{3.2.11}$$

Έστω P η προβολή στην εικόνα του A. Παρατηρούμε ότι $P+Z=I$ και επιπλέον $PZ = ZP = 0$. Ορίζουμε

$$\Phi_{b'}^P(A) = \operatorname{Tr}(L^T P(A-b'I)^{-1}PL) \tag{3.2.12}$$

$$\Phi_{b'}^Z(A) = \operatorname{Tr}(L^T Z(A-b'I)^{-1}ZL) \tag{3.2.13}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\Phi_{b'}^P(A) + \Phi_{b'}^Z(A) = \Phi_{b'}(A),$$
$$\Delta_b = \Delta_b^P + \Delta_b^Z$$

και

$$\operatorname{Tr}(L^T(A-b'I)^{-2}L) = \operatorname{Tr}(L^T P(A-b'I)^{-2}PL) + \operatorname{Tr}(L^T Z(A-b'I)^{-2}ZL),$$

αφού οι πίνακες P, Z, A, $(A-b'I)^{-1}$, $(A-b'I)^{-2}$ μπορούν να διαγωνοποιηθούν ταυτόχρονα. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι πίνακες $P(A-bI)^{-1}P$ και $P(A-b'I)^{-1}P$ είναι θετικά ορισμένοι (αφού έχουν ακριβώς τις ιδιοτιμές $(0,\ldots,0,\lambda_{\mathrm{rank}(Z)+1}-b,\ldots,\lambda_{\mathrm{rank}(P)}-b)$ και $(0,\ldots,0,\lambda_{\mathrm{rank}(Z)+1}-b',\ldots,\lambda_{\mathrm{rank}(P)}-b')$ αντίστοιχα) οπότε εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι

$$(b-b')P(A-b'I)^{-2}P \preceq P(A-bI)^{-1}P - P(A-b'I)^{-1}P.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη αυτής της σχέσης με $\bullet LL^T$ και στη συνέχεια με $\|L\|_2^2$, και χρησιμοποιώντας την $b-b'=\delta$, παίρνουμε

$$\|L\|_2^2\,\mathrm{Tr}(L^TP(A-b'I)^{-2}PL) \leqslant \Delta_b^P\frac{\|L\|_2^2}{\delta}. \tag{3.2.14}$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}\|L\|_2^2\,\mathrm{Tr}(L^TZ(A-b'I)^{-2}ZL) &\leqslant (\Delta_b^P+\Delta_b^Z)(\frac{\|L\|_2^2}{\delta}+\Delta_b) - \Delta_b^P\frac{\|L\|_2^2}{\delta}\\ &= \Delta_b^P\Delta_b + \Delta_b^Z\frac{\|L\|_2^2}{\delta} + (\Delta_b^Z)^2 + \Delta_b^Z\Delta_b^P\end{aligned}$$

και αφού $\Delta_b^P,\ \Delta_b^Z>0$, αρκεί να αποδείξουμε τη σχέση

$$\|L\|_2^2\mathrm{Tr}(L^TZ(A-b'I)^{-2}ZL) \leqslant \Delta_b^Z\left(\frac{\|L\|_2^2}{\delta}+\Delta_b^Z\right). \tag{3.2.15}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(A-bI)^{-1} = -\frac{1}{b}I + \frac{1}{b}(A-bI)^{-1}A$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(L^TZ(A-bI)^{-1}ZL) &= -\frac{1}{b}\mathrm{Tr}(L^TZZL) + \frac{1}{b}\mathrm{Tr}(L^TZ(A-bI)^{-1}AZL)\\ &= -\frac{1}{b}\|ZL\|_{\mathrm{HS}}^2,\end{aligned}$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{Tr}(L^TZ(A-b'I)^{-2}ZL) = \frac{\|LZ\|_{\mathrm{HS}}^2}{b'^2}$$

και (με παρόμοιο τρόπο)

$$\Delta_b^Z = \mathrm{Tr}(L^TZ(A-bI)^{-1}ZL) = \delta\frac{\|LZ\|_{\mathrm{HS}}^2}{bb'}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.2.15) και κάνοντας πράξεις αναγόμαστε στη σχέση

$$\|L\|_2^2 \leqslant \delta\frac{\|LZ\|_{\mathrm{HS}}^2}{b}$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την υπόθεση (3.2.6). $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2. Οι υποθέσεις του Λήμματος 3.2.4 ικανοποιούνται αν ξεκινήσουμε τη διαδικασία με $b = b_0$ και δ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\Phi_{b_0}(0) = -\frac{\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_0} \leqslant -m - \frac{\|L\|_2^2}{\delta}$$

και

$$b_0 \leqslant \delta \frac{\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|L\|_2^2} \qquad \text{αφού για } A = 0 \text{ έπεται ότι } Z = I.$$

Για $0 < \varepsilon < 1$, αν διαλέξουμε

$$b_0 = \frac{(1-\varepsilon)\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{m} \qquad \text{και} \qquad \delta = \frac{(1-\varepsilon)\|L\|_2^2}{\varepsilon m}$$

τότε οι παραπάνω συνθήκες επαληθεύονται, και μάλιστα διατηρούνται σε κάθε βήμα, λόγω του Λήμματος 3.2.4, αφού η νόρμα $\|L\|_{\mathrm{HS}}$ μειώνεται κατά $\|L\|_2^2$ το πολύ σε κάθε βήμα. Κάνοντας $\varepsilon^2 \frac{\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|L\|_2^2}$ βήματα, έχουμε ότι το εμπόδιο μένει στη θέση

$$\begin{aligned} b_0 - \varepsilon^2 \frac{\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|L\|_2^2}\delta &= \frac{(1-\varepsilon)\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{m} - \varepsilon^2 \frac{\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|L\|_2^2}\frac{(1-\varepsilon)\|L\|_2^2}{\varepsilon m} \\ &= \frac{(1-\varepsilon)\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{m} - \varepsilon^2(1-\varepsilon)\frac{\|L\|_{\mathrm{HS}}^2}{\varepsilon m} \\ &= \frac{(1-\varepsilon)^2}{m}\|L\|_{\mathrm{HS}}^2, \end{aligned}$$

η οποία είναι ακριβώς το ζητουμενο κάτω φράγμα για τις ιδιοτιμές του Θεωρήματος 3.2.2. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

3.3 Σύνδεση με το πρόβλημα των Kadison και Singer

Ο Srivastava παρατηρεί στο τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής του την εξής σύνδεση μεταξύ των δύο βασικών αποτελεσμάτων που είδαμε σε αυτήν την ενότητα και της εικασίας του Weaver (βλέπε Κεφάλαιο 5), η οποία είναι ισοδύναμη με το διάσημο πρόβλημα που έθεσαν οι Kadison και Singer το 1959. Την ξαναδιατυπώνουμε εδώ σε κανονικοποιημένη μορφή για περισσότερη ευκολία.

Εικασία 3.3.1. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ και $r \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν τα $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ είναι τέτοια ώστε $\|v_i\|_2 \leqslant \delta$ για κάθε i, και*

$$\sum_{i=1}^{m} v_i v_i^T = I,$$

τότε υπάρχει διαμέριση του $[m]$ σε r υποσύνολα $S_1, \ldots, S_r$ ώστε να ισχύει

$$\Big\| \sum_{i \in S_j} v_i v_i^T \Big\|_2 \leqslant 1 - \varepsilon$$

για κάθε $j = 1, \ldots, r$.

Ας υποθέσουμε ότι είχαμε μια εκδοχή του Θεωρήματος 3.1.2 η οποία, με την υπόθεση ότι $\|v_i\|_2 \leqslant \delta$, θα μας εξασφάλιζε ότι όλα τα βάρη s_j θα ήταν ίσα με κάποιο β και ότι, για κάποια σταθερά $\kappa > 0$,

$$I \preceq \beta \sum_{i \in S} v_i v_i^T \preceq \kappa I,$$

όπου $S = \{i : s_i \neq 0\}$. Τότε θα είχαμε το συμπέρασμα της Εικασίας 3.3.1 με $r = 2$ και $\varepsilon = \min\{1 - \frac{\kappa}{\beta}, \frac{1}{\beta}\}$, αφού

$$\Big\| \sum_{i \in S} v_i v_i^T \Big\|_2 \leqslant \frac{\kappa}{\beta} \leqslant 1 - \varepsilon$$

και

$$\Big\| \sum_{i \in [m] \setminus S} v_i v_i^T \Big\|_2 \leqslant 1 - \lambda_{\min} \left(\sum_{i \in S} v_i v_i^T \right) \leqslant 1 - \frac{1}{\beta} \leqslant 1 - \varepsilon.$$

Είναι επιπλέον γνωστό ότι μια ισχυρότερη μορφή του θεωρήματος των Bourgain και Tzafriri, η οποία θα εξασφάλιζε *διαμέριση* του $[m]$ σε ένα σταθερό πλήθος συνόλων σ_i, θα αρκούσε για μια θετική απάντηση στο πρόβλημα. Επομένως, τα δύο κύρια αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου μπορούν να θεωρηθούν σαν βήματα προς την επίλυση του προβλήματος. Στο Κεφάλαιο 5 θα δούμε πώς τελικά λύθηκε το πρόβλημα.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές στην ασυμπτωτική γεωμετρική ανάλυση

4.1 Η θέση John ενός κυρτού σώματος

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Με τον όρο *θέση* του K εννοούμε κάθε αφινική εικόνα $y + TK$ του K, όπου $y \in \mathbb{R}^n$ και $T \in GL(n)$. Στο πλαίσιο της Συναρτησιακής Ανάλυσης συνήθως ασχολείται κανείς με την συμμετρική περίπτωση και τις θέσεις $T(K)$, $T \in GL(n)$ ενός συμμετρικού κυρτού σώματος. Δουλεύουμε με μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, που έχει το συμμετρικό κυρτό σώμα K σαν μοναδιαία μπάλα, και η επιλογή μιας θέσης του K αντιστοιχεί στην επιλογή κατάλληλης Ευκλείδειας δομής στον $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, η επιλογή μιας θέσης είναι ισοδύναμη με την επιλογη κατάλληλου ελλειψοειδούς. Ένα ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα της μορφής

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, u_i\rangle^2}{\alpha_i^2} \leqslant 1 \right\}, \tag{4.1.1}$$

όπου $\{u_i\}_{i\leqslant n}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και οι $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του $\mathcal{E}$, αντίστοιχα). Εύκολα ελέγχουμε ότι $\mathcal{E} = T(B_2^n)$, όπου T είναι ο θετικά ορισμένος γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται μέσω των $T(u_i) = \alpha_i u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Συνεπώς, ο όγκος του $\mathcal{E}$ ισούται με

$$|\mathcal{E}| = \omega_n \prod_{i=1}^{n} \alpha_i, \tag{4.1.2}$$

όπου ω_n είναι ο όγκος της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας. Αντίστροφα, κάθε σύνολο της μορφής $T(B_2^n)$ με $T \in GL(n)$ είναι ελλειψοειδές και έχει όγκο $\omega_n|\det(T)|$.

Σε αυτήν την παράγραφο εισάγουμε μία από τις πιο κλασικές θέσεις ενός κυρτού σώματος, την θέση John. Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(K)$ την οικογένεια των ελλειψοειδών που περιέχονται στο K. Ένα επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Λέμε ότι το $\mathcal{E}$ είναι το *ελλειψοειδές μέγιστου όγκου* του K.

Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Τότε λέμε ότι το K βρίσκεται στη θέση John. Θα λέμε ότι το $x \in \mathbb{R}^n$ είναι *σημείο επαφής* του K και της B_2^n αν $\|x\|_2 = \|x\|_K = 1$, δηλαδή αν το x είναι κοινό σημείο των συνόρων τους. Το θεώρημα του John περιγράφει την κατανομή των σημείων επαφής στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχουν σημεία επαφής $x_1, \ldots, x_m$ του K και της B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ τέτοιοι ώστε*

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j = 0 \tag{4.1.3}$$

και

$$I = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j x_j^T. \tag{4.1.4}$$

Παρατηρήσεις 4.1.2. Από την (4.1.4) για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, x_j\rangle^2. \tag{4.1.5}$$

Επίσης, αν επιλέξουμε $x = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, όπου $\{e_i\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$n = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_j \langle e_i, x_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \|x_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j.$$

Από το Θεώρημα 4.1.1 έπεται ότι

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \langle x_j, \theta\rangle^2 = 1 \tag{4.1.6}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Με την ορολογία των ισοτροπικών μέτρων, το μέτρο μ στην S^{n-1} που δίνει βάρος c_j στο $\{x_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, είναι *ισοτροπικό*: το μ έχει κέντρο βάρους το 0 και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει

$$\int_{S^{n-1}} \langle x, \theta\rangle^2 d\mu(x) = \frac{\mu(S^{n-1})}{n}. \tag{4.1.7}$$

Αντίστροφα (βλέπε [4]) έχουμε:

Πρόταση 4.1.3. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ισοτροπικό Borel μέτρο μ στην S^{n-1} που έχει φορέα τα σημεία επαφής του K και της B_2^n. Τότε, η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.*

Το Θεώρημα 4.1.1 και η Πρόταση 4.1.3 μας δίνουν τον επόμενο χαρακτηρισμό για την θέση John:

Θεώρημα 4.1.4. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Τότε, η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K αν και μόνο αν υπάρχει ένα ισοτροπικό μέτρο μ με φορέα τα σημεία επαφής του K και της B_2^n.*

Μια πολύ γνωστή συνέπεια του θεωρήματος 4.1.1 (που συνήθως αποκαλείται το *θεώρημα του John*) λέει ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν $\mathcal{E}$ είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subseteq \sqrt{n}\,\mathcal{E}$. Ο ισχυρισμός αυτός είναι ισοδύναμος με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.1.5. *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subset \sqrt{n}B_2^n$.*

Απόδειξη. Από την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

$$x = \sum_{j=1}^m c_j \langle x, x_j\rangle x_j \tag{4.1.8}$$

του Θεωρήματος 4.1.1, και αφού $x_j \in S^{n-1}$, έχουμε

$$1 = \langle x_j, x_j\rangle \leqslant \|x_j\|_K \|x_j\|_{K^\circ} = \|x_j\|_{K^\circ} \quad , \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.1.9}$$

Από την άλλη πλευρά, σε κάθε x_j, το K και η B_2^n έχουν το ίδιο υπερεπίπεδο στήριξης με κάθετο διάνυσμα το x_j. Επομένως, για κάθε $x \in K$ έχουμε $\langle x, x_j\rangle \leqslant 1$, και από την συμμετρία του K, $|\langle x, x_j\rangle| \leqslant 1$. Έπεται ότι $\|x_j\|_K = \|x_j\|_{K^\circ} = \|x_j\|_2 = 1$, $j = 1, \ldots, m$.

Έστω $x \in K$. Τότε,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^m c_j \langle x, x_j\rangle^2 \leqslant \sum_{j=1}^m c_j = n.$$

Αυτό δείχνει ότι $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}$. Επομένως, $B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$. □

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ βρίσκεται στη θέση Löwner αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K. Ισοδύναμα, αν το πολικό σώμα K° του K βρίσκεται στη θέση John. Από το θεώρημα του John προκύπτει ότι το K βρίσκεται στη θέση Löwner αν και μόνο αν $K \subseteq B_2^n$ και υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in \mathrm{bd}(K) \cap S^{n-1}$ και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \dots, c_m$ τέτοιοι ώστε

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j = 0 \tag{4.1.10}$$

και

$$I = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j x_j^T. \tag{4.1.11}$$

4.2 Σημεία επαφής

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 προκύπτει ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πλήθος m των σημείων επαφής στην αναπαράσταση (4.1.4) της ταυτοτικής απεικόνισης φράσσεται από $n(n+3)/2$. Είναι όμως γνωστό (βλέπε [27]) ότι το σύνολο των κυρτών σωμάτων K που έχουν λιγότερα από $n(n+3)/2$ σημεία επαφής με το ελλειψοειδές μέγιστου (ή ελάχιστου) όγκου τους είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας μέσα στην κλάση των κυρτών σωμάτων.

Παρ' όλα αυτά, ο Rudelson [49] απέδειξε ότι οσοδήποτε κοντά σε κάθε κυρτό σώμα K μπορούμε να βρούμε ένα άλλο κυρτό σώμα που έχει πολύ λιγότερα σημεία επαφής με το ελλειψοειδές μέγιστου (ή ελάχιστου) όγκου του.

Θεώρημα 4.2.1 (Rudelson)**.** *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει ένα κυρτό σώμα H τέτοιο ώστε $d(K,H) \leqslant 1+\epsilon$ και το H έχει το πολύ $m \leqslant Cn\log n/\epsilon^2$ σημεία επαφής με το ελλειψοειδές μέγιστου (ή ελάχιστου) όγκου του, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Ο Srivastava βελτίωσε το αποτέλεσμα του Rudelson χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου. Συγκεκριμένα, έδειξε ότι ο όρος $\log n$ μπορεί να απαλειφθεί από την εκτίμηση για το m, και έδωσε συγκεκριμένες τιμές για την σταθερά C. Θα περιγράψουμε την απόδειξη του αποτελέσματός του, πρώτα στη συμμετρική περίπτωση.

Θεώρημα 4.2.2 (Srivastava)**.** *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει ένα κυρτό σώμα H τέτοιο ώστε $H \subseteq K \subseteq (1+\epsilon)H$ και το H έχει το πολύ $m \leqslant 32n/\epsilon^2$ σημεία επαφής με το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του.*

Η απόδειξη θα βασιστεί στο Θεώρημα 3.1.2 το οποίο υπενθυμίζουμε: Αν $d > 1$ και τα $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ ικανοποιούν την

$$I = \sum_{j=1}^{m} v_j v_j^T,$$

τότε υπάρχουν μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί $\{s_j\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$, με $|\{j : s_j \neq 0\}| \leqslant dn$, ώστε

$$I \preceq \sum_{j=1}^{m} s_j v_j v_j^T \preceq \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1} \right)^2 I.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με ελλειψοειδές μέγιστου όγκου την B_2^n. Γράφουμε $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ για το σύνολο των σημείων επαφής που ικανοποιούν την

$$I = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j x_j^T \tag{4.2.1}$$

με βάρη $c_1, \ldots, c_m > 0$. Λόγω της συμμετρίας του K μπορούμε να υποθέσουμε ότι αν $x \in X$ τότε $-x \in X$, και ότι τα βάρη των x και $-x$ στην (4.2.1) είναι ίσα.

Θέτουμε $v_j := \sqrt{c_j} x_j$, $j = 1, \ldots, m$. Τότε,

$$I = \sum_{j=1}^{m} v_j v_j^T. \tag{4.2.2}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.2 με $d = 16/\epsilon^2$ βρίσκουμε $s_j \geqslant 0$ με $|\{j : s_j \neq 0\}| \leqslant 16n/\epsilon^2$, ώστε

$$I \preceq \sum_{j=1}^{m} s_j v_j v_j^T \preceq \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1} \right)^2 I. \tag{4.2.3}$$

Θέτουμε $Y = \{x_j \in X : s_j \neq 0\}$. Τότε $|Y| \leqslant 16n/\epsilon^2$ και

$$I \preceq \sum_{x_j \in Y} s_j c_j x_j x_j^T \preceq \left(\frac{4/\epsilon+1}{4/\epsilon-1} \right)^2 I. \tag{4.2.4}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\left(\frac{4/\epsilon+1}{4/\epsilon-1} \right)^2 \leqslant 1 + \epsilon$$

αν το ϵ είναι αρκετά μικρό.

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{x_j\in Y}[(s_j/2)c_jx_j+(s_j/2)c_j(-x_j)]=0$$

και

$$\sum_{x_j\in Y}[(s_j/2)c_jx_jx_j^T+(s_j/2)c_j(-x_j)(-x_j)^T]=\sum_{x_j\in Y}s_jc_jx_jx_j^T.$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε το $Z=Y\cup(-Y)$ και τα βάρη $b_j=s_jc_j/2$ στα διανύσματα x_j και $-x_j$ (όπου $x_j\in Y$) τότε έχουμε (για $0<\epsilon<\epsilon_0$)

$$I\preceq\sum_{x_j\in Z}b_jx_jx_j^T\preceq(1+\epsilon)I \tag{4.2.5}$$

και

$$\sum_{x_j\in Z}b_jx_j=0, \tag{4.2.6}$$

ενώ, ταυτόχρονα, $|Z|\leqslant 32n/\epsilon^2$. Ακολουθώντας τώρα το επιχείρημα του Rudelson ολοκληρώνουμε την απόδειξη. $\square$

Για την μη συμμετρική περίπτωση αποδεικνύουμε πρώτα την εξής παραλλαγή του Θεωρήματος 3.1.2.

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω $x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}^n$ και $c_1,\dots,c_m>0$ που ικανοποιούν τις*

$$\sum_{j=1}^m c_jx_j=0\ \ \textit{και}\ \ \sum_{j=1}^m x_jx_j^T=I.$$

Για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχουν $b_j\in\mathbb{R}$ με $|\{j:b_j\neq 0\}|=O_\epsilon(n)$ και ένα διάνυσμα $u\in\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε

$$I\preceq\sum_{j=1}^m b_j(x_j+u)(x_j+u)^T\preceq(4+\epsilon)I, \tag{4.2.7}$$

$$\sum_{j=1}^m b_j(x_j+u)=0, \tag{4.2.8}$$

και

$$\left(\sum_{j=1}^m b_j\right)\|u\|_2^2\leqslant\epsilon. \tag{4.2.9}$$

4.3 Παραγοντοποίηση Dvoretzky-Rogers

Σε αυτήν την παράγραφο μελετάμε την παραγοντοποίηση Dvoretzky-Rogers. Θα παρουσιάσουμε μια πρόσφατη απόδειξη της καλύτερης έως τώρα γνωστής μορφής της.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k \geqslant (1-\varepsilon)^2 n$ τέτοιος ώστε ο ταυτοτικός τελεστής $i_{2,\infty} : \ell_2^k \to \ell_\infty^k$ να παραγοντοποιείται στη μορφή $i_{2,\infty} = \alpha \circ \beta$, όπου $\beta : \ell_2^k \to X$, $\alpha : X \to \ell_\infty^k$ και $\|\alpha\| \cdot \|\beta\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.*

Ένα θεώρημα αυτού του τύπου αποδείχθηκε αρχικά από τους Bourgain και Szarek [14] με ασθενέστερη εξάρτηση από το ε. Ακολούθησαν δύο εργασίες των Szarek-Talagrand [55] και Γιαννόπουλου [25] στις οποίες η εξάρτηση από το ε βελτιώθηκε σε ε^{-2} και $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$ αντίστοιχα. Τέλος, ο Γιαννόπουλος [26] απέδειξε ότι η πρόταση ισχύει με $c(\varepsilon) = \frac{c}{\varepsilon}$, η οποία παραμένει η καλύτερη γνωστή εξάρτηση από το ε. Τα εργαλεία που χρησιμοποιούνταν σε όλες αυτές τις δουλειές συμπεριλάμβαναν επιχειρήματα παραγοντοποίησης (που σχετίζονταν με την ανισότητα του Grothendieck) τα οποία συνδυάζονταν με το εξής ισομορφικό λήμμα τύπου Sauer-Shelah.

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω $u_1, \ldots, u_s \in B_2^n$ και έστω*

$$\mathcal{E} = \left\{ (\delta_j)_{j \leqslant s} \in \mathbb{R}^s : \Big\| \sum_{j=1}^{s} \delta_j u_j \Big\|_2 \leqslant 1 \right\}.$$

Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ μπορούμε να βρούμε $\sigma \subseteq \{1, \ldots, s\}$ με $|\sigma| \geqslant (1-\varepsilon)s$ τέτοιο ώστε

$$P_\sigma(\mathcal{E}) \supseteq c\sqrt{\varepsilon} B_\sigma,$$

όπου P_σ είναι η ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ στον υπόχωρο συντεταγμένων $\mathbb{R}^\sigma$, B_σ είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^\sigma$, και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη του θεωρήματος παραγοντοποίησης Dvoretzky-Rogers μπορούμε να συνδυάσουμε το Θεώρημα 4.3.2 με τη μέθοδο των Szarek και Talagrand. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μοναδιαία μπάλα K του X είναι στη θέση Löwner: η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K άρα, από το θεώρημα του John, υπάρχουν σημεία επαφής $x_1, \ldots, x_m$ των K και B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ τέτοιοι ώστε

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, x_j \rangle x_j \tag{4.3.1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Πρόταση 4.3.3 (Szarek-Talagrand). *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K. Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$, μπορούμε να βρούμε $k \geqslant (1-\varepsilon)n$ και σημεία επαφής $y_1,\dots,y_k$ των K και B_2^n με την εξής ιδιότητα: Αν $j \in \{1,\dots,k\}$ και $F_j = \mathrm{span}\{y_i : i \neq j\}$, τότε*

$$\|P_{F_j^\perp}(y_j)\|_2 \geqslant \sqrt{\varepsilon} \quad \text{για κάθε } 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο A των σημείων επαφής $x_1,\dots,x_m$ στην (4.3.1). Από όλα τα k-υποσύνολα $\{x_{i_1},\dots,x_{i_k}\}$ του A επιλέγουμε κάποιο, ας το πούμε $\{y_1,\dots,y_k\}$, το οποίο μεγιστοποιεί τον k-διάστατο όγκο $|\mathrm{conv}\{\pm x_{i_1},\dots,\pm x_{i_k}\}|$. Τότε, είναι φανερό ότι για κάθε $1 \leqslant j \leqslant k$ και για όλα τα $1 \leqslant j \leqslant m$ έχουμε

$$\|P_{F_j^\perp}(y_j)\|_2 \geqslant \|P_{F_j^\perp}(x_i)\|_2.$$

Παρατηρούμε ότι

$$n-k+1 = \mathrm{Tr}(P_{F_j^\perp}) = \langle P_{F_j^\perp}, I\rangle = \sum_{i=1}^m c_i \langle P_{F_j^\perp}, x_i \otimes x_i\rangle = \sum_{i=1}^m c_i \langle x_i, P_{F_j^\perp}(x_i)\rangle.$$

Αφού $\sum_{i=1}^m c_i = n$, υπάρχει x_i με την ιδιότητα

$$\|P_{F_j^\perp}(x_i)\|_2^2 = \langle x_i, P_{F_j^\perp}(x_i)\rangle \geqslant \frac{\mathrm{tr}(P_{F_j^\perp})}{n} = \frac{n-k+1}{n}.$$

Παίρνοντας $k = \lfloor (1-\varepsilon)n \rfloor + 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$\|P_{F_j^\perp}(y_j)\|_2 = \max_{i \leqslant m} \|P_{F_j^\perp}(x_i)\|_2 \geqslant \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} \geqslant \sqrt{\varepsilon}$$

για κάθε $1 \leqslant j \leqslant k$. □

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.3 επιλέγουμε $x_1,\dots,x_s \in K$ με $s \geqslant (1-\frac{\varepsilon}{2})n$, έτσι ώστε

$$\mathrm{dist}\,(x_i,\ \mathrm{span}\{x_j, j \neq i\}) \geqslant \sqrt{\varepsilon/2}$$

για κάθε $i,j = 1,\dots,s$. Τότε, υπάρχουν $v_1,\dots,v_s \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\|v_i\|_2 \leqslant \sqrt{2/\varepsilon} \quad \text{και} \quad \langle x_i, v_j\rangle = \delta_{ij} \qquad (i,j=1,\dots,s).$$

Ορίζουμε $u_i = \sqrt{\varepsilon/2}\, v_i$, και

$$\mathcal{E} = \left\{ (\delta_j)_{j \leqslant s} : \Big\| \sum_{j \leqslant s} \delta_j u_j \Big\|_2 \leqslant 1 \right\}.$$

Από το Θεώρημα 4.3.2 παίρνουμε $\sigma \subseteq S$ με $|\sigma| \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) s$ τέτοιο ώστε $P_\sigma(\mathcal{E}) \supseteq c\sqrt{\varepsilon} B_\sigma$. Τότε, $|\sigma| \geqslant (1-\varepsilon)n$, και για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $\mathbf{t} = (t_i)_{i\in\sigma}$ έχουμε

$$\|\mathbf{t}\|_2^2 = \sum_{i\in\sigma} t_i^2 = \Big\langle \sum_{i\in\sigma} t_i x_i, \sum_{j\in\sigma} t_j v_j \Big\rangle = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Big\langle \sum_{i\in\sigma} t_i x_i, \sum_{j\in\sigma} t_j u_j \Big\rangle.$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε το $(\frac{c\sqrt{\varepsilon}}{\|\mathbf{t}\|_2} t_j)_{j\in\sigma}$ σε ένα διάνυσμα $(\delta_j)_{j\leqslant s}$ που ανήκει στο $\mathcal{E}$. Τότε,

$$\|\mathbf{t}\|_2^2 = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \frac{\|\mathbf{t}\|_2}{c\sqrt{\varepsilon}} \Big\langle \sum_{i\in\sigma} t_i x_i, \sum_{j\leqslant s} \delta_j u_j \Big\rangle \leqslant \frac{c'}{\varepsilon} \|\mathbf{t}\|_2 \Big\| \sum_{i\in\sigma} t_i x_i \Big\|_2$$

και αφού $\|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|$ και τα x_i έχουν $\|\cdot\|$-νόρμα ίση με 1, έχουμε

$$\left(\sum_{i\in\sigma} t_i^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{c'}{\varepsilon} \Big\| \sum_{i\in\sigma} t_i x_i \Big\|_2 \leqslant \frac{c'}{\varepsilon} \Big\| \sum_{i\in\sigma} t_i x_i \Big\| \leqslant \frac{c'}{\varepsilon} \sum_{i\in\sigma} |t_i|.$$

Αν ορίσουμε $\beta : \ell_1^{|\sigma|} \to X$ με $\beta(e_i) = x_i, i \in \sigma$ και $\alpha : X \to \ell_2^{|\sigma|}$ με $\alpha = TP_\sigma$ όπου P_σ είναι η ορθογώνια προβολή του X στον $\mathrm{span}\{x_i, i \in \sigma\}$ και $Tx_i = e_i$, έχουμε μια παραγοντοποίηση $i_{1,2} = \alpha \circ \beta$ του ταυτοτικού τελεστή $i_{1,2} : \ell_1^{|\sigma|} \to \ell_2^{|\sigma|}$ με $\|\alpha\|\, \|\beta\| \leqslant c'/\varepsilon$. Λόγω δυϊσμού και λόγω της ιδιότητας επέκτασης του ℓ_∞^n, αυτό είναι ισοδύναμο με τον ισχυρισμό του Θεωρήματος 4.3.1. □

Θα παρουσιάσουμε μία πρόσφατη απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1, η οποία αποφεύγει τα εργαλεία Συνδυαστικής και Συναρτησιακής Ανάλυσης που βρίσκονται πίσω από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2. Το επιχείρημα, το οποίο οφείλεται στον Youssef (βλέπε [58]) βασίζεται σε μια παραλλαγή της απόδειξης των Spielman και Srivastava για την «αρχή περιορισμένης αντιστρεψιμότητας» (Θεώρημα 3.2.2). Παρακάτω, συμβολίζουμε με $\|U\|_2$ τη νόρμα του τελεστή U, τον οποίο βλέπουμε σαν τελεστή από τον ℓ_2^m στον ℓ_2^n.

Θεώρημα 4.3.4. *Έστω U ένας $n \times m$ πίνακας και έστω $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ένας διαγώνιος $m \times m$ πίνακας τέτοιος ώστε $\mathrm{Ker}(D) \subset \mathrm{Ker}(U)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει $\sigma \subset \{1, \ldots, m\}$ με*

$$|\sigma| \geqslant (1-\varepsilon)^2 \frac{\|U\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|U\|_2^2}$$

τέτοιο ώστε

$$s_{\min}\left(U_\sigma D_\sigma^{-1}\right) > \frac{\varepsilon \|U\|_{\mathrm{HS}}}{\|D\|_{\mathrm{HS}}},$$

όπου $s_{\min}$ είναι η μικρότερη ιδιάζουσα τιμή. Ισοδύναμα, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $(t_j)_{j\in\sigma}$ έχουμε

$$\Big\| \sum_{j\in\sigma} t_j \frac{Ue_j}{\alpha_j} \Big\|_2 \geqslant \varepsilon \frac{\|U\|_{\mathrm{HS}}}{\|D\|_{\mathrm{HS}}} \left(\sum_{j\in\sigma} t_j^2\right)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η τάξη και οι ιδιοτιμές των

$$(U_\sigma D_\sigma^{-1})^T(U_\sigma D_\sigma^{-1}) \;\text{ και }\; (U_\sigma D_\sigma^{-1})(U_\sigma D_\sigma^{-1})^T$$

συμπίπτουν. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι ο $(U_\sigma D_\sigma^{-1})(U_\sigma D_\sigma^{-1})^T$ έχει τάξη ίση με $k=|\sigma|$ και η μικρότερη θετική ιδιοτιμή του είναι μεγαλύτερη ή ίση από $\varepsilon^2\frac{\|U\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|D\|_{\mathrm{HS}}^2}$. Παρατηρούμε ότι

$$(U_\sigma D_\sigma^{-1})(U_\sigma D_\sigma^{-1})^T = \sum_{j\in\sigma}\left(UD_\sigma^{-1}e_j\right)\left(UD_\sigma^{-1}e_j\right)^T = \sum_{j\in\sigma}\left(\frac{Ue_j}{\alpha_j}\right)\left(\frac{Ue_j}{\alpha_j}\right)^T$$

Ο πίνακας $A_k=\sum_{j\in\sigma}\left(UD_\sigma^{-1}e_j\right)\left(UD_\sigma^{-1}e_j\right)^T$ ορίζεται με ένα επαγωγικό σχήμα. Ξεκινάμε με τον $A_0=0$ και σε κάθε βήμα προσθέτουμε έναν πίνακα $\left(\frac{Ue_j}{\alpha_j}\right)\left(\frac{Ue_j}{\alpha_j}\right)^T$ τάξης 1, για κατάλληλο j, ο οποίος θα δώσει μια νέα θετική ιδιοτιμή. Αυτό εξασφαλίζει ότι το διάνυσμα $UD_\sigma^{-1}e_j$ που επιλέγουμε σε κάθε βήμα είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τα προηγούμενα.

Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.2.3: Αν ο $A\succeq 0$ έχει k μη μηδενικές ιδιοτιμές, όλες μεγαλύτερες από $b'>0$, και αν $v\neq 0$ και

$$v^T(A-b'I)^{-1}v<-1, \tag{4.3.2}$$

τότε ο $A+vv^T$ έχει $k+1$ μη μηδενικές ιδιοτιμές, όλες μεγαλύτερες από b'.

Για κάθε συμμετρικό πίνακα A και κάθε $b>0$, ορίζουμε το δυναμικό που αντιστοιχεί στο εμπόδιο b θέτοντας

$$\phi_b(A)=\mathrm{Tr}\left(U^T(A-bI)^{-1}U\right).$$

Σε κάθε βήμα, ο πίνακας που έχουμε ήδη κατασκευάσει συμβολίζεται με A_ℓ και το εμπόδιο με b_ℓ: ο A_ℓ έχει ℓ μη μηδενικές ιδιοτιμές, όλες μεγαλύτερες από b_ℓ. Κατόπιν, προσπαθούμε να κατασκευάσουμε τον $A_{\ell+1}$ προσθέτοντας έναν πίνακα vv^T τάξης 1 στον A_ℓ έτσι ώστε ο $A_{\ell+1}$ να έχει $\ell+1$ μη μηδενικές ιδιοτιμές, όλες μεγαλύτερες από $b_{\ell+1}=b_\ell-\delta$ και να ικανοποιείται η $\phi_{\ell+1}(A_{\ell+1})\leqslant\phi_\ell(A_\ell)$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}\phi_{\ell+1}(A_{\ell+1}) &= \mathrm{Tr}\left(U^T(A_\ell+vv^T-b_{\ell+1}I)^{-1}U\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(U^T(A_\ell-b_{\ell+1}I)^{-1}U\right)\\ &\quad-\mathrm{Tr}\left(\frac{U^T(A_\ell-b_{\ell+1}I)^{-1}vv^T(A_\ell-b_{\ell+1}I)^{-1}U}{1+v^T(A_\ell-b_{\ell+1}I)^{-1}v}\right)\\ &= \phi_{\ell+1}(A_\ell)-\frac{v^T(A_\ell-b_{\ell+1}I)^{-1}UU^T(A_\ell-b_{\ell+1}I)^{-1}v}{1+v^T(A_\ell-b_{\ell+1}I)^{-1}v}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, για να πετύχουμε την $\phi_{\ell+1}(A_{\ell+1})\leqslant\phi_\ell(A_\ell)$, πρέπει να επιλέξουμε ένα διάνυσμα v που ικανοποιεί την

$$-\frac{v^T(A_\ell-b_{\ell+1}I)^{-1}UU^T(A_\ell-b_{\ell+1}I)^{-1}v}{1+v^T(A_\ell-b_{\ell+1}I)^{-1}v}\leqslant\phi_\ell(A_\ell)-\phi_{\ell+1}(A_\ell). \tag{4.3.3}$$

Αφού οι $v^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}UU^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}v$ και $\phi_\ell(A_\ell) - \phi_{\ell+1}(A_\ell))$ είναι θετικοί, η επιλογή ενός διανύσματος v που ικανοποιεί τις (4.3.2) και (4.3.3) είναι ισοδύναμη με την επιλογή κάποιου v για το οποίο

$$\begin{aligned}(4.3.4)\qquad & v^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}UU^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}v \\ & \leqslant (\phi_\ell(A_\ell) - \phi_{\ell+1}(A_\ell))\left(-1 - v^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}v\right).\end{aligned}$$

Αφού $UU^T \preceq \|U\|_2^2 I$ και ο $(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}$ είναι συμμετρικός, αρκεί να επιλέξουμε το v έτσι ώστε

$$(4.3.5)\qquad v^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-2}v \leqslant \frac{1}{\|U\|_2^2}(\phi_\ell(A_\ell) - \phi_{\ell+1}(A_\ell))\left(-1 - v^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}v\right).$$

Θέτουμε $I_D := \{j \leqslant m \mid \alpha_j \neq 0\}$ όπου $(\alpha_j)_{j \leqslant m}$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του D. Έχουμε υποθέσει ότι $\mathrm{Ker}(D) \subseteq \mathrm{Ker}(U)$, άρα

$$\|U\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{j=1}^m \|Ue_j\|_2^2 = \sum_{j \in I_D} \|Ue_j\|_2^2 \leqslant |I_D| \cdot \|U\|_2^2,$$

απ' όπου έπεται ότι $|I_D| \geqslant \frac{\|U\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|U\|_2^2}$. Σε κάθε βήμα, θα επιλέξουμε ένα διάνυσμα v που ικανοποιεί την (4.3.5) ανάμεσα στα $(\frac{Ue_j}{\alpha_j})_{j \in I_D}$. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι να βρούμε $j \in I_D$ τέτοιο ώστε

(4.3.6)

$$(Ue_j)^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-2}Ue_j \leqslant \frac{\phi_\ell(A_\ell) - \phi_{\ell+1}(A_\ell)}{\|U\|_2^2}\left(-\alpha_j^2 - (Ue_j)^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}Ue_j\right).$$

Η ύπαρξη ενός τέτοιου $j \in I_D$ εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι η συνθήκη (4.3.6) ισχύει αν αθροίσουμε πάνω από όλα τα $(\frac{Ue_j}{\alpha_j})_{j \in D}$. Από την υπόθεση $\mathrm{Ker}(D) \subset \mathrm{Ker}(U)$ έπεται ότι:

(i) $\sum_{j \in I_D}(Ue_j)^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-2}Ue_j = \mathrm{tr}\left(U^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-2}U\right)$,

(ii) $\sum_{j \in I_D}(Ue_j)^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}Ue_j = \mathrm{tr}\left(U^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}U\right)$.

Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι, σε κάθε βήμα, έχουμε

$$(4.3.7)\qquad \mathrm{Tr}(U^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-2}U) \leqslant \frac{\phi_\ell(A_\ell) - \phi_{\ell+1}(A_\ell)}{\|U\|_2^2}\left(-\|D\|_{\mathrm{HS}}^2 - \phi_{\ell+1}(A_\ell)\right).$$

Το επόμενο λήμμα δίνει τις συνθήκες που απαιτούνται, σε κάθε βήμα, ώστε να αποδείξουμε την (4.3.7).

Λήμμα 4.3.5. *Υποθέτουμε ότι ο A_ℓ έχει ℓ μη μηδενικές ιδιοτίμές, όλες μεγαλύτερες από b_ℓ, και γράφουμε Z_ℓ για την ορθογώνια προβολή στον πυρήνα του A_ℓ. Αν*

$$\phi_\ell(A_\ell) \leqslant -\|D\|_{\mathrm{HS}}^2 - \frac{\|U\|_2^2}{\delta} \tag{4.3.8}$$

και

$$0 < \delta < b_\ell \leqslant \delta \frac{\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|U\|_2^2}, \tag{4.3.9}$$

τότε υπάρχει $i \in I_D$ τέτοιος ώστε ο $A_{\ell+1} := A_\ell + \left(\frac{Ue_i}{\alpha_i}\right)\left(\frac{Ue_i}{\alpha_i}\right)^T$ να έχει $\ell+1$ μη μηδενικές ιδιοτιμές, όλες μεγαλύτερες από $b_{\ell+1} := b_\ell - \delta$, και $\phi_{\ell+1}(A_{\ell+1}) \leqslant \phi_\ell(A_\ell)$.

Απόδειξη. Όπως είδαμε, αρκεί να αποδείξουμε την (4.3.7). Θέτουμε $\Delta_\ell := \phi_\ell(A_\ell) - \phi_{\ell+1}(A_{\ell+1})$. Από την (4.3.8), παίρνουμε

$$\phi_{\ell+1}(A_\ell) \leqslant -\|D\|_{\mathrm{HS}}^2 - \frac{\|U\|_2^2}{\delta} - \Delta_\ell.$$

Εισάγοντας αυτήν την σχέση στην (4.3.7), βλέπουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την εξής ανισότητα:

$$\mathrm{Tr}\left(U^T(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-2}U\right) \leqslant \Delta_\ell\left(\frac{\Delta_\ell}{\|U\|_2^2} + \frac{1}{\delta}\right). \tag{4.3.10}$$

Τώρα, συμβολίζουμε με P_ℓ την ορθογώνια προβολή επί της εικόνας του A_ℓ. Θέτουμε

$$\phi_\ell^P(A_\ell) := \mathrm{tr}\left(U^T P(A_\ell - b_\ell I)PU\right) \quad \text{και} \quad \Delta_\ell^P := \phi_\ell^P(A_\ell) - \phi_{\ell+1}^P(A_\ell),$$

και χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για τον Z_ℓ. Αφού οι P_ℓ, Z_ℓ και A_ℓ αντιμετατίθενται, μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta_\ell = \Delta_\ell^P + \Delta_\ell^Z \quad \text{και} \quad \phi_\ell(A_\ell) = \phi_\ell^P(A_\ell) + \phi_\ell^Z(A_\ell).$$

Παρατηρήστε ότι οι $P(A_\ell - b_\ell I)^{-1}P$ και $P(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}P$ είναι θετικά ημιορισμένοι, άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} U^T P(A_\ell - b_\ell I)^{-1}P - P(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}PU &= \delta U^T P(A_\ell - b_\ell I)^{-1}(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-1}PU \\ &\succeq \delta U^T P(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-2}PU. \end{aligned}$$

Εισάγοντας αυτήν την σχέση στην (4.3.10), βλέπουμε ότι πρέπει να δείξουμε το εξής:

$$\mathrm{Tr}\left(U^T Z_\ell(A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-2}Z_\ell U\right) \leqslant \Delta_\ell\left(\frac{\Delta_\ell}{\|U\|_2^2} + \frac{1}{\delta}\right) - \frac{\Delta_\ell^P}{\delta}.$$

Αφού $A_\ell Z_\ell = 0$, έχουμε:

(i) $\mathrm{Tr}(U^T Z_\ell (A_\ell - b_{\ell+1}I)^{-2} Z_\ell U) = \frac{\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_{\ell+1}^2}$ και

(ii) $\Delta_\ell^Z = -\frac{\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_\ell} + \frac{\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_{\ell+1}} = \delta \frac{\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_\ell b_{\ell+1}}$,

άρα, παίρνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι $\Delta_\ell \geqslant \Delta_\ell^Z \geqslant 0$, έχουμε πλέον να δείξουμε το εξής:

$$\frac{\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_{\ell+1}^2} \leqslant \delta^2 \frac{\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^4}{\|U\|_2^2 b_\ell^2 b_{\ell+1}^2} + \frac{\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_\ell b_{\ell+1}}. \tag{4.3.11}$$

Λόγω της (4.3.9), η τελευταία αυτή ανισότητα προκύπτει από την

$$\frac{\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_{\ell+1}^2} \leqslant \delta \frac{\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_\ell b_{\ell+1}^2} + \frac{\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_\ell b_{\ell+1}}, \tag{4.3.12}$$

η οποία ισχύει προφανώς, αφού $b_{\ell+1} = b_\ell - \delta$. □

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.4. Για τον σκοπό αυτό, πρέπει να επαληθεύσουμε ότι οι συνθήκες (4.3.8) και (4.3.9) ικανοποιούνται σε κάθε βήμα. Αρχικά έχουμε $A_0 = 0$ και $Z_\ell = I$, άρα πρέπει να επιλέξουμε ένα εμπόδιο b_0 έτσι ώστε:

$$-\frac{\|U\|_{\mathrm{HS}}^2}{b_0} \leqslant -\|D\|_{\mathrm{HS}}^2 - \frac{\|U\|_2^2}{\delta} \tag{4.3.13}$$

και

$$b_0 \leqslant \delta \frac{\|U\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|U\|_2^2}. \tag{4.3.14}$$

Επιλέγουμε

$$b_0 := \varepsilon \frac{\|U\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|D\|_{\mathrm{HS}}^2} \quad \text{και} \quad \delta := \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{\|U\|_2^2}{\|D\|_{\mathrm{HS}}^2},$$

και παρατηρούμε ότι οι (4.3.13) και (4.3.14) ισχύουν. Επίσης, σε κάθε βήμα η (4.3.8) ισχύει διότι $\phi_{\ell+1}(A_{\ell+1}) \leqslant \phi_\ell(A_\ell)$. Αφού η $\|Z_\ell U\|_{\mathrm{HS}}^2$ μειώνεται το πολύ κατά $\|U\|_2^2$ σε κάθε βήμα, το δεξιό μέλος της (4.3.9) μειώνεται το πολύ κατά δ, άρα η (4.3.9) ισχύει αν αντικαταστήσουμε το b_ℓ με $b_\ell - \delta$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι, μετά από $k = (1-\varepsilon)^2 \frac{\|U\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|U\|_2^2}$ βήματα, το εμπόδιο θα είναι

$$b_k = b_0 - k\delta = \varepsilon^2 \frac{\|U\|_{\mathrm{HS}}^2}{\|D\|_{\mathrm{HS}}^2}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μοναδιαία μπάλα K του X είναι στην θέση Löwner. Για δοθέν $\varepsilon \in (0,1)$ θα βρούμε $k \geqslant (1-\varepsilon)^2 n$ και $y_1, \ldots, y_k \in B_2^n$ τέτοια ώστε, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $(t_j)_{j \leqslant k}$,

$$\varepsilon \left(\sum_{j=1}^{k} t_j^2 \right)^{1/2} \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{k} t_j y_j \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |t_j|.$$

Ξεκινάμε από την αναπαράσταση John της ταυτοτικής απεικόνισης $I = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j x_j^T$, όπου τα x_j είναι σημεία επαφής των K και B_2^n.

Θεωρούμε τον $n \times m$ πίνακα $U = (\sqrt{c_1} x_1, \ldots, \sqrt{c_m} x_m)$ που έχει στήλες τα $\sqrt{c_j} x_j$ και τον διαγώνιο πίνακα $D = \mathrm{diag}(\sqrt{c_1}, \ldots, \sqrt{c_m})$. Τότε, $UU^T = I$ και $\|U\|_{\mathrm{HS}} = \|D\|_{\mathrm{HS}} = \sqrt{n}$. Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.3.4 για τους U και D, και βρίσκουμε $\sigma \subset \{1, \ldots, m\}$ με $|\sigma| = k \geqslant (1-\varepsilon)^2 n$ τέτοιο ώστε, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $\mathbf{t} = (t_j)_{j \in \sigma}$,

$$\left\| U_\sigma D_\sigma^{-1} \mathbf{t} \right\|_2 = \left\| \sum_{j \in \sigma} t_j x_j \right\|_2 \geqslant \varepsilon \left(\sum_{j \in \sigma} t_j^2 \right)^{1/2}.$$

Αφού $K \subseteq B_2^n$ και $\|x_j\| = 1$, έχουμε επίσης

$$\left\| \sum_{j \in \sigma} t_j x_j \right\|_2 \leqslant \left\| \sum_{j \in \sigma} t_j x_j \right\| \leqslant \sum_{j \in \sigma} |t_j| \, \|x_j\| \leqslant \sum_{j \in \sigma} |t_j|,$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

4.4 Απόσταση Banach-Mazur από τον κύβο

Σε αυτήν την παράγραφο συζητάμε την ακτίνα του Banach-Mazur compactum αν θεωρήσουμε ως κέντρο τον ℓ_∞^n:

$$R_\infty^n = \max\{ d(X, \ell_\infty^n) : \mathrm{dim} X = n \}.$$

Ένα φυσιολογικό ερώτημα, το οποίο τέθηκε από τον Pelczynski, είναι να προσδιοριστεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της ακολουθίας R_∞^n καθώς το n τείνει στο άπειρο. Είναι φανερό ότι $R_\infty^n \leqslant \mathrm{diam}(\mathcal{B}_n) \leqslant n$ και το γεγονός ότι $d(\ell_\infty^n, \ell_2^n) = \sqrt{n}$ δείχνει ότι $\sqrt{n} \leqslant R_\infty^n \leqslant n$.

Το τετριμμένο άνω φράγμα μπορεί να βελτιωθεί. Οι Bourgain και Szarek [14] απέδειξαν ότι $R_\infty^n = o(n)$, και αργότερα οι Szarek και Talagrand [55] απέδειξαν ότι $R_\infty^n \leqslant c n^{7/8}$. Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε μια απόδειξη του καλύτερου γνωστού άνω φράγματος (Γιαννόπουλος [25]).

Θεώρημα 4.4.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε*

$$R_\infty^n \leqslant cn^{5/6}$$

για κάθε $n \geqslant 1$.

Στην αντίστροφη κατεύθυνση, ο Szarek [54], χρησιμοποιώντας τυχαίους χώρους τύπου Gluskin, απέδειξε ότι $R_\infty^n \geqslant c\sqrt{n}\log n$. Αυτό σημαίνει ότι η τάξη της R_∞^n είναι γνήσια μεγαλύτερη από $\sqrt{n}$. Με άλλα λόγια, ο ℓ_∞^n δεν είναι ασυμπτωτικό κέντρο του Banach-Mazur compactum.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1 είναι προτιμότερο να μελετήσουμε την δυϊκή ποσότητα

$$R_1^n = \max\{d(X, \ell_1^n) : \dim X = n\}.$$

Δεδομένου ότι $d(X^*, Y^*) = d(X, Y)$ για κάθε ζευγάρι n-διάστατων χώρων με νόρμα, είναι φανερό ότι $R_\infty^n = R_1^n$, άρα το πρόβλημά μας είναι να δώσουμε άνω φράγμα για την $d(X, \ell_1^n)$ για τον τυχόντα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου της μοναδιαίας μπάλας K του X είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Στόχος μας είναι να βρούμε n διανύσματα $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε: για κάθε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{cn^{5/6}} \sum_{i=1}^n |t_i| \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^n t_i u_i \Big\| \leqslant \sum_{i=1}^n |t_i|. \tag{4.4.1}$$

Τότε, ορίζοντας έναν τελεστή $T : \ell_1^n \to X$ με $T(e_i) = u_i$, έχουμε $\|T\| \leqslant 1$ και $\|T^{-1}\| \leqslant cn^{5/6}$, άρα

$$d(X, \ell_i^n) \leqslant \|T\| \, \|T^{-1}\| \leqslant cn^{5/6}.$$

Το βασικό βήμα για την απόδειξη του θεωρήματος είναι η απόδειξη της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 4.4.2. *Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα, και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι η μοναδιαία μπάλα K του X είναι στη θέση Löwner. Τότε, μπορούμε να βρούμε διανύσματα $z_1, \ldots, z_m$ στον X με $\|z_i\| = |z_i| = 1$ και $m \geqslant (1-\varepsilon)n$, τέτοια ώστε για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \ldots, t_m$,*

$$\Big\| \sum_{i=1}^m t_i z_i \Big\|_2 \geqslant c \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^m |t_i|,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 είδαμε ότι μπορούμε να βρούμε $m \geqslant (1-\varepsilon/2)^2 n \geqslant (1-\varepsilon)n$ και $z_1, \ldots, z_m \in B_2^n$ τέτοια ώστε, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $(t_j)_{j\leqslant m}$,

$$\frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{j=1}^m t_j^2\right)^{1/2} \leqslant \Big\| \sum_{j=1}^k t_j z_j \Big\|_2.$$

Αφού

$$\left(\sum_{j=1}^m t_j^2\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^m |t_j| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^m |t_j|,$$

έχουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μοναδιαία μπάλα K του X βρίσκεται στη θέση Löwner. Θεωρούμε τα διανύσματα $z_1, \ldots, z_m$ που μας εξασφαλίζει η Πρόταση 4.4.2, όπου $m \geqslant (1-\varepsilon)n$ για κάποιον $\varepsilon \in (0,1)$ ο οποίος θα επιλεγεί κατάλληλα. Ορίζουμε $F = \mathrm{span}\{z_1, \ldots, z_m\}$ και επιλέγουμε τυχούσα ορθοκανονική βάση $y_1, \ldots, y_{n-m}$ του $F^{\perp}$. Από το θεώρημα του John, για κάθε $j = 1, \ldots, n-m$ έχουμε

$$\|y_j\|_2 \leqslant \|y_j\| \leqslant \sqrt{n}\|y_j\|_2 = \sqrt{n}.$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $w_j = y_j/\|y_j\|$ έχουμε $\|w_j\| = 1$ και $\|w_j\|_2 \geqslant 1/\sqrt{n}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n-m$.

Θεωρούμε τη n-άδα διανυσμάτων $z_1, \ldots, z_m, w_1, \ldots, w_{n-m}$. Παρατηρήστε ότι $n - m \leqslant \varepsilon n$. Έστω $t_1, \ldots, t_m, s_1, \ldots, s_{n-m} \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{i=1}^m t_i z_i + \sum_{j=1}^{n-m} s_j w_j \Big\|_2 &\leqslant \left\| \sum_{i=1}^m t_i z_i + \sum_{j=1}^{n-m} s_j w_j \right\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^m |t_i| + \sum_{j=1}^{n-m} |s_j|,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον εγκλεισμό $K \subseteq B_2^n$, την τριγωνική ανισότητα, και το γεγονός ότι $\|z_i\| = \|w_j\| = 1$. Από την άλλη πλευρά, το διάνυσμα $\sum_i t_i z_i$ είναι κάθετο στο $\sum_j s_j w_j$.

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i + \sum_{j=1}^{n-m} s_j w_j\Big\|_2 &= \left(\Big\|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i\Big\|_2^2 + \Big\|\sum_{j=1}^{n-m} s_j w_j\Big\|_2^2\right)^{1/2} \\
&\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Big\|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i\Big\|_2 + \Big\|\sum_{j=1}^{n-m} s_j w_j\Big\|_2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Big\|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i\Big\|_2 + \left(\sum_{j=1}^{n-m} s_j^2 |z_j|^2\right)^{1/2}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{c\varepsilon}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{m} |t_i| + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n-m}}\sum_{j=1}^{n-m} |s_j|\right) \\
&\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\min\left\{\frac{c\varepsilon}{\sqrt{n}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} n}\right\}\left(\sum_{i=1}^{m} |t_i| + \sum_{j=1}^{n-m} |s_j|\right).
\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι

$$d(X, \ell_1^n) \leqslant \sqrt{2}\max\{\sqrt{n}/c\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} n\}$$

για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$. Η βέλτιστη επιλογή του ε ικανοποιεί την εξίσωση $\sqrt{n} \simeq \varepsilon^{3/2} n$, και μας δίνει

$$\varepsilon \simeq 1/n^{1/3}.$$

Για μια τιμή του ε αυτής της τάξης έχουμε

$$d(X, \ell_1^n) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{c^{1/3}} n^{5/6}.$$

Αφού ο X ήταν τυχών, καταλήγουμε στην

$$R_\infty^n = R_1^n \leqslant c n^{5/6},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Κεφάλαιο 5

Το πρόβλημα των Kadison και Singer

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε το πρόβλημα των Kadison και Singer και τη θετική απάντηση που δόθηκε σε αυτό μέσω της εικασίας του Weaver, μίας ισοδύναμης μορφής του προβλήματος, από τους Marcus, Spielman και Srivastava το 2013. Για να το κάνουμε αυτό αναπτύσουμε και μελετάμε τη μέθοδο τους, η οποία είναι εξαιρετικά πρωτότυπη και κατά τα φαινόμενα πολύ ισχυρή, μίας και δοκιμάστηκε προτού χρησιμοποιηθεί για τη λύση του προβλήματος Kadison-Singer, σε ένα πρόβλημα σχετικό με γραφήματα Ramanujan, στον κλάδο της ακραίας θεωρίας γραφημάτων (βλέπε επόμενο κεφάλαιο).

Το πρόβλημα Kadison-Singer αποτελεί μία θεμελιώδη ερώτηση που αφορά τη Θεωρία των C^*-αλγεβρών. Για περισσότερο από μισό αιώνα υπήρξε πηγή έμπνευσης για πολλούς μαθηματικούς και αποτέλεσε αφορμή για τη δημιουργία καινούριων μαθηματικών. Ένα άλλο χαρακτηριστικό του γνώρισμα είναι οι πολυάριθμες ισοδυναμίες του με άλλες εικασίες, από διάφορες περιοχές των μαθηματικών, οι οποίες αρκετές φορές συνδέουν κλάδους που, εκ πρώτης όψεως, μοίαζουν ξένοι μεταξύ τους.

Υποστηρίζεται από πολλούς συγγραφείς ότι οι ρίζες του προβλήματος βρίσκονται στη φυσική, ειδικότερα στα θεμέλια της κβαντομηχανικής. Μένει να δούμε που βρίσκεται το μέλλον του, μιας και ήδη η μέθοδος με την οποία απαντήθηκε, το συνδέει έμμεσα με την θεωρία γραφημάτων, την πληροφορική, την μελέτη, ανάκτηση και προσέγγιση «μεγάλων δεδομένων», τις επιστήμες του εγκεφάλου. Σίγουρα πάντως θα υπάρξει μέλλον, γιατί η ανζήτηση μίας κατασκευαστικής απόδειξης που προς το παρόν δεν έχει δοθεί, απότελεί κίνητρο για να αναπτυχθουν περαιτέρω οι παραπάνω εφαρμογές.

5.1 Περιγραφή του προβλήματος

Στην ενότητα αυτή διατυπώνουμε το πρόβλημα Kadison-Singer και μία ισοδύναμη μορφή του, την εικασία paving που οφείλεται στον Anderson. Αποδεικνύουμε πως θετική απάντηση στην εικασία paving δίνει θετική απάντηση στο πρόβλημα. Ακολουθούμε τα [56] και [57]. Μία απόδειξη, που δεν απιτεί προαπαιτούμενες γνώσεις, της άλλης κατεύθυνσης της ισοδυναμίας υπάρχει στο [33].

5.1α′ Pure states

Το πρόβλημα διατυπώθηκε από τους Richard Kadison και Isadore Singer το 1959 ([38]) και αφορά την μοναδικότητα επέκτασης pure states μίας μεγιστικής αυτοσυζυγούς μεταθετικής άλγεβρας τελεστών (masa) ενός χώρου Hilbert H, σε states στην άλγεβρα των φραγμένων τελεστών του H. Στο άρθρο τους απαντούν αρνητικά στην περίπτωση όπου η masa είναι συνεχής, ενώ με τη μέθοδό τους δεν καταφέρνουν να δώσουν απάντηση στην περίπτωση όπου η masa είναι διακριτή, δηλαδή στην περίπτωση της εικασίας 5.1.4. Για την προέλευση του προβλήματος, οι ίδιοι λένε ότι «το άκουσαν πρώτη φορά από τους I.E. Segal και I. Kaplansky αν και είναι δύσκολο να αποδοθεί πατρότητα σε ένα πρόβλημα που πηγάζει φυσιολογικά από την φυσική ερμηνεία και την εσωτερική δομή ενός θέματος». Προς την κατεύθυνση αυτή γίνεται μία προσπάθεια στο [17] (εισαγωγή) να προσδιορισθεί η πηγή του προβλήματος και να γίνει ορατή η σύνδεσή του με τα θεμέλια της κβαντομηχανικής.

Η παραπάνω αναφορά συνίσταται επίσης για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται για περισσότερα ιστορικά στοιχεία γύρω από το πρόβλημα και τις διάφορες κατευθύνσεις του, όπως και το [18] όπου ανφέρονται με χρονολογική σειρά τα σημαντικότερα αποτελέσματα (σχετικά με τις διάφορες ισοδυναμίες) από τη διατύπωση του προβλήματος, μέχρι τη λύση του.

Από τις πολλές ισοδύναμες μορφές του προβλήματος, στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την εικασία paving και την εικασία του Weaver, η οποία τελικά αποτέλεσε το καίριο ενδιάμεσο βήμα για να λυθεί το πρόβλημα Kadison-Singer, αλλά παρουσιάζει και από μόνη της ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Στη συνέχεια περιγράφουμε σύντομα την εικασία 5.1.4.

Συμβολίζουμε με $B(H)$ την άλγεβρα των φραγμένων τελεστών ενός χώρου Hilbert H. Μια C^*-άλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ είναι μια κλειστή (ως προς νόρμα και συζυγία) υπάλγεβρα της $B(H)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή I.

Ένα state ϕ σε μια C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μια συνεχής γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ ώστε $\phi(a^*a) \geqslant 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, και $\phi(I) = 1$.

Μπορεί να δειχθεί ότι $\|\phi\| = 1$ και $|\phi(b^*a)|^2 \leqslant \phi(a^*a)\phi(b^*b)$, για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$. Το σύνολο $S(\mathcal{A})$ των states στην A είναι κυρτό w^*-συμπαγές υποσύνολο της $\mathcal{A}^*$. Ένα state $\phi \in S(\mathcal{A})$ καλείται pure state αν το ϕ είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{A}$.

Παράδειγμα 5.1.1. *Μπορεί να δειχθεί ότι για την $B(H)$, αν $\xi \in H$ με $\|\xi\| = 1$ τότε το $\phi_\xi(T) := \langle T\xi, \xi\rangle$ είναι pure state.*

Παράδειγμα 5.1.2. *Αν η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική, τότε από το θεώρημα του Gelfand είναι ισόμορφη με τη $C(X)$, την άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων πάνω από τον συμπαγή χώρο X όλων των πολλαπλασιαστικών τελεστών (χαρακτήρων) $\chi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$. Ο δυϊκός χώρος $C(X)^*$ αποτελείται από όλα τα μέτρα Borel του X και το $S(C(X))$ είναι το σύνολο των μέτρων πιθανότητας πάνω από το X. Τα pure states στο παραπάνω πλαίσιο είναι ακριβώς τα μέτρα Dirac. Ειδικότερα ένα pure state σε μία μεταθετική C^*-άλγεβρα είναι πολλαπλασιαστικό.*

Από ένα θεώρημα του Krein κάθε state ϕ σε μία C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ επεκτείνεται σε pure state $\tilde{\phi}$ στην $B(H)$. Το σύνολο K_ϕ όλων των επεκτάσεων της ϕ είναι w^*-συμπαγές υποσύνολο του $B(H)^*$.

Λήμμα 5.1.3. *Αν το ϕ είναι pure state της υπάλγεβρας $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ τότε τα ακραία σημεία του K_ϕ είναι pure states του $B(H)$.*

Απόδειξη. Έστω ϕ ακραίο σημείο του K_ϕ. Αν

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$$

με ψ_1, ψ_2 να είναι pure states στο $B(H)$, τότε

$$\phi = \frac{1}{2}(\psi_1|_\mathcal{A} + \psi_2|_\mathcal{A}).$$

Αφού ϕ είναι pure state έπεται ότι

$$\psi_1|_\mathcal{A} = \psi_2|_\mathcal{A} = \phi,$$

άρα ψ_1, $\psi_2 \in K_\phi$ (σαν πιθανές επεκτάσεις). Αλλά τότε

$$\psi_1 = \psi_2 = \phi,$$

αφού ϕ ακραίο σημείο. □

Άρα ένα state ϕ στην $\mathcal{A}$ έχει μοναδική επέκταση σε state στην άλγεβρα $B(H)$ αν και μόνο αν έχει μοναδική επέκταση σε pure state στην $B(H)$.

Από εδώ και στο εξής υποθέτουμε ότι ο χώρος Hilbert H είναι ο $\ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2$ και θεωρούμε σαν στοιχεία του $B(\ell^2)$ πίνακες ως προς τη συνήθη ορθοκανονική βαση του ℓ^2. Ορίζουμε $\mathcal{D}$ να είναι η C^*-άλγεβρα των διαγώνιων τελεστών του $B(\ell^2)$. Παρατηρήστε ότι η απεικόνιση

$$\mathrm{diag} : B(\ell^2) \longrightarrow \mathcal{D}$$

που στέλνει τον $A \in B(\ell^2)$ στον $\mathrm{diag}(A)$ με τα ίδια στοιχεία στη διαγώνιο και 0 παντού αλλού είναι συνεχής , θετική με νόρμα 1. Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το πρόβλημα των Kadison-Singer.

Εικασία 5.1.4. ***Εικασία Kadison-Singer (KS):*** *Είναι αλήθεια ότι καθε pure state στη $\mathcal{D}$ επεκτείνεται μοναδικά σε state της $B(\ell^2)$;*

Οι Kadison και Singer πίστευαν ότι στην παραπάνω ερώτηση είναι πιο πίθανη μία αρνητική απάντηση, έχοντας δείξει ότι στην περίπτωση όπου η μεγιστική αβελιανή υπάλγεβρα είναι συνεχής (βλέπε [38][σελ. 384]), η επέκταση δεν είναι μοναδική. Γράφοντας λοιπόν εικασία, εννοούμε σαν τέτοια την κατάφαση της παραπάνω ερώτησης.

Παρατηρούμε ότι κάθε state $\phi \in S(\mathcal{D})$ έχει μια επέκταση στο $S(B(\ell^2))$ που δίνεται από τον τύπο

$$\tilde{\phi}(T) = \phi(\mathrm{diag}(T)).$$

Άρα από την παράγραφο μετά το Λήμμα 5.1.3 το πρόβλημα μετατρέπεται στο αν η $\tilde{\phi}$ είναι ή όχι η μοναδική επέκταση της ϕ στη $B(\ell^2)$. Αν ψ είναι μία διαφορετική επέκταση της ϕ και $T \in B(\ell^2)$ τότε

$$\psi(T - \mathrm{diag}(T)) = \psi(T) - \psi(\mathrm{diag}(T)) = \psi(T) - \tilde{\phi}(T).$$

Άρα $\psi = \tilde{\phi}$ αν και μόνο αν $\psi(T - \mathrm{diag}(T)) = 0$, για κάθε $T \in B(\ell^2)$ που είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη $\psi(T) = 0$, για κάθε $T \in B(\ell^2)$ με μηδενική διαγώνιο. Σαν συνέπεια έχουμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 5.1.5. *Η εικασία Kadison-Singer είναι αληθής αν και μόνο αν κάθε επέκταση $\psi \in S(B(\ell^2))$ μίας pure state στην A ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$\mathrm{diag}(T) = 0 \implies \psi(T) = 0$$

Μάλιστα οι pure states της $\mathcal{D}$ μπορούν να περιγραφούν με μεγαλύτερη ακρίβεια, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η $\mathcal{D}$ είναι μεταθετική και χρησιμοποιώντας το παράδειγμα 5.1.2: Η $\mathcal{D}$ είναι ισόμορφη με τη $C(X)$, όπου X είναι η συμπαγοποίηση Stone-Cech του $\mathbb{N}$, $\beta\mathbb{N}$. Παρατηρούμε τώρα το εξής:

Λήμμα 5.1.6. *Αν ϕ είναι pure state της $\mathcal{D}$ και $P = P^2 \in D$ προβολή τότε $\phi(P) = 0$ ή 1.*

Απόδειξη. Πράγματι αφού η ϕ είναι πολλαπλασιαστική: $\phi(P) = \phi(P^2) = \phi(P)^2$. Άρα $\phi(P) = 0$ ή $\phi(P) = 1$. □

Αν και δεν γίνεται αναφορά στο [38] υπάρχει σύνδεση του προβλήματος Kadison-Singer με τα θεμέλια της κβαντομηχανικής, όπως πολλοί συγγραφείς ανιχνεύουν. Στο [17] γίνεται λεπτομερής ανφορά στην προέλευση του προβλήματος, η οποία σύμφωνα με τους συγγραφείς οφείλεται στον Dirac. Πράγματι, σύμφωνα με την αξιωματική θεμελίωση της κβαντομηχανικής από τον Von Neumman, οι «καταστάσεις» ενός συστήμματος αντιστοιχούν στις states της $B(H)$ και οι «παρατηρήσιμες ποσότητες» (observables) στους αυτοσυζυγείς τελεστές $A \in B(H)$. Η τιμή μίας παρατήρησης A σε μία κατάσταση ϕ είναι $\phi(A)$.

Μία μεγιστική μεταθετική C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ αντιστοιχεί σε ένα σύνολο από συμβατές παρατηρήσιμες ποσότητες, δηλαδή ποσότητες που μπορούν να μετρηθούν μέσω μίας πειραματικής διαδικασίας ταυτόχρονα, χωρίς να επηρεάζει η μία μέτρηση την άλλη. Αν η επέκταση κάθε state της $\mathcal{A}$ είναι μοναδική, τότε το δεδομένο σύνολο παρατηρήσιμων ποσοτήτων καθορίζει πλήρως όλες τίς άλλες παρατητρίσιμες ποσότητες της $\mathcal{A}$. Το παραπάνω φαίνεται να είχε υπονοηθέι από τον Dirac έμμεσα.

5.1β′ Η εικασία Paving

Διατυπώνουμε τώρα την ακόλουθη ισοδύναμη μορφή του προβλήματος Kadison-Singer που οφείλεται στον Anderson και αφορά πεπερασμένης διάστασης πίνακες. Στα επόμενα συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_m$ το σύνολο των διαγώνιων $m \times m$ πινάκων και με diag_m τον περιορισμό της απεικόνισης diag στο χώρο $M_m(\mathbb{C})$ των $m \times m$ πινάκων.

Εικασία 5.1.7. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα: Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $T \in M_m(\mathbb{C})$ με μηδενική διαγώνιο, υπάρχουν διαγώνιες προβολές $Q_1, \dots, Q_r \in \mathcal{D}_m$ ώστε $\sum_{i=1}^r Q_i = I$ και $\|Q_i T Q_i\| \leqslant \varepsilon \|T\|$, για κάθε $i = 1, \dots, r$.*

Μία διαγώνια προβολη $Q \in \mathcal{D}_m$ έχει στοιχεία 0 ή 1 στη διαγώνιο, δηλαδή ορίζεται διαλέγοντας ένα υποσύνολο $S \subseteq \{1, \dots, m\}$. Άρα οι διαγώνιες προβολές $Q_1, \dots, Q_r$ του $\mathcal{D}_m$ που ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{i=1}^r Q_i = I$ αντιστοιχούν σε διαμερίσεις του $\{1, \dots, m\}$ σε r υποσύνολα.

Είναι σημαντικό το πληθος των συνόλων r της διαμέρισης να μην εξαρτάται από τη διάσταση m. Αυτό είναι που μας επιτρέπει να δείξουμε με τα ακόλουθα δύο Λήμματα ότι αν η εικασία Paving είναι αληθής τότε το πρόβλημα Kadison - Singer έχει θετική απάντηση.

Λήμμα 5.1.8. *Αν η εικασία Paving είναι αληθής, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $T \in B(\ell^2)$ με μηδενική διαγώνιο, υπάρχουν διαγώνιες προβολές $Q_1, \dots, Q_r \in \mathcal{D}_m$ ώστε $\sum_{i=1}^r Q_i = I$ και $\|Q_i T Q_i\| \leqslant \varepsilon \|T\|$, για κάθε $i = 1, \dots, r$.*

Απόδειξη. Εμφυτεύουμε το $\mathbb{C}^m$ στο ℓ^2 κανονικά στις πρώτες m συντεταγμένες και συμβολίζουμε με E_m την αντίστοιχη ορθογώνια προβολή του ℓ^2 στον $\mathbb{C}^m$. Για $T \in B(\ell^2)$ έχουμε $T_m = E_m T$. Εφαρμόζοντας την εκασία Paving βρίσκουμε διαγώνιες προβολές $Q_1^{(m)}, \dots, Q_r^{(m)}$ ώστε $\sum_{i=1}^r Q_i^{(m)} = I$ και $\|Q_j^{(m)} T_m Q_j^{(m)}\| \leqslant \varepsilon \|T_m\|$.

Τώρα, οι διαγώνιες προβολές του $B(\ell^2)$ μπορούν να ταυτιστούν με υποσύνολα του $\mathbb{N}$ και άρα με στοιχεία του συμπαγούς χώρου $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Από τη συμπάγεια κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα χρησιμοποιώντας ένα διαγώνιο επιχείρημα μπορούμε να διαλέξουμε αύξουσα υπακολουθία θετικών ακεραίων $\{m_k\}_k$ ώστε για κάθε $i = 1, \dots, r$ να ισχύει

$$Q_i^{(m_k)} \to Q_i,$$

για κάποιο Q_i. Έχουμε

$$\sum_{i=1}^{r} Q_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{r} Q_i^{(m_k)} = \lim_{k\to\infty} I_{m_k} = I.$$

Αν τώρα $\xi, \eta \in \ell^2$ διανύσματα με πεπρασμένο φορέα, τότε $\xi, \eta \in \mathbb{C}^{d_k}$ για κάποιο k και άρα:

$$\begin{aligned} |\langle Q_i T Q_i \xi, \eta\rangle| &= |\langle T Q_i \xi, Q_i \eta\rangle| = |\langle T^{(m_k)} Q_i^{(m_k)} \xi, Q_i^{(m_k)} \eta\rangle| \\ &= |\langle Q_i^{(m_k)} T^{(m_k)} Q_i^{(m_k)} \xi, \eta\rangle| \leqslant \|Q_i^{(m_k)} T^{(m_k)} Q_i^{(m_k)}\| \|\xi\| \|\eta\| \\ &\leqslant \varepsilon \|T\| \|\xi\| \|\eta\|. \end{aligned}$$

Έχουμε το συμπέρασμα. □

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το ακόλουθο

Λήμμα 5.1.9. *Αν ισχύει η εικασία Paving τότε το πρόβλημα Kadison-Singer έχει θετική απάντηση.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ και υποθέτουμε ότι το r ικανοποιεί το συμπέρασμα του προηγούμενου Λήμματος. Έστω pure state $\psi \in S(B(\ell^2))$ και $T \in B(\ell^2)$ με $\mathrm{diag} T = 0$. Από το Λήμμα 5.1.5 πρέπει να δείξουμε ότι $\psi(T) = 0$. Έστω Q_i οι διαγώνιες προβολές του προηγούμενου Λήμματος για τον T. Από το Λήμμα 5.1.6 $\psi(Q_i) = \phi(Q_i) = 0$ ή 1, για κάθε i. Αφού

$$1 = \phi(I) = \sum_{i=1}^{r} \phi(Q_i)$$

υπάρχει i_0 ώστε $\phi(Q_{i_0}) = 1$ και $\phi(Q_i) = 0$ για κάθε $i \neq i_0$. Αν $i \neq i_0$:

$$|\psi(Q_i R)| \leqslant \psi(Q_i^* Q_i) \psi(R^* R) = \psi(Q_i) \psi(R^* R) = 0$$

δηλαδή

$$\psi(Q_i R) = 0$$

για κάθε $R \in B(\ell^2)$. Ομοίως έχουμε $\psi(R Q_i) = 0$. Άρα

$$\psi(T) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \psi(Q_i T Q_j) = \psi(Q_{i_0} T Q_{i_0}).$$

Αλλά οι προβολές Q_i έχουν επιλεχτεί έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$\|Q_{i_0}TQ_{i_0}\| \leqslant \varepsilon\|T\|.$$

Αφού τα παραπάνω ισχύουν για τυχόν ε, έπεται ότι $\psi(T) = 0$ και άρα έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Μένει να δειχθεί η εικασία Paving. Η απόδειξη θα δοθεί στο τέλος του κεφαλαίου. Θα βασιστεί στο Θεώρημα 5.6.10. Από εδώ και στο εξής θα περιγράψουμε αναλυτικά τη μέθοδο των «διαπλρκόμενων οικογενειών πολυωνύμων», όπως αυτή αναπτύχθηκε από τους Marcus, Spielman και Srivastava στα [43] και [44].

5.2 Περιγραφή της Μεθόδου των Marcus, Spielman και Srivastava

Κρίνουμε σκόπιμο σε αυτό το σημείο να σκιαγραφήσουμε την παραπάνω μέθοδο. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χωριστεί στα ακόλουθα βήματα:

(i) Τη Θεωρία των Διαπλεκόμενων Οικογενειών Πολυωνύμων.

(ii) Στοιχεία της Θεωρίας των Πραγματικών Ευσταθών Πολυωνύμων και το μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

(iii) Την Πολυδιάστατη Μέθοδο των εμποδίων.

Το πρώτο βήμα, η θεωρία των διαπλεκόμενων οικογενειών πολυωνύμων, αποτελεί στην ουσία του ένα συνδυαστικό επιχείρημα όπου μας επιτρέπει να επιχειρηματολογήσουμε για τη σχέση των ριζών αθροισμάτων μίας οικογένειας πολυωνύμων που διαχωρίζεται ταυτόχρονα (βλέπε ορισμό 5.3.1), με το επιμέρους άθροισμα των (i-οστών) μεγαλύτερων ριζών των πολυωνύμων. Μέσω του ορισμού 5.3.4 (που δίνεται πρώτη φορά στο [43]) οι συγγραφείς προσδιορίζουν στο Θεώρημα 5.3.5 συγκεκριμένο πολυώνυμο της οικογένειας, με την ιδιότητα η μέγιστη ρίζα του να είναι το πολύ όσο η μέγιστη ρίζα του αθροίσματος όλων των πολυωνύμων που βρίσκονται στην οικογένεια.

Στη συνέχεια, ορίζεται το μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο (Θεώρημα 5.5.2, και σχέση 5.6.1) το οποίο αποτελεί τυχαίο αντικείμενο, ωστόσο συμπεριφέρεται με τρόπο που επιτρέπει (μέσω της πραγματικής ευστάθειάς του) να μελετηθεί. Αποδεικνύεται ότι το συγκεκριμένο πολυώνυμο, σαν πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο μίας μεταβλητής, έχει πραγματικές ρίζες. Το συγκεκριμένο πολυώνυμο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επαγωγική κατασκευή οικογένειας χαρακτηριστικών πολυωνύμων αυτής της μορφής, όπου σε κάθε βήμα προστίθενται καινούριοι rank-1 ερμιτιανοί (τυχαίοι) πίνακες στα ορίσματα των χαρακτηριστικών πολυωνύμων του προηγούμενου βήματος. Η κατασκευή είναι πεπερασμένη (οι τυχαίοι πίνακες που προστίθενται ανά βήμα έχουν πεπερασμένο φορέα), και τελειώνει όταν εξαντληθούν (αδειάσουν) οι φορείς που περιέχουν τα τυχαία διανύσματα απο τα οποία δημιουργούνται οι rank-1 πίνακες. Επομένως η «τυχαιότητα» παίζει δευτερεύοντα ρόλο (βοηθάει λόγου χάρη να απλοποιηθεί ο συμβολισμός με τη χρήση του συμβόλου της μέσης τιμής $\mathbb{E}$). Αποδεικνύεται λοιπόν ότι η οικογένεια αυτή αποτελεί διαπλεκόμενη οικογένεια πολυωνύμων. Για την απόδειξη χρησιμοποιούνται εργαλεία της θεωρίας των ευσταθών πολυωνύμων που αναπτύχθηκαν από τους Borcea και Brändén προκειμένου να αποδείξουν εικασίες του Johnson ([10]).

Τέλος, μένει να να εκτιμηθεί η μέγιστη λύση του μεικτού χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\mathbb{E}\det(xI - \sum v_i v_i^*),$$

προκειμένου, μέσω του πρώτου βήματος, να δοθεί άνω φράγμα για τη μέγιστη ρίζα του και να υλοποιηθεί συγκεκριμένο πολυώνυμο με μέγιστη ρίζα φραγμένη από αυτήν την ποσότητα. Ετσι θα δειχθεί τελικά το Θεώρημα 5.6.10. Για το σκοπό, αυτό χρησιμοποιείται η πολυδιάστατη μέθοδος των εμποδίων: Μελετούνται πραγματικές, πολλών μεταβλητών συναρτήσεις της μορφής:

$$\Phi_p^i = \frac{\partial}{\partial_{z_i}} \log p,$$

όπου p πολυώνυμο της διαπλεκόμενης οικογένειας, οι οποίες καλλούνται συναρτήσεις εμποδίων ή δυναμικά (βλέπε και Κεφάλαιο 3). Παρατηρούμε ότι

$$\Phi_p^i = 1$$

«αν και μόνο αν»

$$p' = p$$

«αν και μόνο αν»

$$(1 - \partial_{z_i})p = 0$$

«αν και μόνο αν»

$$\mathbb{E}\det(xI - \sum v_i v_i^*) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας των συναρτήσεων Φ_p^i (είναι «τελικά» φθίνουσες και κυρτές, βλέπε Λήμμα 5.6.7), αν αυτές κρατηθούν φραγμένες μακρυά και άνω από 1 (που συμβαίνει λόγω του Λήμματος 5.6.7) , τότε εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.6.9 βλέπουμε ότι τα δυναμικά $\Phi^i_{(1-\partial_{z_i})p}$ παραμένουν φραγμένα. Επόμένως, χρησιμοποιώντας επαγωγικά το παραπάνω Λήμμα καθώς και το Λήμμα 5.6.8 δίνεται άνω φράγμα για το μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλαδη αποδεικνύεται το Θεώρημα 5.6.1.

Οι συγγραφείς αναφέρουν στο [44] ότι η απόδειξή τους είναι εμπνευσμένη από μία μέθοδο που χρησιμοποιεί ο Gurvits, προκειμένου να αποδείξει την εικασία του van der Waerden ([29])

Το γεγονός ότι το παρπάνω επιχείρημα δουλεύει, φαίνεται σύμφωνα με πολλούς συγγραφείς απροσδόκητο. Ο Marcus το χαρακτηρίζει ως θαύμα. Η μέθοδος βασίζεται ισχυρά στη δομή της Θεωρίας των πραγματικών ευσταθών πολυωνύμων, καθώς μέσω αυτής είμαστε εξ αρχής σε θέση να επιχειρηματολογήσουμε για αθροίσματα πολυωνύμων με πραγματικές ρίζες, και τη συμπεριφορά των ριζών τους. Ειδικότερα, το γεγονός ότι η ορίζουσα ερμιτιανών πινάκων συμπεριφέρεται καλά όταν διαταράσσεται απο rank-1 πίνακες (Πρόταση 5.4.3) είναι κρίσιμο για την απόδειξη. Για μία καλύτερη περιγραφή της μεθόδου παραπέμπουμε στο [45].

Αναφέρουμε σε αυτό το σημείο την απλοποίηση που έκανε ο Tao ([56]) στο παραπάνω επιχείρημα. Στο παράρτημα δίνουμε εναλλακτικά μία απόδειξη του πιο τεχνικού μέρους της απόδειξης, του βήματος (*iii*), που βασίζεται στη μέθοδό του. (βλέπε και [57]).

5.3 Διαπλεκόμενες οικογένειες πολυωνύμων

Στην ενότητα αυτή τα πολυώνυμα που εμφανίζονται έχουν πραγματικούς συντελεστές και όλες τις ρίζες τους πραγματικές.

Ορισμός 5.3.1. Λέμε ότι το πολυώνυμο $g(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n-1}(x - a_i)$ (με $n-1$ πραγματικές ρίζες) *διαχωρίζει* το πολυώνυμο $f(x) = b_0 \prod_{i=1}^{n}(x - b_i)$ (με n πραγματικές ρίζες) αν

$$b_1 \leqslant a_1 \leqslant b_2 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant b_{n-1} \leqslant a_{n-1} \leqslant b_n.$$

Λέμε ότι τα πολυώνυμα $f_1, \ldots, f_k$ *διαχωρίζονται ταυτόχρονα* αν υπάρχει πολυώνυμο g που διαχωρίζει καθένα από τα f_i, $i = 1, \ldots, k$.

Παρατήρηση 5.3.2. Έστω $\beta_{i,j}$ η j-οστή μικρότερη ρίζα του f_i, $i = 1, \ldots, k$. Τα πολυώνυμα $f_1, \ldots, f_k$ διαχωρίζονται ταυτόχρονα αν και μόνο αν υπάρχουν αριθμοί $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ ώστε $\beta_{i,j} \in [a_{j-1}, a_j]$ για κάθε i, j.

Λήμμα 5.3.3. *Έστω $f_1, \ldots, f_k$ πολυώνυμα του ίδιου βαθμού, με θετικούς μεγιστοβάθμιους όρους. Ορίζουμε*

$$f_\emptyset = \sum_{i=1}^{k} f_i.$$

Αν τα $f_1, \ldots, f_k$ διαχωρίζονται ταυτόχρονα, τότε υπάρχει $i_0 \in [k]$ ώστε η μέγιστη ρίζα του f_{i_0} να είναι το πολύ ίση με τη μέγιστη ρίζα του $f_\emptyset$.

Απόδειξη. Έστω ότι τα πολυώνυμα $f_1, \ldots, f_k$ είναι βαθμού n. Έστω g ένα πολυώνυμο που διαχωρίζει όλα τα $f_1, \ldots, f_k$ και έστω a_{n-1} η μέγιστη πραγματική ρίζα του g. Αφού κάθε f_i έχει θετικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή, έπεται ότι κάθε f_i παίρνει θετική τιμή για μεγάλα x. Επιπλέον, αφού κάθε f_i έχει πραγματική ρίζα που είναι μεγαλύτερη ή ίση του a_{n-1}, έπεται ότι κανένα f_i δεν παίρνει γνήσια θετική τιμή στο a_{n-1}, δηλαδή $f_i(a_{n-1}) \leqslant 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, άρα $f_\emptyset(a_{n-1}) \leqslant 0$. Όμως, το $f_\emptyset$ γίνεται τελικά θετικό αφού ο μεγιστοβάθμιος όρος του είναι θετικός. Επομένως, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έχει ρίζα, έστω $b_n \geqslant a_{n-1}$. Αφού

$$f_\emptyset(b_n) = \sum_{i=1}^{k} f_i(b_n) = 0,$$

υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης i_0 για τον οποίο $f_{i_0}(b_n) \geqslant 0$. Πάλι από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, για το συγκεκριμένο πολυώνυμο f_{i_0} υπάρχει ρίζα $\beta_{n,i_0} \in [a_{n-1}, b_n]$, η οποία είναι μέγιστη ρίζα του f_{i_0}, άρα έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Ορισμός 5.3.4. ***(διαπλεκόμενη οικογένεια πολυωνύμων)*** Έστω $S_1, \ldots, S_m$ πεπερασμένα σύνολα. Για κάθε $(s_1, \ldots, s_m) \in S_1 \times \cdots \times S_m$, έστω $f_{s_1,\ldots,s_m}(x)$ ένα πραγματικό πολυώνυμο βαθμού n, με n πραγματικές ρίζες και θετικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή. Για $s_1, \ldots, s_k$, $k < m$ με $s_1 \in S_1, \ldots, s_k \in S_k$ ορίζουμε:

$$f_{s_1,\ldots,s_k}(x) = \sum_{s_{k+1} \in S_{k+1}, \ldots, s_m \in S_m} f_{s_1,\ldots,s_k,s_{k+1},\ldots,s_m}(x)$$

και

$$f_\emptyset(x) = \sum_{s_1 \in S_1, \ldots, s_m \in S_m} f_{s_1,\ldots,s_m}(x).$$

Λέμε ότι τα πολυώνυμα $\{f_{s_1,\ldots,s_m} : (s_1, \ldots, s_m) \in S_1 \times \cdots \times S_m\}$ αποτελούν διαπλεκόμενη οικογένεια πολυωνύμων αν για κάθε $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ και για κάθε $(s_1, \ldots, s_k) \in S_1 \times \cdots \times S_k$ τα πολυώνυμα $\{f_{s_1,\ldots,s_k,t}\}_{t \in S_{k+1}}$ διαχωρίζονται ταυτόχρονα.

Θεώρημα 5.3.5. *Έστω $S_1, \ldots, S_m$ πεπερασμένα σύνολα και $\{f_{s_1,\ldots,s_m}\}$ διαπλεκόμενη οικογένεια πολυωνύμων. Τότε υπάρχουν $s_1 \in S_1, \ldots, s_m \in S_m$ ώστε η μέγιστη ρίζα του $f_{s_1,\ldots,s_m}$ να είναι μικρότερη ή ίση από τη μέγιστη ρίζα του $f_\emptyset$.*

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 5.3.4 ξέρουμε ότι τα πολυώνυμα $\{f_t\}_{t \in S_1}$ διαχωρίζονται ταυτόχρονα και επιπλέον ισχύει

$$\sum_{t \in S_1} f_t = \sum_{t \in S_1, s_2 \in S_2, \ldots, s_m \in S_m} f_{t,s_2,\ldots,s_m} = f_\emptyset.$$

Από το Λήμμα 5.3.3 υπάρχει $s_1 \in S_1$ ώστε η μέγιστη ρίζα του f_{s_1} να είναι μικρότερη ή ίση από τη μέγιστη ρίζα του $f_\emptyset$. Επαγωγικά, έστω ότι έχουμε βρεί πολυώνυμο $f_{s_1,\ldots,s_k}$ με μέγιστη ρίζα το πολύ ίση με την μέγιστη ρίζα του $f_{s_1,\ldots,s_{k-1}}$. Τότε, για κάθε $t \in S_{k+1}$ θεωρούμε το

$$f_{s_1,\ldots,s_k,t} = \sum_{s_{k+2}\in S_{k+2},\ldots,s_m\in S_m} f_{s_1,\ldots,s_k,t,s_{k+2},\ldots,s_m}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\sum_{t\in S_{k+1}} f_{s_1,\ldots,s_k,t} = \sum_{t\in S_{k+1},\ldots,s_m\in S_m} f_{s_1,\ldots,s_k,t,s_{k+2},\ldots,s_m} = f_{s_1,\ldots,s_k}.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.3.3 βλέπουμε ότι υπάρχει $s_{k+1} \in S_{k+1}$ ώστε το πολυώνυμο $f_{s_1,\ldots,s_{k+1}}$ να έχει μέγιστη ρίζα το πολύ ίση με τη μέγιστη ρίζα του $f_{s_1,\ldots,s_k}$. Συνεχίζοντας έτσι, μετά από m βήματα καταλήγουμε σε ένα πολυώνυμο $f_{s_1,\ldots,s_m}$ για το οποίο έχουμε το συμπέρασμα. □

Το επόμενο λήμμα μας βοηθάει να βρίσκουμε οικογένειες πολυωνύμων που διαχωρίζονται ταυτόχρονα.

Λήμμα 5.3.6. *Έστω $f_1,\ldots,f_k$ πολυώνυμα του ίδιου βαθμού, που έχουν όλες τους τις ρίζες πραγματικές και θετικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή. Τα $f_1,\ldots,f_k$ διαχωρίζονται ταυτόχρονα αν και μόνο αν κάθε κυρτός συνδυασμός τους $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i$, όπου $\lambda_i \geqslant 0$ και $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1$, έχει μόνο πραγματικές ρίζες.*

Απόδειξη. Έστω ότι τα $f_1,\ldots,f_k$ διαχωρίζονται ταυτόχρονα. Δουλεύουμε όπως στην απόδειξη του Λήμματος 5.3.3. Θεωρούμε έναν κυρτό συνδυασμό $f = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i$ των f_i. Αφού τα $f_i,\ldots,f_k$ διαχωρίζονται ταυτόχρονα, υπάρχουν αριθμοί $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ ώστε $\beta_{i,j} \in [a_{j-1},a_j]$ για κάθε $i = 1,\ldots,k$, $j = 1,\ldots,n$, όπου $\beta_{i,j}$ η j-οστή μικρότερη ρίζα του πολυωνύμου f_i. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει κοινή ρίζα για όλα τα f_i ταυτόχρονα, διαφορετικά θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε όλα τα πολυώνυμα με τον αντίστοιχο κοινό παράγοντα. Αφού όλα τα f_i έχουν θετικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή, για κάθε f_i, έχουμε ότι $f_i(a_n) \geqslant 0$, $f_i(a_{n-1}) \leqslant 0$ και ούτω καθεξής, άρα το $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i$ έχει όσες ρίζες έχουν και τα f_i, και είναι του ίδιου βαθμού. Έτσι, έχουμε το συμπέρασμα.

Για το αντίστροφο, μπορούμε να θεωρήσουμε τον κυρτό συνδυασμό δύο μόνο πολυωνύμων, έστω $f_t = tf_1 + (1-t)f_2$ με $0 \leqslant t \leqslant 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα πολυώνυμα f_1 και f_2 δεν έχουν κοινή ρίζα, όπως πριν. Παρατηρούμε ότι οι τροχιές των ριζών του f_t για $0 \leqslant t \leqslant 1$ είναι εν γένει συνεχείς καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο λόγω της ακόλουθης μορφής του Θεωρήματος του Hurvitz.

Θεώρημα 5.3.7. *Έστω $\{f_k\}_k$ ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων, ορισμένων σε ένα συνεκτικό ανοικτό σύνολο $D \subseteq \mathbb{C}$, που συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του*

D σε μια συνάρτηση f. Αν η f έχει ρίζα πολλαπλότητας m στο $z_0 \in D$, τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant k_0$ η f_n να έχει ακριβώς m ρίζες (με τις πολλαπλότητές τους) εντός του δίσκου $|z - z_0| < \varepsilon$. Επιπλέον, οι ρίζες αυτές συγκλίνουν στη ρίζα z_0 καθώς $k \to \infty$.

Πράγματι, αν z_t είναι μια ρίζα του f_t τότε μπορούμε να ορίσουμε ακολουθία f_k που ικανοποιεί τις υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος. Για παράδειγμα, για την περιοχή $\{z : |z - z_t| < \frac{1}{n}\}$ μπορούμε να πάρουμε

$$f_k = \left(t + \frac{1}{2^k}\right) f_1 + \left(1 - t - \frac{1}{2^k}\right) f_2,$$

και τότε οι (αντίστοιχες) ρίζες των παραπάνω πολυωνύμων βρίσκονται στην καμπύλη όπου βρίσκεται και η z_t, και συγκλίνουν στη ρίζα αυτή καθώς $k \to \infty$. Επομένως, για οσοδήποτε μεγάλο n μπορούμε να βρούμε σημεία της καμπύλης οσοδήποτε κοντά στη ρίζα z_t.

Ακόμα, κάθε ρίζα των πολυωνύμων f_t (για συγκεκριμένο t) είναι πραγματική, άρα οι καμπύλες είναι τμήματα της ευθείας των πραγματικών αριθμών που ενώνουν μία ρίζα του f_1 με μία ρίζα του f_2 χωρίς να περνούν από καμία άλλη ρίζα, ούτε του f_1, ούτε του f_2. Πράγματι, αν $f_t(r) = 0$ για $t \in (0,1)$ και $f_1(r) = 0$ (ή $f_2(r) = 0$) τότε

$$f_t(r) = tf_1(r) + (1-t)f_2(r),$$

άρα

$$f_2(r) = 0 = f_1(r),$$

και υπάρχει κοινή ρίζα των f_1 και f_2, άτοπο. Επομένως, κάθε καμπύλη περιέχει ακριβώς μία ρίζα του f_1 και ακριβώς μία ρίζα του f_2, και άρα οι τροχιές των διαφορετικών ριζών του f_t δεν επικαλύπτονται μεταξύ τους. Έπεται ότι μπορούμε να διαχωρίσουμε ταυτόχρονα τα πολυώνυμα f_1 και f_2. Για την απόδειξη της γενικής περίπτωσης αρκεί ένα απλό επαγωγικό επιχείρημα. □

5.4 Πραγματικά ευσταθή πολυώνυμα

Σε αυτήν την παράγραφο θα χρειαστούμε την εξής πολυδιάστατη εκδοχή του Θεωρήματος Hurwitz.

Θεώρημα 5.4.1. *Έστω $D \subseteq \mathbb{C}^n$ ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων που δεν μηδενίζονται στο D και συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του D στη συνάρτηση f. Τότε η f είτε δεν μηδενίζεται στο D, ή είναι η μηδενική συνάρτηση.*

Ορισμός 5.4.2. Ένα πολυώνυμο $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]$ λέγεται ευσταθές αν, όταν $\Im(z_i) > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$, τότε ισχύει ότι $p(z_1, \ldots, z_m) \neq 0$. Ειδικότερα, ένα πολυώνυμο p ονομάζεται πραγματικό ευσταθές αν είναι ευσταθές και οι συντελεστές του είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παρατηρούμε ότι ένα πολυώνυμο μιας μεταβλητής είναι πραγματικό ευσταθές αν και μόνο αν έχει όλες του τις ρίζες πραγματικές. Πράγματι, αν έχει φανταστική ρίζα (με αρνητικό πρόσημο) τότε, αφού έχει πραγματικούς συντελεστές θα περιέχει και τη συζυγή της. Η ακόλουθη πρόταση οφείλεται στους Borcea και Brändén, και βρίσκεται στο [10].

Πρόταση 5.4.3. *Αν $A_1, \ldots, A_m$ είναι θετικά ημιορισμένοι ερμιτιανοί πίνακες, τότε το πολυώνυμο*

$$\det\left(\sum_{i=1}^{m} z_i A_i\right)$$

είναι πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι το αποτέλεσμα ισχύει στην ειδική περίπτωση που οι πίνακες $A_1, \ldots, A_m$ είναι θετικά ορισμένοι. Έστω $z(t) = a + \lambda t$, όπου $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^m$ και $t \in \mathbb{C}$. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας

$$P = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i$$

είναι θετικά ορισμένος, άρα είναι αντιστρέψιμος και έχει τετραγωνική ρίζα, έστω $P^{\frac{1}{2}}$. Τότε,

$$\begin{aligned} f(z(t)) &= \det\left(\sum_{i=1}^{m}(a_i + \lambda_i t)A_i\right) \\ &= \det\left(tP + \sum_{i=1}^{m} a_i A_i\right) \\ &= (\det P)\det\left(tI + P^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i A_i\Big)P^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

όπου το $\det(tI + P^{-\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{m} a_i A_i)P^{-\frac{1}{2}})$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ερμιτανού πίνακα $-P^{-\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{m} a_i A_i)P^{-\frac{1}{2}}$ και άρα έχει πραγματικές ρίζες. Έχουμε το ζητούμενο. Για τη γενική περίπτωση χρησιμοποιούμε ένα επιχείρημα συνέχειας που βασίζεται στο Θεώρημα 5.4.1:

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τουλάχιστον ένας από τους πίνακες $A_1, \ldots, A_m$ έχει τουλάχιστον μία θετική ιδιοτιμή. Σε αντίθετη περίπτωση, θα έχουμε ότι το $f(z_1, \ldots, z_m) =$

$\det\left(\sum_{i=1}^m z_i A_i\right)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Θα προσεγγίσουμε τους πίνακες

$$A_1, \ldots, A_m$$

κατ΄ αντιστοιχία με πίνακες της μορφής

$$A_1 + \frac{1}{2^k} I, \ldots, A_m + \frac{1}{2^k} I,$$

οι οποίοι είναι θετκά ορισμένοι και άρα για αυτούς ισχύει το συμπέρασμα της πρότασης, όπως έχουμε ήδη δείξει. Δηλαδή το πολυώνυμο

$$f^k(z_1, \ldots, z_m) = \det\left(\sum_{i=1}^m z_i (A_i + \frac{1}{2^k} I)\right)$$

είναι πραγματικό ευσταθές, άρα $f^k(z_1, \ldots, z_m) \neq 0$, για κάθε $(z_1, \ldots, z_m) \in D = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \big| \Im(z_i) > 0, \forall i\}$, το οποίο D είναι ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^m$. Η f^k από την πραγματική ευστάθεια δε μηδενίζεται στο D, και από τον ορισμό της σαν ακολουθία πολυωνύμων πολλών μεταβλητών, συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του D στην f. Επομένως από το συμπέρασμα του θεωρήματος 5.4.1 η f είτε δεν μηδενίζεται πουθενά στο D ή ειναι ταυτοτικά 0. Από την υπόθεση δεν είναι ταυτοτικά 0, άρα το πολυώνυμο $\det\left(\sum_{i=1}^m z_i A_i\right)$ είναι πραγματικό ευσταθές. □

Οι επόμενες δύο προτάσεις μας επιτρέπουν να κατασκευάσουμε νέα πραγματικά ευσταθή πολυώνυμα από παλιά. Για την ακρίβεια αποδεικνύεται ότι η πραγματική ευστάθεια ενός πολυωνύμου p είναι ιδιότητα αναλλοίωτη κάτω από τη δράση διαφορικών τελεστών της μορφής $1 - \partial_{z_i}$. Μία απόδειξη για το Θεώρημα 5.4.4 μπορεί να βρεθεί στο [46].

Θεώρημα 5.4.4. *Έστω $q(z)$ μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού d και έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Αν οι ρίζες του $q(z)$ βρίσκονται στο εσωτερικό ενός κλειστού δίσκου A, τότε οι ρίζες του $q(z) - \lambda q'(z)$ βρίσκονται στο εσωτερικό της κυρτής θήκης της περιοχής που προκύπτει μεταφέροντας το A κατά $d\lambda$, δηλαδή εντός του συνόλου $\operatorname{conv}(A \cup (d\lambda + A))$.*

Πόρισμα 5.4.5. *Αν το $p \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_m]$ είναι πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο τότε το*

$$(1 - \partial_{z_1}) p(z_1 \ldots, z_m)$$

είναι επίσης πραγματικό ευσταθές.

Απόδειξη. Έστω $x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{C}$ ώστε $\Im(x_i) > 0$, για κάθε $i = 2, \ldots, m$. Τότε το πολυώνυμο μιας μεταβλητής

$$q(z_1) = p(z_1, x_2, \ldots, x_m)$$

είναι ευσταθές, δηλαδή δε μηδενίζεται για κανέναν μιγαδικό αριθμό με θετικό φανταστικό μέρος. Άρα, οι ρίζες του βρίσκονται εντός του συνόλου $Im_- = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \leqslant 0\}$. Όμως, το αρνητικό ημιεπίπεδο Im_- παραμένει αναλλοίωτο αν το μεταφέρουμε κατά d. Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι το πολυώνυμο $q(z_1) - q^{'}(z_1)$ είναι ευσταθές. Εύκολα προκύπτει ότι και το p είναι ευσταθές, και αφού έχει πραγματικούς συντελεστές, είναι πραγματικό ευσταθές. □

Για μια εναλλακτική απόδειξη της παραπάνω πρότασης, η οποία αποφεύγει την χρήση του Θεωρήματος 5.4.4, παραπέμπουμε στο [57].

Η ακόλουθη πρόταση δίνει άλλη μία χρήσιμη ιδιότητα κλειστότητας για πραγματικά ευσταθή πολυώνυμα.

Πρόταση 5.4.6. *Αν $p \in \mathbb{R}[z_1, \dots, z_m]$ είναι πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο και αν $a \in \mathbb{R}$, τότε το $p|_{z_1=a} = p(a, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{R}[z_2, \dots, z_m]$ είναι επίσης πραγματικό ευσταθές.*

Απόδειξη. Προφανώς το πολυώνυμο $p(a, z_2, \dots, z_m)$ έχει πραγματικούς συντελεστές και δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Από το θεώρημα 5.4.1, για την ακολουθία συναρτήσων $f_k = p(a + \frac{i}{k}, z_2, \dots, z_m)$ στο χωρίο $\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : \Im(z_i) > 0, i = 1, \dots, m\}$, έχουμε ότι το πολυώνυμο $p(a, z_2, \dots, z_m)$ δε μηδενίζεται πουθενά, άρα είναι πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο. □

5.5 Μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Στην ενότητα αυτή, θα ορίσουμε το μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο και θα μελετήσουμε τις βασικές του ιδιότητες. Ξεκινάμε με ένα λήμμα μέσω του οποίου μπορεί να οριστεί το μεικτο χαρακτηριστικό πολυώνυμο διάστασης 1 και που θα μας φανεί χρήσιμο στην απόδειξη του θεωρήματος 5.5.2.

Λήμμα 5.5.1. *Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A και για κάθε τυχαίο διάνυσμα v έχουμε*

$$\mathbb{E}\,\det(A - vv^*) = (1 - \partial_t)\det(A + t\mathbb{E}vv^*)\Big|_{t=0}. \tag{5.5.1}$$

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε οτι ο A είναι αντιστρέψιμος.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\det(A - vv^*)\right] &= \mathbb{E}\left[\det(A)(1 - v^*A^{-1}v)\right] \\ &= \det(A) - \det(A)\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(A^{-1}vv^*)\right] \\ &= \det(A) - \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}\mathbb{E}\,(vv^*)),\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από την πρόταση 2.2.2 και η δεύτερη, από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής, τον ορισμό της πράξης $\bullet$ του ορισμου 2.1.1 και τη σχέση $\mathrm{Tr}(Avv^*) = \mathrm{Tr}(A^*vv^*)$. Από την άλλη πλευρά, από την Πρόταση 2.2.3 έχουμε ότι

$$(1-\partial_t)\det(A + t\mathbb{E}vv^*) = \det(A + t\mathbb{E}(vv^*)) - \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}\mathbb{E}(vv^*)),$$

και θέτοντας $t = 0$ έχουμε το συμπέρασμα.

Αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος μπορούμε να βρούμε ακολουθία αντιστρέψιμων πινάκων που συγκλίνει στον A και να πάρουμε το συμπέρασμα χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα συνέχειας αντίστοιχο με αυτό της Πρότασης 5.4.3. □

Με το ακόλουθο θεώρημα δίνεται ο ορισμός του μεικτού χαρακτηριστικού πολυωνύμου και μία πολύ χρήσιμη έκφραση για αυτό.

Θεώρημα 5.5.2. *Έστω $v_1, \dots, v_m$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα στήλες στον $\mathbb{C}^d$ με πεπερασμένο φορέα. Για κάθε i ορίζουμε $A_i = \mathbb{E}(v_iv_i^*)$. Τότε,*

$$\mathbb{E}\chi\left[\sum_{i=1}^m v_iv_i^*\right](x) = \left(\prod_{i=1}^m (1-\partial_{z_i})\right)\det\left(xI + \sum_{i=1}^m z_iA_i\right)\Big|_{z_1=\dots=z_m=0}. \tag{5.5.2}$$

Συμβολίζουμε αυτό το πολυώνυμο με $\mu[A_1, \dots, A_m](x)$ και το ονομάζουμε μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο των $A_1, \dots, A_m$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε με επαγωγή ως προς k ότι για κάθε πίνακα M

$$\mathbb{E}\det\left(M - \sum_{i=1}^k v_iv_i^*\right) = \left(\prod_{i=1}^k (1-\partial_{z_i})\right)\det\left(M + \sum_{i=1}^k z_iA_i\right)\Big|_{z_1=\dots=z_k=0}.$$

Για $k = 0$ η παραπάνω σχέση είναι τετριμένη. Υποθέτουμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για $i < k$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\det\left(M - \sum_{i=1}^k v_iv_i^*\right) &= \mathbb{E}_{v_1,\dots,v_{k-1}}\mathbb{E}_{v_k}\det\left(M - \sum_{i=1}^{k-1} v_iv_i^* - v_kv_k^*\right)\\
&= \mathbb{E}_{v_1,\dots,v_{k-1}}(1-\partial_{z_k})\det\left(M - \sum_{i=1}^{k-1} v_iv_i^* + z_kA_k\right)\Big|_{z_k=0}\\
&= (1-\partial_{z_k})\mathbb{E}_{v_1,\dots,v_{k-1}}\det\left(M + z_kA_k - \sum_{i=1}^{k-1} v_iv_i^*\right)\Big|_{z_k=0}\\
&= (1-\partial_{z_k})\left(\prod_{i=1}^{k-1}(1-\partial_{z_i})\right)\det\left(M + z_kA_k + \sum_{i=1}^{k-1} z_iA_i\right)\Big|_{z_1=\dots=z_{k-1}=0}\Big|_{z_k=0}\\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}(1-\partial_{z_i})\right)\det\left(M + \sum_{i=1}^{k} z_iA_i\right)\Big|_{z_1=\dots=z_k=0},
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω της ανεξαρτησίας των τυχαίων διανυσμάτων v_i, η δεύτερη από το Λήμμα 5.5.1, η τρίτη λόγω γραμμικότητας της μέσης τιμής και η τέταρτη από την επαγωγική υπόθεση. $\square$

Πόρισμα 5.5.3. *Το μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο θετικά ημιορισμένων ερμιτιανών πινάκων έχει όλες του τις ρίζες πραγματικές.*

Απόδειξη. Πράγματι, από την Πρόταση 5.4.3 το $\det(xI + \sum_{i=1}^m z_i A_i)$ είναι πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο, άρα από το Λήμμα 5.4.5 το

$$\left(\prod_{i=1}^m (1-\partial_{z_i})\right) \det\left(xI + \sum_i z_i A_i\right)$$

είναι επίσης πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο. Τέλος, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.4.6 και θέτοντας $z_1 = \cdots = z_m = 0$, βλέπουμε ότι το πολυώνυμο

$$\left(\prod_{i=1}^m (1-\partial_{z_i})\right) \det\left(xI + \sum_i z_i A_i\right) \Big|_{z_1=\cdots=z_k=0}$$

παραμένει πραγματικό ευσταθές και μάλιστα μιας μεταβλητής, άρα έχει όλες του τις ρίζες πραγματικές. $\square$

Τέλος, αξιοποιώντας την πραγματική ευστάθεια των μεικτών χαρακτηριστικών πολυωνύμων, θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία αποτελούμενη απο m ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα $v_1, \ldots, v_m$ πεπερασμένου φορέα, ορίζει μια διαπλεκόμενη οικογένεια πολυωνύμων.

Έστω l_i το πλήθος των στοιχείων του φορέα του τυχαίου διανύσματος v_i και έστω ότι το v_i παίρνει σαν τιμές τα διανύσματα $w_{i,1}, \ldots, w_{i,l_i}$ με πιθανότητα $p_{i,1}, \ldots, p_{i,l_i}$ αντίστοιχα. Για $j_1 \in [l_1], \ldots, j_m \in [l_m]$ορίζουμε

$$q_{j_1,\ldots,j_m}(x) = \left(\prod_{i=1}^m p_{i,j_i}\right) \chi\left[\sum_{i=1}^m w_{i,j_i} w_{i,j_i}^*\right](x).$$

Θεώρημα 5.5.4. *Τα πολυώνυμα $q_{j_1,\ldots,j_m}$ αποτελούν διαπλεκόμενη οικογένεια πολυωνύμων.*

Απόδειξη. Για $0 \leqslant k \leqslant m$ και $j_1 \in [l_1], \ldots, j_k \in [l_k]$ ορίζουμε

$$q_{j_1,\ldots,j_k}(x) = \left(\prod_{i=1}^k p_{i,j_i}\right) \mathbb{E}_{v_{k+1},\ldots,v_m} \chi\left[\sum_{i=1}^k w_{i,j_i} w_{i,j_i}^* + \sum_{i=k+1}^m v_i v_i^*\right](x).$$

Έστω ακόμα

$$q_\emptyset(x) = \mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_m}\chi\left[\sum_{i=1}^m v_iv_i^*\right](x).$$

Για να επαληθεύσουμε τον Ορισμό 5.3.4 θα χρειαστεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $j_,\ldots,j_k$ τα πολυώνυμα $\{q_{j_1,\ldots,j_k,t}\}_{t\in[l_{k+1}]}$ διαχωρίζονται ταυτόχρονα. Από το Λήμμα 5.3.6, αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε ότι για κάθε $\lambda_1 \geqslant 0,\ldots,\lambda_{l_{k+1}} \geqslant 0$ με $\sum_{t=1}^{l_{k+1}} \lambda_t = 1$, το πολυώνυμο

$$\sum_{t=1}^{l_{k+1}} \lambda_t q_{j_1,\ldots,j_k,t}(x)$$

έχει όλες του τις ρίζες πραγματικές. Πράγματι, έστω u_{k+1} τυχαίο διάνυσμα με

$$\mathbb{P}[u_{k+1} = w_{k+1,t}] = \lambda_t.$$

Τότε το παραπάνω πολυώνυμο ισούται με

$$\left(\prod_{i=1}^k p_{i,j_i}\right)\mathbb{E}_{u_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_m}\chi\left[\sum_{i=1}^k w_{i,j_i}w_{i,j_i}^* + u_{k+1}u_{k+1}^* + \sum_{i=k+2}^m v_iv_i^*\right](x),$$

δηλαδή είναι πολλαπλάσιο ενός μεικτού χαρακτηριστικού πολυωνύμου και άρα από το προηγούμενο πόρισμα έχει όλες του τις ρίζες πραγματικές. □

5.6 Η πολυδιάστατη μέθοδος των εμποδίων

Όπως στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα στήλες $v_1,\ldots,v_m$ στον $\mathbb{C}^d$ με πεπερασμένο φορέα, και για κάθε i ορίζουμε $A_i = \mathbb{E}(v_iv_i^*)$. Το *μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο* των $A_1,\ldots,A_m$ είναι το

$$\mu[A_1,\ldots,A_m](x) = \mathbb{E}\chi\left[\sum_{i=1}^m v_iv_i^*\right](x). \tag{5.6.1}$$

Σε αυτήν την ενότητα το κύριο αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 5.6.1. *Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $A_1,\ldots,A_m$ θετικά ημιορισμένοι ερμιτιανοί πίνακες τέτοιοι ώστε $I = \sum_{i=1}^m A_i$ και $\mathrm{Tr}(A_i) \leqslant \varepsilon$ για κάθε $i = 1,\ldots,m$. Τότε, η μεγαλύτερη ρίζα του $\mu[A_1,\ldots,A_m](x)$ είναι το πολύ ίση με $(1+\sqrt{\varepsilon})^2$.*

Ξεκινάμε αποδεικνύοντας μια παραλλαγμένη έκφραση για το μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\mu[A_1,\ldots,A_m]$, η οποία θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε ξεχωριστά την επίδραση του κάθε πίνακα A_i στις ρίζες του παραπάνω πολυωνύμου.

Λήμμα 5.6.2. *Έστω $A_1, \ldots, A_m$ θετικά ημιορισμένοι ερμιτιανοί πίνακες. Αν $I = \sum_{i=1}^{m} A_i$ τότε*

$$\mu[A_1, \ldots, A_m](x) = \left(\prod_{i=1}^{m}(1 - \partial_{y_i})\right) \det\left(\sum_{i=1}^{m} y_i A_i\right) \Big|_{y_1 = \cdots = y_m = x} \tag{5.6.2}$$

Απόδειξη. Για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση f έχουμε

$$\partial_{y_i}(f(y_i))|_{y_i = z_i + x} = \partial_{z_i} f(z_i + x)$$

από τον κανόνα του Leibniz. Αντικαθιστώντας στην 5.6.2 όπου $y_i = z_i + x$ έχουμε

$$\mu[A_1, \ldots, A_m](x) = \left(\prod_{i=1}^{m}(1 - \partial_{z_i})\right) \det\left(\sum_{i=1}^{m} (z_i + x) A_i\right) \Big|_{z_1 = \cdots = z_m = 0},$$

και άρα, από την $I = \sum_{i=1}^{m} A_i$,

$$\mu[A_1, \ldots, A_m](x) = \left(\prod_{i=1}^{m}(1 - \partial_{z_i})\right) \det\left(xI + \sum_{i=1}^{m} z_i A_i\right) \Big|_{z_1 = \cdots = z_m = 0}.$$

□

Θα γράφουμε

$$\mu[A_1, \ldots, A_m](x) =: Q(x, \ldots, x) \tag{5.6.3}$$

όπου

$$Q(z_1, \ldots, z_m) = \left(\prod_{i=1}^{m}(1 - \partial_{y_i})\right) \det\left(\sum_{i=1}^{m} y_i A_i\right) \Big|_{y_1 = z_1, \ldots, y_m = z_m}.$$

Το φράγμα για τις ρίζες του $\mu[A_1, \ldots, A_m](x)$ έπεται από ένα «πολυμετάβλητο άνω φράγμα» για τις ρίζες του Q το οποίο ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο.

Ορισμός 5.6.3. Έστω $p(z_1, \ldots, z_m)$ πολυώνυμο m μιγαδικών μεταβλητών. Λέμε ότι το $z \in \mathbb{R}^m = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \big| \Im(z_i) = 0, i = 1, \ldots, m\}$ βρίσκεται πάνω από τις ρίζες του p αν

$$p(z + t) > 0$$

για κάθε $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ με $t_i \geqslant 0$, δηλαδή αν το p παίρνει θετικές τιμές στο «μη αρνητικό» 2^m-μόριο που σχηματίζεται από τους πραγματικούς θετικούς ημιάξονες των συντεταγμένων με κέντρο το z.

Θα συμβολίζουμε το σύνολο των σημείων που βρίσκονται πάνω από τις ρίζες του p με Ab_p. Για να αποδειχθεί το Θεώρημα 5.6.1 αρκεί, λόγω της σχέσης (5.6.3), να δείξουμε ότι $(1+\sqrt{\varepsilon})^2\mathbf{1} \in \mathrm{Ab}_Q$, όπου $\mathbf{1} = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^m$, δηλαδή ότι για κάθε $(t_1,\dots,t_m) \in \mathbb{R}^m_+$ ισχύει: $Q(t_1+(1+\sqrt{\varepsilon})^2,\dots,t_m+(1+\sqrt{\varepsilon})^2) > 0$.

Για να το δούμε, έστω ότι πράγματι έχουμε δείξει ότι $(1+\sqrt{\varepsilon})^2\mathbf{1} \in \mathrm{Ab}_Q$. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, δηλαδή ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός x ώστε $\mu[A_1,\dots,A_m](x) = 0$ και $x > (1+\sqrt{\varepsilon})^2$. Τότε εφαρμόζοντας τον ορισμό 5.6.3 για $t := x-(1+\sqrt{\varepsilon})^2$ έχουμε $0 = \mu[A_1,\dots,A_m](x) = Q(x,\dots,x) = Q(t+(1+\sqrt{\varepsilon})^2,\dots,t+(1+\sqrt{\varepsilon})^2) > 0$, άτοπο.

Ορισμός 5.6.4. Αν p είναι ένα πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο και $z=(z_1,\dots,z_m) \in \mathrm{Ab}_p$, η **συνάρτηση εμποδίου** του p στην κατεύθυνση i στο σημείο z ορίζεται ως εξής:

$$\Phi_p^i(z) = \frac{\partial_{z_i} p(z)}{p(z)} = \partial_{z_i} \log p(z).$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να ορίσουμε το $\Phi_p^i(z)$ μέσω της

$$\Phi_p^i(z_1,\dots,z_m) = \frac{q'_{z,i}(z_i)}{q_{z,i}(z_i)} = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{z_i-\lambda_j}, \tag{5.6.4}$$

όπου το πολυώνυμο

$$q_{z,i}(t) = p(z_1,\dots,z_{i-1},t,z_{i+1},\dots,z_m)$$

έχει ρίζες τις $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ οι οποίες είναι πραγματικές λόγω της Πρότασης 5.4.6.

Παρόλο που οι Φ_p^i είναι συναρτήσεις m- το πληθος μεταβλητών, οι ιδιότητες που απαιτούνται να ισχύουν απο αυτές αποδεικνύονται αντιμετωπίζοντας τες σαν συναρτήσεις δύο μεταβλητων, σταθεροποιώντας τις υπόλοιπες. Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύονται αν εκμεταλευτούμε τον επόμενο ισχυρό χαρακτηρισμό για πραγματικά ευσταθή πολυώνυμα δύο μεταβλητών, ο οποίος αποτελεί μερικό αντίστροφο της πρότασης 5.4.3. Διατυπώνεται στην ακόλουθη μορφή από τους Borcea και Brändén και αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα των Helton και Vinnikov (βλέπε [34]), προσαρμοσμένο από τους Lewis, Parrilo και Ramana [42].

Λήμμα 5.6.5. *Έστω $p(z_1,z_2)$ ένα πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο δύο μεταβλητών, βαθμού d. Υπάρχουν θετικά ημιορισμένοι πίνακες A,B και ερμιτιανός πίνακας C τέτοιοι ώστε*

$$p(z_1,z_2) = \pm\det(z_1A+z_2B+C).$$

Παρατήρηση 5.6.6. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε $z_1>0$ και $z_2>0$, ο πίνακας z_1A+z_2B είναι θετικά ορισμένος. Πράγματι, αυτό ισχύει διότι, αν ο z_1A+z_2B

είχε μηδενική ιδιοτιμή τότε θα υπήρχε μη μηδενικό διάνυσμα στην τομή των πυρήνων των A και B. Άρα, διαγωνοποιώντας τους πίνακες (ως προς τη βάση που περιέχει το κοινό τους ιδιοδιάνυσμα), βλέπουμε ότι οι πίνακες που προκύπτουν έχουν τουλάχιστον μία μηδενική γραμμή και στήλη. Κατα συνέπεια το πολυώνυμο $p(z_1,z_2)=\pm\det(z_1A+z_2B+C)$ έχει βαθμό μικρότερο από d.

Το επόμενο λήμμα δίνει τις βασικές αναλυτικές ιδιότητες των συναρτήσεων εμποδίων.

Λήμμα 5.6.7. *Έστω p πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο και έστω $z\in \mathrm{Ab}_p$. Αν $1\leqslant i,j\leqslant m$ και $\delta\geqslant 0$ τότε*

$$\Phi_p^i(z+\delta e_j)\leqslant \Phi_p^i(z) \tag{5.6.5}$$

και

$$\Phi_p^i(z+\delta e_j)\leqslant \Phi_p^i(z)+\delta\partial_{z_j}\Phi_p^i(z+\delta e_j), \tag{5.6.6}$$

δηλαδή πάνω από τις ρίζες του p η συνάρτηση εμποδίου Φ_p^i είναι φθίνουσα και κυρτή ως προς κάθε συντεταγμένη.

Απόδειξη. Αν $i=j$ θεωρούμε το πολυώνυμο μιας μεταβλητής

$$q_{z,i}(z_i)=\prod_{k=1}^{r}(z_i-\lambda_k),$$

όπως ορίστηκε προηγουμένως, το οποίο έχει όλες τις ρίζες του πραγματικές. Αφού $z\in\mathrm{Ab}_p$ ξέρουμε ότι $z_i>\lambda_k$ για κάθε k. Η μονοτονία έπεται άμεσα κοιτάζοντας κάθε όρο ξεχωριστά στη σχέση (5.6.4), και η κυρτότητα επαληθεύεται εύκολα με τον ακόλουθο υπολογισμό:

$$(\partial_{z_i})^2\left(\frac{1}{z_i-\lambda_k}\right)=\frac{2}{(z_i-\lambda_k)^3}>0,$$

αφού $z_i>\lambda_k$.

Στην περίπτωση $i\neq j$ σταθεροποιούμε όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές εκτός των z_i και z_j, και θεωρούμε το πολυώνυμο δύο μεταβλητών

$$q_{z,ij}(z_i,z_j)=p(z_1,\dots,z_m).$$

Από το Λήμμα 5.6.5 υπάρχουν ερμιτιανοί θετικά ημιορισμένοι πίνακες B_i, B_j και ερμιτιανός πίνακας C τέτοιοι ώστε

$$q_{z,ij}(z_i,z_j)=\pm\det(z_iB_i+z_jB_j+C).$$

Η παρατήρηση 5.6.6 μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι το πρόσημο της τελευταίας ορίζουσας είναι θετικό. Πράγματι, από την παρατήρηση 5.6.6, για t αρκετά μεγάλο, ο πίνακας $t(B_i + B_j) + C$ είναι θετικά ορισμένος. Τότε για $t > \max\{z_i, z_j\}$ έπεται ότι $q_{z,ij}(t,t) > 0$, (αφού $z \in Ab_p$).

Από τον τύπο του Jacobi, η συνάρτηση εμποδίου στην κατεύθυνση i μπορεί πλέον να εκφραστεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\Phi_p^i(z) &= \frac{\partial_{z_i}(\det(z_iB_i + z_jB_j + C))}{\det(z_iB_i + z_jB_j + C)}\\ &= \frac{\det(z_iB_i + z_jB_j + C)\mathrm{Tr}((z_iB_i + z_jB_j + C)^{-1}B_i)}{\det(z_iB_i + z_jB_j + C)}\\ &= \mathrm{Tr}((z_iB_i + z_jB_j + C)^{-1}B_i)\end{aligned}$$

Θέτουμε $M = z_iB_i + z_jB_j + C$. Αφού $z \in \mathrm{Ab}_p$ και ο $B_i + B_j$ είναι θετικά ορισμένος, έπεται ότι ο M είναι θετικά ορισμένος, διότι αλλιώς θα υπήρχε t ώστε $\det(M + t(B_i + B_j)) = 0$. Γράφουμε τώρα:

$$\begin{aligned}\Phi_p^i(z + \delta e_j) &= \mathrm{Tr}((M + \delta B_j)^{-1}B_i)\\ &= \mathrm{Tr}(M^{-1}(I + \delta B_jM^{-1})^{-1}B_i)\\ &= \mathrm{Tr}((I + \delta B_jM^{-1})^{-1}B_iM^{-1}).\end{aligned}$$

Για δ αρκετά μικρό μπορούμε να αναπτύξουμε τον $(I + \delta B_jM^{-1})^{-1}$ στη μορφή

$$I - \delta B_jM^{-1} + \delta^2(B_jM^{-1})^2 + \sum_{n\geqslant 3}(-\delta B_jM^{-1})^n.$$

Άρα,

$$\partial_{z_j}\Phi_p^i(z) = -\mathrm{Tr}(B_jM^{-1}B_iM^{-1}).$$

Για να δούμε ότι η παραπάνω ποσότητα είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός και άρα να αποδείξουμε τη μονοτονία, παρατηρούμε ότι οι πινακες B_j και $M^{-1}B_iM^{-1}$ είναι θετικά ημιορισμένοι, άρα το ίχνος του γινομένου τους θα είναι θετικό (άσκηση, χρησιμοποιήστε το φασματικό θεώρημα). Έτσι εξασφαλίζουμε τη μονοτονία. Για την κυρτότητα δουλεύουμε ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, παρατηρώντας ότι

$$\partial_{z_j}^2\Phi_p^i(z) = \mathrm{Tr}((B_jM^{-1})^2B_iM^{-1}) \geqslant 0.$$

□

Θυμηθείτε ότι μας ενδιαφέρει να βρούμε σημεία εντός του Ab_Q όπου το Q παράγεται εφαρμόζοντας διαδοχικά διαφορικούς τελεστές της μορφής $1 - \partial_{z_i}$ στο πολυώνυμο

$\det\left(\sum_i z_i A_i\right)$. Ο σκοπός των «συναρτήσεων εμποδίων» Φ_p^i είναι να μας επιτρέψουν να επιχειρηματολογήσουμε για τη σχέση μεταξύ των Ab_p και $\mathrm{Ab}_{p-\partial_{z_i}p}$. Ειδικότερα, μόνο η ιδιότητα της μονοτονίας (5.6.5) αρκεί για να αποδείξουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 5.6.8. *Υποθέτουμε ότι το p είναι πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο, ότι $z \in \mathrm{Ab}_p$ και ότι $\Phi_p^i(z) < 1$. Τότε $z \in \mathrm{Ab}_{p-\partial_{z_i}p}$.*

Απόδειξη. Έστω $t = (t_1, \ldots, t_m)$ με $t_i \geqslant 0$ για κάθε i. Αφού η Φ_p^i είναι φθίνουσα ως προς κάθε συντεταγμένη και $z \in \mathrm{Ab}_p$, έχουμε ότι $\Phi_p^i(z+t) < 1$, από όπου έπεται ότι

$$\partial_{z_i}p(z+t) < p(z+t),$$

δηλαδή

$$p(z+t) - \partial_{z_i}p(z+t) > 0,$$

και έχουμε το συμπέρασμα. □

Το Λήμμα 5.6.8 μας δίνει κατάλληλες συνθήκες για το πότε ένα διάνυσμα είναι πάνω από τις ρίζες του $p - \partial_{z_i}p$. Παρόλα αυτά δεν είναι αρκετά ισχυρό για ένα επαγωγικό επιχείρημα, καθώς ο τυχών τελεστής $1 - \partial_{z_i}$ μπορεί να δράσει στις συναρτήσεις εμποδίων αυξάνοντάς τες. Διατυπώνουμε λοιπόν το ακόλουθο ισχυρότερο λήμμα, όπου απαιτούμε το εμπόδιο να έχει άνω φράγμα γνήσια μικρότερο του 1.

Λήμμα 5.6.9. *Υποθέτουμε ότι το $p(z_1, \ldots, z_m)$ είναι πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο, $z \in \mathrm{Ab}_p$ και ότι για κατάλληλο $\delta > 0$ ισχύει*

$$\Phi_p^j(z) \leqslant 1 - \frac{1}{\delta}.$$

Τότε, για κάθε i,

$$\Phi_{p-\partial_{z_j}p}^i(z + \delta e_j) \leqslant \Phi_p^i(z).$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε αρχικά:

$$\Phi_{p-\partial_{z_j}p}^i = \frac{\partial_{z_i}(p - \partial_{z_j}p)}{p - \partial_{z_j}p} = \frac{\partial_{z_i}\left(\dfrac{p-\partial_{z_j}p}{p}p\right)}{\dfrac{p-\partial_{z_j}p}{p}p} = \frac{\partial_{z_i}((1-\Phi_p^j)p)}{(1-\Phi_p^j)p} = \frac{(1-\Phi_p^j)(\partial_{z_i}p)}{(1-\Phi_p^j)p} + \frac{p\partial_{z_i}(1-\Phi_p^j)}{(1-\Phi_p^j)p}$$

$$= \Phi_p^i - \frac{\partial_{z_i}\Phi_p^j}{1-\Phi_p^j} = \Phi_p^i - \frac{\partial_{z_j}\Phi_p^i}{1-\Phi_p^j},$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιείται η σχέση $\partial_{z_i}\Phi_p^j = \partial_{z_i}\partial_{z_j}\log p = \partial_{z_j}\partial_{z_i}\log p = \partial_{z_j}\Phi_p^i$.

Ζητάμε να δείξουμε ότι
$$\Phi^i_{p-\partial_{z_j}}(z+\delta e_j) \leqslant \Phi^i_p(z).$$
Από τον προηγούμενο υπολογισμό, για το εμπόδιο $\Phi^i_{p-\partial_{z_j}p}$ υπολογισμένο στην τιμή $z+\delta e_j$ αρκεί να δειχθεί ότι
$$-\frac{\partial_{z_j}\Phi^i_p(z+\delta e_j)}{1-\Phi^j_p(z+\delta e_j)} \leqslant \Phi^i_p(z) - \Phi^i_p(z+\delta e_j).$$
Από την σχέση 5.6.6 του Λήμματος 5.6.7 (κυρτότητα), έχουμε
$$\Phi^i_p(z) - \Phi^i_p(z+\delta e_j) \geqslant -\delta\partial_{z_j}\Phi^i_p(z).$$
Άρα, αρκεί να ισχύει η
$$-\delta\partial_{z_j}\Phi^i_p(z) \geqslant -\frac{\partial_{z_j}\Phi^i_p(z+\delta e_j)}{1-\Phi^j_p(z+\delta e_j)},$$
όπου από τη σχέση (5.6.5) -που λέει ότι η Φ^i_p είναι φθίνουσα στην κατεύθυνση z_j- έχουμε ότι $-\partial_{z_j}\Phi^i_p(z+\delta e_j) \geqslant 0$. Άρα,
$$\delta \geqslant \frac{1}{1-\Phi^j_p(z+\delta e_j)}.$$
Εφαρμόζοντας άλλη μια φορά το Λήμμα 5.6.7 έχουμε ότι
$$\Phi^j_p(z+\delta e_j) \leqslant \Phi^j_p(z),$$
άρα αρκεί η
$$\delta \geqslant \frac{1}{1-\Phi^j_p(z+\delta e_j)} \geqslant \frac{1}{1-\Phi^j_p(z)},$$
που ισχύει από την υπόθεση. □

Έχουμε τώρα τα αναγκαία εργαλεία για να αποδείξουμε το Θεώρημα 5.6.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.6.1. Έστω
$$P(y_1,\ldots,y_m) = \det\left(\sum_{i=1}^m y_i A_i\right).$$
Θέτουμε $t=\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon$.

Αφού όλοι οι πίνακες A_i είναι θετικά ημιορισμένοι και
$$\det\left(t\sum_{i=1}^m A_i\right) = \det tI > 0$$

το διάνυσμα $t\mathbf{1}$ είναι πάνω από τις ρίζες του P.

Από τον τύπο του Jacobi έχουμε

$$\Phi_P^i(y_1,\dots,y_m) = \frac{\partial_{y_i} P(y_1,\dots,y_m)}{P(y_1,\dots,y_m)} = \operatorname{Tr}\left(\Big(\sum_{i=1}^m y_i A_i\Big)^{-1} A_i\right).$$

Άρα,

$$\Phi_P^i(t\mathbf{1}) = \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{t} I \cdot A_i\right) = \frac{1}{t}\operatorname{Tr}(A_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{t} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}} =: \phi.$$

Θέτουμε

$$\delta = \frac{1}{1-\phi} = \frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} = 1+\sqrt{\varepsilon}.$$

Για $k \in [m]$ ορίζουμε

$$P_k(y_1,\dots,y_m) = \left(\prod_{i=1}^k (1-\partial_{y_i})\right) P(y_1,\dots,y_m).$$

Θέτουμε ακόμα

$$x^0 = (t,t,\dots,t) \in \mathbb{R}^m$$

και για $k \in [m]$

$$x^k = (t+\delta,\dots,t+\delta,t,\dots,t),$$

δηλαδή

$$x^{k+1} = x^k + \delta e_{k+1}$$

όπου αυξάνουμε διαδοχικά κατά δ τις πρώτες k συντεταγμένες του $t\mathbf{1}$.

Εφαρμόζοντας επαγωγικά τα δύο προηγούμενα λήμματα έχουμε με τους παραπάνω συμβολισμούς ότι

$$x^k \in \mathrm{Ab}_{P_k}$$

και

$$\Phi_{P_k}^i(x^k) \leqslant \phi,$$

για κάθε i, για κάθε k. Πράγματι, για $x_0 = (t,\dots,t)$ έχουμε ότι $P_0(t+t_1,\dots,t+t_m) = \det(tI + \sum_{i=1}^m t_i A_i) > 0$, για κάθε $(t_1,\dots,t_m) \in \mathbb{R}_+^m$ και $\Phi_{P_0}^i(t\mathbf{1}) \leqslant \phi$. Έστω ότι $x_k \in Ab_{P_k}$ και $\Phi_{P_k}^i(x^k) \leqslant \phi$. Τότε από το Λήμμα 5.6.9 έπεται ότι $\Phi^i_{(1-\partial_{k+1})P_k}(x_k+\delta e_{k+1}) \leqslant \Phi_{P_k}^i(x^k) \leqslant \phi < 1$. Επίσης φαίνεται καθαρά ότι $x^{k+1} \in Ab_{p_k}$. Επομένως, από το Λήμμα 5.6.8 έχουμε ότι $x^{k+1} \in Ab_{P_{k+1}}$. Δηλαδή $x^m = (t+\delta)\mathbf{1} = (1+\sqrt{\varepsilon})^2\mathbf{1} \in Ab_{P_m} = Ab_Q$, και το συμπέρασμα έπεται από την παρτήρηση μετά τον ορισμό 5.6.3.

Δηλαδή η μεγαλύτερη ρίζα του $\mu[A_1, \ldots, A_m](x) = Q(x) = P_m(x, \ldots, x)$ είναι το πολύ $(1+\sqrt{\varepsilon})^2$. □

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το κύριο θεώρημα του [44].

Θεώρημα 5.6.10. *Έστω $\varepsilon > 0$ και $v_1, \ldots, v_m$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα στο $\mathbb{C}^d$ με πεπερασμένο φορέα ώστε*

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}(v_i v_i^*) = I_d$$

και

$$\mathbb{E}(v_i^* v_i) \leqslant \varepsilon$$

για κάθε i. Τότε,

$$P\left[\Big\| \sum_{i=1}^{m} v_i v_i^* \Big\|_2 \leqslant (1+\sqrt{\varepsilon})^2\right] > 0.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $A_i = \mathbb{E}(v_i v_i^*)$. Έχουμε τότε ότι

$$\mathrm{Tr}(A_i) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(v_i v_i^*)\right] = \mathbb{E}\left(v_i^* v_i\right) \leqslant \varepsilon$$

για κάθε i. Παρατηρήστε ότι το μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\sum_i v_i v_i^*$ είναι το $\mu[A_1, \ldots, A_m](x)$. Το Θεώρημα 5.6.1 εγγυάται ότι η μέγιστη ρίζα του πολυωνύμου αυτού είναι το πολύ ίση με $(1+\sqrt{\varepsilon})^2$.

Για $i \in [m]$, έστω l_i το πλήθος των στοιχείων του φορέα του τυχαίου διανύσματος v_i και έστω ότι το v_i παίρνει τις τιμές $w_{i,1}, \ldots, w_{i,l_i}$ με πιθανότητες $p_{i,1}, \ldots, p_{i,l_i}$ αντίστοιχα. Το Θεώρημα 5.5.4 μας λέει ότι τα πολυώνυμα $q_{j_1,\ldots,j_m}$ αποτελούν διαπλεκόμενη οικογένεια πολυωνύμων. Άρα, από το Θεώρημα 5.3.5, υπάρχουν $j_1, \ldots, j_m$ ώστε η μεγαλύτερη ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα

$$\sum_{i=1}^{m} w_{i,j_i} w_{i,j_i}^*$$

να είναι το πολύ ίση με $(1+\sqrt{\varepsilon})^2$. □

Πόρισμα 5.6.11. *Θεωρούμε $\delta > 0$. Έστω r τυχών θετικός ακέραιος και έστω διανύσματα $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{C}^d$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{i=1}^{m} (u_i u_i^*) = I_d$$

και

$$\|u_i\|_2^2 < \delta$$

για κάθε i. Τότε, υπάρχει διαμέριση $\{S_1, \ldots, S_r\}$ του $[m]$ ώστε

$$\Big\| \sum_{i\in S_j} u_i u_i^* \Big\|_2 \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \sqrt{\delta} \right)^2$$

για $j = 1, \ldots, r$.

Απόδειξη. Για κάθε $i \in [m]$ και $k \in [r]$ ορίζουμε $w_{i,k} \in \mathbb{C}^{rd}$ να είναι το ευθύ άθροισμα r διανυσμάτων του $\mathbb{C}^d$ ώστε

$$w_{i,1} = \sqrt{r}\begin{pmatrix} u_i \\ 0^d \\ \vdots \\ 0^d \end{pmatrix}, w_{i,2} = \sqrt{r}\begin{pmatrix} 0^d \\ u_i \\ \vdots \\ 0^d \end{pmatrix}, \ldots, w_{i,r} = \sqrt{r}\begin{pmatrix} 0^d \\ 0^d \\ \vdots \\ u_i \end{pmatrix}$$

όπου $0^d = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^d$. Θεωρούμε $v_1, \ldots, v_m$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα ώστε το v_i να παίρνει τιμές στο σύνολο $\{w_{i,k}\}_{k=1}^r$ με πιθανότητα $P[v_i = w_{i,k}] = \frac{1}{r}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(v_i v_i^*) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{r} w_{i,j} w_{i,j}^* &= \sum_{j=1}^r \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0^{d\times d} & \ldots & 0^{d\times d} & \ldots & 0^{d\times d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0^{d\times d} & \ldots & r u_i u_i^* & \ldots & 0^{d\times d} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^{d\times d} & & \ldots & & 0^{d\times d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_i u_i^* & \ldots & 0^{d\times d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^{d\times d} & \ldots & u_i u_i^* \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\sum_{i=1}^m \mathbb{E}(v_i v_i^*) = I_{rd}.$$

Ακόμα

$$\|v_i\|_2^2 = r\|u_i\|_2^2 \leqslant r\delta.$$

Έτσι, από το Θεώρημα 5.6.10 έχουμε ότι για $\varepsilon = r\delta$ υπάρχει κατάλληλη ανάθεση τιμών στα v_i ώστε

$$\Big\| \sum_{i=1}^m v_i v_i^* \Big\|_2 \leqslant (1 + \sqrt{r\delta})^2.$$

Ισοδύναμα, για κάθε i και για κάθε v_i υπάρχει $w_{i,j}$ ώστε $v_i = w_{i,j}$ και

$$\Big\| \sum_{j=1}^{r} \sum_{\{i : v_i = w_{i,j}\}} w_{i,j} w_{i,j}^* \Big\|_2 \leqslant (1 + \sqrt{r\delta})^2.$$

Δηλαδή για τη διαμέριση του $[m]$ στα υποσύνολα $S_j = \{i : v_i = w_{i,j}\}$ έχουμε

$$\Big\| \sum_{i \in S_j} u_i u_i^* \Big\|_2 \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \sqrt{\delta} \right)^2,$$

όπου διαιρέσαμε με r τα δύο μέλη της προηγούμενης ανισότητας και χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο πίνακας $\sum\limits_{j=1}^{r} \sum_{\{i : v_i = w_{i,j}\}} w_{i,j} w_{i,j}^* - \sum_{i \in S_k} u_i u_i^*$ είναι θετικά ορισμένος για κάθε k. □

5.7 Η εικασία του Weaver

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 5.6.11 οι Marcus, Spielman και Srivastava δίνουν απάντηση στην ακόλουθη εικασία του Weaver, την ισοδύναμη μορφή του προβλήματος Kadison-Singer στα πλαίσια της discrepancy theory. Η εικασία αυτή είναι ισοδύναμη με την εικασία paving των Akerman και Anderson, όπως έδειξε ο Weaver στο [59], η οποία είναι με τη σειρά της ισοδύναμη με την καταφατική απάντηση στο πρόβλημα των Kadison και Singer.

Εικασία 5.7.1 (KS_2). *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $N \geqslant 2$ και $\varepsilon > 0$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα: Υποθέτουμε ότι για τα $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{C}^d$ ισχύουν οι $\|w_i\|_2 \leqslant 1$ για κάθε i και*

$$\sum_{i=1}^{m} |\langle u, w_i \rangle|^2 = N$$

για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $u \in \mathbb{C}^d$. Τότε, υπάρχει διαμέριση $S_1 \cup S_2 = [m]$ ώστε

$$\sum_{i \in S_j} |\langle u, w_i \rangle|^2 \leqslant N - \varepsilon,$$

για κάθε $u \in \mathbb{C}^d$ με $\|u\|_2 = 1$, για $j = 1, 2$.

Απόδειξη. Αρχικά επαληθεύουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{m} |\langle u, \frac{1}{\sqrt{N}} w_i \rangle|^2 = 1, \quad \forall u \in \mathbb{C}^d \text{ ώστε } \|u\| = 1.$$

Θέτουμε $u_i = \dfrac{1}{\sqrt{N}} w_i$. Τότε

$$\sum_{i=1}^{m} |\langle u, u_i\rangle|^2 = 1 \qquad \text{και} \qquad \|u_i\| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{5.7.1}$$

Ζητητάμε να δείξουμε ότι $\sum_{i=1}^m u_i u_i^* = I$, προκειμένου να επαληθεύσουμε την υπόθεση του Πορίσματος 5.6.11. Θέτουμε $u_i = (u_i^1, \ldots, u_i^d) \in \mathbb{C}^d$, για $i = 1, \ldots, m$. Θέλουμε λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} u_i u_i^* = \sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} u_i^1\overline{u_i^1} & u_i^1\overline{u_i^2} & \ldots & u_i^1\overline{u_i^d} \\ u_i^2\overline{u_i^1} & u_i^2\overline{u_i^2} & \ldots & u_i^2\overline{u_i^d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_i^d\overline{u_i^1} & u_i^d\overline{u_i^2} & \ldots & u_i^d\overline{u_i^d} \end{pmatrix} = I,$$

δηλαδή ότι

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^j\overline{u_i^j} = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{m} u_i^j\overline{u_i^k} = \overline{\sum_{i=1}^{m} u_i^j\overline{u_i^k}} = 0, \tag{5.7.2}$$

για κάθε $j, k = 1, \ldots, d$ με $k \neq j$. Έστω $(e_i)_{i=1}^m$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^d$. Παρατηρούμε ότι για $u = e_j$, η σχέση 5.7.1 δίνει:

$$\sum_{i=1}^{m} \langle e_j, u_i\rangle\overline{\langle e_j, u_i\rangle} = \sum_{i=1}^{m} \langle e_j, u_i\rangle\langle u_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} u_i^j\overline{u_i^j} = \sum_{i=1}^{m} |u_i^j|^2 = 1$$

Ομοίως για $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_j + e_k)$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{m} |\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + e_k), u_i\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} |u_i^j|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_i^k|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} u_i^j\overline{u_i^k} + \overline{\sum_{i=1}^{m} u_i^j\overline{u_i^k}}\right) = 1,$$

οπότε από το πρώτο μισό της σχέσης 5.7.2 που έχει δειχθεί ήδη, έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^j\overline{u_i^k} + \overline{\sum_{i=1}^{m} u_i^j\overline{u_i^k}} = 0.$$

Τέλος για $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_j - ie_k)$ παίρνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^j\overline{u_i^k} - \overline{\sum_{i=1}^{m} u_i^j\overline{u_i^k}} = 0.$$

Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν την σχέση 5.7.2.

Αν, στο Πόρισμα 5.6.11, θέσουμε $\delta = \frac{1}{18}$ και $r = 2$, τότε για τα παραπάνω $u_i = \frac{1}{\sqrt{N}} w_i$, $i = 1, \ldots, m$, έχουμε ότι υπάρχει διαμέριση τους σε δύο υποσύνολα S_1, S_2 ώστε για κάθε $j \in \{1, 2\}$, αν $\|u\| = 1$

$$\begin{aligned}\sum_{i \in S_j} |\langle u, u_i \rangle|^2 &= \sum_{i \in S_j} \langle u, u_i \rangle \langle u_i, u \rangle = \sum_{i \in S_j} \langle \langle u, u_i \rangle u_i, u \rangle = \Big\langle (\sum_{i \in S_j} u_i u_i^*) u, u \Big\rangle \\ &\leqslant \| \sum_{i \in S_j} u_i u_i^* \| \leqslant (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{18}})^2 = \frac{16}{18}\end{aligned}$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας με $N = 18$ και τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας επαληθεύουμε εύκολα ότι για $\varepsilon = 2$ ισχύει η παραπάνω εικασία. □

5.8 Απόδειξη της εικασίας paving

Δείχνουμε πρώτα το ακόλουθο βοηθητικό λήμμα.

Λήμμα 5.8.1. *Έστω $P \in M_m(\mathbb{C})$ ορθογώνια προβολή. Για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχουν διαγώνιες προβολές $Q_1, \ldots, Q_r \in M_m(\mathbb{C})$, με $\sum_{i=1}^r Q_i = I$ ώστε*

$$\|Q_j P Q_j\|_2 \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \sqrt{\|\mathrm{diag} P\|_\infty} \right)^2$$

για κάθε $j = 1, \ldots, r$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με V την εικόνα του P και θέτουμε $d = \dim(V)$. Έστω $\{e_i\}_{i=1}^m$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^m$ και έστω A_i οι θετικά ορισμένοι τελεστές τάξης 1 που ορίζονται στον V και δίνονται από τον τύπο

$$A_i(v) = \langle v, Pe_i \rangle Pe_i.$$

Έχουμε

$$\|A_i\|_2 \leqslant \|Pe_i\|_2^2 = \langle Pe_i, Pe_i \rangle = \langle Pe_i, e_i \rangle \leqslant \|\mathrm{diag} P\|_\infty, \tag{5.8.1}$$

και, για κάθε $v \in V$,

$$\langle A_i v, v \rangle = \langle v, Pe_i \rangle \langle Pe_i, v \rangle = |\langle v, Pe_i \rangle|^2 = |\langle Pv, e_i \rangle|^2 = |\langle v, e_i \rangle|^2. \tag{5.8.2}$$

Άρα,

$$\Big\langle \sum_{i=1}^m A_i v, v \Big\rangle = \sum_{i=1}^m \langle A_i v, v \rangle = \sum_{i=1}^m |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|_2^2$$

και

$$\sum_{i=1}^{d} A_i = I_V.$$

Από τις σχέσεις (5.8.1) και (5.8.2) βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Πορίσματος 5.6.11 για $\delta = \|\mathrm{diag}P\|_\infty$, επομένως υπάρχει διαμέριση $S_1, \ldots, S_r$ του $[d]$ ώστε

$$\Big\| \sum_{i \in S_j} A_i \Big\|_2 \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \sqrt{\|\mathrm{diag}P\|_\infty} \right)^2,$$

για κάθε $j = 1, \ldots, r$. Ορίζουμε $Q_j \in M_m(\mathbb{C})$ να είναι η διαγώνια ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο $\mathrm{span}\{e_i : i \in S_j\}$. Τότε,

$$\|Q_j P Q_j\|_2 = \|Q_j P P^* Q_j\|_2 = \|Q_j P\|_2^2 = \|Q|_V\|_2^2.$$

Αλλά, αν $v \in V$, από τη σχέση (5.8.2) παίρνουμε

$$\|Q_j v\|_2^2 = \sum_{i \in S_j} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \sum_{i \in S_j} \langle A_i v, v \rangle = \langle \sum_{i \in S_j} A_i v, v \rangle \leqslant \Big\| \sum_{i \in S_j} A_i \Big\|_2 \|v\|_2^2.$$

Άρα,

$$\|Q_j P Q_j\|_2 = \|Q|_V\|_2^2 \leqslant \Big\| \sum_{i \in S_j} A_i \Big\|_2 \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \sqrt{\|\mathrm{diag}P\|_\infty} \right)^2.$$

Παραπάνω υποθέσαμε (σιωπηρά) χωρις βλάβη της γενικότητας ότι η εικόνα της προβολής P είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{C}^m$ που παράγεται από τα πρώτα d ορθοκανονικά διανύσματα. Για τα υπόλοιπα το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα. □

Δίνουμε τώρα την απόδειξη της εικασίας paving.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $T = T^*$ και $\|T\|_2 \leqslant 1$. Ο $2m \times 2m$ πίνακας

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_m + T & (I_m - T^2)^{\frac{1}{2}} \\ (I_m - T^2)^{\frac{1}{2}} & I_m - T \end{pmatrix} \tag{5.8.3}$$

είναι ορθογώνια προβολή (εύκολα ελέγχεται ότι $P = P^2$) με διαγώνιο $\mathrm{diag}P = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$. Από το προηγούμενο λήμμα, για r που ικανοποιεί την $2\left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 \leqslant \varepsilon$, υπάρχουν διαγώνιες προβολές $Q_1'', \ldots, Q_r''$ με $\sum_{i=1}^r Q_i'' = I_{2m}$ και $\|Q_i'' P Q_i''\|_2 \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ για κάθε $i = 1, \ldots, r$. Έστω

$$Q_i'' = \begin{pmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & Q_i' \end{pmatrix}$$

όπου για κάθε i οι Q_i, $Q_i^{'}$ είναι οι διαγώνιες προβολές που αντιστοιχούν στους υπόχωρους του $\mathbb{C}^{2m}$ που παράγονται από τα πρώτα m και τα τέλευταία m διανύσματα της βάσης αντίστοιχα. Άρα

$$\sum_{i=1}^{r} Q_i = \sum_{i=1}^{r} Q_i^{'} = I_m$$

και για κάθε i ισχύουν οι σχέσεις

$$\|Q_i(I+T)Q_i\|_2 \leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \tag{5.8.4}$$

και

$$\|Q_i^{'}(I-T)Q_i^{'}\|_2 \leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2. \tag{5.8.5}$$

Από την πρώτη ανισότητα έπεται ότι $Q_i(I+T)Q_i \preceq 2\left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 Q_i$, άρα

$$-Q_i \preceq Q_iTQ_i \preceq \left(2\left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1\right) Q_i \preceq \varepsilon Q_i.$$

Ομοίως, η αντίστοιχη ανισότητα για το $Q_i^{'}$ είναι

$$-\varepsilon Q_i^{'} \preceq \left(1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) Q_i^{'} \preceq Q_i^{'}TQ_i^{'} \preceq Q_i^{'}.$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι

$$-\varepsilon Q_iQ_j^{'} \preceq Q_iQ_j^{'}TQ_iQ_j^{'} \preceq \varepsilon Q_iQ_j^{'},$$

δηλαδή

$$\|Q_iQ_j^{'}TQ_iQ_j^{'}\|_2 \leqslant \varepsilon,$$

και αφού $\sum\limits_{i,j=1}^{r} Q_iQ_j^{'} = I_m$ η εικασία έχει δειχθεί στην περίπτωση των ερμιτανών πινάκων νορμας 1. Γενικότερα, για τυχόντες ερμιτιανους πίνακες, κανονικοποιώντας αναγόμαστε στον προηγούμενο ισχυρισμό.

Μένει να δειχθεί η γενική περίπτωση, όπου $T \in M_m(\mathbb{C})$ με $\mathrm{diag}(T) = 0$. Μπορούμε να γράψουμε τον T στη μορφή

$$T = A + iB,$$

όπου A, B ερμιτιανοί πίνακες με μηδενική διαγώνιο και $\|A\|_2, \|B\|_2 \leqslant \|T\|_2$. Εφαρμόζοντας τους παραπάνω ισχυρισμούς για $\frac{\varepsilon}{2}$ βρίσκουμε διαγώνιες προβολές $Q_1, \ldots, Q_r, R_1, \ldots, R_r$

με $\sum_{i=1}^r Q_i = \sum_{i=1}^r R_i = I_m$ ώστε $\|Q_iAQ_i\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|T\|_2$ και $\|R_jBR_j\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|T\|_2$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, r$. Μένει να παρατηρήσουμε ότι

$$\sum_{i,j=1}^{r} Q_iR_j = I_m$$

καθώς επίσης και ότι

$$\|R_jQ_iAQ_iR_j\|_2, \|Q_iR_jBR_jQ_i\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|T\|_2$$

από όπου παίρνουμε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα. $\square$

Κεφάλαιο 6

Φασματική θεωρία γραφημάτων και εφαρμογές στα γραφήματα Ramanujan

Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε μία ακόμη εφαρμογή της μεθόδου των διαπλεκόμενων οικογενειών πολυωνύμων, αυτή τη φορά στη θεωρία γραφημάτων. Συγκεκριμένα περιγράφουμε το εξής αποτέλεσμα των Marcus, Spielman και Srivastava: Υπάρχουν διμερή Ramanujan γραφήματα κάθε βαθμού μεγαλύτερου από δύο.

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί απάντηση σε μία θεμελιώδη ερώτηση του κλάδου της φασματικής θεωρίας γραφημάτων, η οποία προέκυψε από τις εργασίες [41], [47] και [48], των Lubotzky-Phillips-Sarnak, Margulis και στη συνέχεια του Morgenstern και ρωτάει κατά πόσο υπάρχουν expander οικογένειες γραφημάτων Ramanujan κάθε βαθμού. Αποτελεί επίσης μερική απάντηση σε μία εικασία των Bilu και Linial ([9] και ενότητα 6.6α′). Προκειμένου να το περιγράψουμε καλύτερα, κάνουμε μία σύντομη ανασκόπηση στη φασματική θεωρία γραφημάτων. Ορίζουμε την έννοια των expander-οικογενειών γραφημάτων και με κίνητρο το θεώρημα Alon-Boppana ορίζουμε τα γραφήματα Ramanujan, τα οποία αποτελούν βέλτιστους expanders ως προς τη φασματική τους συμπεριφορά. Χρησιμοποιήσαμε σαν κύριες πηγές το βιβλίο των Krebs και Shaheen ([39]), το κλασικό expository άρθρο [35] και τέλος το [43].

6.1 Πίνακας γειτνίασης

Ορισμός 6.1.1. Έστω $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $L^2(S)$ όλων των συναρτήσεων $f : S \to \mathbb{C}$, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \sum_{s \in S} f(s)\overline{g(s)}$$

και τη νόρμα $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ που επάγεται από αυτό.

Μια βάση του $L^2(S)$ είναι το σύνολο $B = \{\delta_{s_1}, \ldots, \delta_{s_n}\}$, όπου

$$\delta_{s_i}(s_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Με τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει εύκολα ότι η βάση B είναι ορθοκανονική.

Ορισμός 6.1.2. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με διατεταγμένο σύνολο κορυφών $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Ο *βαθμός* μιας κορυφής v_i είναι το πλήθος των ακμών του γραφήματος στις οποίες ανήκει το v_i. Ο *πίνακας γειτνίασης* του G είναι ο πίνακας $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, όπου a_{ij} είναι το πλήθος των ακμών που συνδέουν την κορυφή v_i με την κορυφή v_j.

Παρατηρήσεις 6.1.3. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με διατεταγμένο σύνολο κορυφών $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

(i) Ο πίνακας γειτνίασης A του G είναι συμμετρικός.

(ii) Έστω A_1 και A_2 οι δύο (διαφορετικοί) πίνακες γειτνίασης του G που προκύπτουν αν χρησιμοποιήσουμε δύο διαφορετικές διατάξεις στο σύνολο V των κορυφών του G. Τότε, οι πίνακες A_1 και A_2 έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

(iii) Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα γειτνίασης A είναι πραγματικές. Θα τις θεωρούμε σε φθίνουσα διάταξη και θα γράφουμε

$$\lambda_{n-1}(G) \leqslant \lambda_{n-2}(G) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1(G) \leqslant \lambda_0(G).$$

Λόγω της παρατήρησης (ii) αντί για τις ιδιοτιμές του πίνακα γειτνίασης A μπορούμε να μιλάμε για τις ιδιοτιμές του γραφήματος G.

Ονομάζουμε *φάσμα* του G το σύνολο των ιδιοτιμών του, συνυπολογίζοντας τις πολλαπλότητές τους, και το συμβολίζουμε με $\mathrm{spec}(G)$.

Ορισμός 6.1.4. Έστω G γράφημα με διατεταγμένο σύνολο κορυφών $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και έστω A ο πίνακας γειτνίασης του G. Ταυτίζουμε την τυχούσα απεικόνιση $f \in L^2(V)$ με το διάνυσμα $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ στον $\mathbb{C}^n$. Τότε,

$$Af = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} f(v_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} f(v_i) \end{pmatrix}.$$

Απεικόνιση γειτνίασης ονομάζεται η γραμμική απεικόνιση $A : L^2(V) \to L^2(V)$ που δίνεται από τον τύπο

$$(Af)(v) = \sum_{w \in V} A_{v,w} f(w),$$

όπου $A_{v,w}$ το πλήθος των ακμών που συνδέουν τις κορυφές v και w.

6.2 Ιδιοτιμές κανονικών γραφημάτων

Ορισμός 6.2.1. Ένα γράφημα $G = (V, E)$ λέγεται *κανονικό* αν όλες οι κορυφές του έχουν τον ίδιο βαθμό. Το G λέγεται *d-κανονικό* αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με d.

Λέμε ότι το φάσμα του G είναι *συμμετρικό* αν για κάθε ιδιοτιμή λ του G που έχει πολλαπλότητα k έχουμε ότι και ο $-\lambda$ είναι ιδιοτιμή του G με την ίδια πολλαπλότητα. Στην επόμενη πρόταση συγκεντρώνουμε μερικές βασικές ιδιότητες των κανονικών γραφημάτων.

Πρόταση 6.2.2. *Έστω G ένα d-κανονικό γράφημα με n κορυφές. Τότε:*

(i) *Ο d είναι ιδιοτιμή του G.*

(ii) *Για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ισχύει $|\lambda_i(G)| \leqslant d$.*

(iii) *Το G είναι συνεκτικό γράφημα αν και μόνο αν $\lambda_1(G) < \lambda_0(G) = d$.*

(iv) *Αν το G είναι διμερές τότε το $\mathrm{spec}(G)$ είναι συμμετρικό.*

(v) *Αν ο $-d$ είναι ιδιοτιμή του G τότε το G είναι διμερές.*

Απόδειξη. Έστω V το σύνολο των κορυφών του G και έστω A η απεικόνιση γειτνίασης του G.

(i) Δείχνουμε ότι ο d είναι ιδιοτιμή του A. Παρατηρούμε ότι κάθε σταθερή συνάρτηση είναι ιδιοσυνάρτηση της d. Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε την $f_0 \in L^2(V)$ με $f_0(v) = 1$ για κάθε $v \in V$. Τότε,

$$Af_0(v) = \sum_{w \in V} A_{v,w} f_0(w) = \sum_{w \in V} A_{v,w} = d = df_0(v).$$

Άρα, ο d είναι ιδιοτιμή του A.

(ii) Έστω λ μια ιδιοτιμή του A και έστω f μια πραγματική ιδιοσυνάρτηση της λ. Έστω $v \in V$ ώστε $|f(v)| = \max_{w\in V} |f(w)|$. Παρατηρήστε ότι $f \neq 0$, αφού η f είναι ιδιοδιάνυσμα του A, άρα $|f(v)| > 0$. Από τον ορισμό του v έχουμε

$$\begin{aligned} |\lambda||f(v)| = |Af(v)| = \Big| \sum_{w\in V} A_{v,w} f(w) \Big| &\leqslant \sum_{w\in V} A_{v,w} \, |f(w)| \\ &\leqslant |f(v)| \sum_{w\in V} A_{v,w} = d|f(v)|, \end{aligned}$$

και έπεται ο ισχυρισμός.

(iii) Αφού ο A είναι συμμετρικός, από το φασματικό θεώρημα η πολλαπλότητα του d (αν τον δούμε σαν ιδιοτιμή του A) είναι η διάσταση του υπόχωρου

$$E_d(A) = \{f \in L^2(V) : Af = df\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\dim(E_d(A)) = 1$ αν και μόνο αν το G είναι συνεκτικό.

Υποθέτουμε πρώτα ότι το G είναι συνεκτικό και έστω f ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή d. Θα δείξουμε ότι η d είναι σταθερή, από όπου έπεται ότι $\dim(E_d(A)) = 1$. Έστω $v \in V$ ώστε $|f(v)| = \max_{w\in V} |f(w)|$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(v) > 0$, αφού η $-f$ είναι επίσης πραγματική ιδιοσυνάρτηση της d. Έχουμε ότι

$$f(v) = \frac{(Af)(v)}{d} = \sum_{w\in V} \frac{A_{v,w}}{d} f(w).$$

Ας υποθέσουμε ότι $f(v_0) < f(v)$ για κάποιο v_0 γειτονικό στο v. Τότε αφού $f(w) \leqslant f(v)$ για κάθε $w \in V$, έχουμε

$$f(v) = \sum_{w\in V} \frac{A_{v,w}}{d} f(w) < \sum_{w\in V} \frac{A_{v,w}}{d} f(v) = f(v),$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα $f(v_0) = f(v)$ για κάθε v_0 γειτονικό στο v. Επαναλαμβάνοντας το παραπάνω επιχείρημα για κάθε γειτονική κορυφή της v και στη συνέχεια με επαγωγή ως προς την απόσταση $d(v, w)$ από την v, θα καλύψουμε τελικά το γράφημα, αφού από την υπόθεση είναι συνεκτικό. Άρα, η f είναι σταθερή στο V.

Έστω τώρα ότι το G δεν είναι συνεκτικό. Έστω v μια κορυφή του G και έστω V_1 η συνεκτική συνιστώσα στην οποία ανήκει η v, δηλαδή το σύνολο όλων των $w \in V$ για τα οποία υπάρχει μονοπάτι που ενώνει την κορυφή v με την w. Έστω $V_2 = V \setminus V_1$. Έτσι, το G σπάει σε δύο d-κανονικά γραφήματα με σύνολα κορυφών V_1 και V_2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1(v) = \begin{cases} 1, & v \in V_1 \\ 0, & v \in V_2 \end{cases}$$

και

$$f_2(v) = \begin{cases} 1, & v \in V_2 \\ 0, & v \in V_1 \end{cases}.$$

Οι f_1 και f_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή d. Άρα, $\dim(E_d(A)) > 1$.

(iv) Υποθέτουμε ότι το G είναι διμερές. Έστω $V = V_1 \cup V_2$ μία 2-διαμέριση του V. Έστω λ μια ιδιοτιμή του V με πολλαπλότητα k. Από το φασματικό θεώρημα 2.1.2 υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις $f_1, \ldots, f_k$ της λ. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g_i(v) = \begin{cases} f_i(v), & v \in V_1 \\ -f_i(v), & v \in V_2 \end{cases},$$

για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Θα δείξουμε ότι κάθε g_i είναι ιδιοσυνάρτηση της $-\lambda$. Έστω $v \in V_1$. Τότε, αφού κάθε w που είναι γειτονικό στο v βρίσκεται στο V_2, έχουμε για κάθε i ότι

$$\begin{aligned}(Ag_i)(v) &= \sum_{w \in V} A_{v,w} g_i(w) = -\sum_{w \in V} A_{v,w} f_i(w) = -(Af_i)(v) \\ &= -\lambda f_i(v) = -\lambda g_i(v).\end{aligned}$$

Δουλεύουμε όμοια στην περίπτωση που $v \in V_2$. Ελέγχεται εύκολα ότι οι συναρτήσεις $g_1, \ldots, g_k$ σχηματίζουν ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Άρα, το $-\lambda$ είναι ιδιοτιμή του A με πολλαπλότητα $m \geqslant k$. Αντιστρέφοντας τους ρόλους των λ και $-\lambda$ στην παραπάνω απόδειξη, συμπεραίνουμε ότι $m \leqslant k$.

(v) Αρχικά υποθέτουμε ότι το G είναι συνεκτικό. Υποθέτουμε ότι το $-d$ είναι ιδιοτιμή του A. Έστω f μία πραγματική ιδιοσυνάρτηση της $-d$. Επιλέγουμε $v \in V$ ώστε $|f(v)| = \max_{w \in V} |f(w)|$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(v) > 0$. Έχουμε ότι

$$f(v) = \frac{(Af)(v)}{-d} = \sum_{w \in V} \frac{A_{v,w}}{d}(-f(w)).$$

Αφού $-f(w) \leqslant f(v)$ για κάθε w γειτονικό στο v και αφού το G είναι συνεκτικό, θα έχουμε $f(w) = -f(v)$ για κάθε w γειτονικό στο v. Με την ίδια λογική

$$f(w) = (-1)^{\mathrm{dist}(v,w)} f(v).$$

Η σχέση αυτη μας επιτρέπει να ορίσουμε τη 2-διαμεριση $V_1 = \{w \in V \big| f(w) = f(v)\}$ και $V_2 = \{w \in V \big| f(w) = -f(v)\}$. Άρα, το G είναι διμερές.

Στην περίπτωση όπου το G δεν είναι συνεκτικό, είναι μια απλή άσκηση να δείξουμε ότι οι ιδιοτιμές του G είναι ακριβώς οι ιδιοτιμές των συνεκτικών συνιστωσών του (με τις πολλαπλότητές τους). Άρα, παίρνουμε το συμπέρασμα με μεγαλύτερη ελευθερία στην επιλογή της διαμέρισης.

□

6.3 Η Λαπλασιανή ενός γραφήματος

Η απεικόνιση γειτνίασης είναι ένας από τους πολλούς γραμμικούς τελεστές που μπορούν να οριστούν για ένα γράφημα. Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε έναν άλλο τέτοιο τελεστή, τη Λαπλασιανή. Στον Απειροστικό Λογισμό πολλών μεταβλητών, η Λαπλασιανή μιας πραγματικής συνάρτησης f ορίζεται από την

$$\Delta(f) = \operatorname{div}(\nabla(f))$$

και μετράει το ρυθμό μεταβολής της f. Η Λαπλασιανή ενός γραφήματος ορίζεται σαν ένα διακριτό ανάλογο αυτής της έννοιας. Οι βασικοί λόγοι για τη μελέτη και τη χρήση της Λαπλασιανής είναι, πρώτον ότι αρκετές αποδείξεις απλοποιούνται και δεύτερον ότι διάφορα αποτελέσματα της Διαφορικής Γεωμετρίας για τη λαπλασιανή μπορούν να μεταφραστούν κατάλληλα και να επεκταθούν στη Θεωρία Γραφημάτων.

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα.

(i) Δίνουμε στο σύνολο των ακμών έναν (αυθαίρετο) προσανατολισμό ως εξής. Για κάθε $e \in E$ ονομάζουμε το ένα άκρο της ακμής e^+ και το άλλο e^-. Η κορυφή e^- θα λέγεται αρχή της e και η e^+ τέλος της e.

(ii) Ορίζουμε ένα διακριτό ανάλογο του *τελεστή κλίσης*, θεωρώντας την $d : L^2(V) \to L^2(E)$ με τύπο

$$(df)(e) = f(e^+) - f(e^-),$$

για κάθε $f \in L^2(V)$. Η df μετράει τη μεταβολή της f σε κάθε ακμή του γραφήματος.

(iii) Ορίζουμε επίσης το αντίστοιχο διακριτό ανάλογο του *τελεστή απόκλισης*, θεωρώντας την $d^* : L^2(E) \to L^2(V)$ με

$$(d^*f)(v) = \sum_{e \in E, v = e^+} f(e) - \sum_{e \in E, v = e^-} f(e).$$

Αν σκεφτούμε την f σαν τη ροή των προσανατολισμένων ακμών ενός γραφήματος (V, E) τότε η d^*f μετράει την εσωτερική ροή κάθε κορυφής.

Ορισμός 6.3.1. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Δεδομένου ενός προσανατολισμού για τις ακμές του γραφήματος, ορίζουμε *Λαπλασιανή* του G να είναι ο τελεστής

$$\Delta : L^2(V) \to L^2(V)$$

με

$$\Delta = d^* \circ d.$$

Παρατήρηση 6.3.2. Οι απεικονίσεις d και d^* εξαρτώνται απο τον προσανατολισμό των ακμών του γραφήματος, η λαπλασιανή όμως όχι.

Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύεται το παραπάνω γεγονός για k-κανονικά γραφήματα και δίνεται η σχέση της Λαπλασιανής με την απεικόνιση γειτνίασης.

Λήμμα 6.3.3. *Αν $G = (V, E)$ είναι ένα k-κανονικό γράφημα με πίνακα γειτνίασης A, τότε $\Delta = kI - A$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^2(V)$ και $v \in V$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
(\Delta f)(v) = (d^*(df))(v) &= \sum_{e\in E, v=e^+} df(e) - \sum_{e\in E, v=e^-} df(e) \\
&= \left(\sum_{e\in E, v=e^+} f(v) - \sum_{e\in E, v=e^+, w=e^-} f(w) \right) \\
&- \left(\sum_{e\in E, v=e^-, w=e^+} f(w) - \sum_{e\in E, v=e^-} f(v) \right) \\
&= kf(v) - \sum_{w\in V} A_{v,w} f(w) = ((kI - A)f)(v).
\end{aligned}$$

Άρα, $\Delta = kI - A$. □

Παρατήρηση 6.3.4. *Αφού $\Delta = kI - A$, η $\Delta : L^2(V) \to L^2(V)$ είναι γραμμική. Δηλαδή $\Delta(af) = a\Delta f$.*

Η συγκεκριμένη αυτή μορφή της Δ μας επιτρέπει να εκφράσουμε τις ιδιοτιμές της συναρτήσει των ιδιοτιμών του γραφήματος G.

Πρόταση 6.3.5. *Έστω $G = (V, E)$ ένα k-κανονικό γράφημα. Θεωρούμε ότι το V είναι διατεταγμένο και έχει πληθάριθμο $|V| = n$.*

(i) *Οι ιδιοτιμές της Δ είναι οι*

$$0 = k - \lambda_0(G) \leqslant k - \lambda_1(G) \leqslant \cdots \leqslant k - \lambda_{n-1}(G).$$

Ειδικότερα, οι ιδιοτιμές της Δ βρίσκονται στο διάστημα $[0, 2k]$.

(ii) *Έστω $f \in L^2(V)$ και $g \in L^2(E)$. Τότε,*

$$\langle df, g\rangle = \langle f, d^*g\rangle$$

και

$$\langle \Delta f, f\rangle = \sum_{e\in E} |f(e^+) - f(e^-)|^2.$$

Απόδειξη. (i) Έστω $f \in L^2(V)$. Έχουμε $Af = \lambda f$ αν και μόνο αν $(kI - A)f = (k-\lambda)f$. Το συμπέρασμα έπεται από την προηγούμενη πρόταση και από το γεγονός ότι $|\lambda_i(G)| \leqslant k$.
(ii) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle df, g\rangle &= \sum_{e\in E}(df)(e)\overline{g(e)} = \sum_{e\in E}(f(e^+) - f(e^-))\overline{g(e)}\\ &= \sum_{e\in E} f(e^+)\overline{g(e)} - \sum_{e\in E} f(e^-)\overline{g(e)}\\ &= \sum_{v\in V} f(v) \sum_{e\in E, v=e^+} \overline{g(e)} - \sum_{v\in V} f(v) \sum_{e\in E, v=e^-} \overline{g(e)}\\ &= \sum_{v\in V} f(v)\overline{(d^*g)(v)}\\ &= \langle f, d^*g\rangle.\end{aligned}$$

Τότε,

$$\langle \Delta f, f\rangle = \langle d^*df, f\rangle = \overline{\langle f, d^*df\rangle} = \overline{\langle df, df\rangle} = \langle df, df\rangle = \|df\|^2.$$

Όμως,

$$\langle df, df\rangle = \sum_{e\in E}(f(e^+) - f(e^-))\overline{(f(e^+) - f(e^-))} = \sum_{e\in E} |f(e^+) - f(e^-)|^2,$$

και έχουμε τον τελευταίο ισχυρισμό. □

6.4 Η ισοπεριμετρική σταθερά γραφήματος – Expanders

Περιγράφουμε διαισθητικά την έννοια των *expanders* και την ανάγκη για μελέτη τους, έχοντας στο μυαλό μας το ακόλουθο μοντέλο.

Έστω ότι το γράφημα G εκφράζει ένα δίκτυο επικοινωνιών, όπου στις κορυφές βρίσκονται άνθρωποι, computers ή οτιδήποτε άλλο. Δύο κορυφές συνδέονται μεταξύ τους αν και μόνο αν μπορουν να επικοινωνήσουν-ανταλλάξουν πληροφορία «άμεσα». Ο σκοπός του δικτύου είναι να μεταδώσει γρήγορα πληροφορίες.

Υποθέστε ότι μερικοί γνωρίζουν κάποια πληροφορία. Σκεφτόμαστε τον «χρόνο» σαν διακεκριμένες διαδοχικές «στιγμές», ώστε σε μία στιγμή η πληροφορία να μεταφέρεται από τις αρχικές κορυφές, στις γειτονικές, στην επόμενη στιγμή στο σύνολο των γειτόνων των γειτονικών και ούτω καθεξής, μέχρι να εξαπλωθεί σε όλο το δίκτυο, (κάτι σαν «χαλασμένο τηλέφωνο»). Πόσος χρόνος θα χρειαστεί προκειμένου να λάβουν «όλοι» την πληροφορία;

Για να ελαχιστοποιήσει κανείς το χρόνο μεταφοράς της πληροφορίας, αυτό που χρειάζεται είναι κάθε υποσύνολο κορυφών να έχει πολλούς διαφορετικούς γείτονες. Από την άλλη πλευρά, για να ελαχιστοποιήσει κανείς το «κόστος» του δικτύου, δηλαδή το κόστος κατασκευής των ακμών ή το συνολικό τους «μήκος», τελικά το πλήθος τους -με την υπόθεση οτι έχουν όλες το ίδιο μήκος - πρέπει να είναι μικρό. Άρα, ένα «αποτελεσματικό» δίκτυο θα είναι ένα γράφημα με μικρό αριθμό ακμών, έτσι ώστε κάθε υποσύνολό των κορυφών του να έχει πολλούς γείτονες.

Ξεκινάμε την ενότητα αυτή ορίζοντας την έννοια του expander γραφήματος και αποδεικνύοντας την ύπαρξη τέτοιων γραφημάτων. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποίθηκε το [40]. Στη συνέχεια ορίζουμε την έννοια των expander οικογενειών γραφημάτων και την ισοπεριμετρική σταθερά και εξηγούμε πώς αυτή σχετίζεται με τις «φασματικές ιδιότητες» ενός k- κανονικού γραφήματος, δίνοντας άνω και κάτω φράγματα για αυτή, δηλαδή δίνουμε μία απόδειξη για την Πρόταση 6.4.8. (βλέπε επίσης, [40])

Ορισμός 6.4.1. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και έστω $F \subset V$. Το *σύνορο* του A (∂A) είναι το σύνολο των ακμών του G που έχουν τη μία κορυφή τους στο A και την άλλη στο $V \setminus A$. Δηλαδή, το ∂A είναι το σύνολο των ακμών του G που συνδέουν το A με το $V \setminus A$.

Ορισμός 6.4.2 (expander)**.** Έστω $G = (V, E)$ ένα k-κανονικό γράφημα με $|V| = n$. Το G λέγεται (n, k, c)-*expander* αν για κάθε $A \subseteq V$ ισχύει

$$|\partial A| \geqslant c\left(1 - \frac{|A|}{n}\right)|A|.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε k-κανονικό συνεκτικό γράφημα είναι expander για κάποια σταθερά $c > 0$. Στις εφαρμογές ζητείται συνήθως άπειρη οικογένεια από (n, k, c)-expanders, όπου $n \to \infty$ αλλά τα k και c παραμένουν σταθερά.

Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό για διμερείς (n, k, c)-expanders.

Ορισμός 6.4.3 (διμερής expander)**.** Έστω $c' > 0$. Ένας *διμερής* (n, k, c')-*expander* είναι ένα διμερές k-κανονικό γράφημα G, όπου I, O είναι τα σύνολα διαμέρισης των κορυφών του G με $|I| = |O| = n$ ώστε για κάθε $A \subseteq I$ με $|A| \leqslant \frac{n}{2}$ να έχουμε

$$|\partial A| \geqslant (1 + c')|A|.$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε expander G αντιστοιχεί ένας διμερής expander: παίρνουμε το διπλό κάλυμμα του G (δηλαδή, τα I, O είναι αντίγραφα του V και ενώνουμε κάθε κορυφή από το I με τους γείτονές της στο G που βρίσκονται στο σύνολο O). Αντίστροφα, αν μας δοθεί ένας διμερής expander τότε παίρνουμε έναν expander ταυτίζοντας τα I και O μέσω του «θεωρήματος του γάμου», του P. Hall.

Πρόταση 6.4.4. *Έστω $k \geqslant 5$ και $c = \frac{1}{2}$. Τότε, υπάρχουν k-κανονικά γραφήματα με n κορυφές που ικανοποιούν τη συνθήκη*

$$|\partial A| \geqslant c|A|$$

για $|A| \leqslant \frac{n}{2}$. Για μεγάλες τιμές του n, τα περισσότερα k-κανονικά γραφήματα με n κορυφές ικανοποιούν την παραπάνω σχέση. Ειδικότερα, είναι expanders.

Απόδειξη. Θα είναι βολικό να αποδείξουμε την πρόταση για διμερείς expanders, όπως αυτοί περιγράφονται στον δεύτερο (ισοδύναμο) ορισμό που δώσαμε παραπάνω.

Έστω $I = O = \{1, 2, \ldots, n\}$. Κατασκευάζουμε το διμερές γράφημα G ως εξής: παίρνουμε μεταθέσεις $\pi_1, \ldots, \pi_k \in S_n$ και ενώνουμε κάθε κορυφή $i \in I$ με τις κορυφές $\pi_1(i), \ldots, \pi_k(i) \in O$. Για την ακρίβεια, από ένα θεώρημα του Köning προκύπτει ότι κάθε διμερές κανονικό γράφημα μπορεί να κατασκευασθεί με αυτόν τον τρόπο. Ισχυριζόμαστε ότι για τις περισσότερες επιλογές $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ μιας k-άδας μεταθέσεων, το γράφημα που προκύπτει είναι c-expander με $c = \frac{1}{2}$.

Υπάρχουν $(n!)^k$ k-άδες μεταθέσεων. Μία k-άδα θα λέγεται *κακή* αν δεν ορίζει $\frac{1}{2}$-expander, δηλαδή αν για κάποιο $A \subseteq I$ με $|A| \leqslant \frac{n}{2}$ υπάρχει $B \subseteq O$ με $|B| = [\frac{3}{2}|A|]$ ώστε $\pi_j(A) \subset B$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$.

Έστω $|A| = t$ και $|B| = [\frac{3}{2}t] = m$. Το πλήθος των κακών k-άδων π που αντιστοιχούν στα σύνολα A και B είναι

$$(m(m-1)\cdots(m-t+1)(n-t)!)^k = \left(\frac{m!(n-t)!}{(m-t)!}\right)^k,$$

αφού για t στοιχεία υπάρχουν $(m(m-1)\cdots(m-t+1))^k$ επιλογές και για τα υπόλοιπα $n-t$ στοιχεία $((n-t)!)^k$ επιλογές. Άρα, ο συνολικός αριθμός κακών επιλογών, έστω β, φράσσεται ως εξής:

$$\beta \leqslant \sum_{t=1}^{n/2} \binom{n}{t}\binom{n}{m}\left(\frac{m!(n-t)!}{(m-t)!}\right)^k = \sum_{t=1}^{n/2} R(t).$$

Στην παραπάνω σχέση, $\binom{n}{t}\binom{n}{m}$ είναι το πλήθος των συνόλων A, B για τα οποία μπορούν να οριστούν κακές π.

Ελέγχοντας το λόγο $\frac{R(t)}{R(t+1)}$, βλέπουμε ότι για $t < n/3$ ισχύει $R(t) \geqslant R(t+1)$, άρα το $R(t)$ παίρνει μέγιστη τιμή όταν $t = 1$.

Για $\frac{n}{3} \leqslant t \leqslant \frac{n}{2}$ έχουμε ότι $\binom{n}{t}\binom{n}{m} \leqslant 2^{2n}$ και η ποσότητα $\frac{m!(n-t)!}{(m-t)!}$ παίρνει μέγιστο είτε για $t = \frac{n}{3}$ ή για $t = \frac{n}{2}$. Άρα,

$$\beta \leqslant \frac{n}{2}(R(1) + R(n/3) + R(n/2)).$$

Τέλος ελέγχουμε ότι

$$\frac{\frac{n}{2}(R(1) + R(n/3) + R(n/2))}{(n!)^k} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή, καθώς το πλήθος των κορυφών του γραφήματος μεγαλώνει το ποσοστό των κακών π μηδενίζεται. Αυτό μας επιτρέπει να διαλέγουμε expanders. $\square$

Η Πρόταση 6.4.4 μας επιτρέπει να συμπεράνουμε την ύπαρξη οικογενειών που αποτελούνται από k-κανονικούς expanders.

Ορισμός 6.4.5. Η *ισοπεριμετρική σταθερά* ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι η ποσότητα

$$h(G) = \min\left\{\frac{|\partial A|}{|A|} : A \subset V, |A| \leqslant \frac{|V|}{2}\right\}.$$

Στόχος,όπως είπαμε, είναι να φτιάξουμε μεγάλα γραφήματα (μεγάλο πλήθος κορυφών) με μεγάλες ισοπεριμετρικές σταθερές (δηλαδή φραγμένες «μακρυά» από το 0), ώστε η «πληροφορία» να μεταδίδεται γρήγορα από κορυφή σε κορυφή, χωρίς μεγάλο «κόστος». Για αυτόν το λόγο, απαιτούμε τα γραφήματα να είναι κανονικά και να έχουν σταθερό βαθμό ώστε να μην έχουν πολλές ακμές (γραμμικές το πλήθος σε σχέση με τις κορυφές - Θα μπορούσε ίσως κανείς να δοκιμάσει άλλες υποθέσεις, όπως ο μέσος βαθμός να παραμένει σταθερός (ανεξάρτητος του πλήθους των κορυφών) ή σχεδόν σταθερός). Με αυτήν την έννοια, προσπαθούμε να προσεγγίσουμε τις ιδιότητες της κλίκας από «αραιά» γραφήματα, ασυμπτωτικά.

Ορισμός 6.4.6. Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό k και μια ακολουθία $(G_n = (V_n, E_n))_n$ k-κανονικών γραφημάτων με $|V_n| \to \infty$ καθώς $n \to \infty$. Η G_n λέγεται *οικογένεια από expanders* αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $h(G_n) \geqslant \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $f_0 : V \to \mathbb{R}$ με $f_0(v) = 1$ για κάθε $v \in V$. Ορίζουμε

$$L_0^2(V) = \{f \in L^2(V) : \langle f, f_0\rangle = 0\} = \left\{f \in L^2(V) : \sum_{v\in V} f(v) = 0\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι ο $L_0^2(V)$ είναι υπόχωρος του $L^2(V)$, ο κάθετος στον υπόχωρο που παράγεται από την f_0.

Θεώρημα 6.4.7 (Rayleigh-Ritz). *Έστω $G=(V,E)$ ένα k-κανονικό γράφημα. Τότε,*

$$\lambda_1(G) = \max_{f\in L_0^2(V)} \frac{\langle Af,f\rangle}{\|f\|^2} = \max_{f\in L_0^2(V),\|f\|=1} \langle Af,f\rangle.$$

Ισοδύναμα,

$$k-\lambda_1(G) = \min_{f\in L_0^2(V)} \frac{\langle \Delta f,f\rangle}{\|f\|^2} = \min_{f\in L_0^2(V),\|f\|=1} \langle \Delta f,f\rangle.$$

Απόδειξη. Το θεώρημα αποτελεί ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Courant-Fisher 2.2.4. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η f_0 είναι ιδιοσυνάρτηση της λ_0 (βλέπε την απόδειξη της Πρότασης 6.2.2) και να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη παρατήρηση. □

Πρόταση 6.4.8. *Έστω $G=(V,E)$ ένα k-κανονικό γράφημα. Τότε*

$$\frac{k-\lambda_1(G)}{2} \leqslant h(G) \leqslant \sqrt{2k(k-\lambda_1(G))}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $h(G)$, μπορούμε να διαλέξουμε ένα υποσύνολο $F\subset V$ με $|F|\leqslant \frac{V}{2}$ ώστε $h(G)=\frac{|\partial F|}{|F|}$. Έστω $a=|V\setminus F|$ και $b=|F|$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g(x) = \begin{cases} a, & x\in F \\ -b, & x\in V\setminus F \end{cases} \qquad \text{και} \qquad f=\frac{g}{\|g\|}.$$

Έχουμε

$$\sum_{v\in V} g(v) = \sum_{v\in F} a - \sum_{v\in V\setminus F} b = ba-ab=0,$$

άρα $f,\ g\in L_0^2(V)$. Διαλέγουμε έναν προσανατολισμό του γραφήματος G. Έχουμε τότε

$$\langle \Delta g,g\rangle = \sum_{e\in E} |g(e^+)-g(e^-)|^2 = \sum_{e\in\partial F} (b+a)^2 = |\partial F|(b+a)^2$$

Ακόμα

$$\|g\|^2 = \langle g,g\rangle = \sum_{x\in F} a^2 + \sum_{x\in V\setminus F} b^2 = a^2b+b^2a = ab(a+b).$$

Αφού $b\leqslant \frac{|V|}{2}$ έπεται ότι $a\geqslant b$. Ακόμα, από την γραμμικότητα της Λαπλασιανής έχουμε

$$\langle \Delta f,f\rangle = \frac{\langle \Delta g,g\rangle}{\|g\|^2} = \frac{|\partial F|(b+a)}{ba} = \left(1+\frac{b}{a}\right)h(G) \leqslant 2h(G).$$

Τέλος, από το Θεώρημα Rayleigh-Ritz έχουμε

$$k-\lambda_1(G) \leqslant \langle \Delta f,f\rangle \leqslant 2h(G),$$

δηλαδή
$$\frac{k-\lambda_1(G)}{2} \leqslant h(G).$$
Δείχνουμε τώρα τη δεξιά ανισότητα. Έστω $g \in L_0^2(V)$ ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1(G)$. Ορίζουμε $V^+ = \{x \in V : g(x) \geqslant 0\}$. Αφού $\sum_{x\in V} g(x) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $V^+ \neq V$. Επιπλέον, αφού η $-g$ είναι ιδιοσυνάρτηση της λ_1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|V^+| \leqslant \frac{|V|}{2}$. Ορίζουμε $f \in L^2(V)$ με
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in V^+ \\ 0, & x \notin V^+ \end{cases}$$
Η απόδειξη ανάγεται στους ακόλουθους ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός 6.4.9.

$$\frac{\langle \Delta f, f\rangle}{\langle f, f\rangle} \leqslant k - \lambda_1(G). \tag{6.4.1}$$

Απόδειξη. Αν $x \in V^+$, τότε από το Λήμμα 6.3.3 έχουμε
$$\begin{aligned}\Delta f(x) = kf(x) - \sum_{y\in V^+} A_{x,y} f(y) &= kg(x) - \sum_{y\in V^+} A_{x,y} g(y)\\ &\leqslant kg(x) - \sum_{y\in V} A_{x,y} g(y) = \Delta g(x),\end{aligned}$$
αφού $-g(v) \geqslant 0$, όταν $v \in V \setminus V^+$. Επομένως, από το γεγονός ότι η g αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1, έχουμε
$$\begin{aligned}\langle \Delta f, f\rangle = \sum_{v\in V^+} \Delta f(v)\cdot f(v) &\leqslant \sum_{v\in V^+} \Delta g(v)\cdot g(v) = \sum_{v\in V^+} (k-\lambda_1(G)) g^2(v)\\ &= (k-\lambda_1(G)) \sum_{v\in V^+} f^2(v) = (k-\lambda_1(G))\langle f, f\rangle.\end{aligned}$$
Διαιρώντας με $\langle f, f\rangle$ έχουμε την 6.4.1 □

Ισχυρισμός 6.4.10.

$$\frac{h(G)^2}{2k} \leqslant \frac{\langle \Delta f, f\rangle}{\langle f, f\rangle}. \tag{6.4.2}$$

Απόδειξη. Προσανατολίζουμε τις ακμές E του G έτσι ώστε $f(e^+) \geqslant f(e^-)$ για κάθε $e \in E$. Ορίζουμε
$$B_f = \sum_{e\in E} [f^2(e^+) - f^2(e^-)].$$

Δείχνουμε πρώτα ότι

$$B_f \leqslant \sqrt{2k\langle \Delta f, f\rangle\langle f, f\rangle}. \tag{6.4.3}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} B_f &= \sum_{e\in E}(f(e^+) + f(e^-)(f(e^+) - f(e^-)) \\ &\leqslant \left(\sum_{e\in E}(f(e^+) + f(e^-))^2\right)^{1/2} \left(\sum_{e\in E}(f(e^+) - f(e^-))^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(2\sum_{e\in E}[f^2(e^+) + f^2(e^-)]\right)^{1/2} \sqrt{\langle \Delta f, f\rangle} \\ &= \sqrt{2k\sum_{v\in V} f^2(v)}\sqrt{\langle \Delta f, f\rangle} \\ &= \sqrt{2k\langle \Delta f, f\rangle\langle f, f\rangle}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν η ανισότητα Cauchy-Schwarz, η πρόταση 6.3.5 και η k-κανονικότητα του γραφήματος. Δείχνουμε τώρα ότι

$$h(G)\langle f, f\rangle \leqslant B_f \tag{6.4.4}$$

Για το σκοπό αυτό, διαμερίζουμε το σύνολο V σε ισοσταθμικά σύνολα της f με τον εξής τρόπο. Έστω $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_r$ οι τιμές της f πάνω στις κορυφές του γραφήματος G, και έστω $L_i = \{x \in V : f(x) \geqslant \beta_i\}$. Παρατηρούμε ότι

$$L_r \subseteq L_{r-1} \subseteq \cdots \subseteq L_1 \subseteq L_0 = V, \tag{6.4.5}$$

και

$$L_i \subseteq V^+$$

για κάθε $i = 1, \ldots, r$. Έστω $e \in E$ με $f(e^+) > f(e^-)$. Τότε, αν $f(e^-) = \beta_j$ και $f(e^+) = \beta_i$ έπεται ότι $j < i$. Άρα,

$$e \in \partial L_{j+1} \cap \partial L_{j+2} \cap \cdots \cap \partial L_i$$

και $e \notin \partial L_s$, για $s = 1, \ldots, j, i+1, \ldots, r$. Επιπλέον

$$f^2(e^+) - f^2(e^-) = \beta_i^2 - \beta_j^2 = \sum_{s=j+1}^{i} (\beta_s^2 - \beta_{s-1}^2).$$

Για κάθε ακμή μεταξύ δύο κορυφών $v_1^s, v_2^s \in L_s$ έχουμε ότι $f^2(v_1^s) - f^2(v_2^s) = 0$. Επομένως, βλέπουμε ότι

$$B_f = \sum_{s=1}^{r} |\partial L_s|(\beta_s^2 - \beta_{s-1}^2).$$

Αφού $L_i \subset V^+$ και $|V^+| \leqslant |V|/2$, από τον ορισμό της ισοπεριμετρικής σταθεράς έχουμε ότι $|\partial L_i| \geqslant h(G)|L_i|$ για κάθε $i = 1, \ldots, r$. Άρα,

$$B_f \geqslant h(G) \sum_{s=1}^{r} |L_s|(\beta_s^2 - \beta_{s-1}^2) \tag{6.4.6}$$

$$= h(G) \left(|L_r|\beta_r^2 + \sum_{s=1}^{r-1} \beta_s^2(|L_s| - |L_{s+1}|) \right). \tag{6.4.7}$$

Ισχύει όμως ότι $x \in L_s \setminus L_{s+1}$ αν και μόνο αν $f(x) = \beta_s$. Έτσι παίρνουμε ότι

$$B_f \geqslant h(G) \sum_{s=1}^{r} \sum_{x \in V^+, f(x) = \beta_s} f(x)^2 = h(G)\langle f, f \rangle.$$

Από τις σχέσεις (6.4.3) και (6.4.4) παίρνουμε τον ισχυρισμό. □

Τώρα, η δεξιά ανισότητα της πρότασης έπεται άμεσα από τους ισχυρισμούς. □

6.5 Θεώρημα Alon-Bopppana – γραφήματα Ramanujan

Σε αυτήν την ενότητα, μελετάμε το Θεώρημα Alon-Boppana. Το θεώρημα αυτό περιγράφει τη φασματική συμπεριφορά μίας ακολουθίας συνεκτικών, k-κανονικών γραφημάτων σταθερού βαθμού και βεβαιώνει ότι υπάρχουν expander οικογένειες k- κανονικών γραφημάτων. Στη συνέχεια, με κίνητρο το Θεώρημα αυτό, ορίζουμε τα γραφήματα Ramanujan σαν βέλτιστους expanders και δίνουμε σχηματικά τη μέθοδο με την οποία κατασκευάστηκε στο [41] expander-οικογένειες αποτελούμενες από γραφήματα Rmanujan βαθμού $p+1$, όπου p πρώτος. Όλα τα παραπάνω απότελουν την αφορμή για να τεθεί φυσιολογικά το ερώτημα, αν υπάρχουν expander-οικογένειες γραφημάτων Ramanujan κάθε βαθμού το οποίο απαντήθηκε στο [43].

Έστω G ένα k-κανονικό γράφημα με n κορυφές. Όπως ήδη γνωρίζουμε, ο k είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του G. Στην περίπτωση όπου το G είναι διμερές, ο $-k$ είναι επίσης ιδιοτιμή του G. Ονομάζουμε τις ιδιοτιμές αυτές τετριμμένες. Ορίζουμε

$$\lambda(G) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ μη τετριμμένη ιδιοτιμή του } G\}.$$

Πιο αναλυτικά, αν το G δεν είναι διμερές έχουμε

$$\lambda(G) = \max\{|\lambda_1(G)|, |\lambda_{n-1}(G)|\},$$

ενώ αν το G είναι διμερές,

$$\lambda(G) = \max\{|\lambda_1(G)|, |\lambda_{n-2}(G)|\} = |\lambda_1(G)|.$$

Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα Alon-Boppana.

Θεώρημα 6.5.1. *Έστω $(G_n = (V_n, E_n))$ ακολουθία συνεκτικών k-κανονικών γραφημάτων με $|V_n| \to \infty$ καθώς $n \to \infty$. Τότε*

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda(G_n) \geqslant 2\sqrt{k-1}.$$

Το Θεώρημα 6.5.1 μας λέει ότι για ένα αρκετά μεγάλο k-κανονικό γράφημα G, το καλύτερο άνω φράγμα για την $\lambda_1(G)$ είναι $2\sqrt{k-1}$. Οι Lubotzky, Phillips και Sarnak έδωσαν στο [41] τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 6.5.2. *Λέμε ότι ένα k-κανονικό γράφημα G είναι γράφημα Ramanujan αν $\lambda(G) \leqslant 2\sqrt{k-1}$.*

Από το Θεώρημα 6.5.1, την Πρόταση 6.4.8 και τον Ορισμό 6.4.6 βλέπουμε ότι αν υπάρχουν άπειρες οικογένειες γραφημάτων Ramanujan σταθερού βαθμού, αυτές θα είναι βέλτιστες οικογένειες από expanders. Πράγματι, το βασικό αποτέλεσμα του [41] είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.5.3. *Έστω $p > 2$ πρώτος. Υπάρχει οικογένεια από expanders που αποτελείται από $(p+1)$-κανονικά γραφήματα Ramanujan.*

Το ίδιο αποτέλεσμα αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τον Margulis ([47] και σχόλια από [41]). Ο Morgenstern στο [48] έδωσε την ακόλουθη γενίκευση:

Θεώρημα 6.5.4. *Για κάθε πρώτο p και κάθε ακέραιο k υπάρχουν άπειρα p^k+1-κανονικά γραφήματα Ramanujan.*

Περιγράφουμε τώρα σύντομα την κατασκευή της οικογένειας γραφημάτων Ramanujan $X^{p,q}$, όπως αυτή δόθηκε στο [35], (δες και [41]). Έστω p, q διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί ώστε $p = q = 1 \mod 4$. Θα οριστεί το $X^{p,q}$ και θα δειχθεί ότι είναι ένα $p+1$-κανονικό γράφημα με πλήθος κορυφών $\simeq q^3$.

Έστω G ομάδα και $S = S^{-1} \subseteq G$ συμμετρικό σύνολο στοιχείων της G. Το *γράφημα Cayley* της G που αντιστοιχεί στο S είναι το

$$G = (V = G, E = \{(g, gs) : g \in G, s \in S\}).$$

Η ομάδα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η $G = PGL(2, q)$, η ομάδα των αντιστρέψιμων 2×2 πινάκων πάνω από το σώμα $\mathbb{F}_q$, όπου $[A] \in PGL(2, q)$ είναι η κλαση ισοδυναμίας των στοιχείων $\{cB \in GL(2, q) : c \in \mathbb{F}^*\} \ni A$. Σταθεροποιούμε i με $i^2 = -1 \mod q$ και ορίζουμε

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix} : a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = p, a_0 > 0 \text{ περιττός}, a_1, a_2, a_3 \text{ άρτιοι} \right\}.$$

Από ένα Θεώρημα του Jacobi (για μια απόδειξη παραπέμπουμε στο [40]) υπάρχουν ακριβώς $p + 1$ λύσεις της εξίσωσης

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = p, \qquad a_0 > 0 \text{ περιττός}, a_1, a_2, a_3 \text{ άρτιοι}$$

στους ακεραίους. Αρα $|S| = p + 1$. Αποδεικνύεται ακόμα ότι $S = S^{-1}$. Το γράφημα $X^{p,q}$ είναι η συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος Cayley (G, S) που περιέχει τη μονάδα. Μπορεί να δειχθεί ότι το (G, S) είτε είναι συνεκτικό ή περιέχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες, ανάλογα με τη μορφή του τετραγωνικού υπολοίπου $(\frac{q}{p})$ Σε κάθε περίπτωση, μπορεί να δειχθεί ότι το γράφημα $X^{p,q}$ είναι Ramanujan.

Δημιουργείται λοιπόν φυσιολογικά το εξής ερώτημα: Αληθεύει ότι για κάθε $k \geqslant 3$ υπάρχει οικογένεια από expanders που αποτελείται από k-κανονικά γραφήματα Ramanujan; Θετική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα δόθηκε στο [43], από τους Marcus, Spielman και Srivastava, οι οποίοι χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των διαπλεκόμενων οικογενειών. Με την απόδειξη θα ασχοληθούμε στην επόμενη ενότητα.

Στη συνέχεια αυτής της ενότητας, θα περιγράψουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 6.5.1, και τέλος θα αναφέρουμε μερικές γενικεύσεις του με κίνητρο τη γενίκευση της έννοιας των γραφημάτων Ramanujan, όπως αυτή δόθηκε στο [35].

6.5α′ Αριθμοί Catalan

Ορισμός 6.5.5. Έστω $a = (a_1, \dots, a_{2n})$ ακολουθία με $a_i = \pm 1$, για $i = 1, \dots, 2n$. *Τιμή* του a λέμε το άθροισμα $\sum_{i=1}^{2n} a_i$ και *μήκος* του a τον αριθμό $2n$. Λέμε ότι το a είναι *ισορροπημένο* αν η τιμή του είναι 0 και $\sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant 0$ για κάθε $k = 1, \dots, 2n$.

Ορισμός 6.5.6. Έστω n θετικός ακέραιος. Ο *n-οστός αριθμός Catalan C_n* είναι το πλήθος των ισορροπημένων ακολουθιών μήκους $2n$.

Ισοδύναμα, ο n-οστός αριθμός Catalan είναι το πλήθος των περιπάτων μήκους $2n$ στους μη αρνητικούς ακέραιους , με αρχή και τέλος το 0. Μία ακόμα συνδυαστική ερμηνεία των αριθμών Catalan είναι ότι δίνουν το πλήθος n ζευγών επιτρεπτών παρενθέσεων.

Οι αρχικές τιμές της ακολουθίας $(C_n)_n$ είναι οι ακόλουθες: $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5, \dots$. Γενικά, μπορεί να δειχθεί η ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}.$$

Στην επόμενη πρόταση υπολογίζουμε το n-οστό αριθμό Catalan.

Πρόταση 6.5.7. *Για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Απόδειξη. Το πλήθος των ακολουθιών a μήκους $2n$ που αποτελούνται από n το πλήθος 1 και n το πλήθος -1 είναι ακριβώς $\binom{2n}{n}$. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των ισορροπημένων ακολουθιών, υπολογίζουμε το πλήθος των μη ισορροπημένων ακολουθιών μήκους 0 και το αφαιρούμε από το πλήθος όλων των ακολουθιών μήκους 0.

Έστω δοσμένη μη ισορροπημένη ακολουθία

$$s = (a_1, a_2, \dots, a_{2n})$$

με τιμή 0. Έστω k_0 ο ελάχιστος ακέραιος ώστε

$$a_1 + \cdots + a_{k_0} < 0$$

και

$$\hat{s} = (a_1, a_2, \dots, a_{k_0}, -a_{k_0+1}, \dots, -a_{2n}).$$

Υπολογίζοντας την τιμή της $\hat{s}$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{k_0} a_i - \sum_{i=k_0+1}^{2n} a_i = -1 - 1 = -2.$$

Αντίστροφα, αν $\hat{s} = (a_1, \dots, a_{2n})$ είναι μια ακολουθία με τιμή -2, θέτουμε k_0 τον ελάχιστο φυσικό για τον οποίο $a_1 + \cdots + a_{k_0} = -1$. Μπορούμε τότε να αντιστρέψουμε την παραπάνω διαδικασία και να πάρουμε μία μη ισορροπημένη ακολουθία με τιμή 0. Άρα, το πλήθος των μη ισορροπημένων ακολουθιών που έχουν τιμή 0 είναι ίσο με το πλήθος των ακολουθιών που έχουν τιμή -2, το οποίο είναι ίσο με $\binom{2n}{n+1}$. Έπεται ότι

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{n}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

$\square$

6.5β′ Το καθολικό κάλυμμα ενός γραφήματος

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε το *καθολικό κάλυμμα* T ενός κανονικού γραφήματος G. Μετράμε το πλήθος των κλειστών μονοπατιών που ξεκινούν και τελειώνουν στην ίδια κορυφή v του T και δεν επιστρέφουν στην v πριν τελειώσει ο περίπατος. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το μέτρημα στην απόδειξη του θεωρήματος Alon-Boppana, για να δώσουμε κάτω φράγμα για την $\lambda_1(G)$. Τέλος, υπολογίζουμε το φάσμα του τελεστή γειτνίασης του καθολικού καλύμματος ενός k-κανονικού γραφήματος.

Ορισμός 6.5.8. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Θεωρούμε έναν περίπατο $w = (v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n)$ στο G. Λέμε ότι ο w *δεν έχει πισωγυρίσματα* ή *είναι μη τετριμμένος*, αν $e_i \neq e_{i+1}$ για κάθε $i = 0, \ldots, n-2$.

Ορισμός 6.5.9. Έστω $G = (V, E)$ ένα k-κανονικό γράφημα και έστω v_0 δοσμένη κορυφή από το V. Το *καθολικό κάλυμμα* T_{v_0} του G είναι το γράφημα που κατασκευάζεται ώς εξής: Κάθε κορυφή v του T_{v_0} είναι ένας μη τετριμμένος περίπατος στο G που ξεκινάει από την κορυφή v_0. Δύο κορυφές είναι γειτονικές όταν και μόνο όταν ο περίπατος που αντιστοιχεί στην πρώτη επεκτείνει τον περίπατο που αντιστοιχεί στη δεύτερη κατα ένα βήμα.

Ορισμοί 6.5.10. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα.

- Ένας περίπατος $w = (v_0, e_0, \ldots, e_{n-1}, v_n)$ στο γράφημα $G = (V, E)$ λέγεται *κλειστός* αν $v_0 = v_n$. Ο w λέγεται *κύκλος* αν είναι κλειστός και δεν έχει επαναλαμβανόμενες ακμές.

- Ένα γράφημα λέγεται *δένδρο* αν δεν έχει κύκλους και είναι συνεκτικό.

- Έστω $v \in V$ κορυφή του G και έστω $w = (v, e_0, v_1, e_1, \ldots, e_{n-1}, v)$ κλειστός περίπατος. Λέμε ότι ο w είναι *ανάγωγος* αν $v_i \neq v$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$.

Έστω w_1, w_2 κλειστοί περίπατοι με βάση το v. Μπορούμε να ορίσουμε το *γινόμενο* $w_1 w_2$ των w_1 και w_2 ως τον περίπατο που διανύει πρώτα το μονοπάτι w_1 και στη συνέχεια το w_2. Ένας περίπατος δεν είναι ανάγωγος αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή $w = w_1 w_2$, όπου w_1 και w_2 είναι περίπατοι που ξεκινούν (από) και τελειώνουν στο v και έχουν μήκος τουλάχιστον 1.

Λήμμα 6.5.11. *Έστω $G = (V, E)$ ένα k-κανονικό συνεκτικό γράφημα, και έστω $T = T_{v_0}$ το καθολικό κάλυμμα του G με βάση την κορυφή $v_0 \in V$. Τότε,*

(i) *Το T είναι k-κανονικό.*

(ii) *Το T είναι συνεκτικό.*

(iii) *Η απόσταση, στο T, των (v_0) και $(v_0, e_0, \ldots, e_{n-1}, v_n)$ είναι ίση με n.*

(iv) *Το T είναι δένδρο.*

(v) *Έστω m θετικός ακέραιος. Το πλήθος των ανάγωγων κλειστών περιπάτων στο T που έχουν μήκος $2m$ και αρχή τον (v_0), είναι ίσο με*

$$\frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1}k(k-1)^{m-1}.$$

Απόδειξη. (i) Η κορυφή (v_0) του T έχει k γείτονες, τις $(v_0, e_1, v_1), \ldots, (v_0, e_k, v_k)$, όπου $e_1, \ldots, e_k$ είναι οι k ακμές που περιέχουν την κορυφή v_0 στο γράφημα G. Αφού το T είναι απλό γράφημα (εξ' ορισμού) ο βαθμός της (v_0) είναι k.

Έστω $t = (v_0, e_0, \ldots, e_{n-1}, v_n)$ κορυφή του T, με $n \geqslant 1$. Η αντίστοιχη κορυφή v_n του G έχει k ακμές που περνούν από αυτή. Μία απο αυτές είναι η e_{n-1}. Καλούμε τις υπόλοιπες $e_1^{'}, \ldots, e_{n-1}^{'}$. Έστω w_i το άλλο άκρο της ακμής $e_i^{'}$ στο G, για $i = 1, \ldots, n-1$. Εύκολα βλέπουμε ότι η κορυφή t έχει ακριβώς k γείτονες, τις κορυφές $(v_0, e_0, \ldots, v_{n-2}, e_{n-2}, v_{n-1})$ και $(t, e_1^{'}, w_1), \ldots, (t, e_{n-1}^{'}, w_{n-1})$.

(ii) Έστω $(v_0, e_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n)$ κορυφή του T. Τότε η ακολουθία κορυφών $(v_0), (v_0, e_0, v_1), \ldots, (v_0, e_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n)$ δίνει ένα μονοπάτι από την κορυφή (v_0) στην κορυφή $(v_0, e_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n)$. Άρα, το γράφημα είναι συνεκτικό.

(iii) Θεωρούμε μια κορυφή $t = (v_0, e_0, \ldots, e_{n-1}, v_n)$ του T. Δείχνουμε πρώτα ότι

$$\mathrm{dist}(t, (v_0)) \geqslant n.$$

Έστω $(t_k, T_{k-1}), \ldots, t_0$ περίπατος στο T με αρχή την $t_k = t$ και τέλος την $t_0 = v_0$. Έστω $l(t_i)$ το μήκος του t_i αν το θεωρήσουμε σαν μη τετριμμένο μονοπάτι του G. Από τον ορισμό της γειτνίασης στο T έχουμε ότι $l(t_i) = l(t_{i-1} \pm 1)$. Παρατηρούμε ότι $l(t_0) = 0$ και επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι $l(t_i) \leqslant i$, για κάθε i. Όμως $l(t_k) = l(t) = n$ και άρα έχουμε ότι $k \geqslant n$, δηλαδή το μήκος κάθε περιπάτου στο T από το t στο (v_0) είναι τουλάχιστον n. Άρα, $\mathrm{dist}(t, (v_0)) \geqslant n$. Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρούμε ότι το μονοπάτι που ορίζεται στο G από την κορυφή t του T έχει μήκος ακριβώς ίσο με n.

(iv) Αν το T έχει κύκλο της μορφής (w_0), (w_0, e_0, w_1), $(w_0, e_0, \ldots, e_{n-1}, w_n)$,$(w_0)$, τότε η (w_0) θα είναι γειτονική με την $(w_0, \ldots, w_n)$, το οποίο είναι άτοπο από το (iii).

(v) Θεωρούμε έναν ανάγωγο κλειστό περίπατο μήκους $2m$ στο T που ξεκινά από την (v_0). Από το (iii), σε κάθε βήμα του περιπάτου, η απόσταση από το (v_0) είτε θα αυξάνεται ή θα μειώνεται κατά 1. Άρα, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε έναν τέτοιο περίπατο μια ακολουθία $a = (a_1, \dots, a_{2m})$ (με μία επί απεικόνιση) με $a_i = \pm 1$ για $i = 2, \dots, 2m-1$, $a_1 = 1$, $a_{2m} = -1$, ώστε να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{2m} a_i = 0 \ \text{ και } \ \sum_{i=2}^{j} a_i \geqslant 0, \text{ για } j = 2, \dots, 2m-1,$$

αφού το πρώτο βήμα του περιπάτου μας απομακρύνει κατά 1 από την v_0 και το τελευταίο βήμα μας επιστρέφει στη v_0. Από την Πρόταση 6.5.7 υπάρχουν ακριβώς

$$C_{m-1} = \frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1}$$

τέτοιες ακολουθίες. Πόσοι λοιπόν περίπατοι αντιστοιχούν σε μία τέτοια ακολουθία;

Κάθε τέτοιος περίπατος κάνει m βήματα μακρυά από το v_0 και m βήματα πρός το v_0. Αφού το T_{v_0} είναι k-κανονικό, από κάθε κορυφή του T_{v_0} υπάρχουν $k-1$ ακμές που μας μετακινούν μακρύτερα από την v_0 και μόνο μία που μας πηγαίνει πιο κοντά. Στο πρώτο βήμα του περιπάτου υπάρχουν k δυνατές επιλογές για ακμή. Για τα επόμενα βήματα, κάθε βήμα προς την (v_0) είναι μονοσήμαντα ορισμένο από τα βήματα μακρυά από την v_0, και μπορούμε να διαλέξουμε καθένα από αυτά με $k-1$ τρόπους. Άρα, το ζητούμενο πλήθος είναι

$$\frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1}k(k-1)^{m-1}.$$

□

Ορισμός 6.5.12 (απεικόνιση επικάλυψης)**.** Έστω $G = (V, E)$ k-κανονικό γράφημα, έστω $v_0 \in V$ και $T = T_{v_0}$ το καθολικό κάλυμμα του G. Ορίζουμε την *απεικόνιση επικάλυψης*

$$\phi_{v_0} : T_{v_0} \longrightarrow G$$

ως εξής: για μια κορυφή $v = (v_0, e_0, \dots, v_n)$ του T ορίζουμε

$$\phi_{v_0}(v) = v_n.$$

Έστω e μία ακμή του T που ενώνει τις $(v_0, e_0, \dots, v_n)$ και $(v_0, e_0, \dots, v_n, e_n, v_{n+1})$. Τότε $\phi_{v_0}(e) = e_n$.

Ο Ορισμός 6.5.12 είναι δανεικός από την Αλγεβρική Τοπολογία. Ο χώρος T_{v_0} όπως ορίστηκε, ώστε να ικανοποιεί τον ορισμό της απεικόνισης επικάλυψης ϕ_{v_0}, είναι ο συνήθης χώρος επικάλυψης ενός κανονικού γραφήματος (ως μετρικού χώρου, με τη γνωστή μετρική). Στο επόμενο λήμμα, χρησιμοποιούμε την απεικόνιση επικάλυψης για να δώσουμε κάτω φράγμα για το πλήθος των κλειστών περιπάτων από δοσμένη αρχική κορυφή του G.

Λήμμα 6.5.13. *Εστω G, v_0 και T όπως πριν. Το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους $2m$, στο G, που ξεκινούν από την κορυφή v_0 είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους $2m$, στο T, που ξεκινούν από το (v_0).*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι η ϕ_{v_0} απεικονίζει κλειστούς περιπάτους του T σε κλειστούς περιπάτους του G, μονοσήμαντα. □

Στην εφαρμογή που ακολουθεί, υπολογίζουμε το φάσμα του καθολικού καλύμματος ενός k-κανονικού γραφήματος, δηλαδή του άπειρου k-κανονικού δέντρου T_k ([35], [24]). Έστω A_T ο πίνακας γειτνίασης του T_k. Ο πίνακας αυτός ορίζει μια γραμμική απεικόνιση στον χώρο $\ell_2(V(T_k))$ των τετραγωνικά αθροίσιμων συναρτήσεων $f : V(T_k) \to \mathbb{C}$. Το *φάσμα* του τελεστή A_T είναι το σύνολο

$$\mathrm{spec}(A_T) = \{\lambda \big| A_T - \lambda I \text{ ιδιάζων}\}.$$

Για άπειρους πίνακες, η συνθήκη στον ορισμό του φάσματος είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι ο τελεστής $A_T - \lambda I$ είναι επί. Για πεπερασμένους πίνακες, ο παραπάνω ορισμός συμπίπτει με τον ορισμό του γνωστού φάσματος των ιδιοτιμών του πίνακα.

Εφαρμογή 6.5.14. *Το άπειρο k-κανονικό δένδρο T_k έχει φάσμα το*

$$\mathrm{spec}(A_T) = [-2\sqrt{k-1}, 2\sqrt{k-1}].$$

Σχέδιο απόδειξης. Θεωρούμε μια κορυφή $v \in V(T_k)$ σαν ρίζα του δένδρου. Τότε,

$$\lambda \in \mathrm{spec}(A_T) \to \delta_v \notin \mathrm{Range}(\lambda I - T),$$

όπου $\delta_v(u) = \begin{cases} 1, & u = v \\ 0, & u \neq v \end{cases}$. Θέλουμε να δούμε για ποιές τιμές του λ υπάρχει συνάρτηση $f \in \ell_2(V(T_k))$ ώστε

$$\delta_v = (\lambda I - A_T) f. \tag{6.5.1}$$

Λέμε ότι η f είναι *σφαιρική* γύρω από την κορυφή v αν η τιμή $f(u)$ εξαρτάται μόνο από την απόσταση (στο T_k) του u από το v. Η *σφαιρική συμμετρικοποίηση* μιας συνάρτησης $g \in \ell_2$ γύρω από το v είναι μια σφαιρική συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$\sum_{\mathrm{dist}(u,v)=r} f(u) = \sum_{\mathrm{dist}(u,v)=r} g(u)$$

για κάθε $r \geqslant 0$. Μπορούμε να δείξουμε ότι αν $g \in \ell_2$ είναι μια λύση της (6.5.1) τότε κάθε σφαιρική συμμετρικοποίηση f της g επαληθεύει επίσης την (6.5.1) και ανήκει στον ℓ_2.

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι η f είναι σφαιρική, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Μια σφαιρική συνάρτηση προσδιορίζεται από την ακολουθία $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ των τιμών της:

$$f(u) = x_i \ \text{ όταν } \ \text{dist}(u, v) = i, \ \text{ για } \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Χρησιμοποιώντας και τη σχέση (6.5.1) παίρνουμε την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned} \lambda x_0 &= k x_1 + 1 \\ \lambda x_i &= x_{i-1} + (k-1)\lambda x_{i+1}. \end{aligned}$$

Η λύση της παραπάνω αναδρομικής σχέσης είναι της μορφής $x_i = a\rho_1^i + b\rho_2^i$, όπου $\rho_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4(k-1)}}{2(k-1)}$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου $(k-1)\rho^2 - \lambda\rho + 1$.

Αν $|\lambda| < 2\sqrt{k-1}$ τότε οι ρίζες του τριωνύμου είναι μιγαδικές και έχουν μέτρο $\frac{1}{\sqrt{k-1}}$, οπότε σε αυτήν την περίπτωση $\lambda \in \text{spec}(A_T)$, αφού η f δεν ανήκει στον ℓ_2.

Αν $|\lambda| > 2\sqrt{k-1}$, ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει λύση στον ℓ_2 και άρα $\lambda \notin \text{spec}(A_T)$. Πράγματι, εφόσον $|\rho_1| < \frac{1}{\sqrt{k-1}}$, η f που προκύπτει για $x_i = a\rho_1^i$ η f ανήκει στον ℓ_2 και η αναδρομική σχέση ικανοποιείται για κάθε $i \geqslant 0$. Μένει να δειχθεί ότι υπάρχει μια τιμή του a ώστε να ισχύει η σχέση και για $i = 0$, δηλαδή $a = \frac{1}{\lambda - k\rho_1}$. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση όπου $\lambda \neq d\rho_1$, που ισχύει αφού $|\rho_1| < \frac{|\lambda|}{2(k-1)} \leqslant \frac{|\lambda|}{k}$.

6.5γ΄ Δύο τεχνικά λήμματα

Λήμμα 6.5.15.

$$\lim_{m\to\infty} \binom{2m-2}{m-1}^{\frac{1}{2m}} = 2.$$

Απόδειξη. Από τη μονοτονία του λογαρίθμου έχουμε

$$\int_1^n \ln(x)dx \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(x)dx,$$

δηλαδή

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \ln(n!) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} \ln \binom{2m-2}{m-1} &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} \ln \frac{(2m-2)!}{((m-1)!)^2} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{\ln(2m-2)! - 2\ln(m-1)!}{2m} \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{(2m-1)\ln(2m-1) - 2m + 1 - 2\ln 2 + 2}{2m} \\
&\quad - \frac{(m-1)\ln(m-1) - (m-1) + 1}{m} \\
&= \lim_{m\to\infty} (\ln(2m-1) - \ln(m-1)) = \lim_{m\to\infty} \ln \frac{2m-1}{m-1} \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

Ομοίως

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} \ln \binom{2m-2}{m-1} \geqslant \ln 2.$$

Άρα,

$$\binom{2m-2}{m-1}^{\frac{1}{2m}} = \exp\left(\ln \binom{2m-2}{m-1}^{\frac{1}{2m}} \right) \to 2$$

καθώς $m \to \infty$. □

Λήμμα 6.5.16. *Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί με $a \geqslant b \geqslant 0$. Αν ο m είναι θετικός ακέραιος τότε*

$$(a-b)^{\frac{1}{2m}} \geqslant a^{\frac{1}{2m}} - b^{\frac{1}{2m}}.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f(x) = (x-b)^{\frac{1}{2m}} - x^{\frac{1}{2m}} + b^{\frac{1}{2m}}$, $x \geqslant b$, έχει θετική παράγωγο σε κάθε $x > b$ και $f(b) = 0$. Άρα, $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \geqslant b$. □

6.5δ′ Απόδειξη του θεωρήματος Alon–Boppana

Θεωρούμε ένα k-κανονικό γράφημα G με διατεταγμένο σύνολο κορυφών $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Υποθέτουμε ότι $n \geqslant 3$. Έστω A ο πίνακας γειτνίασης του G για τη δεδομένη διάταξη των στοιχείων του V. Αφήνουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό σαν άσκηση.

Ισχυρισμός 6.5.17. *Ο πίνακας A^{2m} είναι ο πίνακας που έχει στοιχείο στην (i,j)-θέση το πλήθος των περιπάτων μήκους $2m$ από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j.*

Παίρνοντας το ίχνος του A^{2m} έχουμε

$$\mathrm{Tr}(A^{2m}) = \sum_{i=1}^{n} (A^{2m})_{i,i} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^{2m}(G) = w(2m),$$

όπου $w(2m)$ είναι το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους $2m$ στο G. Για δοθείσα κορυφή $v_i \in V$, θέτουμε $\rho_{v_i}(2m)$ το πλήθος των περιπάτων μήκους $2m$ που ξεκινούν (από) και τελειώνουν στην κορυφή (v_i) του καθολικού καλύμματος T_{v_i} του G. Από το Λήμμα 6.5.13 έχουμε

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^{2m}(G) = w(2m) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \rho_{v_i}(2m).$$

Έστω $\rho'_v(2m)$ το πλήθος των ανάγωγων κλειστών περιπάτων που ξεκινούν (από) και τελειώνουν στην κορυφή (v) του καθολικού καλύμματος T_v, για $v \in V$. Αφού το $\rho_v(2m)$ μετράει όλους τους περπάτους, ενώ το $\rho'_v(2m)$ μόνο τους ανάγωγους, έχουμε

$$\rho_v(2m) \geqslant \rho'_v(2m),$$

και επιπλέον, από το (v) της Πρότασης 6.5.11 έχουμε

$$\rho'_v(2m) = \frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1} k(k-1)^{m-1}. \tag{6.5.2}$$

Από την (6.5.2) συμπεραίνουμε ότι το $\rho'_v(2m)$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της v. Άρα, συμβολίζοντάς το με $\rho'(2m)$, έχουμε

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^{2m}(G) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \rho'(2m) = n\rho'(2m).$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν το G είναι διμερές, τότε $\lambda_0(G) = k$ και $\lambda_{n-1}(G) = -k$, άρα

  $$(n-2)\lambda^{2m}(G) \geqslant \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i^{2m}(G) \geqslant n\rho'(2m) - 2k^{2m},$$

  δηλαδή

  $$\lambda^{2m}(G) \geqslant \frac{n}{n-2}\rho'(2m) - \frac{2}{n-2}k^{2m} \geqslant \rho'(2m) - \frac{2}{n-2}k^{2m}.$$

- Αν το G δεν είναι διμερές, τότε

  $$(n-1)\lambda^{2m}(G) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{2m}(G) \geqslant n\rho'(2m) - k^{2m},$$

  και εύκολα επαληθεύουμε ότι

  $$\lambda^{2m}(G) \geqslant \frac{n}{n-1}\rho'(2m) - \frac{k^{2m}}{n-1} \geqslant \rho'(2m) - \frac{2k^{2m}}{n-2}.$$

Σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\lambda^{2m}(G) \geqslant \rho'(2m) - \frac{2k^{2m}}{n-2}.$$

Από τη σχέση (6.5.2) έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda^{2m}(G) &= \frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1}k(k-1)^{m-1} - \frac{2k^{2m}}{n-2}\\ &\geqslant \frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1}(k-1)^{m} - \frac{2k^{2m}}{n-2}\\ &= \frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1}\sqrt{k-1}^{2m} - \frac{2k^{2m}}{n-2}.\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 6.5.16 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\lambda(G) &\geqslant \left(\frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1}\sqrt{k-1}^{2m} - \frac{2k^{2m}}{n-2}\right)^{\frac{1}{2m}}\\ &\geqslant \frac{1}{m^{\frac{1}{2m}}}\binom{2m-2}{m-1}^{\frac{1}{2m}}\sqrt{k-1} - \frac{2k}{(n-2)^{\frac{1}{2m}}}.\end{aligned}$$

Μπορύμε τώρα να δούμε ότι για μια ακολουθία (G_n) k-κανονικών συνεκτικών γραφημάτων έχουμε

$$\liminf_n \lambda(G_n) \geqslant \frac{1}{m^{\frac{1}{2m}}}\binom{2m-2}{m-1}^{\frac{1}{2m}}\sqrt{k-1}$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $m^{\frac{1}{2m}} \to 1$ καθώς $m \to \infty$ και το Λήμμα 6.5.15, έχουμε το ζητούμενο. □

Δίνουμε τώρα μερικές γενικεύσεις του θεωρήματος Alon–Boppana. Ένα γράφημα λέγεται (k,l)-*διμερές* αν είναι διμερές και οι κορυφές των συνόλων της 2-διαμέρισης έχουν βαθμούς k και l αντίστοιχα. Το ακόλουθο αποτέλεσμα βρλισκεται στο [22].

Θεώρημα 6.5.18. *Για κάθε ακολουθία (B_n) (k,l)-διμερών γραφημάτων ισχύει ότι*

$$\liminf \lambda(B_n) \geqslant \sqrt{k-1} + \sqrt{l-1}$$

καθώς το πλήθος των κορυφών των B_n τείνει στο άπειρο.

Επίσης, οι Greenberg και Lubotzky έδειξαν την ακόλουθη γενίκευση του θεωρήματος Alon-Boppana.

Θεώρημα 6.5.19. *Έστω $\{G_i\}_i$ μια οικογένεια γραφημάτων που έχουν κοινό καθολικό κάλυμμα T. Τότε,*

$$\lambda(G_i) \geqslant \rho(T) - o(1),$$

όπου $\rho(T)$ είναι η φασματική ακτίνα του T.

Με αφετηρία το Θεώρημα 6.5.19, οι Hoory, Linial και Wigderson [35] δίνουν τον ακόλουθο γενικό ορισμό:

Ορισμός 6.5.20. Ένα γράφημα G λέγεται *γράφημα Ramanujan* αν $\lambda(G) \leqslant \rho(\hat{G})$, όπου $\hat{G}$ είναι το καθολικό κάλυμμα του G.

Χρησιμοποιώντας την Εφαρμογή 6.5.14, βλέπουμε ότι ο Ορισμός 6.5.2 συμπίπτει με τον προηγούμενο ορισμό στην περίπτωση όπου το G είναι k-κανονικό. Επιπλέον, δεδομένου ότι το καθολικό κάλυμμα ενος (k, l)-διμερούς γραφήματος είναι το δένδρο $T_{k,l}$ με εναλλασσόμενους βαθμούς k και l για οποιεσδήποτε δύο γειτονικές κορυφές, προκύπτει ότι ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται στην περίπτωση των (k, l)-διμερών γραφημάτων.

Με βάση τον Ορισμό 6.5.20, στην επόμενη ενότητα θα δείξουμε ότι κάθε γράφημα G έχει μια 2-ανύψωση της οποίας οι (καινούριες) ιδιοτιμές φράσσονται από την φασματική ακτίνα του καθολικού καλύμματος $\hat{G}$ του G.

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα αναφέροντας ένα αποτέλεσμα του Friedman, που μας δίνει ασυμπτωτικό άνω φράγμα για την $\lambda(G)$ σχεδον για κάθε τυχαίο k-κανονικό γράφημα G. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το θέμα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [35], [23].

Θεώρημα 6.5.21. *Για κάθε $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}[\lambda(G) \leqslant 2\sqrt{k-1} + \varepsilon] = 1 - O(1/n),$$

όπου G είναι ένα τυχαίο k-κανονικό γράφημα.

6.6 Γραφήματα Ramanujan με οποιονδήποτε βαθμό

6.6α΄ 2-ανυψώσεις

Οι Bilu και Linial πρότειναν στο [9] έναν τρόπο κατασκευής γραφημάτων Ramanujan μέσω μιας ακολουθίας 2-ανυψώσεων ενός αρχικού (Ramanujan) γραφήματος. Ξεκινάμε δίνοντας τον ορισμό της 2-ανύψωσης.

Ορισμός 6.6.1. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Μια 2-ανύψωση του G είναι ένα γράφημα $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ με $2n$ το πλήθος κορυφές $\tilde{V} = V \sqcup V = \{(v_i, u_i) : v_i, u_i \in V\}$. Το ζευγάρι $\{v_i, u_i\}_{i=1}^n$ λέγεται *ίνα* (fibre) της αρχικής κορυφής $v_i \in V$, για $i = 1, \ldots, n$.

Οι ακμές της 2-ανύψωσης είναι επίσης διπλάσιες στο πλήθος από τις ακμές του αρχικού γραφήματος και ορίζονται ως εξής: αν $e = (u_i, u_j) \in E$ τότε οι αντίστοιχες ακμές στο $\tilde{G}$ είναι της μορφής

$$\{(u_i, u_j), (v_i, v_j)\}$$

ή της μορφής

$$\{(u_i, v_j), (v_i, u_j)\}.$$

Αν εμφανίζονται μόνο ακμές του πρώτου είδους τότε το $\tilde{G}$ είναι η ξένη ένωση δύο αντιγράφων του G. Αν εμφανίζονται μόνο ακμές του δεύτερου είδους τότε το $\tilde{G}$ είναι το διμερές διπλό κάλυμμα του G.

Παρατηρήσεις 6.6.2. (i) Αν το γράφημα G είναι k-κανονικό τότε το $\tilde{G}$ είναι επίσης k-κανονικό.

(ii) Αν το G είναι διμερές τότε το $\tilde{G}$ είναι επίσης διμερές.

Ορισμός 6.6.3. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. *Απεικόνιση προσήμου* ονομάζεται μια απεικόνιση της μορφής

$$s : E \to \{\pm 1\}.$$

Ο *προσημασμένος πίνακας γειτνίασης* $A_G^{(s)}$ είναι ο πίνακας με στοιχεία

$$A_G^{(s)}(u, v) = \begin{cases} s(u, v), & \text{αν } (u, v) \in E \\ 0, & \text{αν } (u, v) \notin E \end{cases}.$$

Από τους παραπάνω ορισμούς φαίνεται ότι οι απεικονίσεις προσήμου είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις 2-ανυψώσεις ως εξής: όταν στο $\tilde{G}$ εμφανίζονται ακμές του πρώτου τύπου θέτουμε $s(u, v) = 1$, ενώ όταν εμφανίζονται ακμές του δεύτερου τύπου θέτουμε $s(u, v) = -1$.

Οι Bilu και Linial παρατήρησαν ότι οι ιδιοτιμές μιας 2-ανύψωσης $\tilde{G}$ μπορούν να χαρακτηρισθούν από τις ιδιοτιμές του πίνακα γειτνίασης του G και του προσημασμένου πίνακα γειτνίασης του οποίου η απεικόνιση προσήμου αντιστοιχεί (με την παραπάνω αντιστοιχία) στην 2-ανύψωση $\tilde{G}$. Ειδικότερα, αποδεικνύουν το εξής πολύ χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 6.6.4. *Θεωρούμε ένα γράφημα $G = (V, E)$ και μια 2-ανύψωσή του $\tilde{G}$. Έστω A ο πίνακας γειτνίασης του G και $A^{(s)}$ ο προσημασμένος πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση προσήμου s της 2-ανύψωσης $\tilde{G}$. Τότε, κάθε ιδιοτιμή του A και κάθε ιδιοτιμή του $A^{(s)}$ είναι ιδιοτιμές του γραφήματος $\tilde{G}$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας γειτνίασης της 2-ανύψωσης $\tilde{G}$ είναι ο

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix},$$

όπου A_1 είναι ο πίνακας γειτνίασης του γραφήματος $G_1 = (V, s^{-1}(\{1\}))$ και A_2 ο πίνακας γειτνίασης του γραφήματος $G_2 = (V, s^{-1}(\{-1\}))$. Άρα, $A = A_1 + A_2$ και $A^{(s)} = A_1 - A_2$. Έστω v ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ. Εύκολα ελέγχουμε ότι το (v, v) είναι ιδιοδιάνυσμα του $\tilde{A}$ με ιδιοτιμή μ. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{A}\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_1 + A_2)v \\ (A_2 + A_1)v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Av \\ Av \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu v \\ \mu v \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ομοίως, αν το u είναι ιδιοδιάνυσμα του $A^{(s)}$ με ιδιοτιμή λ, τότε το $(u, -u)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\tilde{A}$ με ιδιοτιμή λ. Τελειώνουμε την απόδειξη παρατηρώντας ότι τα u και v είναι ανά δύο κάθετα και $2n$ το πλήθος, άρα αποτελούν όλα τα ιδιοδιανύσματα του $\tilde{A}$. Από το φασματικό θεώρημα έχουμε το συμπέρασμα. □

Το κύριο αποτέλεσμα των Bilu - Linial στο [9], είναι το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 6.6.5. *Κάθε γράφημα G με μέγιστο βαθμό κορυφής k έχει κατάλληλη απεικόνιση προσήμου s, έτσι ώστε όλες οι νέες ιδιοτιμές του πίνακα $A^{(s)}$ να έχουν τάξη $O(\sqrt{k \log^3 k})$.*

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.6.5, κατασκευάζουν expander-οικογένεια γραφημάτων, ξεκινώντας από το πλήρες γράφημα K_{k+1} και παίρνοντας στη συνέχεια κατάλληλη 2-ανύψωση σε κάθε βήμα. Επίσης, κάνουν την εικασία ότι κάθε k-κανονικό γράφημα G έχει 2-ανύψωση $\tilde{G}$ της οποίας όλες οι νέες ιδιοτιμές φράσσονται κατ' απόλυτη τιμή από $2\sqrt{k-1}$.

Οι Marcus, Spielman και Srivastava απέδειξαν την παραπάνω εικασία στην περίπτωση όπου το G είναι διμερές. Δείχνουν ακόμα ότι κάθε κάθε γράφημα G έχει 2-ανύψωση η οποία είναι γράφημα Ramanujan με την έννοια του γενικότερου ορισμού 6.5.20.

Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι να δούμε την απόδειξη του αποτελέσματός τους. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε τα πολυώνυμα ταιριάσματος και μελετάμε βασικές ιδιότητές τους.

6.6β΄ Πολυώνυμο ταιριάσματος

Ορισμός 6.6.6. Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Ονομάζουμε *r-ταίριασμα* του γραφήματος ένα σύνολο r ακμών, καμία από τις οποίες δεν έχει κοινή κορυφή με κάποια άλλη. Με m_i θα συμβολίζουμε το πλήθος των i-ταιριασμάτων του γραφήματος.

Οι Heilmann και Lieb όρισαν στο [32] το *πολυώνυμο ταιριάσματος* ενός γραφήματος G να είναι το

$$\mu_G(x) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i m_i x^{n-2i},$$

όπου n είναι το πλήθος των κορυφών του G. Για το πολυώνυμο αυτό δείξαν το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.6.7. *Για κάθε γράφημα G με μέγιστο βαθμό κορυφής k, το πολυώνυμο $\mu_G(x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες που φράσσονται απολύτως από $2\sqrt{k-1}$.*

Το προηγούμενο αποτέλεσμα αρκεί, όπως θα δούμε, για να αποδειχθεί η ύπαρξη expander οικογένειας Ramanujan γραφημάτων κάθε βαθμού. Ο Godsil ωστόσο, χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο ορισμό έδειξε το Θεώρημα 6.6.9, μέσω του οποίου οι Marcus, Spielman και Srivastava, είναι σε θέση να γενικεύσουν το αποτέλεσμά τους στην περίπτωση όπου τα γραφήματα Ramanujan δεν είναι κανονικά (στα πλαίσια του ορισμου 6.5.20).

Ορισμός 6.6.8. Για ένα γράφημα G και μια κορυφή u του G, ορίζουμε ως *δένδρο μονοπατιών* $P(G, u)$ το γράφημα που έχει κορυφές τα μονοπάτια του G, που έχουν διακεκριμένες κορυφές και αρχίζουν από την u. Οι ακμές του $P(G, u)$ είναι της μορφής $((u, v_1, \ldots, v_l), (u, v_1, \ldots, v_{l+1}))$, όπου οι κορυφές v_l, v_{l+1} είναι γειτονικές στο G.

Θεώρημα 6.6.9. *Έστω $P(G, u)$ το δένδρο μονοπατιών του G. Τότε, το πολυώνυμο ταιριάσματος του G διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα γειτνίασης του $P(G, u)$. Ειδικότερα, όλες οι ρίζες του μ_G είναι πραγματικές και φράσσονται απολύτως από την φασματική ακτίνα $\rho(P(G, u))$ του γραφήματος $P(G, u)$.*

Για μία απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος παραπέμπουμε στο [28] (σελ. 96).

Λήμμα 6.6.10. *Έστω G γράφημα και έστω $\hat{G}$ το καθολικό κάλυμμά του. Τότε, οι ρίζες του $\mu_G(x)$ φράσσονται απολύτως από την φασματική ακτίνα $\rho(\hat{G})$.*

Απόδειξη. Έστω u τυχούσα κορυφή του G και έστω P το δένδρο μονοπατιών με ρίζα την κορυφή u. Αφού τα μονοπάτια που αντιστοιχούν στις κορυφές του P είναι περίπατοι χωρίς πισωγυρίσματα στο G, έχουμε ότι το P είναι ένα γνήσιο υπογράφημα του καθολικού καλύμματος του G, $\hat{G}$, και ο A_P, ο πίνακας γειτνίασης του P είναι ένας πεπερασμένος υποπίνακας του $A_{\hat{G}}$. Από το Θεώρημα 6.6.9 οι ρίζες του μ_G φράσσονται από

$$\begin{aligned} \|A_P\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|A_P x\|_2 \leqslant \sup_{\|y\|_2=1, \operatorname{supp}(y) \subseteq P} \|A_{\hat{G}} y\|_2 \\ &\leqslant \sup_{\|y\|_2=1} \|A_{\hat{G}} y\|_2 = \rho(\hat{G}). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Το επόμενο θεώρημα οφείλεται στους Godsil και Gutmann και θα μας φανεί πολύ χρήσιμο στη συνέχεια.

Θεώρημα 6.6.11.
$$\mathbb{E}_{s\in\{\pm1\}^m}[\det(xI - A^{(s)})] = \mu_G(x).$$

Απόδειξη. ([43]) Έστω $\mathrm{sym}(S)$ να είναι το σύνολο των μεταθέσεων του συνόλου S και έστω $|\pi|$ το πλήθος των αντιστροφών μίας συγκεκριμένης μετάθεσης $\pi \in \mathrm{sym}(S)$. Εκφράζοντας την ορίζουσα σαν άθροισμα πάνω από τις μεταθέσεις του συνόλου $[n]$ έχουμε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_s[\det(xI - A_s)] &= \mathbb{E}_s\left[\sum_{\sigma\in\mathrm{sym}(S)} (-1)^{|\sigma|}\prod_{i=1}^{n}(xI - A_s)_{1,\sigma(i)}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} \sum_{S\subset[n],|S|=k}\ \sum_{\pi\in\mathrm{sym}(S)} \mathbb{E}_s\left[(-1)^{|\pi|}\prod_{i\in S}(A_s)_{i,\pi(i)}\right]\\
&\text{όπου } \pi \text{ συμβολίζει το μέρος της } \sigma \text{ με } \sigma(i)\neq i\\
&= \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} \sum_{S\subset[n],|S|=k}\ \sum_{\pi\in\mathrm{sym}(S)} \mathbb{E}_s\left[(-1)^{|\pi|}\prod_{i\in S}s_{i,\pi(i)}\right]
\end{aligned}$$

Αφού τα s_{ij} είναι ανεξάρτητα με $\mathbb{E}[s_{ij}] = 0$, στην παραπάνω σχέση επιβιώνουν μόνο τα γινόμενα των s_{ij} με άρτιες δυνάμεις (0 ή 2). Έτσι μπορούμε να κρατήσουμε τις μεταθέσεις που περιέχουν μόνο (ξένους) κύκλους μήκους 2. Αυτές είναι ακριβώς τα $\frac{|S|}{2}$-ταιριάσματα του S και δεν υπάρχουν τέτοια όταν $|S|$ περιττός. Αφού $\mathbb{E}(s_{ij}^2) = 1$, από τις παραπάνω ισότητες έχουμε

$$\mathbb{E}_s[\det(xI - A_s)] = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} \sum_{S\subset[n],|S|=k}\ \sum_{\{\pi \text{ ταίριασμα στο } S\}} (-1)^{|S|/2}\cdot 1 = \mu_G(x),$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Για να δείξουμε ότι υπάρχει η ζητούμενη 2-ανύψωση αρκεί, από τα Θεωρήματα 6.6.7 και 6.6.11, να δείξουμε ότι υπάρχει απεικόνιση προσήμου s τέτοια ώστε η μεγαλύτερη ρίζα του $\det(xI - A^{(s)})$ να είναι το πολύ ιση με τη μεγαλύτερη ρίζα του $\mathbb{E}_{s\in\{\pm1\}^m}[\det(xI - A^{(s)})]$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι τα πολυώνυμα $\{\det(xI - A^{(s)})\}_{s\in\{\pm1\}^m}$ αποτελούν διαπλεκόμενη οικογένεια πολυωνύμων.

6.6γ′ Το κύριο αποτέλεσμα

Ξεκινάμε θέτοντας $f_s = \det(xI - A^{(s)})$, όπου $s : E \to \{\pm1\}$ απεικόνιση προσήμου. Η απόδειξη ότι η οικογένεια $\{f_s\}_{s\in\{\pm1\}^m}$ είναι διαπλεκόμενη οικογένεια πολυωνύμων, όπου

m είναι το πλήθος των ακμών στο E, βασίζεται στην ακόλουθη γενίκευση του Θεωρήματος 6.6.11:

Θεώρημα 6.6.12. *Έστω $p_1, \ldots, p_m \in [0,1]$. Το πολυώνυμο*

$$\sum_{s\in\{\pm 1\}^m} \Big(\prod_{\{i:s_i=1\}} p_i \Big)\Big(\prod_{\{i:s_i=-1\}} 1-p_i \Big) f_s(x) \tag{6.6.1}$$

έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη. Έστω d_u ο βαθμός της κορυφής u, και έστω $d = \max_{u\in V} d_u$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το πολυώνυμο της (6.6.1) έχει πραγματικές ρίζες. Ισοδύναμα, μπορούμε να δείξουμε ότι το πολυώνυμο

$$\sum_{s\in\{\pm 1\}^m} \Big(\prod_{\{i:s_i=1\}} p_i \Big)\Big(\prod_{\{i:s_i=-1\}} 1-p_i \Big) \det(xI + dI - A^{(s)}) \tag{6.6.2}$$

έχει πραγματικές ρίζες.

Για κάθε ακμή $e = (u,v) \in E$ ορίζουμε τους ακόλουθους πίνακες τάξης 1:

$$L_e^1 = (\chi_u - \chi_v)(\chi_u - \chi_v)^T \tag{6.6.3}$$

και

$$L_e^{-1} = (\chi_u + \chi_v)(\chi_u + \chi_v)^T, \tag{6.6.4}$$

όπου $\chi_u = (\delta_u(v))_{v\in V} \in \mathbb{R}^{|V|}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που αντιστοιχεί στην κατεύθυνση που ορίζει η κορυφή u, σύμφωνα με τη διάταξη των κορυφών του G.

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{\{e\in E: s(e)=1\}} L_e^1 = -A_1 + \mathrm{diag}_{u\in V}(d_u\big|_{A_1}) \tag{6.6.5}$$

και

$$\sum_{\{e\in E: s(e)=-1\}} L_e^{-1} = A_2 + \mathrm{diag}_{u\in V}(d_u\big|_{A_2}), \tag{6.6.6}$$

όπου A_1, A_2 οι πίνακες γειτνίασης που αντιστοιχούν στα γραφήματα $G_1 = (V, s^{-1}(1))$, $G_2 = (V, s^{-1}(-1))$ (βλέπε απόδειξη του Λήμματος 6.6.4) και $d_u\big|_{A_1}$, $d_u\big|_{A_2}$ ο βαθμός της κορυφής u στα G_1, G_2 αντίστοιχα. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in E} L_e^{s(e)} &= \sum_{\{e\in E: s(e)=1\}} L_e^1 + \sum_{\{e\in E: s(e)=-1\}} L_e^{-1} \\
&= -A_1 + A_2 + \mathrm{diag}_{u\in V}(d_u\big|_{A_1} + d_u\big|A_2) \\
&= -A^{(s)} + \mathrm{diag}(d_u) \\
&= -A^{(s)} + dI - dI + \mathrm{diag}(d_u),
\end{aligned}$$

αφού $A^{(s)} = A_1 - A_2$. Συνεπώς,

$$dI - A^{(s)} = \sum_{e\in E} L_e^{s(e)} + D, \tag{6.6.7}$$

όπου $D = \operatorname{diag}(d - d_u)$ είναι ο διαγώνιος πίνακας του οποίου το u-οστό στοιχείο της διαγωνίου είναι $d - d_u$.

Θέτουμε

$$P(x) := \sum_{s\in\{\pm1\}^m} \Big(\prod_{\{e:s_e=1\}} p_e\Big)\Big(\prod_{\{e:s_e=-1\}} 1-p_e\Big) \det\Big(xI + D + \sum_{e\in E} L_e^{s(e)}\Big).$$

Άρα,

$$P(x) = \mathbb{E}_{s_e\sim p_e} \det\Big(xI + D + \sum_{e\in E} L_e^{s(e)}\Big). \tag{6.6.8}$$

Ορίζουμε ακόμα τα ακόλουθα τυχαία ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^{|V|}$, για $e = (u, v)$:

$$v_e = \begin{cases} \chi_u - \chi_v, & \text{με πιθανότητα } p_e \\ \chi_u + \chi_v, & \text{με πιθανότητα } 1 - p_e \end{cases}, \tag{6.6.9}$$

όπου $1, \dots, e, \dots, |E|$ είναι μια αρίθμιση των ακμών. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.6.2) εως (6.6.7), έχουμε από την (6.6.8) μέσω της (6.6.9) ότι

$$\mathbb{E}_{s_e\sim p_e} \det\Big(xI + D + \sum_{e\in E} L_e^{s(e)}\Big) = \mathbb{E}_{e\in E} \det\Big(xI + D + \sum_{e\in E} v_e v_e^T\Big). \tag{6.6.10}$$

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 5.5.2, έχουμε ότι το $P(x)$ είναι μεικτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο, άρα από το Λήμμα 5.5.3 έπεται ότι έχει πραγματικές ρίζες. Έτσι, έχουμε το συμπέρασμα. □

Για $1 \leqslant i \leqslant m$, με $p_i = \frac{1}{2}$, από τα Θεωρήματα 6.6.11 και 6.6.12 συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο $\mu_G(x)$ έχει πραγματικές ρίζες. Δείχνουμε τώρα το εξής:

Θεώρημα 6.6.13. *Τα πολυώνυμα $\{f_s\}_{s\in\{\pm1\}^m}$ αποτελούν διαπλεκόμενη οικογένεια πολυωνύμων.*

Απόδειξη. Επαληθεύουμε τον Ορισμό 5.3.4. Θα δείξουμε ότι για κάθε $0 \leqslant k \leqslant m-1$, για κάθε $\lambda \in [0, 1]$, και για κάθε μερική ανάθεση $t_1 \in \{\pm1\}, \dots, t_k \in \{\pm1\}$, το πολυώνυμο

$$\lambda f_{t_1,\dots,t_k,1}(x) + (1-\lambda) f_{t_1,\dots,t_k,-1}(x)$$

έχει πραγματικές ρίζες. Τότε, τα πολυώνυμα $f_{t_1,\dots,t_k,1}(x)$ και $f_{t_1,\dots,t_k,-1}(x)$ διαχωρίζονται ταυτόχρονα, από το Λήμμα 5.3.6, και άρα παίρνουμε το συμπέρασμα του θεωρήματος.

Παρατηρούμε τώρα ότι έχοντας σταθεροποιήσει $t_1, \ldots, t_k \in \{\pm 1\}$, επιλέγοντας $p_i = \frac{1+t_i}{2}$ αν $i = 1, \ldots, k$, $p_{k+1} = \lambda$, και $p_j = \frac{1}{2}$ αν $j = k+2, \ldots, m$, και αντικαθιστώντας στο πολυώνυμο του Θεωρήματος 6.6.12, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{s \in \{\pm 1\}^m} \Big(\prod_{\{i : s_i = 1\}} p_i \Big) \Big(\prod_{\{i : s_i = -1\}} 1 - p_i \Big) f_s(x) \\
&\quad = \sum_{s_{k+1} \in \{\pm 1\}} \cdots \sum_{s_m \in \{\pm 1\}} \Big(\prod_{\{i : s_i = 1\}} p_i \Big) \Big(\prod_{\{i : s_i = -1\}} 1 - p_i \Big) f_{t_1, \ldots, t_k, s_{k+1}, \ldots, s_m}(x) \\
&\quad = \frac{1}{2^{m-k-1}} \left(\lambda f_{t_1, \ldots, t_k, 1}(x) + (1 - \lambda) f_{t_1, \ldots, t_k, -1}(x) \right),
\end{aligned}$$

άρα έχουμε το ζητούμενο από το Θεώρημα 6.6.12. □

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε το κύριο αποτέλεσμα της ενότητας.

Θεώρημα 6.6.14. *Έστω G ένα γράφημα με πίνακα γειτνίασης τον A και καθολικό κάλυμμα το T. Τότε, υπάρχει απεικόνιση προσήμου s ώστε όλες οι ιδιοτιμές του $A^{(s)}$ να είναι το πολύ ίσες με $\rho(T)$. Ειδικότερα, αν το G είναι k-κανονικό τότε υπάρχει $s : E \to \{\pm 1\}$ ώστε οι ιδιοτιμές του $A^{(s)}$ να είναι το πολύ ίσες με $2\sqrt{k-1}$.*

Απόδειξη. Πράγματι, από το προηγούμενο θεώρημα και από το Θεώρημα 5.3.5 υπάρχουν $s_1, \ldots, s_m \in \{\pm 1\}$ ώστε η μέγιστη ρίζα του $f_{s_1 \ldots, s_m}$ να είναι μικρότερη ή ίση από τη μέγιστη ρίζα του $f_\emptyset$. Παρατηρούμε ότι οι ρίζες του $f_\emptyset$ και του μ_G συμπίπτουν. Από το Λήμμα 6.6.10 παίρνουμε το ζητούμενο. Ειδικότερα, στην περίπτωση όπου το G είναι k-κανονικό, παίρνουμε το ζητούμενο φράγμα χρησιμοποιώντας την Εφαρμογή 6.5.14 ή εφαρμόζοντας απευθείας το Θεώρημα 6.6.7. □

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε οικογένεια από expanders, η οποία αποτελείται από k-κανονικά διμερή γραφήματα Ramanujan. Θα χρειαστούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 6.6.15. *Κάθε μη τετριμμένη ιδιοτιμή ενός πλήρους (k,l)-διμερούς γραφήματος είναι ίση με 0. Δηλαδή, τα πλήρη (k,l)-διμερή γραφήματα είναι Ramanujan.*

Απόδειξη. Ο πίνακας γειτνίασης ενός γραφήματος της παραπάνω μορφής έχει τάξη 2 και ακραίες ιδιοτιμές τις $\pm\sqrt{kl}$. Από το φασματικό θεώρημα συμπεραίνουμε ότι κάθε άλλη ιδιοτιμή είναι ίση με 0. Για να το δούμε αυτό γράφουμε τον πίνακα γειτνίασης στη μορφή $A = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & \mathbf{1}_{k \times l} \\ \mathbf{1}_{l \times k} & 0_{l \times l} \end{pmatrix}$, και παρατηρούμε ότι $A^2 = \begin{pmatrix} l \cdot \mathbf{1}_{k \times k} & 0_{k \times l} \\ 0_{l \times k} & k \cdot \mathbf{1}_{l \times l} \end{pmatrix}$ ο οποίος έχει μοναδική θετική ιδιοτιμή (πολλαπλότητας 2) την kl (φαίνεται εύκολα αν διαγωνοποιήσουμε τον A^2). Από τη μορφή του A φαίνεται ότι είναι τάξης 2 και από το γεγονός ότι είναι συμμετρικός και έχει ίχνος 0 παίρνουμε ότι για τις μη μηδενικές ιδιοτιμές του $-\lambda, \lambda$ ισχύει ότι $\lambda^2 = kl$, από όπου παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Θεώρημα 6.6.16. *Για κάθε $k \geqslant 3$, υπάρχει οικογένεια από expanders, η οποία αποτελείται από k-κανονικά διμερή γραφήματα Ramanujan.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 6.6.15 έχουμε, για $k = l$, ότι το πλήρες k-κανονικό διμερές γραφημα $K_{k,k}$ είναι γράφημα Ramanujan. Από το Λήμμα 6.6.4 και το Θεώρημα 6.6.14 ισχύει ότι για κάθε k-κανονικό διμερές γράφημα Ramanujan G υπάρχει 2-ανύψωση $\widetilde{G}$ της οποίας κάθε μη τετριμμένη ιδιοτιμή είναι φραγμένη από $2\sqrt{k-1}$. Αφού κάθε 2-ανύψωση ενός διμερούς γραφήματος είναι διμερές γράφημα και το φάσμα ενός διμερούς γραφήματος είναι συμμετρικό, έχουμε ότι η παραπάνω 2-ανύψωση είναι γράφημα Ramanujan. Επομένως, για κάθε διμερές k-κανονικό γράφημα Ramanujan G υπάρχει διμερές k-κανονικό γράφημα Ramanujan $\widetilde{G}$ με διπλάσιο πλήθος κορυφών. □

Όμοια αποδεικνύεται και το επόμενο γενικότερο θεώρημα.

Θεώρημα 6.6.17. *Για κάθε $k, l \geqslant 3$ υπάρχει άπειρη ακολουθία (k, l)-διμερών γραφημάτων Ramanujan.*

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω τρόπος κατασκευής γραφημάτων Ramanujan είναι αρκετά γενικός, με την έννοια ότι μπορεί να δώσει άπειρη οικογένεια μη κανονικών εν γένει γραφημάτων Ramanujan, αν χρησιμοποιήσουμε τον γενικό Ορισμό 6.5.20 και το Θεώρημα 6.6.14. Στην αντίστροφη κατεύθυνση, αποδείχθηκε από τους Lubotzky και Nagnibeda ότι υπάρχουν άπειρα δένδρα που καλύπτουν άπειρα το πλήθος πεπερασμένα γραφήματα, χωρίς κανένα από αυτά να είναι γράφημα Ramanujan.

Παράρτημα Α΄

Μία εναλλακτική απόδειξη του Λήμματος 5.6.7

Η απόδειξη που θα δώσουμε οφείλεται στον Tao και είναι πιο στοιχειώδης από αυτήν που δόθηκε αρχικά από τους Marcus, Spielman και Srivastava.

Για να αποδείξουμε το Λήμμα 5.6.7 θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση Α΄.0.18. *Έστω $p(x,y)$ ένα πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο δύο μεταβλητών. Θεωρούμε ακόμα τις ρίζες $\lambda_1(y) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r(y)$ του πολυωνύμου $q(x) = p(x,y)$. Τότε οι συναρτήσεις $\lambda_i(y)$, $i = 1, \ldots, r$ είναι φθίνουσες.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης οι απεικονίσεις $\lambda_i(y)$ είναι συνεχείς και C^1 εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων. Κατά συνέπεια, αν δεν ισχύει το συμπέρασμα, θα υπάρχουν ρίζα λ_{i_0} και σημείο y_0 ώστε

$$\beta = \frac{d}{dy}\lambda_{i_0}(y)\big|_{y=y_0} > 0.$$

Γράφουμε $x_0 = \lambda_{i_0}(y_0)$. Άρα, το σημείο (x_0, y_0) είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$q(x) = p(x,y) = c(y)\prod_{j=1}^{r}(x - \lambda_j(y)).$$

Παίρνοντας μερική παράγωγο ως προς x έχουμε

$$\partial_x p(x,y) = c(y)\sum_{i=1}^{r}\prod_{j\neq i}(x - \lambda_j(y)),$$

άρα

$$\partial_x(p(x,y))\big|_{(x_0,y_0)} = c(y_0)\prod_{j\neq i_0}(x_0-\lambda_j(y_0)) =: \alpha.$$

Όμοια,

$$\begin{aligned}\partial_y p(x,y) &= c'(y)\prod_{j=1}^{r}(x-\lambda_j(y)) + c(y)\left(\prod_{j=1}^{r}(x-\lambda_j(y))\right)'\\ &= c'(y)\prod_{j=1}^{r}(x-\lambda_j(y)) - c(y)\lambda_j'(y)\sum_{i=1}^{r}\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j(y)).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\partial_y(p(x,y))\big|_{(x_0,y_0)} &= -\lambda_{i_0}'(y_0)c(y)\prod_{j\neq i_0}(x_0-\lambda_{j_0}(y_0))\\ &= -\beta c(y)\prod_{j\neq i_0}(x_0-\lambda_{j_0}(y_0)).\end{aligned}$$

Από το ανάπτυγμα Taylor για το $p(x,y)$, χρησιμοποιώντας την $p(x_0,y_0)=0$, έχουμε

$$p(x,y) = \alpha((x-x_0)-\beta(y-y_0)) + o(|x-x_0|^2+|y-y_0|^2) \tag{A$'$.0.1}$$

για τα $\alpha\in\mathbb{R}$ και $\beta>0$ που ορίστηκαν παραπάνω. Θέτουμε τώρα, για $\delta>0$,

$$q_\delta(x) = \frac{1}{\delta}p(\delta x + x_0, \delta i + y_0).$$

Καθώς το $\delta\to 0$ έχουμε, από την (A$'$.0.1),

$$q_\delta(x) \to \alpha(x-\beta i) =: q_0(x).$$

Δηλαδή το πολυώνυμο q_0 έχει ρίζα με θετικό φανταστικό μέρος, την $x=\beta i$. Από το Θεώρημα του Rouché, για αρκετά μικρό δ, το $q_\delta(x)$ πρέπει να έχει ρίζα με θετικό φανταστικό μέρος. Αλλά τότε το πολυώνυμο $p(x,y)$ θα έχει ρίζα (x,y) με $\Im x>0$ και $\Im y>0$ και άρα δεν μπορεί να είναι πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο. □

Λήμμα A$'$.0.19. *Έστω p πραγματικό ευσταθές πολυώνυμο και έστω $z\in \mathrm{Ab}_p$. Αν $1\leqslant i,j\leqslant m$ και $\delta\geqslant 0$, τότε*

$$\Phi_p^i(z+\delta e_j) \leqslant \Phi_p^i(z) \tag{A$'$.0.2}$$

και

$$\Phi_p^i(z+\delta e_j) \leqslant \Phi_p^i(z) + \delta\partial_{z_j}\Phi_p^i(z+\delta e_j), \tag{A'.0.3}$$

δηλαδή πάνω από τις ρίζες του p η συνάρτηση εμποδίου Φ_p^i είναι φθίνουσα και κυρτή ως προς κάθε συντεταγμένη.

Απόδειξη. Στην περίπτωση $i = j$ η απόδειξη είναι πανομοιότυπη με αυτήν που έχει ήδη δοθεί.

Στην περίπτωση όπου $i \neq j$ σταθεροποιούμε όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές εκτός των z_i, z_j και θεωρούμε το πολυώνυμο

$$q_{z,ij}(z_i, z_j) = p(z_1, \ldots, z_m).$$

Προς απλοποίηση του συμβολισμού, και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, γράφουμε

$$q(z_j) = q_{z,ij}(z_i, z_j) = p(z_i, z_j) = c(z_i)\prod_{k=1}^{r}(z_j - \lambda_k(z_i)).$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε

$$\begin{aligned}\partial_{z_j}\Phi_p^i &= \partial_{z_j}\partial_{z_i}(\log p(z_i, z_j)) = \partial_{z_i}\partial_{z_j}(\log p(z_i, z_j)) \\ &= \partial_{z_i}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{z_j - \lambda_k(z_i)}.\end{aligned}$$

Ομοίως:

$$\partial_{z_j}^2\Phi_p^i = \partial_{z_j}^2\partial_{z_i}(\log p(z_i, z_j)) = -\partial_{z_i}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{(z_j - \lambda_k(z_i))^2}.$$

Αλλά, αφού $z \in \mathrm{Ab}_{q_{z,ij}}$, έχουμε ότι

$$z_j > \lambda_k(z_i)$$

για κάθε k. Επιπλέον, από το προηγούμενο λήμμα, οι συναρτήσεις $\lambda_k(z_i)$ είναι φθίνουσες. Εύκολα τώρα προκύπτει με πράξεις ότι $\partial_{z_j}\Phi_p^i \leqslant 0$ και $\partial_{z_j}^2\Phi_p^i \geqslant 0$, δηλαδή το ζητούμενο. □

□

Βιβλιογραφία

[1] C. Akemann, J. Anderson and B. Tanbay, *The Kadison-Singer problem for the direct sum of matrix algebras*, Positivity **16** (2012), 53-66.

[2] J. Anderson, *Extensions, restrictions and representations of states on C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979), 303-329.

[3] J. Anderson, *Extreme points in sets of positive linear maps on $B(H)$*, J. Funct. Analysis **31** (1979), 195-217.

[4] K. M. Ball, *Ellipsoids of maximal volume in convex bodies*, Geom. Dedicata **41** (1992), 241-250.

[5] R. B. Bapat, *Mixed discriminants of positive semidefinite matrices*, Linear Algebra and its Applications **126** (1989), 107-124.

[6] R. B. Bapat and T. E. S. Raghavan, *Nonnegative matrices and applications*, Cambridge University Press **64** (1997).

[7] J. D. Batson, D. A. Spielman and N. Srivastava *Twice-Ramanujan sparsifiers*, SIAM Journal on Computing **41** (2012), 1704-1721.

[8] K. Berman, H. Halpern, V. Kaftal and G. Weiss, *Matrix norm inequalities and the relative Dixmier property*, Integral Equations and Operator Theory **11** (1988), 28-48.

[9] Y. Bilu and N. Linial, *Lifts, discrepancy and nearly optimal spectral gap*, Combinatorica **26** (2006), 495-519.

[10] J. Borcea and P. Brändén, *Applications of stable polynomials to mixed determinants: Johnson"s conjectures, unimodality, and symmetrized Fischer products*, Duke Mathematical Journal **143** (2008), 205-223.

[11] J. Borcea and P. Brändén, *The Lee-Yang and Pólya-Schur programs. I. linear operators preserving stability*, Inventiones Mathematicae **177** (2009), 541-569.

[12] J. Borcea and P. Brändén, *The Lee-Yang and Pólya-Schur programs. II. theory of stable polynomials and applications*, Communications on Pure and Applied Mathematics **62** (2009), 1595-1631.

[13] J. Borcea and P. Brändén, *Multivariate Polya-Schur classification problems in the Weyl algebra*, Proceedings of the London Mathematical Society **101** (2010), 73-104.

[14] J. Bourgain and S. J. Szarek, *The Banach-Mazur distance to the cube and the Dvoretzky-Rogers factorization*, Israel J. Math. **62** (1988), 169-180.

[15] J. Bourgain and L. Tzafriri, *Invertibility of "large" submatrices and applications to the geometry of Banach spaces and Harmonic Analysis*, Israel J. Math. **57** (1987), 137-224.

[16] J. Bourgain and L. Tzafriri, *On a problem of Kadison and Singer*, J. Reine Angew. Math. **420** (1991), 1-43.

[17] Peter G. Casazza, Matthew Fickus, Janet C. Tremain, and Eric Weber, *The KadisonSinger problem in mathematics and engineering: a detailed account*. In D. Han, P. E. T. Jorgensen, and D. R. Larson, editors, Contemporary Mathematics, volume 414, pages 299?356. 2006.

[18] Peter G. Casazza, Janet C. Tremain, *Consequences of the Marcus/Spielman/Stivastava solution to the Kadison-Singer Problem*. `http://arxiv.org/abs/1407.4768`

[19] H. Dette and W. J. Studden, *Some new asymptotic properties for the zeros of Jacobi, Laguerre and Hermite polynomials*, Constructive Approximation, **11** (1995), 227-238.

[20] P. A. M. Dirac, *Quantum Mechanics*, Oxford University Press, London (1947).

[21] J. Dixmier, *Applications dans les anneaux d'opèrateurs*, Compositio Math. **10** (1952), 1-55.

[22] K. Feng and W.-C. W. Li. *Spectra of hypergraphs and applications*, Journal of number theory, 60(1):1?22, 1996.

[23] J.Friedman, *A proof of Alon 's second eigenvalue conjecture and related problems*, American Mathematical Society, 2008.

[24] J.Friedman, *The spectra of Infinite hypertrees*, `https://www.math.ubc.ca/ jf/pubs/index.html`.

[25] A. Giannopoulos, *A note on the Banach-Mazur distance to the cube*, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Operator Theory: Advances and Applications **77** (1995), 67-73.

[26] A. Giannopoulos, *A proportional Dvoretzky-Rogers factorization result*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 233-241.

[27] P. M. Gruber, *Minimal ellipsoids and their duals*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **37** (1988), 35-64.

[28] C. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall/CRC, 1993.

[29] L. Gurvits, *Van der Waerden/Schrijver-Valiant like conjectures and stable (aka hyperbolic) homogeneous polynomials: one theorem for all*, the electronic journal of combinatorics, 15(R66):1, 2008.

[30] H. Halpern, V. Kaftal and G. Weiss, *The relative Dixmier property in discrete crossed products*, J. Funct. Analysis **69** (1986), 121-140.

[31] H. Halpern, V. Kaftal and G. Weiss, *Matrix pavings and Laurent operators*, J. Operator Theory **16** (1986), 355-374.

[32] O. J. Heilmann and E. H. Lieb, *Theory of monomer-dimer systems*, Communications in Mathematical Physics **25** (1972), 190-232.

[33] N. Harvey, *An Introduction to the Kadison-Singer Problem and the Paving conjecture* `http://www.cs.ubc.ca/ nickhar/Publications/KS/KS.pdf`

[34] J. W. Helton and V. Vinnikov, *Linear matrix inequality representation of sets*, Communications on pure and applied mathematics **60** (2007), 654-674.

[35] S. Hoory, N. Linial and A. Wigderson, *Expander graphs and their applications*, Bulletin of the American Mathematical Society **43** (2006), 439-561.

[36] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (1985).

[37] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187-204.

[38] R. Kadison and I. Singer, *Extensions of pure states*, Amer. J. Math. **81** (1959), 383-400.

[39] M. Krebs, A. Shaheen, *Expander Families and Cayley Graphs: A Beginner's Guide*, Oxford University Press.

[40] A. Lubotzky, *Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures*, volume 125. Birkhauser, 1994.

[41] A. Lubotzky, R. Phillips and P. Sarnak, *Ramanujan graphs*, Combinatorica **8** (1988), 261-277.

[42] A. Lewis, P. Parrilo, and M. Ramana, *The Lax conjecture is true*, Proceedings of the American Mathematical Society, 133(9):2495?2499, 2005.

[43] A. W. Marcus, D. A. Spielman and N. Srivastava, *Interlacing families I: Bipartite Ramanujan Graphs Of All Degrees*, Annals of Mathematics **182** (2015), to appear.

[44] *Interlacing families II: Mixed Characteristic Polynomials and the Kadison-Singer Problem*, Annals of Mathematics **182** (2015), to appear.

[45] A. W. Marcus, D. A. Spielman and N. Srivastava, *Ramanujan graphs and the solution of the Kadison-Singer problem*, Proc. ICM, Vol III (2014), 375-386, `http://arxiv.org/abs/1408.4421` .

[46] M. Marden, *Geometry of polynomials*, volume 3. American Mathematical Soc., 1985.

[47] G. A. Margulis, *Explicit group theoretical constructions of combinatorial schemes and their application to the design of expanders and concentrators*, Problems of Information Transmission **24** (1988), 39-46.

[48] M. Morgenstern, *Existance and explicit constructions of $q+1$ regular Ramanujan graphs for every prime power q*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 62:44?62, 1994.

[49] M. Rudelson, *Contact points od convex bodies*, Israel. J. Math. **101** (1997), 92-124.

[50] M. Rudelson, *Random vectors in the isotropic position*, J. Funct. Anal. **163** (1999), 60-72.

[51] D. A. Spielman and N. Srivastava, *An elementary proof of the restricted invertibility theorem*, Israel J. Math. **190** (2012), 83-91.

[52] N. Srivastava, *Spectral Sparsification And Restricted Invertibility*, Ph.D. thesis, Yale University (2010).

[53] N. Srivastava, *On contact points of convex bodies* Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math. **2050** (2012), 393-412.

[54] S. J. Szarek, *Spaces with large distance to ℓ_∞^n and random matrices*, Amer. J. Math. **112** (1990), 899-942.

[55] S. J. Szarek and M. Talagrand, *An isomorphic version of the Sauer-Shelah lemma and the Banach-Mazur distance to the cube*, Lecture Notes in Mathematics **1376** (1989), 105-112.

[56] T. Tao, *Real stable polynomials and the Kadison-Singer problem*, Lecture Notes in `https://terrytao.wordpress.com/tag/kadison-singer-problem/`.

[57] D. Timotin, *The Solution to the Kadison-Singer problem: yet another presentation*, `http://arxiv.org/abs/1501.00464`.

[58] P. Youssef, *Restricted invertibility and the Banach-Mazur distance to the Cube*, Mathematika **60** (2014), 201-218.

[59] N. Weaver, *The Kadison-Singer problem in discrepancy theory*, Discrete Math. **278** (2004), 227–239.