Παραμετροποίηση μετρικών επιφανειών πεπερασμένου εμβαδού

Δημήτρης Νταλαμπέκος

Stony Brook University

7th MATH@NTUA summer school
“Mathematical Analysis” in honor of Spiros Argyros

27 Ιουνίου - 3 Ιουλίου, 2024

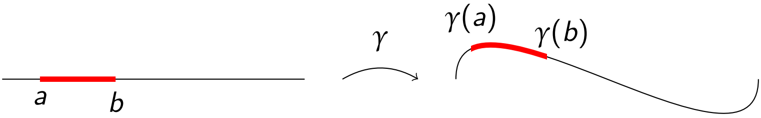
Stony Brook University

Το πρόβλημα της παραμετροποίησης

Ερώτηση

Πώς μπορούμε να παραμετροποιήσουμε μία **καμπύλη** πεπερασμένου **μήκους** με φυσικό τρόπο;

Παραμετροποίηση με μήκος τόξου



Lipschitz ιδιότητα: $|\gamma(a) - \gamma(b)| \leq |a - b|$

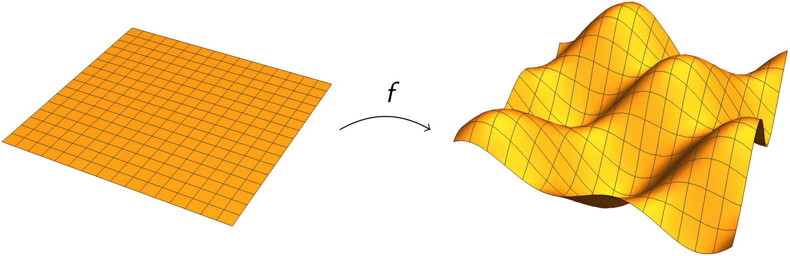
Πρόβλημα

Πώς μπορούμε να παραμετροποιήσουμε μία ***επιφάνεια*** *πεπερασμένου* ***εμβαδού*** *με φυσικό τρόπο;*

Λείες επιφάνειες

Θεώρημα (Θεώρημα Ομοιομορφοποίησης, Koebe, Poincaré 1907)

Κάθε απλά συνεκτική **λεία** Ριμάνια επιφάνεια μπορεί να απεικονιστεί **σύμμορφα** στο *επίπεδο* ή στον *μοναδιαίο δίσκο* ή στην *Ευκλείδεια σφαίρα*.

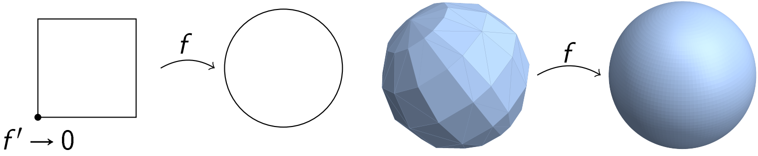


f **σύμμορφη**: μπάλες $\longrightarrow$ μπάλες (ή τετράγωνα $\to$ τετράγωνα) σε απειροελάχιστη κλίμακα

$\Longrightarrow$ f τοπικά bi-Lipschitz $C^{-1}\ell(\gamma) \le \ell(f\circ\gamma) \le C\ell(\gamma)$

Bi-Lipschitz παραμετροποίηση

⚠ Σε μη λείες επιφάνειες οι σύμμορφες παραμετροποιήσεις *δεν είναι bi-Lipschitz!*



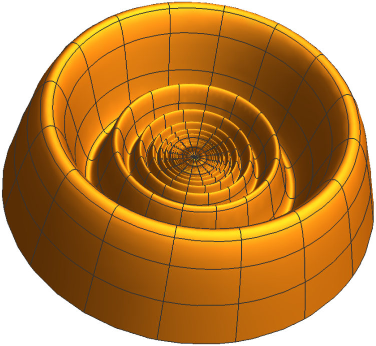
Ύπαρξη bi-Lipschitz παραμετροποιήσεων:

- Φραγμένη επιπεδότητα (Toro, David,...)
- Ύπαρξη επίπεδων μορφών (Heinonen, Sullivan, Keith,..)
- Φραγμένη καμπυλότητα (Fu, Bonk, Lang,...)

Επιφάνειες με ανωμαλίες

Lipschitz παραμετροποίηση $f : \mathbb{C} \to X \implies \ell(f \circ \gamma) \leq C\ell(\gamma)$

$\implies$ Κάθε 2 σημεία μπορούν να ενωθούν με καμπύλη **πεπερασμένου μήκους**



1. Πεπερασμένο εμβαδό
2. Λεία εκτός από 1 σημείο P
3. Κάθε καμπύλη που διέρχεται από το σημείο P έχει άπειρο μήκος

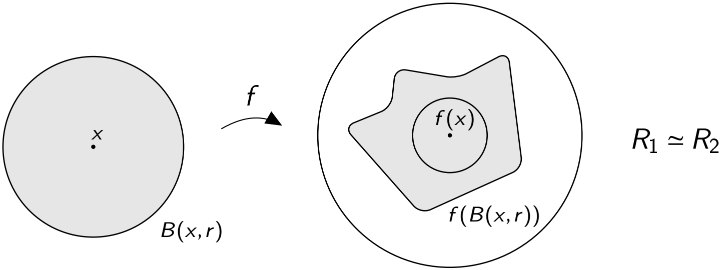
$$\Downarrow$$

Δεν υπάρχει Lipschitz παραμετροποίηση

Ημισύμμορφες και ημισυμμετρικές απεικονίσεις

$f : X \to Y$ ομοιομορφισμός μετρικών χώρων

Ημισύμμορφη: διατηρεί τα σχήματα σε απειροελάχιστη κλίμακα:



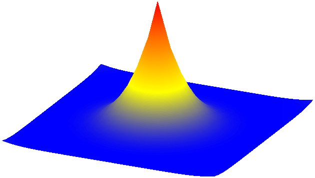
Ημισυμμετρική: διατηρεί τα σχήματα σε όλες τις κλίμακες.

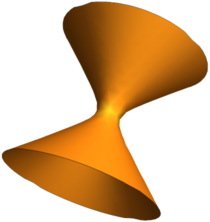
Ημισυμμετρική παραμετροποίηση

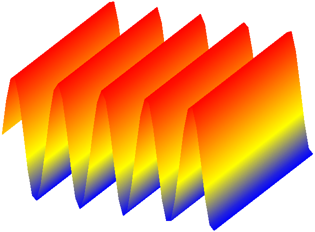
Θεώρημα (Bonk–Kleiner, *Invent. Math.* 2002)

*Αν μια μετρική σφαίρα X είναι **2-ομαλή κατά Ahlfors** και **ΓΤΣ**, τότε υπάρχει **ημισυμμετρική** απεικόνιση $f:\widehat{\mathbb{C}}\to X$.*

- **2-ομαλή κατά Ahlfors:** $C^{-1}r^2 \leq \mu(B(x,r)) \leq Cr^2$
- **ΓΤΣ (Γραμμικά Τοπικά Συνεκτική):** όχι *αγκάθια*, όχι *λεπτές δίοδοι*, και όχι *ισχυροί κυματισμοί*







Ημισυμμετρική παραμετροποίηση

Μέθοδοι απόδειξης:

- Μέσω στοιβάγματος δίσκων (Bonk–Kleiner)
- Ημισύμμορφη παραμετροποίηση (Rajala)
- Επίλυση του προβλήματος του Plateau (Lytchak–Wenger)

Γενίκευση σε άλλες επιφάνειες:

- Επίπεδο, δίσκος, ημιεπίπεδο (Wildrick)
- Συμπαγείς επιφάνειες (Geyer–Wildrick, Ikonen, Fitzi–Meier)
- Τόποι στο επίπεδο (Merenkov–Wildrick, Rajala–Rasimus, Rehmert)

Γεωμετρικός ορισμός ημισύμμορφων απεικονίσεων

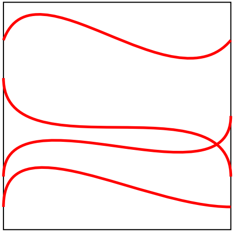
X μετρική επιφάνεια τοπικά πεπερασμένου εμβαδού

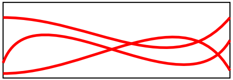
Γ οικογένεια καμπυλών στην επιφάνεια X

$\rho : X \to [0,\infty]$ λέγεται *επιτρεπτή* για την οικογένεια Γ αν

$\int_\gamma \rho \, ds \geq 1$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$

$\operatorname{Mod}\Gamma = \inf_\rho \int_X \rho^2 \, d\mathcal{H}^2 \longrightarrow$ εξωτερικό μέτρο

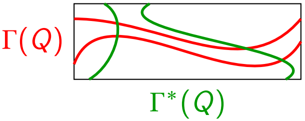




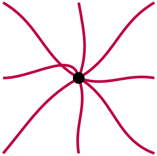
f **σύμμορφη**: $\operatorname{Mod}\Gamma = \operatorname{Mod} f(\Gamma)$

f **ημισύμμορφη**: $K^{-1} \operatorname{Mod}\Gamma \leq \operatorname{Mod} f(\Gamma) \leq K \operatorname{Mod}\Gamma$

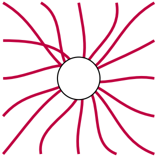
Ιδιότητες modulus στο επίπεδο



$$\operatorname{Mod}\Gamma(Q)\cdot\operatorname{Mod}\Gamma^*(Q)=1$$



$$\operatorname{Mod}\Gamma=0$$

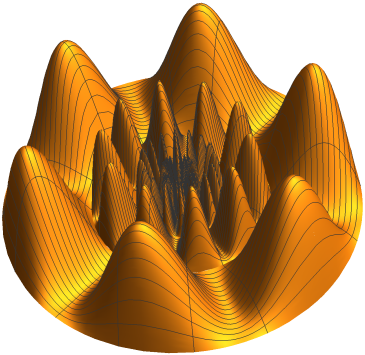


$$\operatorname{Mod}\Gamma>0$$

Ημισύμμορφη παραμετροποίηση

(Ημι)σύμμορφη παραμετροποίηση $f : \mathbb{C} \to X$

$\Longrightarrow$ Η οικογένεια καμπυλών που διέρχονται από ένα σημείο έχει **μηδενικό modulus**

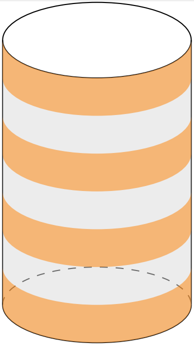


1. Πεπερασμένο εμβαδό
2. Λεία εκτός από 1 σημείο P
3. Οι καμπύλες που διέρχονται από το σημείο P έχουν θετικό modulus

$\Downarrow$

Δεν υπάρχει ημισύμμορφη παραμετροποίηση

Ημισύμμορφη παραμετροποίηση



Magic Ball
Σχεδίαση:
Yuri Shumakov
Εκτέλεση:
Jo Nakashima

1. Ισομετρική με τον κύλινδρο μακριά από τους πόλους
2. Η οικογένεια καμπυλών που διέρχονται από τους πόλους έχει θετικό modulus
3. Δεν υπάρχει ημισύμμορφη απεικόνιση στη σφαίρα

Ερώτηση

Είναι αυτό το μόνο πρόβλημα;

Ερώτηση

Είναι αυτό το μόνο πρόβλημα;

Έστω $C \subset \mathbb{R}^2$ σύνολο Cantor. Θέτουμε $\omega = \chi_{\mathbb{R}^2 \setminus C}$.

$$d_\omega(x,y) = \inf_\gamma \int_\gamma \omega \, ds$$

$(\mathbb{R}^2, d_\omega)$ είναι ομοιομορφικός με το $\mathbb{R}^2$

Αν $|C| > 0$ τότε $(\mathbb{R}^2, d_\omega)$ δεν μπορεί να απεικονιστεί ημισύμμορφα στο $\mathbb{R}^2$

Κοντά σε σημεία πυκνότητας

$$\operatorname{Mod}\Gamma(Q)\operatorname{Mod}\Gamma^*(Q) \to \infty$$

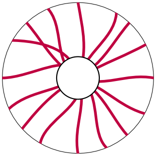
Ημισύμμορφη παραμετροποίηση

Θεώρημα (Rajala, *Invent. Math.* 2017)

Έστω X μετρική σφαίρα **πεπερασμένου εμβαδού**. Υπάρχει **ημισύμμορφη** απεικόνιση $f:\widehat{\mathbb{C}}\to X$ αν και μόνο αν το modulus ικανοποιεί τις **συνθήκες συζυγίας**.

Συνθήκες συζυγίας:

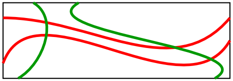
1. Η οικογένεια καμπυλών που διέρχονται από κάθε σημείο έχει **μηδενικό modulus**



$$\lim_{r\to 0} \operatorname{Mod}\Gamma(B(x,r), X\setminus B(x,R)) = 0$$

2. Για κάθε τοπολογικό τετράπλευρο Q:

$\Gamma(Q)$



$\Gamma^*(Q)$

$$\kappa^{-1} \leq \operatorname{Mod}\Gamma(Q)\cdot \operatorname{Mod}\Gamma^*(Q) \leq \kappa$$

Ημισύμμορφη παραμετροποίηση

- Αν X είναι συζυγής, υπάρχει f ώστε
  $\frac{\pi}{4}\operatorname{Mod}\Gamma \le \operatorname{Mod} f(\Gamma) \le \frac{\pi}{2}\operatorname{Mod}\Gamma$ (Rajala, Romney)
  Οι βέλτιστες σταθερές επιτυγχάνονται $id : \mathbb{R}^2 \to X = (\mathbb{R}^2, \ell^\infty)$

- X 2-ομαλή κατά Ahlfors και ΓΤΣ
  $\Longrightarrow$ Οι ημισύμμορφες απεικονίσεις είναι και ημισυμμετρικές
  $\Longrightarrow$ Θεώρημα Bonk–Kleiner

- Για **κάθε** επιφάνεια
  $\kappa^{-1} \le \operatorname{Mod}\Gamma(Q)\cdot \operatorname{Mod}\Gamma^*(Q)$ (Rajala–Romney)
  $\kappa^{-1} = (\pi/4)^2$ (Eriksson-Bique–Poggi-Corradini)

- X συζυγής αν και μόνο αν
  $\operatorname{Mod}\Gamma(Q)\cdot \operatorname{Mod}\Gamma^*(Q) \le \kappa$ (N.–Romney)

- Αν το modulus της οικογένειας καμπυλών που διέρχονται από σημεία είναι μηδενικό, τότε η X δεν είναι απαραίτητα συζυγής. (N.–Romney)

Παραμετροποίηση γενικών επιφανειών

Πρόβλημα (Rajala–Wenger)

Έστω X μετρική σφαίρα **πεπερασμένου εμβαδού**. Υπάρχει **ασθενώς ημισύμμορφη** απεικόνιση $f:\widehat{\mathbb{C}}\to X$;

Ασθενώς ημισύμμορφη απεικόνιση:

1. Ομοιόμορφο όριο ομοιομορφισμών
2. $\operatorname{Mod}\Gamma \leq K \operatorname{Mod} f(\Gamma)$

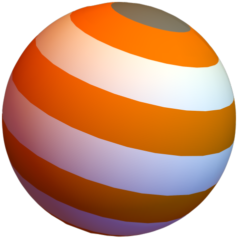
Θεώρημα (N.–Romney, *Duke Math. J. 2023*, Meier–Wenger, *JEMS 2024*)

Ναι για επιφάνειες μήκους.

Θεώρημα (N.–Romney)

Ναι για όλες τις επιφάνειες.

Παράδειγμα



$\xrightarrow{f}$

1. f ασθενώς ημισύμμορφη
2. f **δεν είναι** 1-1 στις σκούρες περιοχές γύρω από τους πόλους
3. f είναι **σύμμορφη** έξω από τις σκούρες περιοχές

Ασθενώς ημισύμμορφη παραμετροποίηση

Θεώρημα (N.–Romney)

Έστω X μετρική επιφάνεια τοπικά πεπερασμένου εμβαδού.

- *Υπάρχει πλήρης Ριμάνια επιφάνεια Z σταθερής καμπυλότητας.*
- *Η Z είναι ομοιομορφική με την X.*
- *Υπάρχει $\frac{4}{\pi}$-WQC απεικόνιση $f : Z \to X$.*

WQC = Weakly Quasiconformal

- f ημισύμμορφη αν και μόνο αν X συζυγής $\Longrightarrow$ θεώρημα Rajala
- X 2-ομαλή κατά Ahlfors και ΓΤΣ
  $\Longrightarrow$ f ημισυμμετρική
  $\Longrightarrow$ θεώρημα Bonk–Kleiner

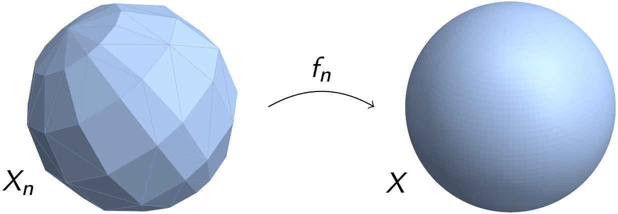
Προσέγγιση από πολυεδρικές επιφάνειες

Θεώρημα (N.–Romney)

Έστω X μετρική σφαίρα πεπερασμένου εμβαδού. Υπάρχει ακολουθία X_n πολυεδρικών σφαιρών και ασυμπτωτικών ισομετριών $f_n\colon X_n \to X$ ώστε

$$\limsup_{n\to\infty} \left|f_n^{-1}(A)\right| \leq K|A|$$

για κάθε συμπαγές σύνολο $A \subset X$, όπου το K είναι απόλυτη σταθερά.



Απόδειξη WQC παραμετροποίησης

- Έστω πολυεδρικές **σφαίρες** $X_n \to X$
- Οι προσανατολίσιμες πολυεδρικές επιφάνειες είναι επιφάνειες Riemann (μιγαδική δομή)
- Κλασικό θεώρημα ομοιομορφοποίησης
  $\implies$ Υπάρχουν σύμμορφες απεικονίσεις $g_n \colon \widehat{\mathbb{C}} \to X_n$.
- X_n φραγμένο εμβαδό
  - g_n ισοσυνεχής
  - $|Dg_n|$ φραγμένη στον L^2
- Οι απεικονίσεις g_n συγκλίνουν σε WQC απεικόνιση $g \colon \widehat{\mathbb{C}} \to X$.

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!