Ἀριθμητικὲς πρόοδοι στοὺς πρώτους: τὸ θεώρημα τῶν Green καὶ Tao

Βεατρίκη – Ἑλένη Βριτσίου

Διπλωματική Εργασία

Τμῆμα Μαθηματικῶν
Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν

Ἀθῆναι – 2010

Περιεχόμενα

Εἰσαγωγή

Τὸ 2004 ὁ Ben Green καὶ ὁ Terence Tao ἀπέδειξαν ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ περιέχουν αὐθαίρετα μεγάλες ἀριθμητικὲς προόδους [1]. Ἀναλυτικότερα, κατέληξαν στὰ ἑξῆς δύο θεωρήματα:

Θεώρημα 1. *Ἔστω φυσικὸς $k \geq 3$. Συμβολίζουμε μὲ $\mathrm{app}(n,k)$ τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμητικῶν προόδων μήκους k τῶν ὁποίων ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ μικρότεροι τοῦ n. Ὑπάρχει μία θετικὴ σταθερὰ $\gamma(k)$, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ k, ἔτσι ὥστε γιὰ κάθε ἀρκετὰ μεγάλο $n > n_0(k)$ νὰ ἰσχύει*

$$\mathrm{app}(n,k) \geq \gamma(k)\frac{n^2}{\log^k n}.$$

Θεώρημα 2 (Θεώρημα Szemerédi γιὰ τοὺς πρώτους). *Ἔστω A ὑποσύνολον τῶν πρώτων μὲ θετικὴν* **σχετικὴν ἄνω πυκνότητα**, *δηλαδὴ μὲ τὴν ἰδιότητα*

$$\limsup_{n\to\infty} \pi(n)^{-1}|A \cap [1,n]| > 0.$$

Τότε τὸ A περιέχει αὐθαίρετα μεγάλες ἀριθμητικὲς προόδους.

Ἂς ἐξηγήσουμε λίγο τὴν διατύπωσιν τοῦ Θεωρήματος 2: μὲ $\pi(n)$ συμβολίζουμε τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν ποὺ βρίσκονται στὸ διάστημα $[1,n] := \{m \in \mathbb{N} : 1 \leq m \leq n\}$, ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ κλάσμα

$$\frac{|A \cap [1,n]|}{\pi(n)}$$

μᾶς δίνει τὸ ποσοστὸν τῶν πρώτων $\leq n$ ποὺ περιέχει τὸ A. Ὅπως εἶναι ἐμφανές, μᾶς ἐνδιαφέρουν ἐκεῖνα τὰ ὑποσύνολα A τῶν πρώτων γιὰ τὰ ὁποῖα ὑπάρχει κάποιο $\delta > 0$ καὶ μία ἀκολουθία φυσικῶν $n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots$, ὥστε σὲ κάθε διάστημα $[1,n_j]$ τὸ ποσοστὸν τῶν πρώτων ποὺ θὰ ἀνήκουν στὸ σύνολον A νὰ εἶναι $\geq \delta$. Τὸ θεώρημα μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι μποροῦμε νὰ βροῦμε ἀριθμητικὲς προόδους ὁσοδήποτε μεγάλου μήκους, ὄχι μόνον στοὺς πρώτους, ἀλλὰ καὶ σὲ κάθε τέτοιο ὑποσύνολόν τους, ποὺ περιέχει δηλαδὴ μίαν θετικὴν ποσότητα ἀπὸ αὐτούς, ὅσο μικρὴ κι ἂν εἶναι ἡ ποσότης αὐτή.

Αὐτὴν τὴν ἰδιότητα γνωρίζουμε ἤδη ὅτι τὴν ἔχει τὸ σύνολον $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν καὶ τὰ ὑποσύνολά του μὲ θετικὴν πυκνότητα, ὅπως ἀπέδειξε τὸ 1975 ὁ Szemerédi [33] σ' ἕνα πολὺ σημαντικὸν γιὰ τὰ σύγχρονα Μαθηματικὰ ἄρθρον:

Θεώρημα 3 (Szemerédi). *Ἔστωσαν $k \geq 3$ φυσικὸς καὶ $0 < \delta \leq 1$ πραγματικός. Ὑπάρχει φυσικὸς $N_{SZ}(k,\delta) \geq 1$ τέτοιος ὥστε γιὰ κάθε $N \geq N_{SZ}(k,\delta)$, γιὰ κάθε ὑποσύνολον A τοῦ $[1,N]$ μὲ πληθάριθμον $|A| \geq \delta N$, τὸ A νὰ περιέχει τουλάχιστον μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον μήκους k.*

Τὸ θεώρημα Szemerédi μπορεῖ νὰ διατυπωθεῖ καὶ ὅπως τὸ Θεώρημα 2, μποροῦμε δηλαδὴ ἰσοδυνάμως νὰ ποῦμε ὅτι ἂν κάποιο ὑποσύνολον A τῶν φυσικῶν ἔχει θετικὴν **ἄνω πυκνότητα**, δηλαδὴ ἰσχύει

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n} > 0,$$

τότε τὸ A περιέχει αὐθαίρετα μεγάλες ἀριθμητικὲς προόδους (ἡ μία κατεύθυνσις τῆς ἰσοδυναμίας εἶναι προφανής, ἐνῷ ἡ ἄλλη χρειάζεται τὸ Ἀξίωμα Ἐπιλογῆς). Δυστυχῶς, δὲν θὰ μπορούσαμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ θεώρημα Szemerédi ἀπευθείας στὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὥστε νὰ συμπεράνουμε τὸ θεώρημα τῶν Green καὶ Tao, δηλαδὴ ὅτι ὑπάρχουν αὐθαίρετα μεγάλες ἀριθμητικὲς πρόοδοι πρώτων. Αὐτὸ ἐπειδὴ ἀπὸ τὸ ἐπίσης διάσημον Θεώρημα τῶν Πρώτων Ἀριθμῶν ἰσχύει

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n},$$

συνεπῶς οἱ πρῶτοι ἔχουν μηδενικὴν πυκνότητα στοὺς φυσικούς.

Γιὰ νὰ ξεπεράσουν αὐτὸ τὸ πρόβλημα, οἱ Green καὶ Tao χρησιμοποιοῦν μίαν τεχνικὴν τὴν ὁποίαν καλοῦν *ἀρχὴν μεταφορᾶς*. Οὐσιαστικά, ἐπιδιώκουν νὰ δείξουν ὅτι, ὅπως τὸ θεώρημα Szemerédi ἀληθεύει γιὰ τοὺς φυσικοὺς καὶ τὰ ὑποσύνολά τους μὲ θετικὴν πυκνότητα, θὰ ἰσχύει ἀντίστοιχα καὶ ἂν ἀντικαταστήσουμε τὸ $\mathbb{N}$ ἀπὸ κάποιο ἀρκετὰ καλὰ κατανεμημένον ὑποσύνολόν του B, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν ὑποχρεοῦται νὰ ἔχει θετικὴν πυκνότητα στὸ $\mathbb{N}$, καὶ ἔπειτα θεωρήσουμε τὰ ὑποσύνολα τοῦ B ποὺ ἔχουν θετικὴν πυκνότητα μέσα στὸ B. Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον βεβαίως, δὲν καταφέρνουν νὰ ἀποδείξουν κατευθείαν τὸ Θεώρημα 2, ἀφοῦ τὶς καλὲς ἰδιότητες ποὺ ζητοῦν γιὰ τὸ σύνολον B εἶναι ἀκόμη πολὺ δύσκολον νὰ τὶς δείξουμε γιὰ τοὺς πρώτους. Καταφέρνουν ὅμως νὰ ἀποδείξουν ὅτι τὸ B μπορεῖ νὰ εἶναι κάποιο σύνολον «σχεδὸν πρώτων» ἀριθμῶν μέσα στὸ ὁποῖον οἱ πρῶτοι ἔχουν θετικὴν πυκνότητα. Αὐτὸ ἀρκεῖ γιὰ τὸ Θεώρημα 2.

Στὴν πραγματικότητα, τὰ παραπάνω δὲν ἀποδεικνύονται ἀπευθείας γιὰ σύνολα, ἀλλὰ μποροῦν νὰ ἀποδειχθοῦν γιὰ συναρτήσεις μὲ φορέα τὰ σύνολα ποὺ ἀναφέρουμε. Δηλαδὴ οἱ Green καὶ Tao χρειάστηκε νὰ ἐπικαλεστοῦν μίαν ἐκδοχὴν τοῦ θεωρήματος Szemerédi ἡ ὁποία διατυπώνεται γιὰ συναρτήσεις ποὺ φράσσονται κατὰ σημεῖον ἀπὸ τὴν σταθερὴν συνάρτησιν 1 (βλέπε ἑνότητα 1.1), καὶ ἀπέδειξαν ἕνα ἀντίστοιχον ἀποτέλεσμα γιὰ μὴ φραγμένες συναρτήσεις ποὺ ὅμως ἔχουν κάποιες καλὲς ἰδιότητες, μὲ σκοπὸν βεβαίως νὰ βροῦν μίαν τέτοιαν συνάρτησιν μὲ φορέα τοὺς πρώτους. Μάλιστα, μὲ τὰ ἐργαλεῖα ποὺ ἀνέπτυξαν ὥστε νὰ ἀποδείξουν τὴν γενίκευσιν τοῦ θεωρήματος Szemerédi ποὺ χρειαζόντουσαν, ὁ

Tao κατάφερε νὰ δώσει καὶ μίαν ἀπόδειξιν [2] τῆς συναρτησιακῆς ἐκδοχῆς τοῦ θεωρήματος, ἀπλουστεύοντας στὴν οὐσίαν τὴν ἐργοδικὴν ἀπόδειξιν ποὺ εἶχε παρουσιάσει ὁ Furstenberg [9] τὸ 1977 γιὰ τὸ θεώρημα Szemerédi. Τὰ ἐργαλεῖα αὐτὰ ποὺ ἐμφανίζονται στὰ ἄρθρα [1] καὶ [2], καὶ ποὺ θὰ περιγράψουμε σὲ αὐτὴν τὴν ἐργασίαν, προέρχονται τόσο ἀπὸ τὴν προαναφερθεῖσαν ἀπόδειξιν τοῦ Furstenberg, ὅσο καὶ ἀπὸ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Gowers [17] γιὰ τὸ θεώρημα Szemerédi ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖ ἀνάλυσιν Fourier καὶ ἀποτελέσματα τῆς προσθετικῆς συνδυαστικῆς. Μὲ λίγα λόγια, οἱ Green καὶ Tao ἀναγκάστηκαν νὰ δανειστοῦν ἰδέες ἀπὸ σχεδὸν ὅλες τὶς ἀποδείξεις τοῦ θεωρήματος Szemerédi ὥστε νὰ δείξουν μίαν γενικευμένην μορφήν του ποὺ θὰ μποροῦσε νὰ ἐφαρμοστεῖ στοὺς πρώτους ἀριθμούς.

Στὸ Κεφάλαιον 1 αὐτῆς τῆς ἐργασίας θὰ δοῦμε τὴν συναρτησιακὴν ἐκδοχὴν τοῦ θεωρήματος Szemerédi καὶ τὴν γενίκευσίν της ἀπὸ τοὺς Green καὶ Tao, καὶ θὰ περιγράψουμε λεπτομερῶς τὰ βασικὰ ἐργαλεῖα ποὺ χρειαζόμαστε γιὰ τὶς ἀποδείξεις τους. Στὸ Κεφάλαιον 2 θὰ παρουσιάσουμε πλήρως τὴν ἀπόδειξιν τῆς συναρτησιακῆς ἐκδοχῆς ποὺ δίνει ὁ Tao, τόσο γιὰ λόγους πληρότητος, ἀφοῦ τὸ θεώρημα Szemerédi εἶναι ἀπαραίτητον γιὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀντιστοίχου ἀποτελέσματος στὸ ἄρθρον τῶν Green καὶ Tao, ὅσο καὶ γιατὶ ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα ἀπὸ τὸν Tao εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογος μὲ τὴν ἀπόδειξιν τῆς γενικεύσεώς του στὸ [1]. Ἡ τελευταία θὰ περιγραφεῖ στὸ Κεφάλαιον 3, καὶ θὰ μπορεῖ ἑπομένως κάποιος νὰ συγκρίνει τὰ διάφορα σημεῖα στὰ ὁποῖα οἱ δύο ἀποδείξεις μοιάζουν ὥστε νὰ καταλάβει καλύτερα τὶς ἰδέες στὶς ὁποῖες στηρίζονται. Τέλος, στὸ Κεφάλαιον 4 θὰ δοῦμε πῶς μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ γενικευμένον θεώρημα Szemerédi ὥστε νὰ συμπεράνουμε ὅτι τὸ σύνολον τῶν πρώτων περιέχει αὐθαίρετα μεγάλες ἀριθμητικὲς προόδους. Γιὰ αὐτό, θὰ χρειαστοῦμε καὶ ἀρκετὰ ἀποτελέσματα ἀπὸ τὴν ἀναλυτικὴν θεωρίαν ἀριθμῶν, κάποια ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι κλασσικά, ἐνῷ ἄλλα παρουσιάστηκαν τὴν ἐποχὴν ποὺ οἱ Green καὶ Tao δούλευαν πάνω στὸ θεώρημά τους (κάποια μάλιστα ἦταν ἀκόμη ἀδημοσίευτα). Θὰ πρέπει ἑπομένως νὰ γίνει κατανοητὸν ὅτι ἡ ἀπόδειξις τῶν Green καὶ Tao εἶναι ἀρκετὰ περίπλοκη, ἐκτενής, ἀλλὰ καὶ ἐνδιαφέρουσα, ὄχι μόνον ἐπειδὴ δίνει ἀπάντησιν σὲ ἕνα σημαντικὸν ἐρώτημα γιὰ τοὺς πρώτους, τοὺς ὁποίους εἶναι σχεδὸν πάντα δύσκολον νὰ χειριστοῦμε, ἀλλὰ καὶ γιατὶ σὲ αὐτὴν οἱ Green καὶ Tao ἀναγκάστηκαν νὰ συνδυάσουν ἐργαλεῖα καὶ ἀποτελέσματα ἀπὸ πολλούς, διαφορετικοὺς μεταξύ τους, κλάδους τῶν συγχρόνων Μαθηματικῶν.

Κλείνοντας, ἀξίζει νὰ σημειώσουμε ὅτι πρὶν ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν Green καὶ Tao ὑπῆρχαν πολὺ λίγα ἀποτελέσματα γιὰ τὴν ὕπαρξιν ἀριθμητικῶν προόδων στοὺς πρώτους, καὶ μάλιστα ὅλα γιὰ τὴν περίπτωσιν $k = 3$. Συγκεκριμένα, ὁ van der Corput [37] τὸ 1939, καὶ ὁ Chowla [7] τὸ 1944, εἶχαν δείξει ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρες ἀριθμητικὲς πρόοδοι μήκους 3 στοὺς πρώτους. Μόλις τὸ 2003 ὁ Green κατάφερε νὰ δείξει ὅτι ἂν ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις τοῦ Θεωρήματος 2, τότε τὸ ὑποσύνολον A τῆς διατυπώσεως περιέχει ἄπειρες ἀριθμητικὲς προόδους μήκους 3 [19]. Ὁ Green, ὅπως καὶ οἱ van der Corput καὶ Chowla, χρησιμοποίησε μεθόδους τῆς ἀναλύσεως Fourier γιὰ τὸ ἀποτέλεσμά του, φαίνεται ὅμως ὅτι γιὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ πλήρους Θεωρήματος 2 χρειαζόντουσαν τὰ ἐργαλεῖα ἀπὸ τὴν ἐργοδικὴν θεωρίαν ποὺ θὰ δοῦμε σὲ αὐτὴν τὴν ἐργασίαν. Ἐπίσης ἐνδιαφέροντα ἀλλὰ κάπως διαφορετικὰ εἶναι ἀποτελέσματα στὰ ὁποῖα ἐπιτρέπεται οἱ ἀριθμητικὲς πρόοδοι νὰ περιέχουν καὶ ὅρους ποὺ δὲν εἶναι πρῶτοι ἀλλὰ γινόμενα λίγων πρώτων: ἕνα τέτοιο ἀποτέλεσμα ὀφείλεται στὸν Heath-Brown [25], ὁ ὁποῖος τὸ 1981 ἀπέδειξε ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρες ἀριθμητικὲς πρόοδοι μήκους 4 ἀποτελούμενες ἀπὸ τρεῖς πρώτους καὶ ἀπὸ ἕναν ἀκόμη φυσικὸν ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος ἢ γινόμενον ἀκριβῶς δύο πρώτων. Ὑπάρχει ἀκόμη ἕνα, σχετικῶς πρόσφατον ἀποτέλεσμα ποὺ συνεπάγεται τὴν ἀπειρίαν ἀριθμητικῶν προόδων μήκους 3 στοὺς πρώτους: ὁ Balog στὰ [3], [4] δείχνει, μεταξὺ διαφόρων ἄλλων ἀποτελεσμάτων, ὅτι γιὰ κάθε φυσικὸν m μποροῦμε νὰ βροῦμε m διαφορετικοὺς πρώτους $p_1, \ldots, p_m$ ὥστε καὶ ὅλοι οἱ ἀριθμητικοὶ μέσοι $\frac{1}{2}(p_i + p_j)$ νὰ εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί.

Θὰ ἤθελα νὰ εὐχαριστήσω πολὺ τὸν καθηγητήν μου κ. Γιαννόπουλο, κυρίως γιατὶ μὲ ἔπεισε καὶ μὲ βοήθησε νὰ ἀσχοληθῶ μὲ τὸ θεώρημα τῶν Green καὶ Tao στὴν ἐργασίαν μου· μοῦ δόθηκε ἔτσι ἡ εὐκαιρία νὰ γνωρίσω ἀποτελέσματα καὶ ἐργαλεῖα ἀπὸ διαφόρους, πολὺ ἑλκυστικοὺς κλάδους τῶν συγχρόνων Μαθηματικῶν. Ἐπιπλέον, θὰ ἤθελα νὰ τὸν εὐχαριστήσω, μαζὶ μὲ τοὺς ἄλλους δύο καθηγητὲς τῆς τριμελοῦς ἐπιτροπῆς, κ. Μελὰ καὶ Ἀθανασιάδη, καθὼς καὶ τοὺς ὑπολοίπους καθηγητές μου σὲ προπτυχιακὲς καὶ μεταπτυχιακὲς σπουδές, γιὰ ὅλα ὅσα μοῦ ἔμαθαν.

Κεφάλαιον 1

Ἡ συναρτησιακὴ ἐκδοχὴ καὶ ἡ γενίκευσις τοῦ θεωρήματος Szemerédi γιὰ ψευδοτυχαῖα μέτρα

1.1 Ὁρολογία καὶ συμβολισμοί

Τὸ ἀντικείμενον στὸ θεώρημα Szemerédi εἶναι ὑποσύνολα μὲ «ἀρκετὰ» στοιχεῖα τῶν ἀρχικῶν τμημάτων τοῦ $\mathbb{N}$, τῶν συνόλων δηλαδὴ τῆς μορφῆς $[1,N] = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq N\}$. Ὅπως εἴδαμε στὴν Εἰσαγωγήν, μελετοῦμε ὑποσύνολα τοῦ $[1,N]$ τὰ ὁποῖα περιέχουν σταθερὸν θετικὸν ποσοστὸν ἀπὸ τοὺς πρώτους N φυσικούς. Παραταῦτα, σὲ κάποιες ἀποδείξεις τοῦ θεωρήματος, μεταξύ των καὶ σὲ αὐτὴν ποὺ θὰ παρουσιάσουμε, προτιμᾶται νὰ δουλέψουμε ἀντὶ γιὰ σύνολα μὲ συναρτήσεις

$$f : [1,N] \to \mathbb{R}^+$$

ὥστε νὰ χρησιμοποιήσουμε ἐργαλεῖα ἀπὸ κλάδους ὅπως ἡ ἐργοδικὴ θεωρία. Φαινομενικά, αὐτὸ γενικεύει τὸ θεώρημα, ἀφοῦ κάθε σύνολον παριστάνεται ἀπὸ τὴν χαρακτηριστικήν του συνάρτησιν· κατ' οὐσίαν ἡ ἐκδοχὴ μὲ σύνολα καὶ ἡ συναρτησιακὴ ἐκδοχὴ τοῦ Szemerédi εἶναι ἰσοδύναμες.

Μὲ παρόμοιον σκεπτικόν, ἐπιλέγουμε τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων νὰ μὴν εἶναι τὸ $[1,N]$ ἀλλὰ ὁ δακτύλιος $\mathbb{Z}_N := \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων modulo N ὥστε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἀλγεβρικήν του δομήν. Μάλιστα, ἐπειδὴ στὰ ἑπόμενα θὰ χρειαστοῦμε καὶ διαίρεσιν μεταξὺ στοιχείων τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ, περιοριζόμαστε στὰ $\mathbb{Z}_N$ ὅπου N εἶναι πρῶτος. Ἔτσι, τὸ πεδίον ὁρισμοῦ ἀποκτᾶ δομὴν σώματος ἀλλὰ καὶ διανυσματικοῦ χώρου.

Γιὰ κάθε πεπερασμένον σύνολον A, γιὰ κάθε συνάρτησιν $f : A \to \mathbb{R}$, συμβολίζουμε τὴν μέσην τιμὴν τῆς f στὸ A μὲ

$$\int_A f \equiv \mathbb{E}_A(f) \equiv \mathbb{E}(f(x)|x \in A) := \frac{1}{|A|}\sum_{x\in A} f(x).$$

Ἐπίσης γιὰ κάθε ὑποσύνολον B τοῦ A, συμβολίζουμε μὲ $\mathbf{1}_B$ τὴν χαρακτηριστικήν του συνάρτησιν καὶ ὁρίζουμε

$$\mathbb{P}_A(B) := \mathbb{E}_A(\mathbf{1}_B) = |B|/|A|.$$

Συχνὰ θὰ θέλουμε νὰ δείξουμε ἰσότητα μεταξὺ τῶν μέσων τιμῶν συναρτήσεων ποὺ ὁρίζονται σὲ διαφορετικὰ σύνολα (καὶ πιθανὸν ἡ μία προκύπτει ἀπὸ τὴν ἄλλην μέσῳ ἀλλαγῆς μεταβλητῶν). Ἕνας τρόπος εἶναι νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἑξῆς παρατήρησιν: ἂν A, B εἶναι πεπερασμένα σύνολα, Φ εἶναι συνάρτησις ἀπὸ τὸ A στὸ B, λέμε ὅτι

«τὸ (A, Φ) εἶναι **ὁμοιόμορφον κάλυμμα** τοῦ B»

ὅταν γιὰ κάθε $b \in B$, τὸ σύνολον $\Phi^{-1}(\{b\})$ ἔχει πληθάριθμον $m = m_{A,B} := |A|/|B|$, δηλαδὴ ὅταν ἡ Φ εἶναι ἐπὶ καὶ m πρὸς 1. Σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, γιὰ κάθε $f : B \to \mathbb{R}$ ἰσχύει

$$\mathbb{E}(f(\Phi(a))|a \in A) = \mathbb{E}(f(b)|b \in B).$$

Γιὰ κάθε $1 \leq q \leq \infty$ συμβολίζουμε μὲ $L^q(\mathbb{Z}_N)$ τὸν χῶρον τῶν συναρτήσεων ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N$ στὸ $\mathbb{R}$ ἐφοδιασμένον μὲ τὴν L^q νόρμα, ὅπου

$$\|f\|_{L^q} := (\mathbb{E}(|f|^q))^{1/q} \text{ γιὰ } 1 \leq q < \infty,$$
$$\|f\|_{L^\infty} := \sup_{x\in\mathbb{Z}_N} |f(x)|.$$

Προφανῶς κάθε $L^q(\mathbb{Z}_N)$ εἶναι χῶρος Banach, μὲ τὸν $L^2(\mathbb{Z}_N)$ νὰ γίνεται χῶρος Hilbert ἂν ὁρίσουμε ἐσωτερικὸν γινόμενον

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{Z}_N} fg.$$

Ἐπιπλέον οἱ νόρμες εἶναι ὅλες ἰσοδύναμες, οἱ σταθερὲς ὅμως ποὺ ἐμφανίζονται στὶς ἰσοδυναμίες ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ N. Ἄρα, ἐφ' ὅσον σκοπός μας εἶναι νὰ μελετήσουμε ποσότητες ὁμοιόμορφα φραγμένες ὡς πρὸς N, θὰ θεωροῦμε τὶς νόρμες διαφορετικές.

Σύμβασις. Γιὰ λόγους συντομίας στὶς διατυπώσεις καὶ ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων, θὰ λέμε **φραγμένες** τὶς συναρτήσεις $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ γιὰ τὶς ὁποῖες $\|f\|_{L^\infty} \leq 1$.

Ὁρίζουμε γιὰ κάθε $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ τὶς **μετατοπίσεις** τῆς f : ἂν $n \in \mathbb{Z}_N$ ἢ $n \in \mathbb{Z}$ συμβολίζουμε μὲ $T^n f$ τὴν συνάρτησιν ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N$ στὸ $\mathbb{R}$ γιὰ τὴν ὁποίαν

$$T^n f(x) := f(x - n).$$

Ἐπιπλέον, γιὰ κάθε ὑποσύνολον A τοῦ $\mathbb{Z}_N$ θέτουμε $T^n A := A+n$ (ὁπότε $T^n \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{T^n A}$). Ὁρίζονται ἔτσι στὸν χῶρον τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων τοῦ $\mathbb{Z}_N$ οἱ ἐνδομορφισμοὶ T^n, οἱ ὁποῖοι εἶναι ὁμομορφισμοὶ ἀλγεβρῶν: γιὰ κάθε $f, g : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$, γιὰ κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T^n(\lambda f + g) = \lambda T^n f + T^n g \text{ καὶ } T^n(fg) = (T^n f)(T^n g).$$

Κάθε T^n ἀφήνει ἀμετάβλητες τὶς σταθερὲς συναρτήσεις καὶ τὸ κυριότερον, ἀφήνει ἀμετάβλητα τὰ ὁλοκληρώματα, δηλαδὴ

$$\int_{\mathbb{Z}_N} T^n f = \int_{\mathbb{Z}_N} f.$$

Ἐπίσης

$$\langle T^n f, T^n g\rangle = \int_{\mathbb{Z}_N} T^n(fg) = \int_{\mathbb{Z}_N} fg = \langle f, g\rangle.$$

Τὸ σύνολον τῶν ὁμομορφισμῶν T^n σχηματίζει ὁμάδα, ἀφοῦ $T^n T^m = T^{n+m}$, T^0 εἶναι ὁ ταυτοτικὸς ἐνδομορφισμός.

Θὰ θεωρήσουμε καὶ σ-ἄλγεβρες στὸ $\mathbb{Z}_N$, οἰκογένειες δηλαδὴ ὑποσυνόλων τοῦ $\mathbb{Z}_N$ ποὺ περιέχουν τὸ $\emptyset$, καὶ εἶναι κλειστὲς ὡς πρὸς συμπληρώματα καὶ ἑνώσεις. Μεταξὺ τῶν μὴ κενῶν στοιχείων μίας σ-ἄλγεβρας $\mathcal{B}$, θὰ λέμε **ἄτομα** τὰ ἐλαχιστικὰ ὡς πρὸς τὴν σχέσιν τοῦ $\subseteq$. Ἐπειδὴ τὸ $\mathbb{Z}_N$ εἶναι πεπερασμένον σύνολον, γιὰ κάθε σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ στὸ $\mathbb{Z}_N$ ἰσχύουν τὰ ἑξῆς: (i) κάθε στοιχεῖον τοῦ $\mathbb{Z}_N$ ἀνήκει σὲ ἓν μοναδικὸν ἄτομον τῆς $\mathcal{B}$, καὶ (ii) κάθε στοιχεῖον τῆς $\mathcal{B}$ γράφεται ὡς (ἀριθμήσιμη) ἕνωσις ἀτόμων τῆς σ-ἄλγεβρας (μὲ τὸ $\emptyset$ νὰ γράφεται ὡς ἡ κενὴ ἕνωσις). Συμπεραίνουμε ὅτι τὰ ἄτομα μίας σ-ἄλγεβρας στὸ $\mathbb{Z}_N$ σχηματίζουν μίαν διαμέρισιν τοῦ $\mathbb{Z}_N$, καὶ αὐτὴ ἡ διαμέρισις ὁρίζει τὴν ἴδιαν σ-ἄλγεβρα ἐφ' ὅσον θεωρήσουμε ὅλες τὶς πιθανὲς ἑνώσεις στοιχείων τῆς διαμερίσεως. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ μεταξὺ σ-ἀλγεβρῶν στὸ $\mathbb{Z}_N$ καὶ διαμερίσεων τοῦ $\mathbb{Z}_N$ θὰ μᾶς φανεῖ πολὺ χρήσιμη στὶς ἀποδείξεις.

Γιὰ κάθε σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$, συμβολίζουμε μὲ $L^q(\mathcal{B}) \leqslant L^q(\mathbb{Z}_N)$ τὸν ὑπόχωρον τῶν συναρτήσεων ποὺ εἶναι $\mathcal{B}-$μετρήσιμες, ποὺ ἀντιστρέφουν δηλαδὴ τὰ Borel ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{R}$ σὲ στοιχεῖα τῆς $\mathcal{B}$. Εἶναι εὔκολον νὰ δοῦμε ὅτι μία συνάρτησις $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ εἶναι $\mathcal{B}-$μετρήσιμη ἂν καὶ μόνον ἂν γιὰ κάθε ἄτομον A τῆς $\mathcal{B}$, ὁ περιορισμὸς $f|_A$ εἶναι σταθερὴ συνάρτησις (ἀπ' αὐτὸ ἕπεται πολὺ εὔκολα ὅτι τὸ $L^q(\mathcal{B})$ εἶναι γραμμικὸς ὑπόχωρος τοῦ $L^q(\mathbb{Z}_N)$). Ἀφοῦ ὁ $L^2(\mathbb{Z}_N)$ εἶναι χῶρος Hilbert, ὁρίζεται ἡ ὀρθογώνια προβολὴ

$$\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B}) : L^2(\mathbb{Z}_N) \to L^2(\mathcal{B}).$$

Μάλιστα γιὰ κάθε συνάρτησιν $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$, προσδιορίζεται ἀκριβῶς ἡ $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ ὡς ἡ συνάρτησις ἡ ὁποία σὲ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$ δίνει τὴν τιμὴν

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{B})(x) := \mathbb{E}(f(y)|y \in \mathcal{B}(x))$$

ὅπου $\mathcal{B}(x)$ τὸ μοναδικὸν ἄτομον τῆς $\mathcal{B}$ ποὺ περιέχει τὸ x. Ἡ $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ λέγεται **δεσμευμένη μέση τιμὴ** τῆς f. Μποροῦμε πλέον, μέσῳ τοῦ τύπου τῆς δεσμευμένης μέσης τιμῆς καὶ τῶν παραπάνω παρατηρήσεων, νὰ δείξουμε ὅτι

$$\begin{gathered}\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(f),\\ \text{ἂν } g \text{ εἶναι } \mathcal{B}-\text{μετρήσιμη, τότε } \mathbb{E}(fg|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{B}),\\ \text{ἂν } \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}, \text{τότε } \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})|\mathcal{B}') = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}').\end{gathered}$$

Μὲ $O(1)$ θὰ συμβολίζουμε μίαν ποσότητα-συνάρτησιν τοῦ N ἡ ὁποία εἶναι ἄνω φραγμένη κατ' ἀπόλυτην τιμὴν ἀπὸ θετικὴν σταθερὰν C ἀνεξάρτητην τοῦ N. Συχνὰ θὰ γράφουμε $X \ll 1$ γιὰ μίαν τέτοιαν ποσότητα X, καὶ $X \gg 1$ γιὰ μίαν ποσότητα κάτω φραγμένην ἀπὸ θετικὴν σταθεράν. Μὲ $o(1)$ θὰ συμβολίζουμε μίαν ποσότητα-συνάρτησιν τοῦ N ἡ ὁποία τείνει στὸ 0 ὅταν τὸ N τείνει στὸ ∞. Πολλὲς φορές, ἡ σταθερὰ ποὺ ὑπονοεῖται ἀπὸ τοὺς συμβολισμοὺς O καὶ $\ll$, ἢ ὁ ρυθμὸς συγκλίσεως στὸ 0 ποὺ δηλώνει ὁ συμβολισμὸς o, θὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ κάποιες δοθεῖσες παραμέτρους. Ὅταν θὰ πρέπει νὰ τονισθεῖ αὐτὴ ἡ ἐξάρτησις, θὰ γράφουμε τὶς παραμέτρους ὡς δεῖκτες στὰ σύμβολα O, o καὶ $\ll$. Ἐπίσης, θὰ γράφουμε $O(Y)$ καὶ $o(Y)$ ἀντὶ τῶν $O(1)\cdot Y$ καὶ $o(1)\cdot Y$, $X \ll Y$ ἀντὶ τοῦ $X = O(Y)$.

Εἴμαστε πλέον ἕτοιμοι νὰ διατυπώσουμε τὴν συναρτησιακὴν ἐκδοχὴν τοῦ θεωρήματος Szemerédi:

Θεώρημα 1.1.1. *Ἔστωσαν $k \geq 3$ φυσικὸς καὶ $0 < \delta \leq 1$ πραγματικός. Ὑπάρχει θετικὴ σταθερὰ $c(k,\delta)$, ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰ k,δ, ἔτσι ὥστε γιὰ κάθε μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην συνάρτησιν $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ γιὰ τὴν ὁποίαν $\int_{\mathbb{Z}_N} f \geq \delta$, νὰ ἰσχύει*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f(x) \,\Big|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k,\delta). \tag{1.1}$$

Παρατηρήσεις 1.1.2. (i) Ὅπως καὶ ἂν ἐπιλεγεῖ, ἡ σταθερὰ $c(k,\delta)$ συμπεριφέρεται σὰν «δεξιὰ συνεχὴς» συνάρτησις τοῦ δ, μὲ τὴν ἔννοιαν ὅτι γιὰ κάθε μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην συνάρτησιν $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ τέτοιαν ὥστε

$$\int_{\mathbb{Z}_N} f \geq \delta - o(1), \tag{1.2}$$

ἰσχύει

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f(x) \,\Big|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k,\delta) - o(1), \tag{1.3}$$

ὅπου τὰ σφάλματα στὴν (1.3) ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὸ k καὶ τὰ σφάλματα στὴν (1.2). Θὰ ἀποδείξουμε αὐτὴν τὴν παρατήρησιν μαζὶ μὲ τὸ Θεώρημα 1.1.1 στὴν ἑνότητα 1.4. Γιὰ αὐτό, θὰ μᾶς χρειαστεῖ τὸ γεγονὸς ὅτι ἂν $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ εἶναι μὴ ἀρνητική, φραγμένη συνάρτησις τέτοια ὥστε $\int_{\mathbb{Z}_N} f \geq \delta - o(1)$, τότε μποροῦμε νὰ βροῦμε μὴ ἀρνητικήν $f_{err} : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ μὲ

$$f + f_{err} \leq 1 \text{ στὸ } \mathbb{Z}_N,$$
$$\int_{\mathbb{Z}_N} f_{err} = o(1) \text{ καὶ } \int_{\mathbb{Z}_N} (f + f_{err}) \geq \delta.$$

(ii) Τονίζεται ὅτι στὸ ἑξῆς, ὅταν θὰ λέμε «ἔστω συνάρτησις $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$», δὲν θὰ ἐννοοῦμε κάτι στατικόν, ἀλλὰ θὰ ἀναφερόμαστε σὲ μίαν **οἰκογένειαν** πραγματικῶν συναρτήσεων μὲ τὴν κλασσικὴν ἔννοιαν, τῆς μορφῆς

$$\{f_N : N \text{ πρῶτος, πεδίον ὁρισμοῦ τῆς } f_N = \mathbb{Z}_N, \text{ πεδίον τιμῶν τῆς } f_N = \mathbb{R}\}.$$

Συμπεριλαμβάνουμε στὴν σύμβασιν αὐτὴν ὁποιανδήποτε τέτοιαν οἰκογένειαν· δὲν ἀπαιτεῖται ἑπομένως, οὔτε στὶς ἐφαρμογὲς θὰ εἶναι ἐν γένει ἀληθές, ἡ f_N νὰ εἶναι περιορισμὸς τῆς f_M ὅταν $N < M$. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ καταλαβαίνουμε καὶ τὶς διάφορες ἐκτιμήσεις ποὺ μπορεῖ νὰ ἔχουμε γιὰ τὴν f : π.χ. «$\|f\|_{L^\infty} = O(1)$» θὰ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει θετικὴ σταθερὰ C ἀνεξάρτητη τοῦ N, ὥστε γιὰ κάθε N νὰ ἰσχύει $\|f_N\|_{L^\infty} \leq C$, «$\int_{\mathbb{Z}_N} f \geq \delta - o(1)$» θὰ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει μηδενικὴ ἀκολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὥστε γιὰ κάθε N νὰ ἔχουμε $\int_{\mathbb{Z}_N} f_N \geq \delta - a_N$, κ.ο.κ. Ἀνάλογες οἰκογένειες θὰ ὑπονοοῦνται καὶ ὅταν λέμε «ἔστω ὑποσύνολον A τοῦ $\mathbb{Z}_N$» ἢ «ἔστω σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ στὸ $\mathbb{Z}_N$».

(iii) Ὁ Tao ὀνομάζει τὴν ἐκδοχὴν 1.1.1 τοῦ θεωρήματος Szemerédi «ποσοτικήν», ἀφοῦ τὸ συμπέρασμά της δὲν ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξιν ἁπλῶς κάποιου $(x, r) \in \mathbb{Z}_N^2, r \neq 0$, μὲ τὴν ἰδιότητα $\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f(x) \neq 0$, ἀλλὰ δίνει κάτω φράγμα γιὰ τὸ πλῆθος αὐτῶν τῶν ζευγῶν σὲ σχέσιν μὲ τὸ N^2. Προφανῶς, ἂν f εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ κάποιου συνόλου $A \subseteq \mathbb{Z}_N$, θὰ ἔχουμε κάτω φράγμα γιὰ τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμητικῶν προόδων μήκους k στὸ A. Θὰ μπορούσαμε βεβαίως νὰ δείξουμε ὅτι τὸ Θεώρημα 3 καὶ τὸ Θεώρημα 1.1.1 εἶναι ἰσοδύναμα: εὔκολα βλέπουμε ὅτι ἂν $\int_{\mathbb{Z}_N} f \geq \delta$, τότε τὸ σύνολον $D := \{x \in \mathbb{Z}_N : f(x) \geq \delta/2\}$ ἔχει πληθάριθμον $\geq \delta N/2$. Γιὰ τὸ ἄλλον σκέλος ὅμως, γιὰ νὰ συμπεράνουμε δηλαδὴ ὅτι δὲν ὑπάρχει μία ἀλλὰ πολλές, σὲ σχέσιν μὲ τὸ N^2, ἀριθμητικὲς πρόοδοι στὸ D, χρειαζόμαστε πολὺ πιὸ περίπλοκα ἐπιχειρήματα. Ὁ πρῶτος ποὺ χρησιμοποίησε τέτοιου εἴδους ἐπιχειρήματα, δουλεύοντας στὴν περίπτωσιν $k = 3$, ἦταν ὁ Κύπριος μαθηματικὸς Παναγιώτης Βαρναβίδης [39].

Ἡ κύρια ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος Szemerédi, ὅπως καὶ ἂν αὐτὸ διατυπωθεῖ, εἶναι τελικῶς στὴν εὕρεσιν ἀριθμητικῶν προόδων μέσα σὲ «μεγάλα» ὑποσύνολα τοῦ $[1, N]$. Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ δοῦμε πῶς αὐτὴ ἐξασφαλίζεται ἀπὸ τὸ θεώρημα 1.1.1, τὸ ὁποῖον θὰ ἀποδειχθεῖ στὴν συνέχειαν.

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος 3 *ὑποθέτοντας τὸ θεώρημα* 1.1.1. Θέτουμε $N_{SZ}(k, \delta)$ νὰ εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς $> c(k, \frac{\delta}{2k})^{-1}$, καὶ δείχνουμε ὅτι αὐτὸς ἔχει τὴν ἰδιότητα ποὺ θέλουμε: θεωροῦμε $N \geq N_{SZ}(k, \delta)$ καὶ $A \subseteq [1, N]$ μὲ $|A| \geq \delta N$. Ἀπὸ τὸ θεώρημα Bertrand-Chebyshev (τὸ ὁποῖον εἶναι πόρισμα τοῦ Θεωρήματος Πρώτων Ἀριθμῶν, ἀλλὰ μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ καὶ ἀνεξάρτητα), ὑπάρχει πρῶτος ἀριθμὸς N' μεταξὺ τῶν kN καὶ $2kN$. Ἐμφυτεύουμε τὸ A στὸ $\mathbb{Z}_{N'}$ μέσῳ τοῦ κανονικοῦ ἐπιμορφισμοῦ ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}$, καὶ συμβολίζουμε μὲ A' τὴν εἰκόνα τοῦ A. Ἰσχύει τότε $\int_{\mathbb{Z}_{N'}} \mathbf{1}_{A'} \geq \delta/2k$, ἄρα

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr}\mathbf{1}_{A'}(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k, \frac{\delta}{2k})$$

ἀπὸ τὸ Θεώρημα 1.1.1. Ἰσοδυνάμως

$$|\{(x,r) \in \mathbb{Z}_{N'}^2 : x, x-r, \ldots, x-(k-1)r \in A'\}| \geq c(k, \frac{\delta}{2k}) \cdot (N')^2,$$

καὶ ἐπειδὴ $N' \geq N \geq N_{SZ}(k,\delta)$,

$$|\{(x,r) \in \mathbb{Z}_{N'}^2 : x, x-r, \ldots, x-(k-1)r \in A'\}| > N',$$

ἄρα ὑπάρχουν $x, r \in \mathbb{Z}_{N'}$ μὲ $r \neq 0$ ὥστε τὸ A' νὰ περιέχει τὰ $x, x-r, \ldots, x-(k-1)r$.

Ἀφοῦ $A \subseteq [1,N] \subset [1,N']$, κάθε $x - jr$, $0 \leq j \leq k-1$, εἶναι εἰκὼν μέσῳ τοῦ κανονικοῦ ἐπιμορφισμοῦ ἑνὸς μοναδικοῦ $y_j \in A$. Θὰ δείξουμε ὅτι αὐτὰ τὰ $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον στὸ A : ἐφ' ὅσον $y_0 \in [1,N]$ καὶ $N \leq N'/k$, θὰ ἔχουμε ὅτι $x \in [1, N'/k] \bmod N'$ καὶ $r \in [1, N'/k] \cup [(k-1)N'/k, N'-1] \bmod N'$. Πράγματι, ἂς συμβολίσουμε μὲ r_0 τὸν ἀντιπρόσωπον τῆς κλάσεως ὑπολοίπων r στὸ $[1, N']$ (ὁ ἀντίστοιχος ἀντιπρόσωπος γιὰ τὸ x εἶναι τὸ y_0). Ἂν ὑπεθέταμε ὅτι τὸ r ἀνῆκε στὸ διάστημα $(N'/k, (k-1)N'/k) \bmod N'$, θὰ εἴχαμε γιὰ τοὺς ἀκεραίους y_0, r_0 ὅτι

$$1 \leq y_0 \leq N'/k \text{ καὶ } N'/k < r_0 < (k-1)N'/k \Rightarrow -(k-1)N'/k + 1 < y_0 - r_0 < 0,$$

δηλαδὴ θὰ προέκυπτε ὅτι $y_0 - r_0 \in (N'/k + 1, N' - 1] \bmod N'$. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἄτοπον, ἐπειδὴ γνωρίζουμε ὅτι $y_0 - r_0 \equiv x - r \mod N'$ καὶ $x - r \in A' \subseteq [1, N'/k] \bmod N'$.

Ἑπομένως, εἴτε $r_0 \in [1, N'/k]$ εἴτε $r_0 \in [(k-1)N'/k, N'-1]$. Στὴν πρώτην περίπτωσιν, ποὺ $r_0 \in [1, N'/k]$, ἔχουμε γιὰ τὴν ἀκολουθίαν ἀκεραίων $y_0, y_0 - r_0, \ldots, y_0 - (k-1)r_0$, ὅτι

$$N'/k \geq y_0 > y_0 - r_0 > \cdots > y_0 - (k-1)r_0 \geq -(k-1)N'/k + 1 = N'/k - N' + 1.$$

Ταυτοχρόνως γιὰ κάθε $0 \leq i \leq k-1$, τὸ $y_0 - ir_0$ εἶναι ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως ὑπολοίπων $x - ir \in \mathbb{Z}_{N'}$, ἄρα εἶναι ὁ μοναδικὸς τέτοιος ἀντιπρόσωπος στὸ διάστημα $[N'/k - N + 1, N'/k]$. Τὸ ἴδιον ὅμως ἰσχύει γιὰ τὸ στοιχεῖον y_i τοῦ συνόλου A, συνεπῶς $y_i = y_0 - ir_0$. Δηλαδὴ τὰ $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ ἀρχικὸν ὅρον τὸ $y_{k-1} = y_0 - (k-1)r_0$ καὶ κοινὴν διαφορὰν r_0.

Παρομοίως, στὴν περίπτωσιν ποὺ $r_0 \in [(k-1)N'/k, N'-1]$, ἰσχύει

$$1 \leq y_0 < y_0 + (N' - r_0) < \cdots < y_0 + (k-1)(N' - r_0) \leq N'/k + (k-1)N'/k = N',$$

ὁπότε πάλι τὸ $y_0 + i(N' - r_0) = y_0 - ir_0 + iN'$ καὶ τὸ $y_i \in A$ ταυτίζονται ὡς ἀντιπρόσωποι τῆς κλάσεως ὑπολοίπων $x - ir \in \mathbb{Z}_{N'}$ στὸ διάστημα $[1, N']$. Στὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὰ $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ ἀρχικὸν ὅρον τὸ y_0 καὶ κοινὴν διαφορὰν $N' - r_0$. □

Ἂς δοῦμε τώρα μὲ ποιὸν τρόπον ἐπέλεξαν οἱ Green καὶ Tao νὰ γενικεύσουν τὸ θεώρημα Szemerédi. Γιὰ αὐτό, χρειαζόμαστε τὴν ἔννοιαν τοῦ *ψευδοτυχαίου μέτρου*:

Ὁρισμός 1.1.3. Μέτρον λέγεται μία συνάρτησις $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ γιὰ τὴν ὁποίαν

$$\mathbb{E}(\nu) = 1 + o(1). \tag{1.4}$$

Μέτρον λοιπὸν λέγεται μία κατανομὴ πιθανότητος στὸ $\mathbb{Z}_N$, ἡ ὁποία ἐνδεχομένως συγκεντρώνεται σὲ μικρά, ὡς πρὸς τὸν πληθάριθμον, ὑποσύνολά του, καὶ ὡς ἐκ τούτου, δὲν ἀπαιτεῖται νὰ ἰσχύει $\|\nu\|_{L^\infty} = O(1)$. Ἐφ' ὅσον ἡ ἰδέα τῶν Green καὶ Tao ἦταν νὰ ἀναδιατυπώσουν τὸ θεώρημα Szemerédi γιὰ συναρτήσεις ποὺ φράσσονται κατὰ σημεῖον ἀπὸ κάποιο μέτρον ν, καὶ ἡ ἀναδιατύπωσις αὐτὴ νὰ δουλεύει γιὰ κάποιαν συνάρτησιν μὲ φορέα τοὺς πρώτους, εἶναι σίγουρο ὅτι τὸ μέτρον ποὺ θὰ ὁρίσουμε στὸ Κεφάλαιον 4 δὲν θὰ ἱκανοποιεῖ τὴν $\|\nu\|_{L^\infty} = O(1)$. Μάλιστα, θὰ συγκεντρώνεται, μὲ τὴν ἔννοιαν ὅτι θὰ παίρνει τὶς μὴ φραγμένες τιμές του, σὲ κάποιο ὑποσύνολον *σχεδὸν πρώτων* ἀριθμῶν, ἀριθμῶν δηλαδὴ μὲ λίγους πρώτους διαιρέτες. Τέτοια σύνολα τὰ χειρίζεται κανεὶς πιὸ εὔκολα ἀπὸ τοὺς πρώτους, χρησιμοποιῶντας τεχνικὲς ἀπὸ τὴν θεωρίαν κοσκίνου.

Γιὰ νὰ μπορέσουν καταρχὰς νὰ ἀποδείξουν ὅτι ἡ ἀναδιατύπωσις τοῦ θεωρήματος Szemerédi ποὺ σκέφτηκαν, καὶ ποὺ θὰ δοῦμε σὲ λίγο, ἀληθεύει, χρειάστηκε νὰ περιοριστοῦν σὲ μέτρα ποὺ ἱκανοποιοῦν δύο πολὺ ἰσχυρὲς συνθῆκες:

Ὁρισμός 1.1.4 (Συνθήκη γραμμικῶν μορφῶν)**.** Ἔστω μέτρον $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$. Ἔστωσαν m_0, t_0 καὶ $L_0 \in \mathbb{N}$ παράμετροι. Λέμε ὅτι τὸ ν ἱκανοποιεῖ τὴν $(m_0, t_0, L_0)-$συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν ἂν ἰσχύει τὸ ἑξῆς: ὑποθέτουμε ὅτι $m \leq m_0$, $t \leq t_0$, ὅτι $(L_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq t}$ εἶναι ῥητοὶ ἀριθμοὶ μὲ ἀριθμητὲς καὶ παρονομαστὲς ἀπολύτως $\leq L_0$, καὶ ὅτι b_i, $1 \leq i \leq m$, εἶναι στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_N$. Συμβολίζουμε μὲ $\psi_i : \mathbb{Z}_N^t \to \mathbb{Z}_N$ τὴν γραμμικὴν μορφὴν

$$\psi_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{t} L_{ij} x_j + b_i,$$

ὅπου $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_t) \in \mathbb{Z}_N^t$, καὶ ὅπου οἱ ἀριθμοὶ L_{ij} θεωροῦνται στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_N$ (προϋποθέτοντας ὅτι ὁ N εἶναι πρῶτος μεγαλύτερος τοῦ L_0). Ἂν ὑποθέσουμε ἐπιπλέον ὅτι κανένα διάνυσμα $(L_{ij})_{1\leq j\leq t} \in \mathbb{Q}^t$ δὲν εἶναι πολλαπλάσιον κάποιου ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα (καὶ προφανῶς ὅτι κανένα δὲν εἶναι τὸ $\mathbf{0}$), τότε ἔχουμε

$$\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x})) \cdots \nu(\psi_m(\boldsymbol{x})) | \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t) = 1 + o_{L_0, m_0, t_0}(1). \tag{1.5}$$

(Τὰ σφάλματα στὴν (1.5) ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ ποιὰ εἶναι ἡ συνάρτησις ν, ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν ἐπιλογὴν τῶν $b_1, \ldots, b_m$.)

Παρατήρησις 1.1.5. Ἡ παράμετρος m_0, ἡ ὁποία καθορίζει τὸν μέγιστον ἀριθμὸν γραμμικῶν μορφῶν, εἶναι ἡ πιὸ σημαντικὴ ἀπὸ τὶς τρεῖς καί, ὅπως θὰ δοῦμε, θὰ ζητήσουμε νὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ k, τὸ μῆκος δηλαδὴ τῶν ἀριθμητικῶν προόδων ποὺ ἀναζητοῦμε. Ἡ περίπτωσις $m = t = 1, \psi_1(x_1) = x_1$ εἶναι ἀκριβῶς ἡ συνθήκη (1.4), ἡ ὁποία συνεπάγεται ὅτι τὸ ν εἶναι μέτρον. Ἄλλα ἁπλὰ παραδείγματα τῆς συνθήκης γραμμικῶν μορφῶν ποὺ θὰ συναντήσουμε στὶς ἀποδείξεις εἶναι τὰ

$$\mathbb{E}(\nu(x)\nu(x+h_1)\nu(x+h_2)\nu(x+h_1+h_2)\,|\,x,h_1,h_2 \in \mathbb{Z}_N) = 1 + o(1) \tag{1.6}$$

(ἐδῶ $(m_0,t_0,L_0) = (4,3,1)$),

$$\mathbb{E}(\nu(x+h_1)\nu(x+h_2)\nu(x+h_1+h_2)\,|\,h_1,h_2 \in \mathbb{Z}_N) = 1 + o(1) \tag{1.7}$$

γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$ (ἐδῶ $(m_0,t_0,L_0) = (3,2,1)$, ἐνῷ τὸ στοιχεῖον x εἶναι ὁ σταθερὸς ὅρος καὶ στὶς τρεῖς γραμμικὲς μορφές),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(&\nu((x-y)/2)\nu((x-y+h_2)/2)\nu(-y)\nu(-y-h_1)\times\\ &\times\nu((x-y')/2)\nu((x-y'+h_2)/2)\nu(-y')\nu(-y'-h_1)\times\\ &\times\nu(x)\nu(x+h_1)\nu(x+h_2)\nu(x+h_1+h_2)\,\Big|\,x,h_1,h_2,y,y' \in \mathbb{Z}_N\Big)\\ &= 1 + o(1)\end{aligned} \tag{1.8}$$

(ἐδῶ $(m_0,t_0,L_0) = (12,5,2)$).

Ὁρισμός 1.1.6 (Συνθήκη συσχετισμοῦ)**.** Ἔστω μέτρον $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$. Ἔστω $m_0 \in \mathbb{N}$ παράμετρος. Λέμε ὅτι τὸ ν ἱκανοποιεῖ τὴν m_0-συνθήκην συσχετισμοῦ ἂν ὑπάρχει συνάρτησις βάρους $\tau : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$, γιὰ τὶς ῥοπὲς τῆς ὁποίας ἔχουμε

$$\mathbb{E}(\tau^q) = O_q(1) \text{ γιὰ κάθε } 1 \le q < \infty, \tag{1.9}$$

τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $1 < m \le m_0$ νὰ ἰσχύει

$$\mathbb{E}(\nu(x+h_1)\nu(x+h_2)\cdots\nu(x+h_m)|x \in \mathbb{Z}_N) \le \sum_{1\le i<j\le m} \tau(h_i - h_j) \tag{1.10}$$

γιὰ κάθε $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_N$ (ὄχι ἀπαραιτήτως διαφορετικά).

Ὁρισμός 1.1.7. Ἔστω μέτρον $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$. Θὰ λέμε τὸ ν ***k*−ψευδοτυχαῖον** (ὅπου $k \ge 3$ φυσικός), ἂν ἱκανοποιεῖ τὴν $(k \cdot 2^{k-1}, 3k-4, k)-$συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν καὶ τὴν $2^{k-1}-$συνθήκην συσχετισμοῦ.

Οἱ παράμετροι στὸν ὁρισμὸν δὲν ἔχουν ἰδιαίτερην σημασίαν, αὐτὸ ποὺ κυρίως μᾶς ἐνδιαφέρει εἶναι νὰ ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὸ k καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ N, ὥστε νὰ μπορέσουμε νὰ ὁρίσουμε τέτοιου εἴδους μέτρα γιὰ τοὺς πρώτους. Κατὰ τ' ἄλλα, ἐπιλέγουμε αὐτὲς τὶς παραμέτρους ἐπειδή, παραδείγματος χάριν, θὰ χρειαστεῖ σὲ κάποιαν ἀπόδειξιν νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν γιὰ $k \cdot 2^{k-1}$ μορφές, καὶ δὲν θὰ μᾶς χρειαστεῖ γιὰ περισσότερες.

Προφανῶς, ἡ σταθερὴ συνάρτησις 1 εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον, τὸ ὁποῖον θὰ συμβολίζουμε μὲ ν_{const}. Μάλιστα, τὸ σύνολον τῶν $k-$ψευδοτυχαίων μέτρων εἶναι ἀστρόμορφον ὡς πρὸς τὸ ν_{const}, ὅπως δείχνουμε στὸ ἑπόμενον λῆμμα:

Λῆμμα 1.1.8. *Ἔστω ν $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον. Γιὰ κάθε $\theta \in (0,1)$, ἡ συνάρτησις $\theta\nu + (1-\theta)\nu_{const} : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ἐπίσης.*

Ἀπόδειξις. Πρέπει ἐξαιτίας τοῦ Ὁρισμοῦ 1.1.7 νὰ δείξουμε ὅτι τὸ $\theta\nu + (1-\theta)\nu_{const}$ ἱκανοποιεῖ τὴν $(k \cdot 2^{k-1}, 3k-4, k)-$συνθήκην συσχετισμοῦ καὶ τὴν $2^{k-1}-$συνθήκην συσχετισμοῦ. Ἔστω ὅτι ἔχουμε m γραμμικὲς μορφὲς $\psi_i : \mathbb{Z}_N^t \to \mathbb{Z}_N$, $1 \le i \le m \le k \cdot 2^{k-1}$ καὶ $t \le 3k-4$, μὲ τὶς ἰδιότητες ποὺ περιγράφονται στὸν ὁρισμὸν τῆς συνθήκης γραμμικῶν μορφῶν. Θέλουμε νὰ δείξουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\big(\big(\theta\nu(\psi_1(\boldsymbol{x})) + 1 - \theta\big) \cdots \big(\theta\nu(\psi_m(\boldsymbol{x})) + 1 - \theta\big) | \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t\big) = 1 + o_k(1).$$

Ἀναπτύσσοντας τὴν μέσην τιμήν, ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\big(\big(\theta\nu(\psi_1(\boldsymbol{x})) + 1 - \theta\big) \cdots \big(\theta\nu(\psi_m(\boldsymbol{x})) + 1 - \theta\big) | \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t\big) \\ &\qquad = \sum_{A \subseteq \{1,\dots,m\}} \theta^{|A|}(1-\theta)^{m-|A|} \cdot \mathbb{E}\left(\prod_{i\in A} \nu(\psi_i(\boldsymbol{x})) \;\Big|\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t\right), \end{aligned} \tag{1.11}$$

καὶ ἐπειδή, ἀπὸ τὶς ὑποθέσεις μας, τὸ μέτρον ν εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον, συμπεραίνουμε ὅτι γιὰ κάθε ὑποσύνολον A τοῦ $\{1,\dots,m\}$,

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i\in A} \nu(\psi_i(\boldsymbol{x})) \;\Big|\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t\right) = 1 + o_k(1).$$

Ἄρα, ἀφοῦ ἀπὸ τὸ διωνυμικὸν θεώρημα ἰσχύει

$$\sum_{A \subseteq \{1,\dots,m\}} \theta^{|A|}(1-\theta)^{m-|A|} = (\theta + (1-\theta))^m = 1,$$

προκύπτει ὅτι ἡ μέση τιμὴ (1.11) εἶναι κι αὐτὴ $1 + o_k(1)$.

Ἀναλόγως, γιὰ τὴν $2^{k-1}-$συνθήκην συσχετισμοῦ γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big(\big(\theta\nu(x+h_1)+1-\theta\big)\cdots\big(\theta\nu(x+h_m)+1-\theta\big)|x\in\mathbb{Z}_N\big)\\
&\qquad= \sum_{A\subseteq\{1,\dots,m\}} \theta^{|A|}(1-\theta)^{m-|A|}\cdot\mathbb{E}\left(\prod_{i\in A}\nu(x+h_i)\bigm| x\in\mathbb{Z}_N\right)\\
&\qquad\le \sum_{\substack{A\subseteq\{1,\dots,m\}\\ |A|\le 1}} \theta^{|A|}(1-\theta)^{m-|A|}(1+o(1))\\
&\qquad\quad+ \sum_{\substack{A\subseteq\{1,\dots,m\}\\ |A|\ge 2}} \theta^{|A|}(1-\theta)^{m-|A|}\cdot\sum_{\substack{i,j\in A\\ i<j}}\tau(h_i-h_j)\\
&\qquad\le \sum_{A\subseteq\{1,\dots,m\}} \theta^{|A|}(1-\theta)^{m-|A|}\cdot\sum_{1\le i<j\le m}(\tau(h_i-h_j)+c_\nu)\\
&\qquad= \sum_{1\le i<j\le m}(\tau(h_i-h_j)+c_\nu),
\end{aligned}$$

ὅπου $m\le 2^{k-1}$, τὰ h_i εἶναι ὁποιαδήποτε στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_N$, τ εἶναι ἡ συνάρτησις βάρους γιὰ τὸ μέτρον ν, καὶ $c_\nu>0$ εἶναι σταθερὰ μὲ τὴν ἰδιότητα $\mathbb{E}(\nu(x)|x\in\mathbb{Z}_N)\le c_\nu$ γιὰ κάθε N. Ἐπειδή, ἐξαιτίας τῆς ἀντίστοιχης ἰδιότητος γιὰ τὴν τ, ἔχουμε καὶ γιὰ τὴν συνάρτησιν $\tau+c_\nu$ ὅτι

$$\mathbb{E}\big((\tau+c_\nu)^q\big)=O_q(1) \text{ γιὰ κάθε } 1\le q<\infty,$$

συμπεραίνουμε τὸ ζητούμενον. □

Ἀπὸ αὐτὰ τὰ $k-$ψευδοτυχαῖα μέτρα ποὺ σχετίζονται μὲ τὸ ν, θὰ μᾶς χρειαστεῖ μόνον τὸ $(\nu+1)/2$. Θὰ χρειαστεῖ ἐπίσης νὰ μποροῦμε νὰ διαταράξουμε λίγο τὶς τιμὲς τοῦ ν :

Λῆμμα 1.1.9. *Ἂν τὸ ν εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον, καὶ $o(1)$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ ποσότης, τότε $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον εἶναι καὶ τὸ $\nu':=\nu+o(1)$.*

Ἀπόδειξις. Πάλι ἀναπτύσσουμε τὰ γινόμενα μέσα στὶς μέσες τιμές: γιὰ τὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν παρατηροῦμε ὅτι

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big(\big(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))+o(1)\big)\cdots\big(\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))+o(1)\big)|\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_N^t\big)\\
&\qquad=\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_N^t)+o_{k,\nu}(1)=1+o_k(1)+o_{k,\nu}(1)
\end{aligned}$$

ὅπου τὸ δεύτερον σφάλμα $o_{k,\nu}(1)$ προέρχεται ἀπὸ τοὺς ὅρους

$$\sum_{\substack{A\subseteq\{1,\dots,m\}\\ |A|<m}}(o(1))^{m-|A|}\mathbb{E}\left(\prod_{i\in A}\nu(\psi_i(\boldsymbol{x}))\bigm|\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_N^t\right)\le(2^m-1)\max\{o(1),(o(1))^m\}(1+o_k(1)).$$

Ἀναλόγως γιὰ τὴν συνθήκην συσχετισμοῦ, ἂν τ εἶναι ἡ συνάρτησις βάρους γιὰ τὸ μέτρον ν, τότε μποροῦμε γιὰ τὸ ν' νὰ θεωρήσουμε κάποιο κατάλληλον πολλαπλάσιον τῆς $\tau + \max\{o(1), (o(1))^{2^{k-1}}\}$. $\square$

Κλείνουμε αὐτὴν τὴν ἑνότητα μὲ τὴν ζητουμένην γενίκευσιν τοῦ θεωρήματος Szemerédi, ἡ ὁποία θὰ μᾶς ἐπιτρέψει τὴν εὕρεσιν ἀριθμητικῶν προόδων στοὺς πρώτους:

Θεώρημα 1.1.10 (Θεώρημα Szemerédi γιὰ ψευδοτυχαῖα μέτρα). *Ἔστωσαν $k \geq 3$ φυσικὸς καὶ $0 < \delta \leq 1$ πραγματικός. Ἔστω ἐπίσης $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$. Γιὰ κάθε $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ γιὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει*

$$0 \leq f(x) \leq \nu(x) \text{ γιὰ κάθε } x \in \mathbb{Z}_N$$

καὶ

$$\int_{\mathbb{Z}_N} f \geq \delta,$$

ἔχουμε

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f(x) | x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k,\delta) - o_{k,\delta}(1) \tag{1.12}$$

ὅπου $c(k,\delta) > 0$ εἶναι ἡ σταθερὰ ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ θεώρημα 1.1.1. *Τὰ σφάλματα στὴν* (1.12) *προφανῶς ἐξαρτῶνται καὶ ἀπὸ τὸ ν, συγκεκριμένα ἀπὸ τὰ σφάλματα στὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν, καὶ τὶς ῥοπὲς τῆς συναρτήσεως βάρους στὴν συνθήκην συσχετισμοῦ.*

Ὅπως θὰ δοῦμε, οἱ ἀποδείξεις τῶν Θεωρημάτων 1.1.1 καὶ 1.1.10 μοιάζουν πάρα πολὺ ὡς πρὸς τὴν σειρὰν καὶ τὴν λογικὴν τῶν ἐπιχειρημάτων τους, ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς τὰ ἐργαλεῖα ποὺ χρησιμοποιοῦν καὶ τὰ ὁποῖα προέρχονται (ἢ γενικεύουν ἀντίστοιχες ἔννοιες) ἀπὸ τοὺς κλάδους τῆς ἐργοδικῆς θεωρίας καὶ τῆς ἀναλύσεως Fourier. Μεταξὺ αὐτῶν τῶν ἐργαλείων εἶναι καὶ δύο οἰκογένειες ἀπὸ νόρμες, τὶς ὁποῖες θὰ ὁρίσουμε στὶς ἀμέσως ἑπόμενες ἑνότητες, καὶ οἱ ὁποῖες μετροῦν κατὰ κάποιον τρόπον τὸ κατὰ πόσον μία συνάρτησις f ἱκανοποιεῖ ἀνισότητες σὰν τὶς (1.1), (1.12).

1.2 Οἱ νόρμες U^d τῆς Gowers ὁμοιομορφίας

Ἕνας τρόπος νὰ ὁρίσουμε τὶς νόρμες U^d προκύπτει ἀπὸ τὸ λῆμμα van der Corput, τὸ ὁποῖον γιὰ τὶς συναρτήσεις ποὺ μελετοῦμε εἶναι μία ἁπλὴ παρατήρησις:

Λῆμμα 1.2.1 (Van der Corput). *Γιὰ κάθε $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$, ἰσχύει*

$$\left|\int_{\mathbb{Z}_N} f\right|^2 = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} f T^h f \,\middle|\, h \in \mathbb{Z}_N\right).$$

Ἀπόδειξις. Ἀναπτύσσοντας τὶς δύο ἐκφράσεις, βλέπουμε ὅτι

$$|\int_{\mathbb{Z}_N} f\,|^2 = \mathbb{E}\,(f(x)f(y)|x,y\in\mathbb{Z}_N) =$$
$$\mathbb{E}\,(f(x)f(x-h)|x,h\in\mathbb{Z}_N) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} f\,T^h f\,\big|\,h\in\mathbb{Z}_N\right).$$

□

Ὁρισμός 1.2.2. Γιὰ κάθε $f:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$ ὁρίζουμε

$$\|f\|_{U^0} := \int_{\mathbb{Z}_N} f, \tag{1.13}$$

καὶ ἀναδρομικῶς γιὰ $d\geq 1$, ἔχοντας ὁρίσει τὴν $\|\cdot\|_{U^{d-1}}$ γιὰ ὅλες τὶς πραγματικὲς συναρτήσεις ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N$, ὁρίζουμε

$$\|f\|_{U^d} := \left[\mathbb{E}\left(\|f\,T^h f\|_{U^{d-1}}^{2^{d-1}}\,|\,h\in\mathbb{Z}_N\right)\right]^{1/2^d}. \tag{1.14}$$

Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 1.2.1 καὶ τὶς (1.13), (1.14), βλέπουμε ὅτι γιὰ κάθε $f:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$,

$$\|f\|_{U^1} = |\int_{\mathbb{Z}_N} f\,|, \tag{1.15}$$

ἐνῷ εἶναι προφανὲς ἀπὸ τὸν ἀναδρομικὸν τύπον ὅτι γιὰ $d\geq 2$ οἱ $\|\cdot\|_{U^d}$ εἶναι μὴ ἀρνητικές. Ἐπιπλέον

$$\|f\|_{U^1}^2 \leq \mathbb{E}\left(|\int_{\mathbb{Z}_N} f\,T^h f|\,|\,h\in\mathbb{Z}_N\right) \leq \left[\mathbb{E}\left(|\int_{\mathbb{Z}_N} f\,T^h f|^2\,|\,h\in\mathbb{Z}_N\right)\right]^{1/2},$$

ποὺ σημαίνει ὅτι $\|f\|_{U^1}\leq\|f\|_{U^2}$, ὁπότε μὲ ἐπαγωγὴν (χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν ἀνισότητα Hölder) προκύπτει ὅτι $\|f\|_{U^d}\leq\|f\|_{U^{d+1}}$ γιὰ κάθε $d\geq 1$. Ἐπίσης μὲ ἐπαγωγήν, βλέπουμε ὅτι γιὰ κάθε d, ἡ $\|f\|_{U^d}$ παραμένει ἀναλλοίωτη ὡς πρὸς τὶς μετατοπίσεις τῆς f ἢ συναρτήσεις τῆς μορφῆς $x\mapsto f(x/\lambda) =: f_\lambda(x)$, $\lambda\in\mathbb{Z}_N\setminus\{0\}$, δηλαδὴ γιὰ κάθε $n\in\mathbb{Z}_N, \lambda\in\mathbb{Z}_N\setminus\{0\}$,

$$\|T^n f\|_{U^d} = \|f\|_{U^d} = \|f_\lambda\|_{U^d},$$

ἐνῷ γιὰ $d\geq 1$ οἱ $\|\cdot\|_{U^d}$ εἶναι καὶ θετικῶς ὁμογενεῖς. Προφανῶς, ἡ $\|\cdot\|_{U^1}$ δὲν εἶναι νόρμα, ἀφοῦ μηδενίζεται καὶ γιὰ συναρτήσεις πλὴν τῆς μηδενικῆς, ἀλλὰ εἶναι ἡμινόρμα. Ἡ $\|\cdot\|_{U^0}$ δὲν εἶναι οὔτε κἀν μὴ ἀρνητική. Γιὰ $d\geq 2$ ὅμως, οἱ $\|\cdot\|_{U^d}$ εἶναι κανονικὲς νόρμες. Γιὰ νὰ τὸ δείξουμε αὐτό, παρατηροῦμε καταρχὰς τὸ ἑξῆς: ὁ Ὁρισμὸς 1.2.2 μπορεῖ νὰ διατυπωθεῖ καὶ γιὰ συναρτήσεις $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$. Σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ λήμματος van der Corput γίνεται

$$|\int_{\mathbb{Z}_N} f|^2 = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \bar{f}T^h f \,\middle|\, h \in \mathbb{Z}_N\right),$$

καὶ ὁ ὁρισμὸς τῶν $\|\cdot\|_{U^d}$ παραλλάσσεται στὸν

$$\|f\|_{U^0} := \int_{\mathbb{Z}_N} f,$$
$$\|f\|_{U^d} := \left[\mathbb{E}\left(\|\bar{f}T^h f\|_{U^{d-1}}^{2^{d-1}} \,|\, h \in \mathbb{Z}_N\right)\right]^{1/2^d}.$$

(Ἡ μέση τιμὴ μίας $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ ὁρίζεται μὲ ἐντελῶς ἀνάλογον τρόπον, ἐνῷ ἀπὸ τὸ λῆμμα van der Corput καὶ ἐπαγωγήν, προκύπτει ὅτι γιὰ $d \geq 1$, $\|f\|_{U^d} \in \mathbb{R}$, ἄρα ὁ ὁρισμὸς εἶναι καλός.) Ἰσχύουν ὅλες οἱ προηγούμενες παρατηρήσεις καὶ μποροῦμε νὰ δείξουμε τὸ ἑξῆς:

Λῆμμα 1.2.3. *Γιὰ κάθε $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$, ἡ $\|f\|_{U^2}$ ταυτίζεται μὲ τὴν ℓ^4 νόρμα τῶν συντελεστῶν Fourier τῆς f.*

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι $\|f\|_{U^2}^4 = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_N} |\hat{f}(\xi)|^4$, ἢ ἀλλιῶς ὅτι

$$\mathbb{E}\left(|\int_{\mathbb{Z}_N} \bar{f}T^h f|^2 \,|\, h \in \mathbb{Z}_N\right) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_N} \left|\mathbb{E}(f(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)\right|^4.$$

Ὅμως γιὰ κάθε $\xi \in \mathbb{Z}_N$, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\left|\mathbb{E}(f(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)\right|^4 = \left(\left|\mathbb{E}(f(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)\right|^2\right)^2,$$

καὶ κάνοντας πράξεις βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}(f(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)\right|^2 &= \overline{\mathbb{E}(f(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)} \cdot \mathbb{E}(f(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N) \\
&= \mathbb{E}\left(\bar{f}(x)e(x\xi/N)f(x-h)e(-(x-h)\xi/N) \,\middle|\, x, h \in \mathbb{Z}_N\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \bar{f}T^h f\right) \cdot e(h\xi/N) \,\middle|\, h \in \mathbb{Z}_N\right).
\end{aligned}$$

Ἄρα

$$|\hat{f}(\xi)|^4 = \mathbb{E}\left(\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \bar{f}T^h f\right)\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \bar{f}T^{h'} f\right) \cdot e((h+h')\xi/N) \,\middle|\, h, h' \in \mathbb{Z}_N\right).$$

Ἀθροίζοντας ὡς πρὸς ξ καὶ ἐναλλάσσοντας τὴν σειρὰν τῶν ἀθροισμάτων, προκύπτει ὅτι

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N}|\hat{f}(\xi)|^4 = N^{-2}\sum_{h,h'\in\mathbb{Z}_N}\left(\left(\int_{\mathbb{Z}_N}\bar{f}T^h f\right)\left(\int_{\mathbb{Z}_N}\bar{f}T^{h'}f\right)\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N}e((h+h')\xi/N)\right)$$
$$= N^{-1}\sum_{h\in\mathbb{Z}_N}\left(\left(\int_{\mathbb{Z}_N}\bar{f}T^h f\right)\left(\int_{\mathbb{Z}_N}\bar{f}T^{-h}f\right)\right),$$

ὅπου ἔχουμε χρησιμοποιήσει καὶ τὴν γνωστὴν ταυτότητα:

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N}e((h+h')\xi/N)=0 \text{ ἂν } h+h'\neq 0,\ \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N}e((h+h')\xi/N)=N \text{ ἀλλιῶς.}$$

Θυμόμαστε τέλος ὅτι κάθε T^h ἀφήνει ἀμετάβλητα τὰ ὁλοκληρώματα, ἄρα

$$\int_{\mathbb{Z}_N}\bar{f}T^{-h}f=\int_{\mathbb{Z}_N}T^h\left(\bar{f}T^{-h}f\right)=\int_{\mathbb{Z}_N}fT^h\bar{f}=\overline{\int_{\mathbb{Z}_N}\bar{f}T^hf},$$

καὶ συνεπῶς

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N}|\hat{f}(\xi)|^4=\mathbb{E}\left(\left(\int_{\mathbb{Z}_N}\bar{f}T^hf\right)\left(\int_{\mathbb{Z}_N}\bar{f}T^{-h}f\right)\mid h\in\mathbb{Z}_N\right)$$
$$=\mathbb{E}\left(\left|\int_{\mathbb{Z}_N}\bar{f}T^hf\right|^2\mid h\in\mathbb{Z}_N\right).$$

□

Συνεπάγεται ὅτι ἡ $\|\cdot\|_{U^2}$ εἶναι θετικὴ (δηλαδὴ μηδενίζεται μόνον στὴν μηδενικὴν συνάρτησιν), ἄρα ἀπὸ τὴν σχέσιν $\|f\|_{U^d}\leq\|f\|_{U^{d+1}}$, τὸ ἴδιον ἰσχύει καὶ γιὰ κάθε $\|\cdot\|_{U^d}$, $d>2$. Μάλιστα, ἐξαιτίας τοῦ παραπάνω λήμματος, ἔχουμε ἤδη ὅτι ἡ $\|\cdot\|_{U^2}$ εἶναι νόρμα, ἐνῷ αὐτὸ ποὺ μᾶς μένει γιὰ νὰ συμπεράνουμε τὸ ἴδιον γιὰ τὶς ἀνωτέρας τάξεως $\|\cdot\|_{U^d}$, εἶναι νὰ δείξουμε ὅτι καὶ αὐτὲς ἱκανοποιοῦν τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα. Γιὰ τὸν σκοπὸν αὐτόν, θὰ χρειαστεῖ νὰ ἀναπτύξουμε ἐπαγωγικῶς τὸν τύπον (1.14) σὲ ἄθροισμα ἀπὸ γινόμενα τιμῶν τῆς f πάνω σὲ κύβους διαστάσεως d. Ἐξηγῶντας τὶ σημαίνει αὐτό, δίνουμε ἕναν ἐναλλακτικὸν ὁρισμὸν τῶν νορμῶν U^d :

Ὁρισμός 1.2.4. Ἔστω $d\geq 1$ φυσικός. Θυμόμαστε ὅτι $\{0,1\}^d$ εἶναι ὁ διακριτὸς κύβος τοῦ Hamming διαστάσεως d, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ διανύσματα $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_d)$ μὲ $\omega_j\in\{0,1\}$ γιὰ $j=1,\dots,d$. Ἂν $\omega\in\{0,1\}^d$ καὶ $h=(h_1,\dots,h_d)\in\mathbb{Z}_N^d$, συμβολίζουμε μὲ $\omega\cdot h$ τὸ στοιχεῖον $\omega_1h_1+\cdots+\omega_dh_d\in\mathbb{Z}_N$. Ὁρίζουμε γιὰ κάθε ἀκολουθίαν $(f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}$ ἀπὸ συναρτήσεις $f_\omega:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$, τὸ **$d$−διάστατον ἐσωτερικὸν γινόμενον Gowers $\langle(f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d}$** ὡς ἑξῆς:

$$\langle(f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d}:=\mathbb{E}\left(\prod_{\omega\in\{0,1\}^d}f_\omega(x+\omega\cdot h)\,\middle|\,x\in\mathbb{Z}_N,h\in\mathbb{Z}_N^d\right).$$

Στὸ ἑξῆς θὰ καλοῦμε κάθε σύνολον τῆς μορφῆς $\{x+\omega\cdot h : \omega\in\{0,1\}^d\}$ **κύβον διαστάσεως d**. Ἐξετάζουμε τώρα κάποιες περιπτώσεις ποὺ τὸ $\langle (f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d}$ εἶναι μὴ ἀρνητικόν: ἂν γιὰ παράδειγμα ἡ f_ω δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ τελευταῖον ψηφίον ω_d τοῦ ω, δηλαδὴ ἂν $f_{(\omega_1,\dots,\omega_{d-1},0)} = f_{(\omega_1,\dots,\omega_{d-1},1)}$, ἔχουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\omega\in\{0,1\}^d} f_\omega(x+\omega\cdot h)\,\Big|\, x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N^d\right)=$$

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\omega'\in\{0,1\}^{d-1}}\big(f_{\omega',0}(x+\omega'\cdot h')f_{\omega',0}(x+h_d+\omega'\cdot h')\big)\,\Big|\, x\in\mathbb{Z}_N, h'\in\mathbb{Z}_N^{d-1}, h_d\in\mathbb{Z}_N\right),$$

ὅπου $\omega' := (\omega_1,\dots,\omega_{d-1})$ καὶ $h' := (h_1,\dots,h_{d-1})$. Ἰσοδυνάμως, ἔχουμε ὅτι

$$\langle (f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d} = \mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(\prod_{\omega'\in\{0,1\}^{d-1}} f_{\omega',0}(y+\omega'\cdot h')|\, y\in\mathbb{Z}_N\right)\right|^2 \Big|\, h'\in\mathbb{Z}_N^{d-1}\right),$$

ἑπομένως $\langle (f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d}\ge 0$ ὅταν ἡ f_ω δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ω_d. Ἐξαιτίας αὐτοῦ, γιὰ κάθε $f:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$ ἰσχύει

$$\langle (f)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d}\ge 0,$$

καὶ μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε τὴν *νόρμα* $\|f\|_{U^d}$ *τῆς Gowers ὁμοιομορφίας* τῆς f θέτοντας

$$\|f\|_{U^d} := \langle (f)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d}^{1/2^d} = \mathbb{E}\left(\prod_{\omega\in\{0,1\}^d} f(x+\omega\cdot h)\,\Big|\, x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N^d\right)^{1/2^d}. \tag{1.16}$$

Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον εἰσάγει ὁ Gowers γιὰ πρώτην φορὰν τὶς νόρμες U^d (Gowers uniformity norms) στὸ [17].

Λῆμμα 1.2.5. *Γιὰ κάθε $d\ge 1$, ὁ Ὁρισμὸς 1.2.2 γιὰ τὴν $\|\cdot\|_{U^d}$ συμπίπτει μὲ τὸν ὁρισμόν της στὴν (1.16).*

Ἀπόδειξις. Μὲ ἐπαγωγὴν στὸ d : γιὰ $d=1$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\prod_{\omega\in\{0,1\}} f(x+\omega\cdot h)\,\Big|\, x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N\right)^{1/2}\\ =&\mathbb{E}\big(f(x)f(x+h)\,\big|\, x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N\big)^{1/2} = \Big|\int_{\mathbb{Z}_N} f\,\Big|,\end{aligned}$$

ἄρα οἱ δύο ὁρισμοὶ συμφωνοῦν γιὰ ὅλες τὶς συναρτήσεις $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$. Ἂν τὸ ἴδιον συμβαίνει γιὰ κάποιο $d \geq 1$, δηλαδὴ ἂν γιὰ κάθε $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$, ἡ $\|f\|_{U^d}$ σύμφωνα μὲ τὸν Ὁρισμὸν 1.2.2 ἰσοῦται καὶ μὲ

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\omega \in \{0,1\}^d} f(x+\omega\cdot h) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N, h \in \mathbb{Z}_N^d\right)^{1/2^d},$$

τότε τὸ ζητούμενον γιὰ $d+1$ προκύπτει ὡς ἑξῆς: παρατηροῦμε ὅτι γιὰ τὴν τυχοῦσαν $g : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$,

$$\prod_{\omega \in \{0,1\}^{d+1}} g(x+\omega\cdot h) = \prod_{\omega' \in \{0,1\}^d} \big(g(x+\omega'\cdot h')g(x+h_{d+1}+\omega'\cdot h')\big)$$

γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N, h=(h', h_{d+1}) \in \mathbb{Z}_N^d \times \mathbb{Z}_N$ (ὅπως ἀκριβῶς ἰσχύει γιὰ κάθε ἀκολουθίαν $(f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^{d+1}}$ στὴν ὁποίαν ἡ f_ω δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ τελευταῖον ψηφίον ω_{d+1}), καὶ ἄρα, σὲ συνδυασμὸν μὲ τὴν ἐπαγωγικήν μας ὑπόθεσιν,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\prod_{\omega \in \{0,1\}^{d+1}} g(x+\omega\cdot h) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N, h \in \mathbb{Z}_N^{d+1}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{\omega' \in \{0,1\}^d} \big(g(x+\omega'\cdot h')g(x+h_{d+1}+\omega'\cdot h')\big) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N, h' \in \mathbb{Z}_N^d\right) \,\middle|\, h_{d+1} \in \mathbb{Z}_N\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\left\|g\left(T^{(-h_{d+1})}g\right)\right\|_{U^d}^{2^d} \,\middle|\, h_{d+1} \in \mathbb{Z}_N\right) = \|g\|_{U^{d+1}}^{2^{d+1}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Δείχνουμε τώρα ότι τό ἐσωτερικὸν γινόμενον Gowers ἱκανοποιεῖ μίαν γενικευμένην ἀνισότητα Cauchy-Schwarz, ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτει καὶ ἡ ὑποπροσθετικότης τῶν U^d :

Λῆμμα 1.2.6 (Ἀνισότης Gowers-Cauchy-Schwarz). *Ἔστω $d \geq 1$. Γιὰ κάθε ἀκολουθίαν $(f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}$ ἀπὸ συναρτήσεις $f_\omega : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$, ἰσχύει*

$$|\langle (f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d}| \leq \prod_{\omega \in \{0,1\}^d} \|f_\omega\|_{U^d}.$$

Ἀπόδειξις. Δείχνουμε γενικότερα μὲ ἐπαγωγὴν στὸ $l \leq d$ τὸ ἑξῆς: ἂν $(f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}$ εἶναι ἀκολουθία συναρτήσεων μὲ τὴν ἰδιότητα ἡ f_ω νὰ μὴν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ τελευταῖα $d-l$ ψηφία, δηλαδὴ $f_\omega \equiv f_{\omega_1,\ldots,\omega_l,0,\ldots,0}$, τότε ἰσχύει

$$|\langle (f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d}| \leq \prod_{\omega' \in \{0,1\}^l} \|f_{\omega',0^{d-l}}\|_{U^d}^{2^{d-l}},$$

ὅπου 0^{d-l} εἶναι τὸ διάνυσμα τοῦ $\{0,1\}^{d-l}$ μὲ μηδενικὲς μόνον συντεταγμένες. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀνισότης Gowers-Cauchy-Schwarz εἶναι ἀκριβῶς ἡ περίπτωσις $l = d$.

῾Η βάσις τῆς ἐπαγωγῆς μας, ἡ περίπτωσις $l = 0$, προκύπτει ἐξ ὁρισμοῦ τῆς U^d νόρμας. Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον ἰσχύει γιὰ κάποιο $0 \leq l < d$, καὶ ἔστω ἀκολουθία συναρτήσεων $(f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}$ μὲ τὴν ἰδιότητα ἡ f_ω νὰ μὴν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ τελευταῖα $d-(l+1)$ ψηφία. Τότε $f_\omega \equiv f_{\omega_1,\ldots,\omega_l,\omega_{l+1},0,\ldots,0}$ καὶ

$$
\begin{aligned}
&\big\langle (f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\big\rangle_{U^d} \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^d\\ \omega_{l+1}=0}} f_\omega(x+\omega\cdot h) \prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^d\\ \omega_{l+1}=0}} f_\omega(x+\omega\cdot h)\,\Big|\, x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N^d\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^d\\ \omega_{l+1}=0}} f_\omega(x+\omega'\cdot h') \prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^d\\ \omega_{l+1}=1}} f_\omega(x+h_{l+1}+\omega'\cdot h')\,\Big|\, x,h_{l+1}\in\mathbb{Z}_N, h'\in\mathbb{Z}_N^{d-1}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^d\\ \omega_{l+1}=0}} f_\omega(y+\omega'\cdot h')\,\Big|\, y\in\mathbb{Z}_N\right)\right.\\
&\qquad\left.\times\mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^d\\ \omega_{l+1}=1}} f_\omega(y+\omega'\cdot h')\,\Big|\, y\in\mathbb{Z}_N\right)\,\Big|\, h'\in\mathbb{Z}_N^{d-1}\right),
\end{aligned}
$$

ὅπου $\omega' = (\omega_1,\ldots,\omega_l,\omega_{l+2},\ldots,\omega_d)\in\{0,1\}^{d-1}$ καὶ $h' = (h_1,\ldots,h_l,h_{l+2},\ldots,h_d)$. Συνεπῶς, χρησιμοποιῶντας τὴν κλασσικὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz,

$$
\begin{aligned}
&\big|\big\langle (f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\big\rangle_{U^d}\big| \\
&\qquad\leq \mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^d\\ \omega_{l+1}=0}} f_\omega(y+\omega'\cdot h')\,\Big|\, y\in\mathbb{Z}_N\right)\right|^2\Big|\, h'\in\mathbb{Z}_N^{d-1}\right)^{1/2}\\
&\qquad\quad\times\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^d\\ \omega_{l+1}=1}} f_\omega(y+\omega'\cdot h')\,\Big|\, y\in\mathbb{Z}_N\right)\right|^2\Big|\, h'\in\mathbb{Z}_N^{d-1}\right)^{1/2}\\
&\qquad= \big\langle (g_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\big\rangle_{U^d}^{1/2} \times \big\langle (h_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\big\rangle_{U^d}^{1/2}
\end{aligned}
$$

ὅπου $g_\omega := f_{\omega_1,\dots,\omega_l,0,\omega_{l+2},\dots,\omega_d}$ καὶ $h_\omega := f_{\omega_1,\dots,\omega_l,1,\omega_{l+2},\dots,\omega_d}$. Ἕπεται ὅτι ἡ $(g_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}$ εἶναι ἀκολουθία συναρτήσεων μὲ τὴν ἰδιότητα ἡ g_ω νὰ μὴν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ τελευταῖα $d-l$ ψηφία, τὸ ἴδιον καὶ ἡ $(h_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}$. Ἄρα, ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴν ὑπόθεσιν,

$$\begin{aligned}\big\langle (g_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\big\rangle_{U^d}^{1/2} \times \big\langle (h_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\big\rangle_{U^d}^{1/2} &\leq \prod_{\omega'\in\{0,1\}^l} \|g_{\omega',0^{d-l}}\|_{U^d}^{2^{d-l-1}} \prod_{\omega'\in\{0,1\}^l} \|h_{\omega',0^{d-l}}\|_{U^d}^{2^{d-l-1}}\\ &= \prod_{\omega'\in\{0,1\}^l} \|g_{\omega',0^{d-l}}\|_{U^d}^{2^{d-l-1}} \prod_{\omega'\in\{0,1\}^l} \|h_{\omega',1,0^{d-l-1}}\|_{U^d}^{2^{d-l-1}},\end{aligned}$$

δηλαδὴ

$$\begin{aligned}|\langle (f_\omega)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d}| &\leq \prod_{\omega'\in\{0,1\}^l} \|g_{\omega',0^{d-l}}\|_{U^d}^{2^{d-l-1}} \prod_{\omega'\in\{0,1\}^l} \|h_{\omega',1,0^{d-l-1}}\|_{U^d}^{2^{d-l-1}}\\ &= \prod_{\omega''\in\{0,1\}^{l+1}} \|f_{\omega'',0^{d-l-1}}\|_{U^d}^{2^{d-l-1}}.\end{aligned}$$ □

Πόρισμα 1.2.7. *Γιὰ κάθε $f,g:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$, ἰσχύει*

$$\|f+g\|_{U^d} \leq \|f\|_{U^d} + \|g\|_{U^d}.$$

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ τὴν διγραμμικότητα τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου Gowers ἔχουμε ὅτι

$$\langle (f+g)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d} = \sum_{A\subseteq\{0,1\}^d} \langle (h_\omega^A)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d} \text{ ὅπου } h_\omega^A = \begin{cases} f & \text{ἂν } \omega\in A\\ g & \text{ἀλλιῶς}\end{cases}.$$

Ἄρα, ἀπὸ τὸν τύπον (1.16) τῆς U^d νόρμας καὶ τὸ προηγούμενον λῆμμα, προκύπτει

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{U^d}^{2^d} = \langle (f+g)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d} &\leq \sum_{A\subseteq\{0,1\}^d} \left|\langle (h_\omega^A)_{\omega\in\{0,1\}^d}\rangle_{U^d}\right|\\ &\leq \sum_{A\subseteq\{0,1\}^d} \|f\|_{U^d}^{|A|}\cdot\|g\|_{U^d}^{2^d-|A|} = (\|f\|_{U^d}+\|g\|_{U^d})^{2^d}.\end{aligned}$$ □

Βλέπουμε λοιπὸν ὅτι οἱ U^d γιὰ $d\geq 2$ εἶναι κανονικὲς νόρμες, καὶ ὅτι μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε τὶς δυϊκές τους, οἱ ὁποῖες ὁρίζονται μὲ τὸν συνήθη τρόπον:

$$\|g\|_{(U^d)^*} := \sup\{|\langle f,g\rangle| : \|f\|_{U^d}\leq 1\}.$$

Εἰσάγουμε ἐπίσης κάποιαν ὁρολογίαν: θεωρῶντας φυσικὸν $k\geq 3$ καὶ πραγματικὸν $\varepsilon>0$, θὰ λέμε *$\varepsilon-$Gowers ὁμοιόμορφην*, ἢ ἁπλῶς *Gowers ὁμοιόμορφην* ἂν δὲν ὑπάρχει σύγχυσις, κάθε συνάρτησιν $f:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$ γιὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει $\|f\|_{U^{k-1}}\leq\varepsilon$. Ἡ βασικὴ παρατήρησις γιὰ αὐτὲς τὶς συναρτήσεις, ἡ ὁποία θὰ διατυπωθεῖ αὐστηρὰ στὶς ἐνότητες 1.4, 1.5, εἶναι ἡ ἑξῆς: ἄν, μὲ κάποιον τρόπον τὸν ὁποῖον θὰ δοῦμε ἀργότερα, καταφέρουμε νὰ γράψουμε τὴν τυχοῦσαν f τῶν Θεωρημάτων 1.1.1 καὶ 1.1.10 ὡς ἄθροισμα δύο συνιστωσῶν f_1, f_2, μὲ τὴν f_1 νὰ εἶναι $\varepsilon-$Gowers ὁμοιόμορφη γιὰ κατάλληλον ε, καὶ τὴν f_2 νὰ ἱκανοποιεῖ ἀνισότητες σὰν τὶς $(1.1), (1.12)$, τότε θὰ μποροῦμε αὐτομάτως νὰ συμπεράνουμε ὅτι καὶ ἡ f ἱκανοποιεῖ ἀνισότητες σὰν τὶς $(1.1), (1.12)$, δεδομένου ὅτι θὰ ἰσχύει

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f(x) | x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \approx \mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f_2(x) | x, r \in \mathbb{Z}_N\right).$$

Τὴν παρατήρησιν αὐτὴν μποροῦμε νὰ τὴν σκεφτόμαστε καὶ ἀντιστρόφως: ἂν στὸν φορέα κάποιας μὴ ἀρνητικῆς συναρτήσεως g (ἐν προκειμένῳ τῆς f_2) περιέχονται ἀρκετὲς ἀριθμητικὲς πρόοδοι μήκους k, τότε καὶ νὰ προσθέσουμε στὴν g μίαν Gowers ὁμοιόμορφην συνάρτησιν h (δηλαδὴ μίαν συνάρτησιν h μὲ $\|h\|_{U^{k-1}} \ll 1$), μποροῦμε νὰ εἴμαστε σίγουροι ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμητικῶν προόδων μήκους k στὸν φορέα τῆς καινούριας συναρτήσεως $g+h$ δὲν θὰ διαφέρει σημαντικὰ ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον πλῆθος στὸν φορέα τῆς g. Κατὰ συνέπειαν, οἱ $\varepsilon-$Gowers ὁμοιόμορφες συναρτήσεις h (μὲ τὸ ε νὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ k καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{\mathbb{Z}_N} g$) εἶναι ἀμελητέες ὅταν θέλουμε νὰ μετρήσουμε ἀριθμητικὲς προόδους μήκους k στὸν φορέα τοῦ ἀθροίσματος $g+h$.

Ἀναφέρουμε τέλος ὅτι οἱ νόρμες U^d ἔχουν καὶ ἄλλες ἐνδιαφέρουσες ἰδιότητες, τὶς ὁποῖες ὅμως δὲν θὰ χρειαστοῦμε. Παραδείγματος χάριν, ἰσχύει

$$\|f\|_{U^1} \leq \|f\|_{U^2} \leq \cdots \leq \|f\|_{U^{k-1}} \leq \cdots \leq \|f\|_{L^\infty}$$

μὲ τὶς $\|f\|_{U^d}$ νὰ συγκλίνουν στὴν $\|f\|_{L^\infty}$, μὲ ῥυθμὸν ὅμως ποὺ μπορεῖ νὰ εἶναι ἀργὸς καὶ ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ N.

1.3 Οἱ νόρμες UAP^d τῆς ὁμοιόμορφης σχεδὸν περιοδικότητος

Ὅπως θὰ δοῦμε, οἱ Green καὶ Tao δὲν ἀποδεικνύουν εὐθέως τὸ Θεώρημα 1.1.10, ἀλλὰ βασίζονται στὸ ὅτι ἰσχύει τὸ Θεώρημα 1.1.1, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιοῦν σὰν «μαῦρο κουτί», χωρὶς νὰ ἐνδιαφέρονται δηλαδὴ γιὰ τὸ πῶς αὐτὸ ἀποδεικνύεται καὶ χωρὶς νὰ χρησιμοποιοῦν κάτι ποὺ προκύπτει κατὰ τὴν ἀπόδειξίν του (καλοῦν αὐτὴν τὴν τεχνικὴν *ἀρχὴν μεταφορᾶς*). Γιὰ τὸν λόγον αὐτόν, τοὺς ἀρκοῦν οἱ νόρμες U^d καὶ οἱ δυϊκές τους.

Ἀντιθέτως, γιὰ νὰ ἀποδείξει τὸ Θεώρημα 1.1.1, ὁ Tao ἀναγκάζεται νὰ εἰσαγάγει μίαν ἄλλην οἰκογένειαν νορμῶν, τὶς νόρμες τῆς ὁμοιόμορφης σχεδὸν περιοδικότητος (uniform almost periodicity norms)

$$\|\cdot\|_{UAP^0} \geq \|\cdot\|_{UAP^1} \geq \cdots \geq \|\cdot\|_{UAP^{k-2}} \geq \cdots \geq \|\cdot\|_{L^\infty},$$

μὲ ἰδιότητες ἰσχυρότερες ἀπὸ αὐτὲς τῶν $(U^d)^*$. Ἂς δοῦμε πῶς ὁρίζονται οἱ UAP^d :

Ὁρισμός 1.3.1 (Ἄλγεβρες Banach). Ἕνας ὑπόχωρος A τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N$, ἐφοδιασμένος μὲ μίαν νόρμα $\|\cdot\|_A$, εἶναι ἄλγεβρα Banach ἂν γιὰ ὁποιεσδήποτε δύο συναρτήσεις $f, g \in A$, τὸ γινόμενόν τους ἀνήκει ἐπίσης στὸν χῶρον A, καὶ ἰσχύει $\|fg\|_A \leq \|f\|_A \|g\|_A$ (ἰδιότης τῆς ἄλγεβρας). Ζητοῦμε ἐπίσης γιὰ κάθε $f \in A$ νὰ ἰσχύει

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_A. \tag{1.17}$$

(Ἀφοῦ ἐξετάζουμε χώρους πεπερασμένης διαστάσεως, στοὺς ὁποίους ὅλες οἱ νόρμες εἶναι ἰσοδύναμες, ἡ (1.17) εἶναι συνέπεια τῆς ἰδιότητος τῆς ἄλγεβρας: θεωρῶντας $a > 0$ ὥστε γιὰ κάθε $f \in A$ νὰ ἰσχύει $a\|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_A$, παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε φυσικὸν $m \geq 1$,

$$a\big(\|f\|_{L^\infty}\big)^m = a\|f^m\|_{L^\infty} \leq \|f^m\|_A \leq \big(\|f\|_A\big)^m \Rightarrow a^{1/m}\|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_A,$$

ὁπότε ἀρκεῖ νὰ ἀφήσουμε τὸ m νὰ τείνει στὸ $+\infty$.)

Λέμε ὅτι ἡ A εἶναι ἀναλλοίωτη ὡς πρὸς μετατοπίσεις, ἂν γιὰ κάθε $f \in A$ καὶ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{Z}_N$, ἰσχύει $T^n f \in A$ καὶ $\|T^n f\|_A = \|f\|_A$. Ἀναλόγως, λέμε ὅτι ἡ A εἶναι ἀναλλοίωτη ὡς πρὸς διαστολές, ἂν γιὰ κάθε $f \in A$ καὶ κάθε $\lambda \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0\}$, ἰσχύει $f_\lambda \in A$ καὶ $\|f_\lambda\|_A = \|f\|_A$. Τέλος, μποροῦμε νὰ θεωροῦμε ὅτι $\|f\|_A = \infty$ ἂν $f \notin A$.

Ὁρισμός 1.3.2 (Νόρμες τῆς ὁμοιόμορφης σχεδὸν περιοδικότητος). Ἂν ἔχουμε ὑπόχωρον A τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N$, ὁ ὁποῖος εἶναι ἄλγεβρα Banach ἀναλλοίωτη ὡς πρὸς μετατοπίσεις, ὁρίζουμε τὸν χῶρον $UAP[A]$ ὅλων τῶν συναρτήσεων F γιὰ τὶς ὁποῖες ἡ τροχιά τους $\{T^n F : n \in \mathbb{Z}_N\}$ ἔχει μίαν ἀναπαράστασιν τῆς μορφῆς

$$T^n F = M \cdot \sum_{h \in H} t_h (c_{n,h} g_h) \text{ γιὰ κάθε } n \in \mathbb{Z}_N \tag{1.18}$$

ὅπου $M \geq 0$, τὸ $H (= H_{F,N})$ εἶναι μὴ κενόν, πεπερασμένον σύνολον δεικτῶν, τὰ t_h εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ποὺ ἀθροίζονται στὴν μονάδα ($\sum_{h \in H} t_h = 1$), οἱ g_h εἶναι φραγμένες συναρτήσεις, καὶ οἱ $c_{n,h}$ εἶναι συναρτήσεις τοῦ χώρου A μὲ $\|c_{n,h}\|_A \leq 1$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{Z}_N$ καὶ κάθε $h \in H$. Ὁρίζουμε $\|F\|_{UAP[A]}$ νὰ εἶναι τὸ infimum τῶν πραγματικῶν M ποὺ ἐμφανίζονται σὲ τέτοιες ἀναπαραστάσεις τῆς τροχιᾶς τῆς F.

Ὅπως καὶ στὴν προηγουμένην ἑνότητα, δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ περιοριστοῦμε σὲ πραγματικὲς συναρτήσεις τοῦ $\mathbb{Z}_N$, ἀλλὰ μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε ὅλες τὶς συναρτήσεις $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ (μὲ μόνην προσθήκην στὸν ὁρισμὸν τῆς ἄλγεβρας Banach, ὅτι θὰ πρέπει ἡ A νὰ εἶναι ἀναλλοίωτη ὡς πρὸς συζυγεῖς συναρτήσεις). Ἡ ἰδέα μάλιστα γιὰ τὶς UAP ἄλγεβρες προκύπτει ἀπὸ συναρτήσεις τῆς μορφῆς

$$F(x) := \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} a_j e(P_j(x)/N) \text{ γιὰ κάθε } x \in \mathbb{Z}_N, \tag{1.19}$$

ὅπου $J \geq 1$ εἶναι φυσικός, τὰ a_j εἶναι μιγαδικοὶ μὲ μέτρον τὸ πολὺ 1, καὶ τὰ P_j εἶναι πολυώνυμα φραγμένου βαθμοῦ μὲ συντελεστὲς ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N$. Ὁ Tao ὀνομάζει αὐτὲς τὶς συναρτήσεις *σχεδὸν περιοδικὲς συναρτήσεις τάξεως* d (ὅταν ὁ βαθμὸς τῶν πολυωνύμων P_j εἶναι τὸ πολὺ d). Ἡ παρατήρησις εἶναι ὅτι ἡ τροχιὰ τῶν μετατοπίσεων μίας τέτοιας συναρτήσεως μπορεῖ νὰ γραφεῖ ὡς

$$T^n F = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{J}(c_{n,j} g_j),\ n \in \mathbb{Z}_N,$$

ὅπου g_j θὰ εἶναι ἡ φραγμένη συνάρτησις $g_j(x) := a_j e(P_j(x)/N)$, καὶ $c_{n,j}$ ἡ συνάρτησις $c_{n,j}(x) := e\big((P_j(x-n) - P_j(x))/N\big)$, ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης τῆς μορφῆς (1.19) ἀλλὰ τάξεως $d-1$ ἀντὶ γιὰ d. Δηλαδὴ οἱ μετατοπίσεις μίας σχεδὸν περιοδικῆς συναρτήσεως τάξεως d γράφονται σὰν γραμμικοὶ συνδυασμοὶ κάποιων σταθερῶν (ἀνεξαρτήτων τοῦ n) φραγμένων συναρτήσεων g_j, καὶ οἱ συντελεστὲς $c_{n,j}$ δὲν εἶναι ἀριθμοὶ ἀλλὰ σχεδὸν περιοδικὲς συναρτήσεις μίας χαμηλότερης τάξεως. Ἔτσι γεννιέται ἡ σκέψις γιὰ ἀναδρομικὸν ὁρισμὸν τῶν UAP^d, ὁ ὁποῖος θὰ στηριχθεῖ στὴν ἑπομένην πρότασιν:

Πρότασις 1.3.3. *Ἂν ἡ A εἶναι ἄλγεβρα Banach, ἀναλλοίωτη ὡς πρὸς μετατοπίσεις, τότε τὸ ἴδιον ἰσχύει γιὰ τὸν χῶρον $UAP[A]$. Ἐπιπλέον, ἡ A εἶναι ὑποάλγεβρα τῆς $UAP[A]$, καὶ $\|f\|_{UAP[A]} \leq \|f\|_A$ γιὰ κάθε $f \in A$. Τέλος, ἂν ἡ A εἶναι ἀναλλοίωτη ὡς πρὸς διαστολές, τὸ ἴδιον ἰσχύει γιὰ τὴν $UAP[A]$.*

Ἀπόδειξις. Εὔκολα βλέπουμε ὅτι ὁ χῶρος $UAP[A]$ εἶναι κλειστὸς ὡς πρὸς τὸν βαθμωτὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς πρὸς μετατοπίσεις καὶ διαστολές, καί, ἂν ἡ A εἶναι μιγαδικὴ ἄλγεβρα Banach, ὡς πρὸς τὴν σχέσιν τῆς συζυγίας. Ἐπίσης, ἡ $\|\cdot\|_{UAP[A]}$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ καὶ θετικῶς ὁμογενής, ἀναλλοίωτη ὡς πρὸς μετατοπίσεις καὶ συζυγεῖς συναρτήσεις, ἐνῷ εἶναι ἀναλλοίωτη καὶ ὡς πρὸς διαστολές, ἂν ἡ A ἔχει αὐτὴν τὴν ἰδιότητα.

Βλέπουμε ἐπίσης ὅτι $\|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{UAP[A]}$: ἔστω $M > \|f\|_{UAP[A]}$, τότε ὑπάρχουν πεπερασμένον σύνολον δεικτῶν H, μὴ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ $(t_h)_{h\in H}$ οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν τὴν $\sum_{h\in H} t_h = 1$, φραγμένες συναρτήσεις $(g_h)_{h\in H}$, καὶ συναρτήσεις $(c_{n,h})_{n\in\mathbb{Z}_N, h\in H}$ τῆς A μὲ $\|c_{n,h}\|_A \leq 1$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{Z}_N$ καὶ $h \in H$, ὥστε νὰ ἔχουμε τὴν ἀναπαράστασιν (1.18) γιὰ τὴν τροχιὰν τῆς f. Ἀφοῦ ἀπὸ τὴν (1.17) ἔχουμε $\|c_{n,h}\|_{L^\infty} \leq \|c_{n,h}\|_A \leq 1$, ἕπεται γιὰ κάθε στοιχεῖον x τοῦ $\mathbb{Z}_N$ ὅτι $|c_{n,h}(x) g_h(x)| \leq 1$. Ἄρα,

$$|f(x)| = |T^0 f(x)| \leq M \cdot \sum_{h\in H} t_h |c_{0,h}(x) g_h(x)| \leq M \cdot \sum_{h\in H} t_h = M,$$

δηλαδὴ ἰσχύει $\|f\|_{L^\infty} \leq M$ γιὰ τὸ τυχὸν $M > \|f\|_{UAP[A]}$. Προκύπτει τὸ ζητούμενον, καὶ ἐξ αὐτοῦ ὅτι ἡ $\|\cdot\|_{UAP[A]}$ εἶναι θετική, δηλαδὴ ὅτι μηδενίζεται μόνον γιὰ τὴν μηδενικὴν συνάρτησιν.

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ χῶρος $UAP[A]$ περιέχει τὴν A, καὶ ἰσχύει $\|f\|_{UAP[A]} \leq \|f\|_A$ γιὰ κάθε $f \in A$ (ἀφοῦ γιὰ $f \neq 0$ ἔχουμε τὴν προφανῆ ἀναπαράστασιν τῆς τροχιᾶς της, $T^n f = \|f\|_A \cdot T^n g$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{Z}_N$, μὲ $g := f/\|f\|_A$, $\|g\|_A = 1 = \|T^n g\|_A$ γιὰ κάθε n).

Ἂς δείξουμε τώρα ὅτι ὁ χῶρος $UAP[A]$ εἶναι κλειστὸς ὡς πρὸς πεπερασμένα ἀθροίσματα συναρτήσεων καὶ ὅτι ἡ $\|\cdot\|_{UAP[A]}$ ἱκανοποιεῖ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα. Ἀφοῦ, ὅπως εἴδαμε, ἡ $\|\cdot\|_{UAP[A]}$ εἶναι ὁμογενὴς καὶ θετική, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι ἡ μοναδιαία μπάλα εἶναι κυρτή, δηλαδὴ ἂν $F, F' \in UAP[A]$ εἶναι τέτοιες ὥστε $\|F\|_{UAP[A]}, \|F'\|_{UAP[A]} \leq 1$, τότε γιὰ κάθε $\theta \in [0,1]$, $(1-\theta)F + \theta F' \in UAP[A]$ μὲ $\|(1-\theta)F+\theta F'\|_{UAP[A]} \leq 1$. *Ἂν δείξουμε αὐτό, τότε γιὰ ὁποιεσδήποτε μὴ μηδενικὲς συναρτήσεις $G, G' \in UAP[A]$ θὰ μποροῦμε νὰ θέσουμε $F := G/\|G\|_{UAP[A]}$ καὶ $F' := G'/\|G'\|_{UAP[A]}$, καὶ θὰ ἔχουμε γιὰ $\theta := \frac{\|G'\|_{UAP[A]}}{\|G\|_{UAP[A]}+\|G'\|_{UAP[A]}}$ ὅτι*

$$\begin{gathered}(1-\theta)F+\theta F' \in UAP[A] \ \textit{καὶ} \ \|(1-\theta)F+\theta F'\|_{UAP[A]} \leq 1 \Rightarrow \\ G+G' = \big(\|G\|_{UAP[A]} + \|G'\|_{UAP[A]}\big)\cdot((1-\theta)F+\theta F') \in UAP[A] \\ \textit{καὶ} \ \|G+G'\|_{UAP[A]} \leq \|G\|_{UAP[A]} + \|G'\|_{UAP[A]}.\end{gathered}$$

Ἂς θεωρήσουμε ἑπομένως $F, F' \in UAP[A]$ μὲ $\|F\|_{UAP[A]}, \|F'\|_{UAP[A]} \leq 1$. Ἀπὸ τὸν Ὁρισμὸν 1.3.2 ἔχουμε μὴ κενά, πεπερασμένα σύνολα δεικτῶν H, H', μὴ ἀρνητικοὺς πραγματικοὺς $(t_h)_{h\in H}$ καὶ $(t'_{h'})_{h'\in H'}$ ἔτσι ὥστε $\sum_{h\in H} t_h = \sum_{h'\in H'} t'_{h'} = 1$, φραγμένες συναρτήσεις $(g_h)_{h\in H}$ καὶ $(g'_{h'})_{h'\in H'}$, καθὼς καὶ συναρτήσεις $(c_{n,h})_{n\in\mathbb{Z}_N, h\in H}$ καὶ $(c'_{n,h'})_{n\in\mathbb{Z}_N, h'\in H'}$ τῆς A, ὥστε νὰ ἰσχύουν οἱ ἀναπαραστάσεις

$$T^nF = \sum_{h\in H} t_h(c_{n,h}g_h) \text{ καὶ } T^nF' = \sum_{h'\in H'} t'_{h'}(c'_{n,h'}g'_{h'}) \text{ γιὰ κάθε } n\in\mathbb{Z}_N, \tag{1.20}$$

μαζὶ μὲ τὶς ἐκτιμήσεις

$$\|c_{n,h}\|_A, \|c'_{n,h'}\|_A \leq 1 \text{ γιὰ κάθε } n\in\mathbb{Z}_N, h\in H, h'\in H'.$$

Ὑποθέτουμε χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος ὅτι τὰ σύνολα H, H' εἶναι ξένα, ἑπομένως μποροῦμε νὰ παραθέσουμε ὅλες τὶς συναρτήσεις μαζί, νὰ θεωρήσουμε δηλαδὴ τὸ διάνυσμα

$$\begin{gathered}(\tilde{c}_{n,\tilde{h}})_{n\in\mathbb{Z}_N, \tilde{h}\in H\cup H'} \\ \text{ὅπου } \tilde{c}_{n,\tilde{h}} := c_{n,\tilde{h}} \text{ ἂν } \tilde{h}\in H, \ \tilde{c}_{n,\tilde{h}} := c'_{n,\tilde{h}} \text{ ἀλλιῶς,}\end{gathered}$$

καὶ ὁμοίως τὸ διάνυσμα $(\tilde{g}_{\tilde{h}})_{\tilde{h}\in H\cup H'}$. Θέτουμε $s_{\tilde{h}} := (1-\theta)t_{\tilde{h}}$ ἂν $\tilde{h}\in H$, $s_{\tilde{h}} := \theta t'_{\tilde{h}}$ ἂν $\tilde{h}\in H'$, καὶ βλέπουμε ὅτι $\sum_{\tilde{h}\in H\cup H'} s_{\tilde{h}} = 1$ καὶ ὅτι, ὅπως ζητούσαμε,

$$T^n((1-\theta)F+\theta F') = \sum_{\tilde{h}\in H\cup H'} s_{\tilde{h}}(\tilde{c}_{n,\tilde{h}}\tilde{g}_{\tilde{h}}) \text{ γιὰ κάθε } n\in\mathbb{Z}_N.$$

Ἀναλόγως δείχνουμε τὴν ἰδιότητα τῆς ἄλγεβρας: ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῆς $\|\cdot\|_{UAP[A]}$ πάλι, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι ἡ μοναδιαία μπάλα εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς γινόμενα συναρτήσεων. Ὅπως καὶ πρίν, ξεκινοῦμε ἀπὸ τὴν (1.20) καὶ θεωροῦμε τὸ διάνυσμα

$$\begin{gathered}(\tilde{c}_{n,h,h'})_{n\in\mathbb{Z}_N, h\in H, h'\in H'} \\ \text{ὅπου } \tilde{c}_{n,h,h'} := c_{n,h}c'_{n,h'} \text{ γιὰ κάθε } n\in\mathbb{Z}_N, h\in H \text{ καὶ } h'\in H'.\end{gathered}$$

Ὁμοίως τὸ διάνυσμα $(\tilde{g}_{h,h'})_{h\in H, h'\in H'}$ μὲ $\tilde{g}_{h,h'} := g_h g'_{h'}$. Τότε, ἐπειδὴ ἡ A εἶναι ἄλγεβρα, κάθε $\tilde{c}_{n,h,h'} \in A$ καὶ $\|\tilde{c}_{n,h,h'}\|_A \le \|c_{n,h}\|_A \cdot \|c'_{n,h'}\|_A \le 1$, ἐνῷ κάθε $\tilde{g}_{h,h'}$ εἶναι φραγμένη ὡς γινόμενον φραγμένων συναρτήσεων. Θέτουμε $s_{h,h'} = t_h t'_{h'}$ γιὰ κάθε $h \in H, h' \in H'$, καὶ ἔχουμε ὅτι $\sum_{(h,h')\in H\times H'} s_{h,h'} = \big(\sum_{h\in H} t_h\big)\big(\sum_{h'\in H'} t'_{h'}\big) = 1$. Προκύπτει ἑπομένως ὅτι ἡ ἀναπαράστασις

$$T^n(FF') = \sum_{(h,h')\in H\times H'} s_{h,h'}(\tilde{c}_{n,h,h'}\tilde{g}_{h,h'}) \text{ γιὰ κάθε } n \in \mathbb{Z}_N$$

τῆς τροχιᾶς τῆς FF' εἶναι τῆς μορφῆς (1.18) (μὲ τὸ $M = 1$). □

Ὁρισμός 1.3.4. Οἱ νόρμες UAP^d γιὰ $d \ge 0$ ὁρίζονται ἀναδρομικῶς, θέτοντας UAP^0 νὰ εἶναι ἡ τετριμμένη ἄλγεβρα Banach τῶν σταθερῶν συναρτήσεων (ἐφοδιασμένη μὲ τὴν L^∞ νόρμα), καὶ ἔπειτα ὁρίζοντας $UAP^d := UAP[UAP^{d-1}]$ γιὰ κάθε $d \ge 1$. Ἀπὸ τὴν Πρότασιν 1.3.3 ἔχουμε ὅτι κάθε UAP^d εἶναι ἄλγεβρα Banach, ἀναλλοίωτη ὡς πρὸς μετατοπίσεις καὶ διαστολές.

Σύμφωνα μὲ τὴν σύμβασιν ποὺ ἔχουμε κάνει, γιὰ κάθε $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ ἡ ὁποία δὲν εἶναι σταθερή, ἰσχύει $\|f\|_{UAP^0} = \infty$. Γιὰ τὰ ὑπόλοιπα d ὅμως, ἡ $\|f\|_{UAP^d}$ εἶναι πεπερασμένη, δηλαδὴ οἱ ἀνωτέρας τάξεως ἄλγεβρες UAP^d περιέχουν ὅλες τὶς συναρτήσεις: ἀρκεῖ ἀπὸ τὴν Πρότασιν 1.3.3 καὶ τὸν Ὁρισμὸν 1.3.4, νὰ τὸ δείξουμε γιὰ τὴν UAP^1. Θεωροῦμε τυχοῦσαν $f \ne 0 : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ καὶ θέτουμε $g := f/\|f\|_{L^\infty}$. Τότε ἡ g εἶναι φραγμένη, τὸ ἴδιον καὶ οἱ μετατοπίσεις της. Γράφουμε

$$T^n f = N\|f\|_{L^\infty} \cdot \sum_{h\in\mathbb{Z}_N} \frac{1}{N}\delta_{n,h}\, T^h g \text{ γιὰ κάθε } n \in \mathbb{Z}_N,$$

ὅπου $\delta_{n,h}$ εἶναι ἡ σταθερὴ 1 ὅταν $n = h$, ἀλλιῶς εἶναι ἡ σταθερὴ 0. Βλέπουμε ἑπομένως ὅτι $f \in UAP^1$ καὶ $\|f\|_{UAP^1} \le N\|f\|_{L^\infty}$.

Ἄρα οἱ UAP^d νόρμες ἐφοδιάζουν τὸν χῶρον ὅλων τῶν συναρτήσεων μὲ δομὴν ἄλγεβρας Banach. Μάλιστα, ὁ Green παρετήρησε ὅτι ἡ ἄλγεβρα UAP^1 εἶναι ἡ γνωστὴ ἄλγεβρα Wiener, δηλαδὴ ὅτι ἡ UAP^1 νόρμα εἶναι ἴση μὲ τὴν ℓ^1 νόρμα τοῦ μετασχηματισμοῦ Fourier τῆς f.

Λῆμμα 1.3.5. *Γιὰ κάθε $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ ἔχουμε ὅτι*

$$\|f\|_{UAP^1} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \big|\mathbb{E}(f(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)\big|.$$

Ἀπόδειξις. Μὲ ἁπλοὺς ὑπολογισμοὺς βλέπουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις-χαρακτῆρες e_ξ, μὲ τύπον $e_\xi(x) := e(x\xi/N)$ γιὰ κάθε $x, \xi \in \mathbb{Z}_N$, ἔχουν UAP^1 νόρμα τὸ πολὺ 1: ἀρκεῖ νὰ γράψουμε τὴν τροχιὰν τῶν μετατοπίσεων τῆς e_ξ ὡς $\{c_{n,\xi}e_\xi : n \in \mathbb{Z}_N\}$ ὅπου $c_{n,\xi} \in UAP^0$ εἶναι ἡ σταθερὴ συνάρτησις $e(-n\xi/N)$.

Βάσει τοῦ τύπου ἀντιστροφῆς, γιὰ κάθε $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ ἔχουμε $f = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \hat{f}(\xi) \cdot e_\xi$, ἄρα ἀπὸ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα στὴν UAP^1,

$$\|f\|_{UAP^1} \le \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} |\hat{f}(\xi)| \cdot \|e_\xi\|_{UAP^1} \le \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} |\hat{f}(\xi)|.$$

Γιὰ νὰ δείξουμε τὴν ἀντίστροφην ἀνισότητα, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι ὅταν $\|f\|_{UAP^1} < 1$ τότε

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} |\hat{f}(\xi)| = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \big|\mathbb{E}(f(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)\big| \le 1.$$

Ὅμως ὅταν $\|f\|_{UAP^1} < 1$, μποροῦμε ἀπὸ τὸν Ὁρισμὸν 1.3.2 νὰ βροῦμε σύνολον H, μὴ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς $(t_h)_{h\in H}$ μὲ συνολικὸν ἄθροισμα τὴν μονάδα, φραγμένες συναρτήσεις $(g_h)_{h\in H}$ καὶ μιγαδικὲς σταθερὲς $(c_{n,h})_{n\in\mathbb{Z}_N,h\in H}$ μέτρου τὸ πολὺ 1, ὥστε νὰ ἔχουμε

$$T^n f(x) = \sum_{h\in H} t_h c_{n,h} g_h(x) \text{ γιὰ κάθε } x, n \in \mathbb{Z}_N.$$

Ἀφοῦ $\int_{\mathbb{Z}_N} f \cdot \bar{e}_\xi = \int_{\mathbb{Z}_N} T^n f \cdot T^n \bar{e}_\xi$ γιὰ κάθε n, ἔχουμε

$$\mathbb{E}(f(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(T^n f(x)e(-x\xi/N)e(n\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)|\, n \in \mathbb{Z}_N\big),$$

ἑπομένως, συνδυάζοντας μὲ τὴν μορφὴν τῶν μετατοπίσεων τῆς f, καταλήγουμε ὅτι

$$\begin{aligned}
&\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \big|\mathbb{E}(f(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)\big| \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \Big|\mathbb{E}\Big(\sum_{h\in H}(t_h c_{n,h} g_h(x))e(-x\xi/N)e(n\xi/N) \mid x, n \in \mathbb{Z}_N\Big)\Big| \\
&\le \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \sum_{h\in H} t_h \cdot \big|\mathbb{E}\big(c_{n,h} g_h(x)e(-x\xi/N)e(n\xi/N)|\, x, n \in \mathbb{Z}_N\big)\big| \\
&= \sum_{h\in H} t_h \cdot \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \big|\mathbb{E}(c_{n,h}e(n\xi/N)|n \in \mathbb{Z}_N)\big| \cdot \big|\mathbb{E}(g_h(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)\big|.
\end{aligned}$$

Ὅμως γιὰ κάθε h,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \big|\mathbb{E}(c_{n,h}e(n\xi/N)|n \in \mathbb{Z}_N)\big| \cdot \big|\mathbb{E}(g_h(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)\big| \\
&\le \Big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \big|\mathbb{E}(c_{n,h}e(n\xi/N)|n \in \mathbb{Z}_N)\big|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \big|\mathbb{E}(g_h(x)e(-x\xi/N)|x \in \mathbb{Z}_N)\big|^2\Big)^{1/2} \\
&= \|\hat{c}_{\cdot,h}\|_{\ell^2} \cdot \|\hat{g}_h\|_{\ell^2}
\end{aligned}$$

ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz, ὅπου οἱ συναρτήσεις $c_{\cdot,h}(n) := c_{n,h}$ καὶ g_h εἶναι φραγμένες ἐξαιτίας τῶν ὑποθέσεών μας. Ἕπεται ἀπὸ τὸ θεώρημα Plancherel ὅτι

$$\begin{aligned}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \big|\mathbb{E}(f(x)e(-x\xi/N)|x\in\mathbb{Z}_N)\big| &\le \sum_{h\in H} t_h\big(\|\hat{c}_{\cdot,h}\|_{\ell^2}\cdot\|\hat{g}_h\|_{\ell^2}\big)\\ &= \sum_{h\in H} t_h\big(\|c_{\cdot,h}\|_{L^2}\cdot\|g_h\|_{L^2}\big)\le 1. \qquad \square\end{aligned}$$

Δὲν θὰ ἀσχοληθοῦμε περαιτέρω μὲ μιγαδικὲς συναρτήσεις, ἀλλὰ μόνον μὲ τὶς συναρτήσεις ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N$ στὸ $\mathbb{R}$, ἀφοῦ αὐτὲς ἀρκοῦν γιὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν Θεωρημάτων 1.1.1 καὶ 1.1.10. Εἶναι ὅμως βολικὸ νὰ σκεφτόμαστε τὶς συναρτήσεις τῶν ὁποίων ἡ UAP^{k-2} νόρμα εἶναι φραγμένη σὰν συναρτήσεις τῆς μορφῆς (1.19). Ἡ μελέτη τέτοιων συναρτήσεων εἶναι χρήσιμη ἀφοῦ ἐμφανίζονται σὲ διαφόρους κλάδους, καὶ μάλιστα τελευταῖα χρησιμοποιοῦνται σὰν γενικεύσεις τῶν χαρακτήρων τῆς κλασσικῆς ἀναλύσεως Fourier [16], [17], [22].

Χρήσιμον εἶναι ἐπίσης νὰ δοῦμε τὴν σχέσιν τῶν νορμῶν UAP^d μὲ τὶς δυϊκὲς τῶν U^d :

Πρότασις 1.3.6. *Ἔστω φυσικὸς $k\ge 2$. Γιὰ ὁποιεσδήποτε συναρτήσεις $f,F:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$, μὲ τὴν $F\in UAP^{k-2}$, ἔχουμε*

$$|\langle f,F\rangle| \le \|f\|_{U^{k-1}}\|F\|_{UAP^{k-2}}.$$

Ἀπόδειξις. Μὲ ἐπαγωγὴν στὸ k : γιὰ $k=2$ τὸ ζητούμενον ἕπεται ἀπὸ τὴν (1.15) καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ F εἶναι ἀναγκαστικῶς σταθερή. Ἂς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι $k\ge 3$ καὶ ὅτι τὸ ζητούμενον ἔχει ἤδη δειχθεῖ γιὰ τὸ $k-1$. Ἀφοῦ οἱ νόρμες εἶναι ὁμογενεῖς καὶ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον διγραμμικόν, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε γιὰ κάθε $f,F:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$ μὲ $\|f\|_{U^{k-1}},\|F\|_{UAP^{k-2}}<1$, ὅτι $|\langle f,F\rangle|<1$.

Ἀπὸ τὸν Ὁρισμὸν 1.3.2 ὑπάρχουν πεπερασμένον σύνολον δεικτῶν H, μὴ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $(t_h)_{h\in H}$ ποὺ ἀθροίζονται στὴν μονάδα, φραγμένες συναρτήσεις $(g_h)_{h\in H}$, καὶ συναρτήσεις $(c_{n,h})_{n\in\mathbb{Z}_N,h\in H}$ τῆς ἄλγεβρας UAP^{k-3} μὲ $\|c_{n,h}\|_{UAP^{k-3}}\le 1$ γιὰ κάθε $n\in\mathbb{Z}_N$ καὶ $h\in H$, ὥστε οἱ μετατοπίσεις τῆς F νὰ γράφονται στὴν μορφὴν

$$T^nF=\sum_{h\in H} t_h(c_{n,h}g_h) \text{ γιὰ κάθε } n\in\mathbb{Z}_N.$$

Ἀφοῦ οἱ μετατοπίσεις ἀφήνουν ἀναλλοίωτα τὰ ὁλοκληρώματα, ἔχουμε

$$\langle f,F\rangle=\langle T^nf,T^nF\rangle=\int_{\mathbb{Z}_N} T^nf\cdot T^nF=\int_{\mathbb{Z}_N} T^nf\cdot\sum_{h\in H} t_h(c_{n,h}g_h).$$

Ἕπεται ὅτι

$$\begin{aligned}\langle f, F\rangle &= \mathbb{E}\big(\langle T^n f, T^n F\rangle \,|\, n\in\mathbb{Z}_N\big)\\ &= \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} T^n f\cdot \sum_{h\in H} t_h(c_{n,h}g_h) \,\big|\, n\in\mathbb{Z}_N\right)\\ &= \sum_{h\in H} t_h\cdot \mathbb{E}\big(g_h(x)\mathbb{E}\left(T^n f(x)c_{n,h}(x)\,|\, n\in\mathbb{Z}_N\right)\,|\, x\in\mathbb{Z}_N\big)\end{aligned}$$

ἐφ' ὅσον ἀλλάξουμε τὴν σειρὰν τῶν ὁλοκληρώσεων. Ἐφαρμόζουμε γιὰ κάθε h τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz στὴν ἔκφρασιν

$$\mathbb{E}\big(g_h(x)\mathbb{E}\left(T^n f(x)c_{n,h}(x)\,|\, n\in\mathbb{Z}_N\right)\,|\, x\in\mathbb{Z}_N\big),$$

καὶ λαμβάνουμε ὅτι

$$\begin{aligned}|\langle f, F\rangle| &\le \sum_{h\in H} t_h\cdot\Big[\mathbb{E}\left(|g_h(x)|^2\,|\,x\in\mathbb{Z}_N\right)\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(T^n f(x)c_{n,h}(x)\,|\,n\in\mathbb{Z}_N\right)\right|^2\,\big|\,x\in\mathbb{Z}_N\right)\Big]^{1/2}\\ &\le \sum_{h\in H} t_h\cdot\Big[\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(T^n f(x)c_{n,h}(x)\,|\,n\in\mathbb{Z}_N\right)\right|^2\,\big|\,x\in\mathbb{Z}_N\right)\Big]^{1/2}\end{aligned}$$

δεδομένου ὅτι οἱ g_h εἶναι φραγμένες συναρτήσεις.

Ὅμως ἀπὸ τὸ λῆμμα van der Corput ἔχουμε γιὰ κάθε $x\in\mathbb{Z}_N$,

$$\left|\mathbb{E}\left(T^n f(x)c_{n,h}(x)\,|\,n\in\mathbb{Z}_N\right)\right|^2 = \mathbb{E}\left((T^n f)(x)(T^{n+r}f)(x)c_{n,h}(x)c_{n+r,h}(x)\,|\,n,r\in\mathbb{Z}_N\right),$$

ἑπομένως, ἀλλάζοντας πάλι τὴν σειρὰν τῶν ὁλοκληρώσεων,

$$\begin{aligned}|\langle f, F\rangle| &\le \sum_{h\in H} t_h\cdot\left[\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\big((T^n f)(x)(T^{n+r}f)(x)c_{n,h}(x)c_{n+r,h}(x)\,|\,x\in\mathbb{Z}_N\big)\,|\,n,r\in\mathbb{Z}_N\right)\right]^{1/2}\\ &= \sum_{h\in H} t_h\cdot\left[\mathbb{E}\left(\left\langle T^n(f\,T^r f), c_{n,h}c_{n+r,h}\right\rangle\,|\,n,r\in\mathbb{Z}_N\right)\right]^{1/2}\\ &\le \sum_{h\in H} t_h\cdot\left[\mathbb{E}\left(\left|\left\langle T^n(f\,T^r f), c_{n,h}c_{n+r,h}\right\rangle\right|\,|\,n,r\in\mathbb{Z}_N\right)\right]^{1/2}\\ &= \sum_{h\in H} t_h\cdot\left[\mathbb{E}\left(\left|\left\langle f\,T^r f, T^{-n}(c_{n,h}c_{n+r,h})\right\rangle\right|\,|\,n,r\in\mathbb{Z}_N\right)\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Ἀφοῦ ἡ UAP^{k-3} εἶναι ἄλγεβρα Banach ἀναλλοίωτη ὡς πρὸς μετατοπίσεις, ἰσχύει

$$\|T^{-n}(c_{n,h}c_{n+r,h})\|_{UAP^{k-3}} = \|c_{n,h}c_{n+r,h}\|_{UAP^{k-3}} \le \|c_{n,h}\|_{UAP^{k-3}}\|c_{n+r,h}\|_{UAP^{k-3}} \le 1$$

γιὰ κάθε $n,r\in\mathbb{Z}_N$ καὶ $h\in H$, ἄρα ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴν ὑπόθεσιν

$$\left|\left\langle f\,T^r f, T^{-n}(c_{n,h}c_{n+r,h})\right\rangle\right| \le \|f\,T^r f\|_{U^{k-2}}$$

καὶ

$$\begin{aligned}|\langle f,F\rangle| &\le \sum_{h\in H} t_h \cdot \left[\mathbb{E}\big(\|f\,T^r f\|_{U^{k-2}}\,|\,n,r\in\mathbb{Z}_N\big)\right]^{1/2}\\ &= \left[\mathbb{E}\big(\|f\,T^r f\|_{U^{k-2}}\,|\,r\in\mathbb{Z}_N\big)\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιῶντας τὴν ἀνισότητα Hölder καὶ τὸν ῾Ορισμὸν (1.14), καταλήγουμε στὸ ζητούμενον:

$$|\langle f,F\rangle| \le \left[\mathbb{E}\left(\|f\,T^r f\|_{U^{k-2}}^{2^{k-2}}\,|\,r\in\mathbb{Z}_N\right)\right]^{1/2^{k-1}} = \|f\|_{U^{k-1}} < 1.$$

□

᾿Εξαιτίας τῆς Προτάσεως 1.3.6, καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι γιὰ κάθε $f:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$ καὶ γιὰ κάθε $k\ge 3$,

$$\|f\|_{(U^{k-1})^*} \le \|f\|_{UAP^{k-2}},$$

μὲ τὴν UAP^{k-2} νόρμα νὰ εἶναι τελικῶς γνησίως ἰσχυρότερη ἀπὸ τὴν $(U^{k-1})^*$: εἴδαμε, λόγου χάριν, στὸ Λῆμμα 1.3.5 ὅτι $\|f\|_{UAP^1} = \|\hat{f}\|_{\ell^1}$, ἀπὸ τὴν ἄλλην $\|f\|_{U^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^4}$ λόγῳ τοῦ Λήμματος 1.2.3, ἄρα $\|f\|_{(U^2)^*} = \|\hat{f}\|_{\ell^{4/3}}$.

1.4 Σκιαγράφησις τῆς ἀποδείξεως τοῦ Θεωρήματος 1.1.1

Χρειαζόμαστε τρία βασικὰ θεωρήματα, ὥστε νὰ γράψουμε τὴν f τοῦ Θεωρήματος 1.1.1 ὡς ἄθροισμα δύο συνιστωσῶν, ἡ μία ἐκ τῶν ὁποίων θὰ δείξουμε ὅτι ἱκανοποιεῖ ἀνισότητες σὰν τὴν (1.1), ἐνῷ ἡ ἄλλη θὰ συμβάλλει λίγο στὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.4.1 (Γενικευμένον θεώρημα von Neumann). *῎Εστω $k\ge 2$ φυσικός. Θεωροῦμε $\lambda_0,\dots,\lambda_{k-1}$ διακεκριμένα στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_N$. Τότε γιὰ ὁποιεσδήποτε φραγμένες συναρτήσεις $f_0,\dots,f_{k-1}:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$, ἔχουμε*

$$\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} f_j(x)\,|\,x,r\in\mathbb{Z}_N\right)\right| \le \min_{0\le j\le k-1} \|f_j\|_{U^{k-1}}.$$

Θεώρημα 1.4.2 (Θεώρημα Περιοδικῆς Δομῆς). *῎Εστωσαν $d\ge 0$, $k\ge 1$ φυσικοὶ καὶ $0<\delta, M<\infty$ πραγματικοί. ῎Εστω ὅτι οἱ $f_{U^\perp}, f_{UAP}:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$ εἶναι μὴ ἀρνητικές, φραγμένες συναρτήσεις γιὰ τὶς ὁποῖες*

$$\|f_{U^\perp} - f_{UAP}\|_{L^2} \le \frac{\delta^2}{1024k}, \tag{1.21}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_N} f_{U^\perp} \ge \delta \tag{1.22}$$

καὶ

$$\|f_{UAP}\|_{UAP^d} < M. \tag{1.23}$$

Τότε ἔχουμε

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu jr} f_{U^\perp}(x) \,\Big|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \Big| 0 \le r \le N_1\right) \gg_{d,k,\delta,M} 1 \tag{1.24}$$

γιὰ κάθε $\mu \in \mathbb{Z}_N$ *καὶ* $N_1 \ge 0$.

Παρατήρησις 1.4.3. Θὰ ἐφαρμόσουμε τὸ Θεώρημα 1.4.2 γιὰ συγκεκριμένες $f_{U^\perp}, f_{UAP}$ ποὺ σχετίζονται μὲ τὴν f τοῦ Θεωρήματος 1.1.1 καὶ τὶς ὁποῖες θὰ μᾶς δώσει ἑπόμενον θεώρημα. Μποροῦμε ὅμως ἤδη νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ Θεώρημα Περιοδικῆς Δομῆς γιὰ νὰ βροῦμε μίαν οἰκογένειαν θετικῶν σταθερῶν, ἀνάμεσα στὶς ὁποῖες θὰ εἶναι καὶ ἡ σταθερὰ $c(k,\delta)$ ποὺ ἀναζητοῦμε στὸ Θεώρημα 1.1.1. Πράγματι, γιὰ κάθε $d \ge 0$, $k \ge 1$ καὶ $0 < \delta, M < \infty$, βρίσκουμε (ἂν ὑπάρχουν) μὴ ἀρνητικές, φραγμένες $f_{U^\perp}, f_{UAP}$ ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς ἐκτιμήσεις (1.21) – (1.23), καὶ παρατηροῦμε ὅτι τότε

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu jr} f_{U^\perp}(x) \,\Big|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \Big| 0 \le r \le N_1\right) \ge c > 0$$

γιὰ μίαν σταθερὰν c ποὺ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ζευγάρι $(f_{U^\perp}, f_{UAP})$, γιὰ κάθε $\mu \in \mathbb{Z}_N$ καὶ $N_1 \ge 0$. Συμβολίζουμε λοιπὸν μὲ $c(d,k,\delta,M)$ τὸ infimum τοῦ συνόλου

$$\left\{\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu jr} f_{U^\perp}(x) | x \in \mathbb{Z}_N\right) \Big| 0 \le r \le N_1\right) \Big| \mu \in \mathbb{Z}_N, N_1 \ge 0, f_{U^\perp}, f_{UAP} \text{«καλές»}\right\}$$

ὅταν ὑπάρχουν «καλὲς» $f_{U^\perp}, f_{UAP}$, δηλαδὴ μὴ ἀρνητικές, φραγμένες, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς ἐκτιμήσεις (1.21) – (1.23) γιὰ τὰ συγκεκριμένα d,k,δ,M, καὶ τὸ Θεώρημα 1.4.2 μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι $c(d,k,\delta,M) > 0$.

Ὑπάρχουν βεβαίως περιπτώσεις ποὺ δὲν ὑπάρχουν «καλὲς» $f_{U^\perp}, f_{UAP}$ (καὶ στὶς ὁποῖες μποροῦμε ἁπλῶς νὰ θέσουμε $c(d,k,\delta,M) = 0$), παραδείγματος χάριν ἀπὸ τὴν (1.21) καὶ τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz βλέπουμε ὅτι

$$\int_{\mathbb{Z}_N} |f_{U^\perp} - f_{UAP}| \le \|f_{U^\perp} - f_{UAP}\|_{L^2} \le \frac{\delta^2}{1024k},$$

ἄρα ἀπὸ τὴν (1.22) ἔχουμε $\int_{\mathbb{Z}_N} f_{UAP} \ge \frac{\delta}{2}$, καὶ αὐτὸ σημαίνει ὅτι πρέπει

$$\frac{\delta}{2} \le \|f_{UAP}\|_{L^\infty} \le \|f_{UAP}\|_{UAP^d} < M.$$

Θεώρημα 1.4.4 (Θεώρημα Διασπάσεως). *Ἔστωσαν $k \geq 3$ φυσικὸς καὶ $0 < \delta \leq 1$ πραγματικός. Ἔστω $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ μὴ ἀρνητική, φραγμένη συνάρτησις γιὰ τὴν ὁποίαν $\int_{\mathbb{Z}_N} f \geq \delta$. Ἔστω ἐπίσης $F : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ αὐθαίρετη συνάρτησις (ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ k, δ). Τότε ὑπάρχουν θετικὸς ἀριθμὸς $M = O_{k,\delta,F}(1)$, φραγμένη συνάρτησις f_U, καὶ μὴ ἀρνητικές, φραγμένες $f_{U^\perp}, f_{UAP}$ ἔτσι ὥστε*

$$f = f_U + f_{U^\perp},$$

ἰσχύουν οἱ ἐκτιμήσεις $(1.21), (1.22), (1.23)$ μὲ $d = k - 2$, καθὼς καὶ ἡ ἐκτίμησις

$$\|f_U\|_{U^{k-1}} \leq F(M). \tag{1.25}$$

Τὸ γενικευμένον θεώρημα von Neumann ἔχει τὴν πιὸ εὔκολην ἀπόδειξιν ἀπὸ τὰ τρία, καὶ θὰ ἀποδειχθεῖ στὴν ἑνότητα 2.1. Τὰ ἄλλα δύο θεωρήματα θὰ χρειαστοῦν κάποιαν προεργασίαν, κάποια βοηθητικὰ λήμματα δηλαδή, τὰ ὁποῖα διατυπώνονται καὶ ἀποδεικνύονται στὶς ἑνότητες 2.2 καὶ 2.3. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ Κεφαλαίου 2 θὰ εἶναι ἀφιερωμένον στὸ νὰ δείξουμε πῶς ὁλοκληρώνονται τὰ Θεωρήματα Διασπάσεως καὶ Περιοδικῆς Δομῆς, μὲ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου νὰ εἶναι ἡ πιὸ δύσκολη καὶ νὰ ἐπικαλεῖται καὶ τὸ γνωστὸν ἀπὸ τὴν θεωρίαν Ramsey θεώρημα τοῦ van der Waerden. Ἂς σημειωθεῖ ὅτι ὁ σκελετὸς γιὰ τὴν απόδειξιν τοῦ Θεωρήματος 1.4.4 εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογος μὲ τὸν ἀντίστοιχον σκελετὸν τοῦ Θεωρήματος Διασπάσεως γιὰ ψευδοτυχαῖα μέτρα.

Ἂς δεχθοῦμε πρὸς τὸ παρὸν ὅτι ἰσχύουν τὰ Θεωρήματα $1.4.1, 1.4.2$ καὶ $1.4.4$, ὥστε νὰ δοῦμε πῶς ὁλοκληρώνεται ἡ ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.1.1.

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.1.1. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 1.4.4, γιὰ κάθε $F : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, ὑπάρχουν θετικὸς ἀριθμὸς $M = O_{k,\delta,F}(1)$, φραγμένη συνάρτησις f_U, καὶ μὴ ἀρνητικές, φραγμένες $f_{U^\perp}, f_{UAP}$ ἔτσι ὥστε νὰ ἰσχύουν οἱ ἐκτιμήσεις $(1.21) - (1.25)$ μὲ $d = k - 2$, καὶ νὰ ἔχουμε τὴν διάσπασιν

$$f = f_U + f_{U^\perp}. \tag{1.26}$$

Ἂς δοῦμε πῶς βρίσκουμε κατάλληλην F : ἀπὸ τὴν (1.26), μποροῦμε νὰ γράφουμε τὸ

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f(x) \,\Big|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right)$$

ὡς ἄθροισμα 2^k ὅρων τῆς μορφῆς

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} g_j(x) \,\Big|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \tag{1.27}$$

μὲ τὶς g_j νὰ εἶναι εἴτε ἡ f_U εἴτε ἡ $f_{U^\perp}$. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 1.4.1 μποροῦμε νὰ φράξουμε κάθε ὅρον στὸν ὁποῖον τουλάχιστον μία g_j εἶναι ἴση μὲ τὴν f_U ἀπὸ $\|f_U\|_{U^{k-1}}$, καὶ ἄρα, λόγῳ τῆς (1.25), ἀπὸ $F(M)$. Γιὰ τὸν ἐναπομείναντα ὅρον ἰσχύει

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f_{U^\perp}(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k-2, k, \delta, M) =: c(k, \delta, M)$$

(ἀπὸ τὴν Παρατήρησιν 1.4.3 μὲ $\mu = 1, N_1 = N - 1$). Ἑπομένως,

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k, \delta, M) - (2^k - 1)F(M), \tag{1.28}$$

καὶ ἀρκεῖ νὰ θεωρήσουμε τὴν $F_0 : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ μὲ

$$F_0(M) = \frac{c(k, \delta, M)}{2(2^k - 1)} \text{ γιὰ κάθε } M.$$

(Τὰ M γιὰ τὰ ὁποῖα $c(k, \delta, M) = 0$ δὲν μᾶς ἐνδιαφέρουν, γιὰ λόγους ἁπλῶς ὀρθοῦ ὁρισμοῦ τῆς F_0 θέτουμε $F_0(M) = 1$ γιὰ αὐτά.) Σημειώνουμε ὅτι ἡ σταθερὰ ποὺ θὰ ἐμφανιστεῖ στὸ δεξιὸν μέλος τῆς (1.28) ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰ k, δ (καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν ἑκάστοτε $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$), ἀφοῦ $M = O_{k,\delta,F_0}(1)$ καὶ ἡ συνάρτησις F_0 ἐπελέγη μόνον βάσει τῶν παραμέτρων k, δ.

Γιὰ τὴν πιὸ γενικὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς f εἶναι ἴσον μὲ $\delta + o(1)$, ἀλλὰ ὄχι ἀναγκαστικὰ $\geq \delta$, χρησιμοποιοῦμε αὐτὸ ποὺ ἀναφέρεται στὴν Παρατήρησιν 1.1.2 (i), δηλαδὴ ὅτι γιὰ κάθε μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην συνάρτησιν $f_N : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ μὲ $\int_{\mathbb{Z}_N} f_N < \delta$, μποροῦμε νὰ βροῦμε μὴ ἀρνητικὴν $f_{N,err} : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ ὥστε

$$f_N + f_{N,err} \leq 1 \text{ στὸ } \mathbb{Z}_N, \quad \int_{\mathbb{Z}_N} (f_N + f_{N,err}) = \delta.$$

Ἡ συνάρτησις αὐτὴ μπορεῖ νὰ ὁριστεῖ ὡς ἑξῆς: ἔστω $m \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *ὁ ἐλάχιστος φυσικὸς γιὰ τὸν ὁποῖον*

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq m} (1 - f_N(n)) \geq \delta - \int_{\mathbb{Z}_N} f_N$$

(τέτοιος ὑπάρχει δεδομένου ὅτι $\frac{1}{N} \sum_{n \leq N-1} (1 - f_N(n)) + \int_{\mathbb{Z}_N} f_N = 1$*). Ἡ συνάρτησις* $h : [0, 1 - f_N(m)] \to \mathbb{R}$ *μὲ*

$$h(t) = \frac{t}{N} + \frac{1}{N} \sum_{n < m} (1 - f_N(n))$$

εἶναι συνεχής, ἑπομένως ἀπὸ τὸ θεώρημα ἐνδιαμέσου τιμῆς τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ ὑπάρχει $t_0 \in [0, 1 - f_N(m)]$ *ὥστε* $h(t_0) = \delta - \int_{\mathbb{Z}_N} f_N$*. Θέτουμε* $f_{N,err}(n) = 1 - f_N(n)$ *γιὰ* $n < m$, $f_{N,err}(m) = t_0$ *καὶ* $f_{N,err}(n) = 0$ *γιὰ* $n > m$.

Συνεπάγεται ὅτι ἂν συμβολίσουμε μὲ f_{err} τὴν ἀντίστοιχην οἰκογένειαν συναρτήσεων (θέτοντας $f_{N,err} \equiv 0$ ὅταν $\int_{\mathbb{Z}_N} f_N \geq \delta$), τότε

$$0 \leq f + f_{err} \leq 1 \text{ στὸ } \mathbb{Z}_N,$$
$$\int_{\mathbb{Z}_N} f_{err} = o(1) \text{ καὶ } \int_{\mathbb{Z}_N} (f + f_{err}) \geq \delta.$$

Λόγῳ τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως, ἰσχύει

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr}(f + f_{err})(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k, \delta).$$

Ἐπίσης, ἐπειδὴ οἱ f, f_{err} εἶναι φραγμένες, γιὰ κάθε ὅρον τῆς μορφῆς (1.27) ὅπου κάθε g_j ἰσοῦται εἴτε μὲ τὴν f εἴτε μὲ τὴν f_{err}, καὶ τουλάχιστον γιὰ κάποιο j_0 ἰσχύει $g_{j_0} = f_{err}$, ἔχουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} g_j(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \leq \mathbb{E}\big(f_{err}(x - j_0 r) \,|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\big) = \mathbb{E}(f_{err}) = o(1).$$

Τὸ ζητούμενον τώρα ἕπεται:

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq \mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr}(f + f_{err})(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) - (2^k - 1)o(1).$$

□

1.5 Σκιαγράφησις τῆς ἀποδείξεως τοῦ Θεωρήματος 1.1.10

Ἡ στρατηγικὴ γιὰ τὸ Θεώρημα 1.1.10 παραμένει ἡ ἴδια: χρειαζόμαστε δύο βασικὰ θεωρήματα καὶ τὸ θεώρημα 1.1.1 (τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιηθεῖ στὴν θέσιν τοῦ Θεωρήματος Περιοδικῆς Δομῆς).

Θεώρημα 1.5.1 (Γενικευμένον θεώρημα von Neumann). *Ἔστω* ν $k-$*ψευδοτυχαῖον μέτρον* ($k \geq 3$ *φυσικός*)*. Γιὰ ὁποιεσδήποτε συναρτήσεις* $f_0, \ldots, f_{k-1} : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ *γιὰ τὶς ὁποῖες*

(1.29) $$|f_j(x)| \leq \nu(x) + 1 \text{ γιὰ ὅλα τὰ } x \in \mathbb{Z}_N, 0 \leq j \leq k-1,$$

καὶ γιὰ κάθε μετάθεσιν $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1})$ *τοῦ* $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, *ἰσχύει*

$$\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} f_j(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right)\right| \leq 2^{k-1} \cdot \left(\min_{0 \leq j \leq k-1} \|f_j\|_{U^{k-1}}\right) + o(1). \tag{1.30}$$

Παρατήρησις. Ἀρχικῶς, μπορεῖ νὰ φαίνεται παράξενον ὅτι οἱ f_j φράσσονται ἀπολύτως ἀπὸ $\nu + 1$ καὶ ὄχι ν, δεδομένου ὅτι κατὰ τ' ἄλλα τὸ θεώρημα 1.5.1 εἶναι ἡ γενίκευσις τοῦ 1.4.1 γιὰ ψευδοτυχαῖα μέτρα (τὰ λ_j θέλουμε νὰ εἶναι μεταξὺ 0 καὶ k, γιὰ νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν $(k \cdot 2^{k-1}, 3k-4, k)-$συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν). Χρειαζόμαστε τὶς ἐκτιμήσεις (1.29) ἐπειδὴ θὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ θεώρημα γιὰ συναρτήσεις τῆς μορφῆς $f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ ὅπου ἡ f θὰ φράσσεται ἀπὸ τὸ ν καὶ ἡ δεσμευμένη μέση τιμή της ἀπὸ 1. Στὴν πραγματικότητα, θὰ ἀποδείξουμε τὸ θεώρημα γιὰ τὶς $f_j/2$ καὶ τὸ $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον $(\nu+1)/2$. Ἄρα, ἡ ἀπόδειξις ποὺ θὰ δώσουμε καλύπτει καὶ τὸ θεώρημα 1.4.1 (τουλάχιστον ὅταν $\lambda_j \in \{0, \ldots, k-1\}$), ἀφοῦ ὅπως θὰ δοῦμε τὰ σφάλματα στὴν (1.30) θὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ ν, καὶ θὰ εἶναι 0 ἂν $\nu = \nu_{const}$.

Θεώρημα 1.5.2 (Γενικευμένον Koopman-von Neumann θεώρημα διασπάσεως)**.** *Ἔστω* ν $k-$*ψευδοτυχαῖον μέτρον. Ἔστω* f *συνάρτησις τέτοια ὥστε γιὰ κάθε* $x \in \mathbb{Z}_N$, $0 \leq f(x) \leq \nu(x)$, *καὶ ἔστω* $0 < \varepsilon \ll 1$ *παράμετρος. Τότε ὑπάρχουν σ-ἄλγεβρα* $\mathcal{B}$ *καὶ σύνολον* $\Omega \in \mathcal{B}$ *ἔτσι ὥστε:*

- *(τὸ* Ω *εἶναι μικρόν ὡς πρὸς τὸ μέτρον* ν*)*

$$\mathbb{E}(\nu \mathbf{1}_\Omega) = o_\varepsilon(1), \tag{1.31}$$

- *(τὸ* ν *κατανέμεται ὁμοιόμορφα ἔξω ἀπὸ τὸ* Ω*)*

$$\|(1 - \mathbf{1}_\Omega)\mathbb{E}(\nu - 1|\mathcal{B})\|_{L^\infty} = o_\varepsilon(1), \tag{1.32}$$

- *(ἡ ὀρθογώνια στὴν* $\mathcal{B}$ *συνιστῶσα τῆς* f *εἶναι Gowers ὁμοιόμορφη)*
  γιὰ κάθε $N >$ *ἀπὸ κάποιο* $N_0(\varepsilon)$,

$$\|(1 - \mathbf{1}_\Omega)(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}))\|_{U^{k-1}} \leq \varepsilon^{1/2^k}. \tag{1.33}$$

Ἡ ἀπόδειξις τῶν δύο αὐτῶν θεωρημάτων θὰ γίνει στὸ Κεφάλαιον 3. Μποροῦμε ὅμως τώρα, χρησιμοποιῶντας μόνον τὶς διατυπώσεις τους, νὰ ἀποδείξουμε τὸ Θεώρημα 1.1.10.

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.1.10. Θεωροῦμε παράμετρον $0 < \varepsilon \ll \delta$ (ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ γίνει αὐθαίρετα μικρή). Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 1.5.2, βρίσκουμε σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ καὶ σύνολον

$\Omega \in \mathcal{B}$ ὥστε νὰ ἰσχύουν οἱ (1.31) – (1.33). Θέτουμε $f_U := (1 - \mathbf{1}_\Omega)(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}))$ καὶ $f_{U^\perp} := (1 - \mathbf{1}_\Omega)\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$. Τότε

$$\mathbb{E}(f_{U^\perp}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(f - \mathbf{1}_\Omega f|\mathcal{B})\right] \geq \mathbb{E}(f) - \mathbb{E}(\nu \mathbf{1}_\Omega) \geq \delta - o_\varepsilon(1).$$

Ἐπίσης, ἡ $f_{U^\perp}$ εἶναι μὴ ἀρνητική, ἀφοῦ εἶναι ἡ f, ἐνῷ φράσσεται, λόγῳ τῆς (1.32), ἀπὸ $1+o_\varepsilon(1)$. Μποροῦμε ἐπομένως νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ θεώρημα Szemerédi καὶ νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f_{U^\perp}(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k,\delta) - o_\varepsilon(1). \tag{1.34}$$

Στὴν πραγματικότητα, ἐφαρμόζουμε τὸ Θεώρημα 1.1.1 *γιὰ τὴν* $g_{U^\perp} := \min(f_{U^\perp}, 1)$. *Αὐτὴ εἶναι φραγμένη ἀπὸ* 1, *ἐνῷ ἰσχύει* $\|f_{U^\perp} - g_{U^\perp}\|_{L^\infty} = o_\varepsilon(1)$, *ἄρα* $\int_{\mathbb{Z}_N} g_{U^\perp} \geq \int_{\mathbb{Z}_N} f_{U^\perp} - o_\varepsilon(1)$. *Ἐπειδὴ προφανῶς* $0 \leq g_{U^\perp} \leq f_{U^\perp}$, *καταλήγουμε στὴν* (1.34).

Ἀπὸ τὴν ἄλλην, ἡ (1.33) μᾶς δίνει $\|f_U\|_{U^{k-1}} \leq \varepsilon^{1/2^k}$, ἐνῷ γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$,

$$\begin{aligned} 0 \leq ((1 - \mathbf{1}_\Omega)f)(x) \leq \nu(x) \text{ καὶ } 0 \leq f_{U^\perp}(x) \leq 1 + o_\varepsilon(1), \\ \Rightarrow |f_U(x)| \leq \nu(x) + 1 + o_\varepsilon(1). \end{aligned}$$

Ἄρα, ἐφαρμόζοντας τὸ Θεώρημα 1.5.1 γιὰ τὸ $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον $\nu + o_\varepsilon(1)$ (Λῆμμα 1.1.9), λαμβάνουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} g_j(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \leq 2^{k-1}\varepsilon^{1/2^k} + o_{\varepsilon,\nu}(1) \tag{1.35}$$

ὅποτε οἱ g_j εἶναι ἴσες εἴτε μὲ τὴν f_U εἴτε μὲ τὴν $f_{U^\perp}$, καὶ τουλάχιστον μία εἶναι ἴση μὲ τὴν f_U. Ἀπὸ τὶς (1.34) καὶ (1.35), προκύπτει γιὰ τὴν $\tilde{f} := f_U + f_{U^\perp} = (1 - \mathbf{1}_\Omega)f$ ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} \tilde{f}(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k,\delta) - O(\varepsilon^{1/2^k}) - o_{\varepsilon,\nu}(1).$$

Ἀλλὰ $0 \leq (1 - \mathbf{1}_\Omega)f \leq f$, συνεπῶς ἰσχύει ἐπίσης ἡ

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k,\delta) - O(\varepsilon^{1/2^k}) - o_{\varepsilon,\nu}(1). \tag{1.36}$$

Ἀρκεῖ πλέον νὰ παρατηρήσουμε ὅτι, θεωρῶντας ὅλο καὶ μεγαλύτερα N γιὰ τὰ ὁποῖα θὰ ἰσχύει ἡ (1.33), μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὰ παραπάνω γιὰ ὅλο καὶ μικρότερα ε. Ἄρα, πετυχαίνουμε τὰ σφάλματα στὴν (1.36) νὰ τείνουν στὸ 0, καὶ νὰ ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὰ k, δ καὶ τὸ μέτρον ν. □

Ὅπως μόλις εἴδαμε, ἡ μόνη οὐσιαστικὴ διαφορὰ μὲ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος 1.1.1 εἶναι ὅτι ἐδῶ χρειάζεται νὰ ἐπικαλεστοῦμε τὸ Θεώρημα Διασπάσεως 1.5.2 πολλὲς φορές (κατ' οὐσίαν νὰ τὸ ἐφαρμόσουμε γιὰ $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$), ὥστε νὰ δείξουμε ὅτι τὰ σφάλματα στὴν (1.36) τείνουν στὸ 0. Ἂν βεβαίως θέλαμε τὸ ὁλοκλήρωμα στὴν (1.36) νὰ φράσσεται ἀπὸ κάτω ἀπὸ $c(k,\delta)/2$ παραδείγματος χάριν, καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν ἴδιαν σταθερὰν τοῦ Θεωρήματος 1.1.1, θὰ χρειαζόταν μία μόνον ἐφαρμογὴ τοῦ Θεωρήματος 1.5.2 (καὶ φυσικὰ ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὸ N εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο). Θὰ ἀρκεστοῦμε σὲ τέτοιου εἴδους κάτω φράγμα στὸ Κεφάλαιον 4, ἔχοντας συγκεκριμένον $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον γιὰ τοὺς πρώτους, ὥστε νὰ μπορέσουμε νὰ ἀποδείξουμε τὸ Θεώρημα 1 τῆς Εἰσαγωγῆς.

Κεφάλαιον 2

Ἀποδείξεις τῶν κυρίων θεωρημάτων γιὰ τὸ θεώρημα Szemerédi

2.1 Τὸ γενικευμένον θεώρημα von Neumann

Θυμίζουμε πρῶτα τὴν διατύπωσίν του:

Θεώρημα 1.4.1. *Ἔστω $k \geq 2$ φυσικός. Θεωροῦμε $\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}$ διακεκριμένα στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_N$. Τότε γιὰ ὁποιεσδήποτε φραγμένες συναρτήσεις $f_0, \ldots, f_{k-1} : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$, ἔχουμε*

$$\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} f_j(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right)\right| \leq \min_{0 \leq j \leq k-1} \|f_j\|_{U^{k-1}}.$$

Ἡ ἀπόδειξις αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος εἶναι σαφῶς ἡ εὐκολότερη στὸν ἄρθρον τοῦ Tao. Γίνεται μὲ ἐπαγωγὴν στὸ k, ὅπως καὶ πολλὲς ἀπὸ τὶς ὑπόλοιπες ἀποδείξεις προτάσεων καὶ βοηθητικῶν λημμάτων γιὰ τὸ Θεώρημα 1.1.1. Προφανῶς αὐτὴ ἡ μέθοδος εἶναι ἡ πιὸ βολική, ἀλλὰ δυστυχῶς δὲν μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ καὶ στὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς ἀποδείξεως τοῦ Θεωρήματος 1.1.10, δηλαδὴ τοῦ θεωρήματος Szemerédi γιὰ ψευδοτυχαῖα μέτρα, ἀκριβῶς ἐπειδὴ ἐκεῖ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ k καὶ τὸ μέτρον ν ποὺ θεωροῦμε. Μάλιστα, ὅπως θὰ δοῦμε στὸ Κεφάλαιον 4, ὅπου θὰ ὁρίσουμε συγκεκριμένον $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον γιὰ τοὺς πρώτους, ἡ ἐξάρτησις ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν ἀριθμητικῶν προόδων τὶς ὁποῖες ψάχνουμε νὰ βροῦμε θὰ εἶναι οὐσιαστική.

Ἂς δοῦμε ὅμως πῶς ἀποδεικνύεται τὸ παραπάνω θεώρημα (ἡ ἀπόδειξις ποὺ ἀκολουθεῖ εἶναι κατ' οὐσίαν αὐτὴ ποὺ δίνει ὁ Gowers στὸ [17]) :

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.4.1. Ὅπως εἴπαμε, κάνουμε ἐπαγωγὴν στὸ k : γιὰ $k = 2$ ἔχουμε νὰ δείξουμε ὅτι

$$\big|\mathbb{E}\big(f_0(x-\lambda_0 r)f_1(x-\lambda_1 r)\,|\,x,r\in\mathbb{Z}_N\big)\big| \leq \min\{\|f_0\|_{U^1},\|f_1\|_{U^1}\}.$$

Ὑποθέτουμε χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος ὅτι $\lambda_1 \neq 0$. Τότε ἐπειδὴ ὁ N εἶναι πρῶτος, μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε αὐτομορφισμὸν τοῦ $\mathbb{Z}_N^2$ μὲ τύπον $(x,r)\mapsto(x+\lambda_0\lambda_1^{-1}r,\lambda_1^{-1}r)$, καὶ νὰ ἔχουμε

$$\begin{aligned}\big|\mathbb{E}\big(f_0(x-\lambda_0 r)f_1(x-\lambda_1 r)\,|\,x,r\in\mathbb{Z}_N\big)\big| &= \big|\mathbb{E}\big(f_0(x)f_1(x-r)\,|\,x,r\in\mathbb{Z}_N\big)\big|\\ &= \Big|\int_{\mathbb{Z}_N} f_0\Big|\cdot\Big|\int_{\mathbb{Z}_N} f_1\Big| = \|f_0\|_{U^1}\cdot\|f_1\|_{U^1}\end{aligned}$$

λόγῳ τῆς (1.15). Τὸ συμπέρασμα ἕπεται δεδομένου ὅτι, ἀφοῦ οἱ f_0, f_1 εἶναι φραγμένες, $\|f_0\|_{U^1}, \|f_1\|_{U^1} \leq 1$.

Γιὰ τὸ ἐπαγωγικὸν βῆμα, ὑποθέτουμε ὅτι τὸ θεώρημα ἔχει δειχθεῖ γιὰ κάποιο $k\geq 2$, καὶ ὅτι ἔχουμε $k+1$ φραγμένες συναρτήσεις $f_0,\ldots,f_{k-1},f_k:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$, καὶ $k+1$ διακεκριμένα στοιχεῖα $\lambda_0,\ldots,\lambda_{k-1},\lambda_k\in\mathbb{Z}_N$. Πρέπει νὰ δείξουμε ὅτι

$$\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k} T^{\lambda_j r}f_j(x)\,\Big|\,x,r\in\mathbb{Z}_N\right)\right| \leq \min_{0\leq j\leq k}\|f_j\|_{U^k}.$$

Μεταθέτοντας τὶς f_j καὶ τὰ λ_j ἂν χρειάζεται, ὑποθέτουμε ὅτι $\min\limits_{0\leq j\leq k}\|f_j\|_{U^k} = \|f_0\|_{U^k}$. Χρησιμοποιῶντας τὴν ἀντιστοιχίαν $(x,r)\mapsto(x+\lambda_k r, r)$, βλέπουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k} T^{\lambda_j r}f_j(x)\,\Big|\,x,r\in\mathbb{Z}_N\right) = \mathbb{E}\left(f_k(x)\cdot\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda'_j r}f_j(x)\,\Big|\,x,r\in\mathbb{Z}_N\right)$$

μὲ τὰ $\lambda'_j = \lambda_j - \lambda_k \neq 0$, ἑπομένως μποροῦμε ἐξαρχῆς νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $\lambda_k = 0$ καὶ ὅτι τὰ $\lambda_0,\ldots,\lambda_{k-1}$ εἶναι μὴ μηδενικὰ στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_N$. Χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν ἀντιστοιχίαν $(x,r)\mapsto(x,\lambda_0^{-1}r)$, μποροῦμε ἐπιπλέον νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $\lambda_0 = 1$. Θὰ ἔχουμε λοιπὸν νὰ δείξουμε ὅτι

$$\left|\mathbb{E}\left(f_k(x)\cdot\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r}f_j(x)\,\Big|\,r\in\mathbb{Z}_N\right)\,\Big|\,x\in\mathbb{Z}_N\right)\right| \leq \|f_0\|_{U^k}.$$

Ἀφοῦ ἡ f_k εἶναι φραγμένη, ἐφαρμόζοντας τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz βλέπουμε ὅτι ἀρκεῖ νὰ δειχθεῖ

$$\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r}f_j(x)\,\Big|\,r\in\mathbb{Z}_N\right)\right|^2\,\Big|\,x\in\mathbb{Z}_N\right) \leq \|f_0\|_{U^k}^2.$$

Ὅμως, ἀπὸ τὸ λῆμμα van der Corput γιὰ τὸ ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς r,

$$\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} f_j(x) \,\middle|\, r \in \mathbb{Z}_N\right)\right|^2 = \mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} f_j(x) \cdot \prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j (r+h)} f_j(x) \,\middle|\, r, h \in \mathbb{Z}_N\right)$$

γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$, ἄρα

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} f_j(x) \,\middle|\, r \in \mathbb{Z}_N\right)\right|^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} f_j(x) \cdot \prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j (r+h)} f_j(x) \,\middle|\, x, r, h \in \mathbb{Z}_N\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} \left(f_j\, T^{\lambda_h} f_j\right)(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \,\middle|\, h \in \mathbb{Z}_N\right).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιοῦμε τώρα τὴν ἐπαγωγικὴν ὑπόθεσιν: γιὰ κάθε $h \in \mathbb{Z}_N$,

$$\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} \left(f_j\, T^{\lambda_j h} f_j\right)(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right)\right| \leq \|f_0\, T^{\lambda_0 h} f_0\|_{U^{k-1}} = \|f_0\, T^h f_0\|_{U^{k-1}}$$

(ἐφ' ὅσον μποροῦμε, ὅπως εἴπαμε, νὰ ὑποθέτουμε ὅτι $\lambda_0 = 1$), ἄρα τελικῶς

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} f_j(x) \,\middle|\, r \in \mathbb{Z}_N\right)\right|^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) &\leq \mathbb{E}\left(\|f_0\, T^h f_0\|_{U^{k-1}} \,\middle|\, h \in \mathbb{Z}_N\right) \\
&\leq \left[\mathbb{E}\left(\|f_0\, T^h f_0\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}} \,\middle|\, h \in \mathbb{Z}_N\right)\right]^{2^{1-k}} = \|f_0\|_{U^k}^2,
\end{aligned}$$

ὅπου ἡ δεύτερη ἀνισότης εἶναι ἐφαρμογὴ τῆς ἀνισότητος Hölder, καὶ ἡ τελευταία ἰσότης εἶναι ὁ ὁρισμὸς τῆς U^k νόρμας. □

Παρατήρησις 2.1.1. Ἕνας ἄλλος τρόπος νὰ ἀποδείξουμε τὸ Θεώρημα 1.4.1 εἶναι νὰ δείξουμε ἐπαγωγικῶς ὅτι ἡ συνάρτησις

$$F(x) := \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{k-1} T^{\lambda'_j r} f_j(x) \,\middle|\, r \in \mathbb{Z}_N\right)$$

ἀνήκει στὴν μοναδιαίαν μπάλα τῆς ἄλγεβρας UAP^{k-2}, ὅταν οἱ f_j εἶναι φραγμένες καὶ τὰ $\lambda'_j = \lambda_j - \lambda_0$ εἶναι διακεκριμένα, μὴ μηδενικὰ στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_N$. Ἔπειτα, χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν Πρότασιν 1.3.6, συμπεραίνουμε ὅτι

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} f_j(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right)\right| &= \left|\mathbb{E}\left(f_0(x) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} T^{\lambda'_j r} f_j(x) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right)\right| \\ &= |\langle f_0, F\rangle| \leq \|f_0\|_{U^{k-1}} \|F\|_{UAP^{k-2}} \leq \|f_0\|_{U^{k-1}}.\end{aligned}$$

2.2 Τὸ Θεώρημα Διασπάσεως 1.4.4

Ἂς θυμηθοῦμε ὅτι ἔχουμε νὰ δείξουμε τὸ

Θεώρημα 1.4.4. *Ἔστωσαν $k \geq 3$ φυσικὸς καὶ $0 < \delta \leq 1$ πραγματικός. Ἔστω μὴ ἀρνητική, φραγμένη συνάρτησις $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ γιὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει $\int_{\mathbb{Z}_N} f \geq \delta$. Ἔστω ἐπίσης $F : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ αὐθαίρετη συνάρτησις (ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ k, δ). Τότε ὑπάρχουν θετικὸς ἀριθμὸς $M = O_{k,\delta,F}(1)$, φραγμένη συνάρτησις f_U, καὶ μὴ ἀρνητικές, φραγμένες $f_{U^\perp}, f_{UAP}$ ὥστε νὰ μποροῦμε νὰ γράψουμε*

$$f = f_U + f_{U^\perp},$$

καὶ νὰ ἰσχύουν οἱ ἐκτιμήσεις

$$\|f_U\|_{U^{k-1}} \leq F(M), \tag{2.1}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_N} f_{U^\perp} \geq \delta, \tag{2.2}$$

$$\|f_{UAP}\|_{UAP^{k-2}} < M \tag{2.3}$$

καὶ

$$\|f_{U^\perp} - f_{UAP}\|_{L^2} \leq \frac{\delta^2}{1024k}. \tag{2.4}$$

2.2.1 σ-Ἄλγεβρες ποὺ προκύπτουν ἀπὸ δοθεῖσες συναρτήσεις

Στὴν ἑνότητα 1.1 εἴδαμε κάποιες βασικὲς ἰδιότητες τῶν σ-ἀλγεβρῶν καὶ τῆς δεσμευμένης μέσης τιμῆς μίας συναρτήσεως. Αὐτὲς βεβαίως δὲν ἀρκοῦν: παρότι δὲν ἀναφέρεται στὴν διατύπωσιν τοῦ θεωρήματος, στὴν ἀπόδειξιν θὰ ἀναζητήσουμε κατάλληλην, ὡς πρὸς τὴν δοθεῖσαν f, σ-ἄλγεβρα, ὥστε νὰ γράψουμε τὴν f ὡς ἄθροισμα τῆς δεσμευμένης μέσης τιμῆς της καὶ τῆς κάθετης συνιστώσας. Κατάλληλη, ὡς πρὸς τὴν δοθεῖσαν f, σ-ἄλγεβρα ἀναζητεῖται καὶ στὸ Θεώρημα Διασπάσεως 1.5.2. Θὰ μᾶς χρειαστεῖ λοιπόν, τουλάχιστον γιὰ συναρτήσεις μὲ κάποιες καλὲς ἰδιότητες, νὰ μποροῦμε νὰ κατασκευάζουμε σ-ἄλγεβρες ποὺ θὰ σχετίζονται μὲ τὶς συγκεκριμένες συναρτήσεις καὶ θὰ ἀντανακλοῦν τὶς ἰδιότητές τους. Θὰ χρειαστεῖ ἔπειτα νὰ συσχετίσουμε τὴν f τῶν Θεωρημάτων 1.4.4 καὶ 1.5.2 μὲ τέτοιες καλὲς συναρτήσεις· θὰ δοῦμε πῶς γίνεται αὐτὸ στὴν ὑποενότητα 2.2.3.

Πρότασις 2.2.1. *Ἔστω $d \geq 0$, ἔστω $G \in UAP^d$ τέτοια ὥστε $\|G\|_{UAP^d} \leq M$ γιὰ κάποιο $M > 0$, καὶ ἔστω $\varepsilon > 0$. Τότε ὑπάρχει σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_\varepsilon(G) = \mathcal{B}_\varepsilon(G, d)$ μὲ τὶς ἑξῆς τρεῖς ἰδιότητες:*

- *(ἡ G εἶναι σχεδὸν $\mathcal{B}_\varepsilon(G)-$μετρήσιμη) γιὰ κάθε σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$, ἰσχύει*

$$\|G - \mathbb{E}(G|\mathcal{B}_\varepsilon(G) \vee \mathcal{B})\|_{L^\infty} \ll \varepsilon, \tag{2.5}$$

- *(Φραγμένη πολυπλοκότης) ἡ $\mathcal{B}_\varepsilon(G)$ παράγεται ἀπὸ τὸ πολὺ $O_{M,\varepsilon}(1)$ ἄτομα,*
- *(οἱ $\mathcal{B}_\varepsilon(G)-$μετρήσιμες προσεγγίζονται ἀπὸ σχεδὸν περιοδικὲς συναρτήσεις) γιὰ κάθε μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην συνάρτησιν f ἡ ὁποία εἶναι $\mathcal{B}_\varepsilon(G)-$μετρήσιμη, καὶ γιὰ κάθε $\delta > 0$, ὑπάρχει μὴ ἀρνητική, φραγμένη $f_{UAP} \in UAP^d$ ὥστε*

$$\|f - f_{UAP}\|_{L^2} \leq \delta \tag{2.6}$$

καὶ

$$\|f_{UAP}\|_{UAP^d} \ll_{M,\varepsilon,\delta} 1. \tag{2.7}$$

Ἀπόδειξις. Ἡ ἰδέα, ἡ ὁποία θὰ χρησιμοποιηθεῖ καὶ στὴν ἀντίστοιχην πρότασιν γιὰ τὸ Θεώρημα 1.5.2, εἶναι νὰ κατασκευάσουμε τὴν $\mathcal{B}_\varepsilon(G)$ ἔτσι ὥστε τὰ ἄτομά της νὰ εἶναι κατάλληλες ἀντίστροφες εἰκόνες τῆς G, ἔπειτα νὰ δείξουμε ὅτι μὲ μεγάλην πιθανότητα μία τέτοια σ-ἄλγεβρα ἔχει καὶ τὶς τρεῖς ἐπιθυμητὲς ἰδιότητες. Ἔστω $\alpha \in [0, 1)$ πραγματικὸς ἐπιλεγμένος ὁμοιόμορφα. Ὁρίζουμε $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$ νὰ εἶναι ἡ σ-ἄλγεβρα τῆς ὁποίας τὰ ἄτομα εἶναι τὰ σύνολα $G^{-1}\big([\varepsilon(n + \alpha), \varepsilon(n + 1 + \alpha))\big)$ γιὰ $n \in \mathbb{Z}$. Ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι μὲ θετικὴν πιθανότητα ἡ $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$ ἱκανοποιεῖ τὸ ζητούμενον τῆς προτάσεως (μὲ μίαν ὁμοιόμορφην, γιὰ τὰ «καλὰ» α, ἐπιλογὴν τῶν σταθερῶν στὶς τρεῖς ἰδιότητες).

Προφανῶς ἀπὸ τὴν κατασκευήν της, γιὰ κάθε $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$, καὶ γιὰ κάθε ἄτομον A σὲ αὐτήν, ἔχουμε ὅτι οἱ τιμὲς τῆς G στὰ $x \in A$ βρίσκονται σὲ κάποιο διάστημα τοῦ $\mathbb{R}$ μήκους ε. Τὸ ἴδιον βεβαίως συμβαίνει καὶ γιὰ κάθε ἄτομον A' ὁποιασδήποτε σ-ἄλγεβρας $\mathcal{B}$ ἡ ὁποία περιέχει τὰ ἄτομα τῆς $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$, ἄρα γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$,

$$\big|G(x) - \mathbb{E}(G|\mathcal{B})(x)\big| = \big|G(x) - \mathbb{E}(G(y)|\, y \in \mathcal{B}(x))\big| \leq \mathbb{E}\big(\big|G(x) - G(y)\big|\,|\, y \in \mathcal{B}(x)\big) \leq \varepsilon$$

(ὑπενθυμίζουμε ὅτι $\mathcal{B}(x)$ εἶναι τὸ μοναδικὸν ἄτομον τῆς $\mathcal{B}$ ποὺ περιέχει τὸ x.)

Πάλι ἀπὸ τὴν κατασκευὴν τῆς $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$, καὶ ἐπειδὴ $\|G\|_{L^\infty} \leq \|G\|_{UAP^d} \leq M$ (δηλαδὴ ἡ συνάρτησις G παίρνει τιμὲς στὸ διάστημα $[-M, M]$), προκύπτει ὅτι γιὰ κάθε $\alpha \in [0, 1]$ ἡ ἀντίστοιχη σ-ἄλγεβρα περιέχει τὸ πολὺ $\lfloor \frac{2M}{\varepsilon} \rfloor + 2$ ἄτομα. Βλέπουμε ἑπομένως ὅτι τὸ ποιὰ $\alpha \in [0, 1]$ εἶναι «καλὰ» θὰ ἐξαρτηθεῖ μόνον ἀπὸ τὴν τρίτην ἰδιότητα ποὺ πρέπει νὰ ἔχουν οἱ $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$. Γιὰ νὰ δείξουμε ὅτι αὐτὴ ἱκανοποιεῖται μὲ θετικὴν πιθανότητα, εἰσάγουμε μίαν βοηθητικὴν παράμετρον $\eta > 0$ καὶ δείχνουμε τὸ ἑξῆς:

Ἰσχυρισμός: Γιὰ κάθε $\delta > 0$ καὶ γιὰ κάθε $\eta > 0$, οἱ $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$ ἔχουν τὴν τρίτην ἰδιότητα τῆς διατυπώσεως γιὰ τὸ συγκεκριμένον δ μὲ πιθανότητα $> 1 - \eta$, ἂν βεβαίως ἐπιτρέψουμε τὸ φράγμα στὴν (2.7) νὰ ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ τὸ η.

Μποροῦμε ἔπειτα, γιὰ νὰ ὁλοκληρώσουμε τὴν ἀπόδειξιν, νὰ θεωρήσουμε τὴν τομὴν τῶν «καλῶν» συνόλων τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐφαρμόζοντας τὸν Ἰσχυρισμὸν γιὰ $\delta := 2^{-n}$ καὶ $\eta := \delta/2$, γιὰ κάθε φυσικὸν $n \geq 1$. Τὸ μέτρον αὐτῆς τῆς τομῆς θὰ εἶναι τουλάχιστον $1/2$, ἐνῷ γιὰ κάθε α σὲ αὐτὴν ἡ ἀντίστοιχη σ-ἄλγεβρα θὰ ἱκανοποιεῖ ἀκριβῶς τὴν διατύπωσιν τῆς προτάσεως.

Ἀπόδειξις τοῦ Ἰσχυρισμοῦ. Ἔστωσαν $\delta, \eta > 0$. Τὸ σύνολον τῶν μὴ ἀρνητικῶν, φραγμένων συναρτήσεων οἱ ὁποῖες εἶναι $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)-$μετρήσιμες, δηλαδὴ σταθερὲς σὲ κάθε ἄτομον τῆς σ-ἄλγεβρας $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$, εἶναι κυρτὸν μὲ ἀκραῖα σημεῖα τὶς χαρακτηριστικὲς συναρτήσεις τῶν συνόλων τῆς $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$. Εἶναι ἐπίσης κλειστὸν καὶ φραγμένον στὸν $L^\infty(\mathbb{Z}_N)$, ἄρα συμπαγές. Συνεπῶς, ἀπὸ τὸ θεώρημα Minkowski κάθε συνάρτησις f ἡ ὁποία εἶναι μὴ ἀρνητική, φραγμένη καὶ $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)-$μετρήσιμη, γράφεται ὡς κυρτὸς συνδυασμὸς χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων συνόλων τῆς $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$. Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ δείξουμε τὸ ζητούμενον γιὰ τὶς χαρακτηριστικές, ἀφοῦ ἂν $f = \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{1}_{\Omega_i}$ γιὰ κάποιο $n \in \mathbb{N}$, γιὰ $t_i \geq 0$ μὲ $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, καὶ γιὰ σύνολα $\Omega_i \in \mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$, καὶ γιὰ κάθε i ἔχουμε βρεῖ μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην $f_{UAP,i} \in UAP^d$ ὥστε

$$\|\mathbf{1}_{\Omega_i} - f_{UAP,i}\|_{L^2} \leq \delta \text{ καὶ } \|f_{UAP,i}\|_{UAP^d} \ll_{M,\varepsilon,\delta,\eta} 1,$$

τότε ἡ συνάρτησις $\sum_{i=1}^n t_i f_{UAP,i} \in UAP^d$ εἶναι μὴ αρνητική, φραγμένη, καὶ

$$\begin{aligned}\Big\|f - \sum_{i=1}^n t_i f_{UAP,i}\Big\|_{L^2} &\leq \sum_{i=1}^n t_i \|\mathbf{1}_{\Omega_i} - f_{UAP,i}\|_{L^2} \leq \sum_{i=1}^n t_i \delta = \delta,\\ \Big\|\sum_{i=1}^n t_i f_{UAP,i}\Big\|_{UAP^d} &\leq \sum_{i=1}^n t_i \|f_{UAP,i}\|_{UAP^d} \ll_{M,\varepsilon,\delta,\eta} \sum_{i=1}^n t_i = 1.\end{aligned}$$

Θεωροῦμε λοιπὸν σύνολον $\Omega \in \mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$. Ἀπὸ τὴν μορφὴν ποὺ ἔχουν τὰ ἄτομα τῆς $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_W \circ (\varepsilon^{-1} G - \alpha)$$

ὅπου τὸ $W \subset \mathbb{R}$ εἶναι ἕνωσις διαστημάτων, μεταφορῶν τοῦ $[0,1)$ οἱ ὁποῖες τέμνουν τὸ διάστημα $[-\varepsilon^{-1}M - 1, \varepsilon^{-1}M]$. Ὑπάρχουν $O_{M,\varepsilon}(1)$ διαφορετικὲς τέτοιες μεταφορές (ἡ ἴδια σταθερὰ μὲ τὴν ὁποίαν φράσσουμε τὸ πλῆθος τῶν ἀτόμων τῆς $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$), ἄρα καὶ τὰ πιθανὰ W εἶναι τὸ πολὺ $2^{O_{M,\varepsilon}(1)} = O_{M,\varepsilon}(1)$.

Ἔστω $0 < \sigma \ll 1/2$ ἕνας μικρὸς ἀριθμὸς ποὺ θὰ ἐπιλέξουμε ἀργότερα βάσει τῶν δ, η. Συμβολίζουμε μὲ ∂W_σ τὴν $\sigma-$περιοχὴν τοὺ συνόρου ∂W τοῦ W. Ἀπὸ τὸ λῆμμα τοῦ Urysohn μποροῦμε νὰ βροῦμε συνεχῆ συνάρτησιν $h_{W,\sigma}$ μὲ πεδίον τιμῶν τὸ $[0,1]$, ἡ ὁποία παίρνει τὴν τιμὴν 1 στὸ σύνολον $W \setminus \partial W_\sigma$ καὶ τὴν τιμὴν 0 στὸ $\mathbb{R} \setminus (W \cup \partial W_\sigma)$. Περιοριζόμενοι στὸ διάστημα $[-\varepsilon^{-1}M - 1, \varepsilon^{-1}M]$ (ἀφοῦ ἐκεῖ μᾶς ἐνδιαφέρουν οἱ τιμὲς τῆς $\mathbf{1}_W$), καὶ χρησιμοποιῶντας τὸ θεώρημα Weierstrass, βρίσκουμε πολυώνυμον $P = P_{W,\sigma}$ ὥστε γιὰ κάθε $r \in [-\varepsilon^{-1}M - 1, \varepsilon^{-1}M]$ νὰ ἰσχύει $|h_{W,\sigma}(r) - P(r)| \leq \sigma$. Τότε γιὰ κάθε

$x \in \mathbb{Z}_N$,

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad & |\mathbf{1}_\Omega(x) - P(\varepsilon^{-1}G(x)-\alpha)| \\
&\le |\mathbf{1}_\Omega(x) - h_{W,\sigma}(\varepsilon^{-1}G(x)-\alpha)| + |h_{W,\sigma}(\varepsilon^{-1}G(x)-\alpha) - P(\varepsilon^{-1}G(x)-\alpha)| \\
&\le \mathbf{1}_{\partial W_\sigma}(\varepsilon^{-1}G(x)-\alpha) + \sigma.
\end{aligned}
$$

Ἂν θέσουμε $f_{UAP} := P(\varepsilon^{-1}G - \alpha)$ καὶ θυμηθοῦμε ὅτι ἡ UAP^d εἶναι ἄλγεβρα Banach, ὅπως καὶ ὅτι $G \in UAP^d$ μὲ $\|G\|_{UAP^d} \le M$, καταλήγουμε ὅτι

$$f_{UAP} \in UAP^d \text{ καὶ } \|f_{UAP}\|_{UAP^d} = O_{M,\varepsilon,P}(1).$$

Ὅμως, ὅπως εἴπαμε, τὰ πιθανὰ W ποὺ ἐξετάζουμε καθορίζονται πλήρως ἀπὸ τὶς παραμέτρους M καὶ ε, ἄρα καὶ τὰ πολυώνυμα $P_{W,\sigma}$ ποὺ χρειάζεται νὰ βροῦμε ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὰ M, ε καὶ σ. Τελικῶς, μποροῦμε νὰ φράξουμε τὴν $\|f_{UAP}\|_{UAP^d}$ ἀπὸ μίαν σταθερὰν ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ αὐτὲς τὶς παραμέτρους, δηλαδὴ $\|f_{UAP}\|_{UAP^d} = O_{M,\varepsilon,\sigma}(1)$.

Ἐξετάζουμε τώρα τὸν ὅρον $\mathbf{1}_{\partial W_\sigma}(\varepsilon^{-1}G - \alpha)$: θυμόμαστε ἀρχικῶς ὅτι γιὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν r,

$$\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{r\in[n-\sigma+\alpha, n+\sigma+\alpha]} d\alpha = 2\sigma.$$

Πράγματι, γιὰ νὰ τὸ ἀποδείξουμε αὐτό, μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε περιπτώσεις γιὰ τὴν διαφορὰν $r-\lfloor r\rfloor$, ἂν δηλαδὴ $r-\lfloor r\rfloor \le \sigma$, ἢ ἂν $\sigma < r-\lfloor r\rfloor < 1-\sigma$, ἢ τέλος ἂν $1-\sigma \le r-\lfloor r\rfloor$. Ἂν παραδείγματος χάριν $r-\lfloor r\rfloor \le \sigma$, τότε

$$
\begin{gathered}
\textit{γιὰ κάθε } 0 \le \alpha \le r-\lfloor r\rfloor+\sigma,\ r \in [\lfloor r\rfloor-\sigma+\alpha, \lfloor r\rfloor+\sigma+\alpha], \\
\textit{γιὰ κάθε } r-\lfloor r\rfloor+1-\sigma \le \alpha \le 1,\ r \in [\lfloor r\rfloor-1-\sigma+\alpha, \lfloor r\rfloor-1+\sigma+\alpha], \\
\textit{καὶ γιὰ κάθε ἄλλο } \alpha \in [0,1],\ r \notin \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n-\sigma+\alpha, n+\sigma+\alpha],
\end{gathered}
$$

ἄρα $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{r\in[n-\sigma+\alpha,n+\sigma+\alpha]} d\alpha = \int_0^{r-\lfloor r\rfloor+\sigma} 1 + \int_{r-\lfloor r\rfloor+1-\sigma}^1 1 = 2\sigma.$

Ἕπεται λοιπὸν ἀπὸ τὸ θεώρημα Fubini ὅτι

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \|\mathbf{1}_{\partial W_\sigma}(\varepsilon^{-1}G-\alpha)\|^2_{L^2(\mathbb{Z}_N)} d\alpha &= \mathbb{E}\left(\int_0^1 \mathbf{1}_{\partial W_\sigma}(\varepsilon^{-1}G(x)-\alpha) d\alpha \,\Big|\, x\in\mathbb{Z}_N\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^1 \sum_{n\in\partial W} \mathbf{1}_{\varepsilon^{-1}G(x)-\alpha\in(n-\sigma,n+\sigma)} d\alpha \,\Big|\, x\in\mathbb{Z}_N\right) \\
&\le \mathbb{E}\left(\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{\varepsilon^{-1}G(x)\in[n-\sigma+\alpha,n+\sigma+\alpha]} d\alpha \,\Big|\, x\in\mathbb{Z}_N\right) \\
&= \mathbb{E}(2\sigma \mid x\in\mathbb{Z}_N) = 2\sigma.
\end{aligned}
$$

Συνδυάζοντας μὲ τὴν ἀνισότητα Markov, καταλήγουμε ὅτι

$$\mathbb{P}\Big(\alpha \in [0,1) : \|\mathbf{1}_{\partial W_\sigma}(\varepsilon^{-1}G-\alpha)\|_{L^2} \geq \sqrt{2\sigma/\eta}\Big) \leq \eta,$$

ἄρα τὸ σύνολον τῶν α γιὰ τὰ ὁποῖα $\|\mathbf{1}_{\partial W_\sigma}(\varepsilon^{-1}G-\alpha)\|_{L^2} = O_\eta(\sigma^{1/2})$ ἔχει μέτρον τουλάχιστον $1-\eta$. Γιὰ ὅλα αὐτὰ τὰ α ἔπεται πλέον ἀπὸ τὴν (2.8) ὅτι

$$\|\mathbf{1}_\Omega - f_{UAP}\|_{L^2} \leq \|\mathbf{1}_{\partial W_\sigma}(\varepsilon^{-1}G-\alpha)+\sigma\|_{L^2} \leq \sqrt{2\sigma/\eta}+\sigma,$$

ὁπότε ἀρκεῖ νὰ ἐπιλέξουμε τὸ σ κατάλληλα μικρὸν σὲ σχέσιν μὲ τὰ δ,η, ὥστε νὰ ἰσχύει $\sqrt{2\sigma/\eta}+\sigma \leq \delta$. □

Στὸ ἑξῆς, γιὰ κάθε UAP συνάρτησιν G καὶ κάθε ε, σταθεροποιοῦμε μίαν σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_\varepsilon(G)$ μὲ τὶς παραπάνω ἰδιότητες. Μποροῦμε μάλιστα στὴν διαδικασίαν αὐτὴν νὰ ἀποφύγουμε τὸ Ἀξίωμα Ἐπιλογῆς, παρότι ἡ παραπάνω ἀπόδειξις, ποὺ χρησιμοποιεῖ μεθόδους τῆς Θεωρίας Πιθανοτήτων, δὲν μπορεῖ νὰ ἐντοπίσει συγκεκριμένην σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_\varepsilon(G)$, ἀλλὰ ἁπλῶς δείχνει ὅτι ὑπάρχουν ἀρκετὲς «καλές». Εἶναι δυνατὸν ὅμως νὰ διατάξουμε (μὲ καθορισμένον τρόπον) τὶς σ-ἄλγεβρες στὸ $\mathbb{Z}_N$ (διατάσσοντας κατ' οὐσίαν τὶς διαμερίσεις τοῦ $\mathbb{Z}_N$), καὶ ἔπειτα, σταθεροποιῶντας τὶς ποσότητες ποὺ ὑπονοοῦνται στὴν τρίτην ἰδιότητα τῆς Προτάσεως 2.2.1 (καὶ οἱ ὁποῖες, ὅπως εἴδαμε, δὲν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν ἑκάστοτε G), νὰ ἐπιλέξουμε τὴν ἐλαχίστην $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(G)$ ἡ ὁποία πληροῖ τὶς προϋποθέσεις.

Ἐπιλέγουμε ἐπιπλέον τὴν $\mathcal{B}_\varepsilon(G)$ μὲ τέτοιον τρόπον ὥστε νὰ σέβεται τὶς μετατοπίσεις τῆς G, δηλαδὴ νὰ ἰσχύει

$$\mathcal{B}_\varepsilon(T^nG) = T^n\mathcal{B}_\varepsilon(G) \text{ γιὰ κάθε } n \in \mathbb{Z}, \tag{2.9}$$

ὅπου $T^n\mathcal{B} := \{T^n\Omega : \Omega \in \mathcal{B}\}$. Αὐτὸ θὰ μᾶς χρειαστεῖ στὴν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος Περιοδικῆς Δομῆς, καὶ μπορεῖ νὰ γίνει ὡς ἑξῆς: γιὰ κάθε συνάρτησιν f ἐπιλέγουμε μίαν συγκεκριμένην μετατόπισίν της f_0 μὲ τρόπον καθορισμένον (ταυτίζοντας λόγου χάριν τὶς συναρτήσεις ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N$ στὸ $\mathbb{R}$ μὲ τὰ διανύσματα τοῦ $\mathbb{R}^N$ κατὰ προφανῆ τρόπον, καὶ ἔπειτα διατάσσοντας τὶς μετατοπίσεις τῆς f λεξικογραφικῶς). Γιὰ τὴν f_0 ἐπιλέγουμε $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(f_0)$ ὅπως πάνω, γιὰ τὶς ὑπόλοιπες μετατοπίσεις τῆς f (ποὺ εἶναι καὶ μετατοπίσεις τῆς f_0) ἡ ἐπιλογὴ γίνεται μέσῳ τῆς (2.9). Ἔτσι, γιὰ κάθε T^nf_0 σταθεροποιοῦμε τὴν σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha}(T^nf_0)$, ἡ ὁποία ἀνήκει στὶς ἐπιτρεπτές, ἀφοῦ τὸ σύνολον τῶν «καλῶν» $\alpha \in [0,1]$ δὲν μεταβάλλεται ἀπὸ τὶς μετατοπίσεις T^n. Ἂς σημειώσουμε ὅτι δὲν ἐπιλέγουμε $\alpha \in [0,1]$. Ὁποιοδήποτε α' γιὰ τὸ ὁποῖον ἡ $\mathcal{B}_{\varepsilon,\alpha'}(f_0)$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη «καλὴ» σ-ἄλγεβρα γιὰ τὴν f_0, θὰ δώσει τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα.

Μποροῦμε τώρα νὰ γενικεύσουμε τὴν παραπάνω κατασκευήν, βρίσκοντας σ-ἄλγεβρες μὲ ἐξίσου καλὲς ἰδιότητες, ποὺ σχετίζονται μὲ πολλὲς συναρτήσεις ταυτοχρόνως.

Ὁρισμός 2.2.2 (Συμπαγεῖς σ-ἄλγεβρες)**.** Θεωροῦμε φυσικοὺς $d \geq 0$ καὶ $X \geq 0$. Μία σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ θὰ λέγεται **συμπαγὴς τάξεως d καὶ πολυπλοκότητος τὸ πολὺ X**, ἂν εἶναι τῆς μορφῆς

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\varepsilon_1}(G_1) \vee \ldots \vee \mathcal{B}_{\varepsilon_K}(G_K) \tag{2.10}$$

γιὰ κάποιο $0 \leq K \leq X$, κάποια $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_K \geq \frac{1}{X+1}$, καὶ κάποιες συναρτήσεις $G_1, \ldots, G_K \in UAP^d$ μὲ $\|G_j\|_{UAP^d} \leq X$ γιὰ κάθε $1 \leq j \leq K$.

Ὁρίζουμε ἡ $d-$πολυπλοκότης μίας σ-ἄλγεβρας $\mathcal{B}$ νὰ εἶναι ὁ ἐλάχιστος X γιὰ τὸν ὁποῖον ἔχουμε μίαν τέτοιαν ἀναπαράστασιν γιὰ τὴν $\mathcal{B}$ (κατὰ σύμβασιν, θεωροῦμε τὴν πολυπλοκότητα ἴσην μὲ ∞ ὅταν δὲν ὑπάρχει καμμία τέτοια ἀναπαράστασις). Προφανῶς, ἡ τετριμμένη σ-ἄλγεβρα $\{\emptyset, \mathbb{Z}_N\}$ εἶναι συμπαγὴς τάξεως d (γιὰ κάθε d) καὶ πολυπλοκότητος 0.

Ἡ παραπάνω ὁρολογία προέρχεται ἀπὸ τὴν ἐργοδικὴν θεωρίαν (βλέπε παραδείγματος χάριν [10]). Ἡ πολυπλοκότης X είναι μᾶλλον μία τεχνητὴ ποσότης, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμε γιὰ νὰ ἐλέγξουμε ὅλες τὶς ποσότητες ποὺ ἐμφανίζονται στὸν ὁρισμὸν τῆς $\mathcal{B}$ ταυτοχρόνως.

Πρότασις 2.2.3 (Οἱ UAP συναρτήσεις εἶναι πυκνὲς στὶς συμπαγεῖς σ-ἄλγεβρες)**.** *Θεωροῦμε $d \geq 0$ καὶ $X \geq 0$. Ἔστω ὅτι ἡ $\mathcal{B}$ εἶναι συμπαγὴς σ-ἄλγεβρα τάξεως d καὶ πολυπλοκότητος τὸ πολὺ X, καὶ ἔστω ὅτι ἔχουμε μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην συνάρτησιν f ἡ ὁποία εἶναι $\mathcal{B}-$μετρήσιμη, καὶ $\delta > 0$. Τότε μποροῦμε νὰ βροῦμε μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην $f_{UAP} \in UAP^d$ ὥστε*

$$\|f - f_{UAP}\|_{L^2} \leq \delta \tag{2.11}$$

καὶ

$$\|f_{UAP}\|_{UAP^d} \ll_{d,\delta,X} 1. \tag{2.12}$$

Ἀπόδειξις. Ἀποδεικνύουμε ἀρχικῶς τὸ ζητούμενον στὴν περίπτωσιν ποὺ f εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ ἑνὸς ἀτόμου A τῆς $\mathcal{B}$. Ἀπὸ τὸν Ὁρισμὸν 2.2.2 ἡ $\mathcal{B}$ γράφεται στὴν μορφὴν (2.10), ἄρα γιὰ κάθε $1 \leq j \leq K$, ὑπάρχει ἄτομον $A_j \in \mathcal{B}_{\varepsilon_j}(G_j)$ ὥστε $A = A_1 \cap \cdots \cap A_K$. Ἀπὸ τὴν Πρότασιν 2.2.1, λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ φράγματα γιὰ τὶς παραμέτρους $\varepsilon_j, \|G_j\|_{UAP^d}, K$ ποὺ καθορίζονται στὸν Ὁρισμὸν 2.2.2, μποροῦμε νὰ βροῦμε γιὰ κάθε j μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην $f_{UAP,j} \in UAP^d$ ὥστε

$$\|\mathbf{1}_{A_j} - f_{UAP,j}\|_{L^2} \leq \delta/K$$

καὶ

$$\|f_{UAP,j}\|_{UAP^d} = O_{\delta/K,\varepsilon_j,X}(1) = O_{\delta,X}(1).$$

Ἀφοῦ καὶ οἱ $\mathbf{1}_{A_j}$ εἶναι φραγμένες συναρτήσεις, ἔχουμε κατὰ σημεῖον τὴν σχέσιν

$$|\prod_{j=1}^{K} \mathbf{1}_{A_j} - \prod_{j=1}^{K} f_{UAP,j}| \leq \sum_{j=1}^{K} |\mathbf{1}_{A_j} - f_{UAP,j}|.$$

Ἡ παραπάνω ἀνισότης ἰσχύει γενικῶς γιὰ μιγαδικοὺς ἀριθμούς, δηλαδὴ ἂν $w_1, \ldots, w_m$, $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ μὲ $|w_i|, |z_i| \leq 1$ γιὰ κάθε $1 \leq i \leq m$, τότε

$$|w_1 \cdots w_m - z_1 \cdots z_m| \leq \sum_{i=1}^{m} |w_i - z_i|.$$

Μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ μὲ ἐπαγωγήν, ἀφοῦ γιὰ $m = 1$ ἰσχύει ὡς ἰσότης, καὶ γιὰ $m > 1$ ἔχουμε

$$\begin{aligned} &|w_1 \cdots w_m - z_1 \cdots z_m| \\ &\qquad \leq |w_1 \cdots w_{m-1} w_m - w_1 \cdots w_{m-1} z_m| + |w_1 \cdots w_{m-1} z_m - z_1 \cdots z_{m-1} z_m| \\ &\qquad \leq |w_m - z_m| + |w_1 \cdots w_{m-1} - z_1 \cdots z_{m-1}| \end{aligned}$$

λόγῳ τῆς ὑποθέσεως γιὰ τὰ μέτρα τῶν w_i, z_i.

Θέτοντας ἐπομένως $f_{UAP} := \prod_{j=1}^{K} f_{UAP,j}$, ἡ (2.11) ἕπεται ἀπὸ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα, ἐνῷ ἡ (2.12) ἐπειδὴ ἡ UAP^d εἶναι ἄλγεβρα Banach. Προφανῶς ἐπίσης ἡ f_{UAP} εἶναι μὴ ἀρνητικὴ καὶ φραγμένη, ἄρα ἔχουμε τὸ ζητούμενον.

Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι f εἶναι μία τυχοῦσα μὴ αρνητική, φραγμένη καὶ $\mathcal{B}-$μετρήσιμη συνάρτησις. Τότε ἡ f εἶναι σταθερὴ σὲ κάθε ἄτομον A τῆς $\mathcal{B}$, ὁπότε μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$f = \sum_{A \,\text{ἄτομον}} c_A \mathbf{1}_A, \text{ ὅπου } 0 \leq c_A \leq 1 \text{ σταθερές}$$

(προσοχή, εδῶ δὲν γράφουμε τὴν f ὡς κυρτὸν συνδυασμὸν χαρακτηριστικῶν, ἀλλὰ ἁπλῶς ὡς γραμμικὸν συνδυασμόν, ἐκμεταλλευόμενοι ὅτι τὰ ἄτομα τῆς $\mathcal{B}$ σχηματίζουν μίαν διαμέρισιν τοῦ $\mathbb{Z}_N$ καὶ ὅτι ἡ f εἶναι σταθερὴ σὲ κάθε στοιχεῖον τῆς διαμερίσεως). Ἔστω $\sigma = \sigma(\delta, X) > 0$ ἕνας μικρὸς ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος θὰ ἐπιλεγεῖ ἀργότερα. Ἀπὸ τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἀποδείξεως, βρίσκουμε γιὰ κάθε ἄτομον A μίαν μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην $f_{UAP,A} \in UAP^d$ ὥστε

$$\|\mathbf{1}_A - f_{UAP,A}\|_{L^2} \leq \sigma \text{ καὶ } \|f_{UAP,A}\|_{UAP^d} \ll_{X,\sigma} 1.$$

Ἂν λοιπὸν θέσουμε $\tilde{f}_{UAP} := \sum_A c_A f_{UAP,A}$, θὰ ἔχουμε ὅτι ἡ $\tilde{f}_{UAP}$ εἶναι μὴ αρνητική, ἀνήκει στὴν UAP^d καὶ

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_{UAP}\|_{UAP^d} &\leq \sum_A c_A \|f_{UAP,A}\|_{UAP^d} \ll_{X,\sigma} \# \text{ ἀτόμων τῆς } \mathcal{B} \\ &\Rightarrow \|\tilde{f}_{UAP}\|_{UAP^d} = O_{X,\sigma}(1), \end{aligned}$$

ἀφοῦ ἡ $\mathcal{B}$ γράφεται στὴν μορφὴν (2.10) μὲ τὶς παραμέτρους $\varepsilon_j, \|G_j\|_{UAP^d}, K$ νὰ φράσσονται ὅπως στὸν Ὁρισμὸν 2.2.2, ἄρα κάθε $\mathcal{B}_{\varepsilon_j}(G_j)$ νὰ περιέχει τὸ πολὺ $\lfloor \frac{2X}{\varepsilon_j} \rfloor + 2 = O(X^2)$ ἄτομα. Ἐπιπλέον,

$$\|f - \tilde{f}_{UAP}\|_{L^2} \leq \sum_A c_A \|\mathbf{1}_A - f_{UAP,A}\|_{L^2} \ll_X \sigma. \tag{2.13}$$

Βεβαίως, δὲν εἶναι ἀναγκαῖον ἡ $\tilde{f}_{UAP}$ νὰ εἶναι φραγμένη (ἀκριβῶς ἐπειδὴ οἱ σταθερὲς c_A δὲν ἀθροίζονται στὴν μονάδα). Αὐτὸ ποὺ ἤδη ἔχουμε, πάλι ἐξαιτίας τοῦ φράγματος γιὰ τὸ πλῆθος τῶν ἀτόμων τῆς $\mathcal{B}$, εἶναι ὅτι

$$\|\tilde{f}_{UAP}\|_{L^\infty} \leq \sum_A c_A \|f_{UAP,A}\|_{L^\infty} \leq \sum_A 1 \leq C_X$$

γιὰ μίαν σταθερὰν ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ X. Μποροῦμε ἑπομένως νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ θεώρημα Weierstrass ὥστε νὰ βροῦμε πολυώνυμον $P = P_{\delta,X}$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ συμπαγὲς διάστημα $[0, C_X]$, τὸ ὁποῖον νὰ ἱκανοποιεῖ τὶς σχέσεις

$$|P(r) - \min(r, 1)| \leq \delta/2 \text{ καὶ } 0 \leq P(r) \leq 1$$

γιὰ κάθε r στὸ πεδίον ὁρισμοῦ του, ἄρα καὶ στὸ πεδίον τιμῶν τῆς $\tilde{f}_{UAP}$. Ἂν τώρα θέσουμε $f_{UAP} := P(\tilde{f}_{UAP})$, ἡ f_{UAP} θὰ εἶναι μὴ αρνητικὴ καὶ φραγμένη. Ἐπίσης, ἀφοῦ ἡ UAP^d εἶναι ἄλγεβρα Banach, ἐνῷ ἡ $P(\tilde{f}_{UAP})$ εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς συναρτήσεων τῆς μορφῆς $(\tilde{f}_{UAP})^m$, θὰ ἔχουμε ἀπὸ τὴν ἰδιότητα τῆς ἄλγεβρας ὅτι $f_{UAP} \in UAP^d$ καὶ $\|f_{UAP}\|_{UAP^d} = O_{P,\|\tilde{f}_{UAP}\|_{UAP^d}}(1) = O_{X,\delta,\sigma}(1)$. Τέλος, ἀπὸ τὴν ἐπιλογὴν τοῦ P, θὰ ἰσχύει

$$\|f_{UAP} - \min(\tilde{f}_{UAP}, 1)\|_{L^2} \leq \delta/2,$$

ἐνῷ, ἀπὸ τὴν (2.13) καὶ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ f εἶναι ἄνω φραγμένη ἀπὸ 1, θὰ ἔχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - f(x) \leq \tilde{f}_{UAP}(x) - f(x) &\text{ ὅταν } \min(\tilde{f}_{UAP}(x), 1) = 1 \\ \Rightarrow \|f - \min(\tilde{f}_{UAP}, 1)\|_{L^2} &\leq \|f - \tilde{f}_{UAP}\|_{L^2} \ll_X \sigma. \end{aligned}$$

Ἄρα, ἡ (2.11) θὰ προκύψει ἀπὸ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα ἐφ' ὅσον ἐπιλέξουμε τὸ σ κατάλληλα μικρὸν σὲ σχέσιν μὲ τὰ X καὶ δ. □

2.2.2 Ἐνέργεια μίας σ-ἄλγεβρας – Τὸ ἐπιχείρημα τῶν σταθερῶν προσαυξήσεων

Ὅπως εἴπαμε στὴν προηγουμένην ὑποενότητα, γιὰ νὰ ἀποδείξουμε τὸ Θεώρημα 1.4.4 θὰ προσπαθήσουμε νὰ γράψουμε τὴν f τῆς διατυπώσεως ὡς ἄθροισμα μίας δεσμευμένης μέσης τιμῆς $f_{U^\perp} := \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ ὡς πρὸς μίαν κατάλληλην σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$, ποὺ θὰ ἐπιλεγεῖ μεταξὺ τῶν συμπαγῶν σ-ἄλγεβρῶν τάξεως $k-2$, καὶ τῆς διαφορᾶς $f_U := f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$. Τότε ἡ (2.2) θὰ ἰσχύει αὐτομάτως, ἐνῷ ἀπὸ τὴν Πρότασιν 2.2.3 θὰ μποροῦμε νὰ βροῦμε μὴ ἀρνητικές, φραγμένες συναρτήσεις $\in UAP^{k-2}$ ποὺ προσεγγίζουν τὴν $\mathcal{B}-$μετρήσιμην $f_{U^\perp}$ ὅπως ζητεῖται στὴν (2.4), καὶ γιὰ τὶς ὁποῖες θὰ ἰσχύει ἡ (2.3) γιὰ κάποιο $M = O_{k,\delta,X}(1)$ ὅπου X ἡ πολυπλοκότης τῆς $\mathcal{B}$. Ἂν γιὰ κάποιαν ἀπὸ αὐτὲς τὶς UAP συναρτήσεις καὶ γιὰ τὸ ἀντίστοιχον M ἰσχύει καὶ ἡ ἐκτίμησις

$$\|f_U\|_{U^{k-1}} = \|f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B})\|_{U^{k-1}} \leq F(M),$$

θὰ ἔχουμε τελειώσει, ἀλλιῶς θὰ χρειάζεται νὰ ξαναεπιχειρήσουμε τὰ παραπάνω γιὰ κάποιαν ἄλλην σ-ἄλγεβραν $\mathcal{B}'$ τάξεως $k-2$. Βεβαίως, ἡ διαδικασία αὐτὴ παρουσιάζει δύο προβλήματα: πρῶτον, κανεὶς δὲν μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι, γιὰ τουλάχιστον μίαν συμπαγῆ σ-ἄλγεβρα τάξεως $k-2$ στὸ $\mathbb{Z}_N$, ἡ προαναφερθεῖσα διάσπασις τῆς f θὰ ἱκανοποιεῖ τὶς ἐκτιμήσεις (2.1) – (2.4), καὶ δεύτερον, ἀκόμη καὶ νὰ γνωρίζαμε ὅτι κάτι τέτοιο ἰσχύει σίγουρα, καθὼς τὸ N θὰ αὐξανόταν, θὰ εἴχαμε νὰ ἐλέγξουμε ὅλο καὶ περισσότερες σ-ἄλγεβρες, μὲ ὅλο καὶ μεγαλύτερες πολυπλοκότητες, μέχρι νὰ βροῦμε μίαν κατάλληλην, μὲ ἀποτέλεσμα τὸ M στὴν ἐκτίμησιν (2.3) νὰ μὴν μπορεῖ νὰ παραμείνει φραγμένον.

Γιὰ νὰ διορθώσουμε αὐτὰ τὰ δύο προβλήματα, καταφεύγουμε σὲ μίαν ἰδέαν ἡ ὁποία ὑπάρχει ἤδη στὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Roth [29], στὴν πρώτην ἀπόπειραν δηλαδὴ νὰ ἀποδειχθεῖ ἡ πιὸ ἁπλὴ ($k = 3$) ἀπὸ τὶς περιπτώσεις τοῦ θεωρήματος Szemerédi. Παραλλαγὲς αὐτῆς τῆς ἰδέας ἔχουν χρησιμοποιηθεῖ καὶ σὲ ὅλες τὶς μετέπειτα ἀποδείξεις τοῦ θεωρήματος (ἀκόμη καὶ τῶν ἀρχικῶν περιπτώσεων $k = 3$ ἢ 4, βλέπε παραδείγματος χάριν [6], [16], [32]). Τὸ ἐπιχείρημα τοῦ Roth δουλεύει ὡς ἑξῆς: ἔστω σύνολον $A \subseteq \mathbb{Z}_N$ μὲ $|A| \geq \delta N$ ὅπου δ ὁποιοσδήποτε πραγματικὸς $\geq 500/\log\log N$. Τότε εἴτε τὸ A, ἐφ' ὅσον τὸ δοῦμε σὰν ὑποσύνολον τοῦ $[1, N]$, περιέχει τουλάχιστον μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον μήκους 3, εἴτε κάποιος ἀπὸ τοὺς συντελεστὲς Fourier τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως τοῦ A εἶναι ἀρκετὰ μεγάλος κατ' ἀπόλυτην τιμὴν σὲ σχέσιν μὲ τὸ δ. Στὴν δευτέραν περίπτωσιν, ὁ Roth ἀποδεικνύει ὅτι θὰ ὑπάρχει ἀριθμητικὴ πρόοδος P στὸ $[1, N]$, ὑποσύνολον δηλαδὴ τῆς μορφῆς

$$\{1 \leq a < a + d < \cdots < a + (|P| - 1)d \leq N\}, \tag{2.14}$$

μὲ $|P| \geq c(\delta)\sqrt{N}$ ὥστε νὰ ἔχουμε $|A \cap P| \geq \big(\delta + \frac{\delta^2}{80}\big)|P|$. Σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, ἂν θέσουμε

$$A' := \{i \in [1, |P|] : a + (i - 1)d \in A \cap P\} \subseteq \mathbb{Z}_{|P|},$$

μποροῦμε νὰ ἐπαναλάβουμε τὰ παραπάνω γιὰ τὰ σύνολα $A', \mathbb{Z}_{|P|}$, δεδομένου ὅτι ἀπὸ τὸν τρόπον ὁρισμοῦ τοῦ A', κάθε ἀριθμητικὴ πρόοδος σὲ αὐτὸ θὰ ἀντιστοιχεῖ σὲ ἀριθμητικὴν πρόοδον στὸ ἀρχικὸν σύνολον A. Ὅμως, ἐφ' ὅσον σὲ κάθε ἐπανάληψιν ἡ πυκνότης τοῦ A, δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς $\frac{|A \cap P|}{|P|}$ αὐξάνεται τουλάχιστον κατὰ $\delta^2/80$, ἐνῷ προφανῶς δὲν μπορεῖ νὰ ὑπερβεῖ τὸ 1, δὲν θὰ χρειαστοῦν περισσότερες ἀπὸ $O_\delta(1)$ ἐπαναλήψεις: στὴν χειρότερην τῶν περιπτώσεων, ἡ ὅλη διαδικασία θὰ τερματίσει ὅταν, γιὰ κάποιο σύνολον P τῆς μορφῆς (2.14), ἡ πυκνότης τοῦ A μέσα σ' αὐτὸ θὰ εἶναι τόσο κοντὰ στὸ 1, ὥστε νὰ μποροῦμε κατευθείαν νὰ συμπεράνουμε ὅτι τὸ $A \cap P$ περιέχει ἀριθμητικὴν πρόοδον μήκους 3.

Ἐπανερχόμενοι στὴν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος Διασπάσεως, θὰ προσπαθήσουμε καὶ ἐδῶ νὰ συσχετίσουμε μὲ κάθε συμπαγῆ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ τάξεως $k - 2$, ἡ ὁποία δὲν μᾶς δίνει τὴν ἐπιθυμητὴν διάσπασιν τῆς συναρτήσεως f, μίαν θετικὴν ποσότητα ποὺ δὲν θὰ μπορεῖ νὰ ὑπερβεῖ κάποιον συγκεκριμένον ἀριθμόν, καὶ ταυτοχρόνως θὰ αὐξάνεται κάθε φορὰν ποὺ θὰ ἀναγκαζόμαστε νὰ περάσουμε σὲ κάποιαν ἄλλην σ-ἄλγεβρα μὲ μεγαλύτερην πολυπλοκότητα. Ἡ ποσότης αὐτὴ θὰ ἐπιλεγεῖ βάσει τοῦ ἑπομένου ὁρισμοῦ:

Ὁρισμός 2.2.4. Ἔστω ὅτι δίνονται διανυσματικὴ συνάρτησις $f = (f_1, \ldots, f_m)$, μὲ συντεταγμένες συναρτήσεις $f_j : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$, καὶ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$. Ὁρίζουμε τὴν **ἐνέργειαν** τῆς $\mathcal{B}$ ὡς πρὸς τὴν f νὰ εἶναι ἡ ποσότης

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{B}) := \sum_{j=1}^{m} \|\mathbb{E}(f_j|\mathcal{B})\|_{L^2}^2. \tag{2.15}$$

Παρατηρήσεις 2.2.5. Στὴν πράξιν τὸ m θὰ εἶναι πολὺ μικρόν ($m = 1$ ἢ 2). Ἐξαιτίας τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, ἔχουμε τὰ τετριμμένα φράγματα

$$0 \leq \mathcal{E}_f(\mathcal{B}) \leq \sum_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^2}^2, \tag{2.16}$$

τὰ ὁποῖα θὰ χρησιμοποιήσουμε μὲ τὸν ἴδιον τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον, στὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Roth, ἐκμεταλλευόμαστε τὸ ὅτι ἡ πυκνότης εἶναι ἄνω φραγμένη ἀπὸ 1. Ὅταν $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$, ἐφαρμόζουμε πάλι τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, χρησιμοποιῶντας τὶς σχέσεις καθετότητος

$$\big\langle \mathbb{E}(f_j|\mathcal{B}') - \mathbb{E}(f_j|\mathcal{B}), \mathbb{E}(f_j|\mathcal{B}) \big\rangle = 0 \text{ γιὰ κάθε } 1 \leq j \leq m,$$

τὶς ὁποῖες εἴδαμε στὸ Κεφάλαιον 1, καὶ βλέπουμε ὅτι

$$\sum_{j=1}^{m} \|\mathbb{E}(f_j|\mathcal{B}') - \mathbb{E}(f_j|\mathcal{B})\|_{L^2}^2 = \mathcal{E}_f(\mathcal{B}') - \mathcal{E}_f(\mathcal{B}). \tag{2.17}$$

Κυρίως, προκύπτει ὅτι ἡ ἐνέργεια τῆς $\mathcal{B}'$ εἶναι $\geq$ τῆς ἐνεργείας τῆς $\mathcal{B}$.

Πῶς ὅμως θὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἔννοιαν τῆς ἐνεργείας; Ἂς ποῦμε ὅτι θέλουμε μὲ διαδοχικὲς δοκιμές, ξεκινῶντας ἀπὸ τὴν τετριμμένην σ-ἄλγεβρα $\{\emptyset, \mathbb{Z}_N\}$, νὰ βροῦμε κάποιαν συμπαγῆ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ τάξεως $k-2$ ἡ ὁποία θὰ μᾶς δώσει τὴν ζητουμένην διάσπασιν τῆς συναρτήσεως f σὲ δύο συνιστῶσες, μὲ τὸν τρόπον ποὺ περιγράφουμε στὴν ἀρχὴν αὐτῆς τῆς ὑποενότητος. Ἂν μὲ κάποιαν σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ δὲν μποροῦμε νὰ πετύχουμε τὴν σωστὴν διάσπασιν, τότε θὰ προσπαθοῦμε νὰ δείξουμε ὅτι ὑπάρχει σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ τῆς ὁποίας ἡ ἐνέργεια (ὡς πρὸς κάποιαν διανυσματικὴν συνάρτησιν g ποὺ θὰ σχετίζεται μὲ τὴν f) εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχην ἐνέργειαν τῆς $\mathcal{B}$. Προφανῶς, θὰ ἰσχυριστοῦμε τελικῶς ὅτι αὐτὸ δὲν μπορεῖ νὰ ἐπαναληφθεῖ πολλὲς φορὲς ἐξαιτίας τοῦ ἄνω φράγματος στὴν (2.16). Βεβαίως, τὸ πόσο μεγαλύτερη θὰ εἶναι ἡ ἐνέργεια τῆς $\mathcal{B}'$ θὰ ἐξαρτᾶται στὶς περισσότερες τῶν περιπτώσεων καὶ ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα X τῆς $\mathcal{B}$ (ὅσο πιὸ περίπλοκη ἡ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$, τόσο πιὸ μικρὴν προσαύξησιν ἐνεργείας θὰ μποροῦμε νὰ πετύχουμε, καὶ ταυτοχρόνως θὰ αὐξάνεται ἀκόμη περισσότερον ἡ πολυπλοκότης τῆς $\mathcal{B}'$), συνεπῶς οἱ διαδοχικὲς προσαυξήσεις ἐνδέχεται νὰ μὴν προσεγγίζουν τὸ ἄνω φράγμα στὴν (2.16).

Τὸ πρόβλημα διορθώνεται ἂν ἀντὶ γιὰ ζεύγη σ-ἀλγεβρῶν θεωρήσουμε τριάδες τῆς μορφῆς $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}''$, καὶ ὑποθέσουμε ὅτι κάθε φορὰν ποὺ θὰ χρειάζεται νὰ ἀντικαταστήσουμε τὴν $\mathcal{B}'$ ἀπὸ τὴν $\mathcal{B}''$ γιὰ νὰ πετύχουμε καλύτερην διάσπασιν τῆς συναρτήσεως f, θὰ μποροῦμε νὰ ἐπιλέξουμε ἔτσι τὴν $\mathcal{B}''$ ὥστε ἡ προσαύξησις τῆς ἐνεργείας νὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα X τῆς $\mathcal{B}$, καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα X' τῆς $\mathcal{B}'$. Τότε ὄντως οἱ προσαυξήσεις τῆς ἐνεργείας θὰ εἶναι σταθερὲς καὶ θὰ προσεγγίζουν σὲ πεπερασμένον χρόνον τὸ ἄνω φράγμα τῆς (2.16). Ἡ μόνη δυσκολία εἶναι ὅτι γιὰ νὰ πετύχουμε κάτι τέτοιο, θὰ πρέπει στὶς περισσότερες τῶν περιπτώσεων ἡ διαφορὰ τῆς ἐνεργείας μεταξὺ τῶν

$\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{B}'$ νὰ φράσσεται ἀπὸ πάνω ἀπὸ μίαν προκαθορισμένην ποσότητα C, ἀνεξάρτητην τῆς πολυπλοκότητός τους. Αὐτὸ τὸ τεχνικὸν πρόβλημα λύνεται ἀρκετὰ εὔκολα, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι (i) ἂν μετὰ ἀπὸ διαδοχικὲς ἀντικαταστάσεις τῆς $\mathcal{B}'$ η διαφορὰ ἐνεργείας μὲ τὴν $\mathcal{B}$ ξεπεράσει τὴν προκαθορισμένην ποσότητα, μποροῦμε ἁπλῶς νὰ ἀντικαταστήσουμε τὴν πρώτην συντεταγμένην τῆς τριάδος $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}''$, καὶ (ii) οὕτως ἢ ἄλλως αὐτὸ δὲν μπορεῖ νὰ γίνει πάνω ἀπὸ $O(1/C)$ φορές, ἀφοῦ ἡ ποσότης C δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα καμμίας σ-ἄλγεβρας.

Μετὰ ἀπὸ ἰδέαν τοῦ Green λοιπόν, ὁ Tao διατυπώνει τὸ ἑπόμενον λῆμμα, χαρακτηρίζοντάς το «ποσοτικὸν» ἀντίστοιχον τοῦ Λήμματος Zorn, τόσο γιατὶ μοιάζει μὲ ἀλγοριθμικὴν ἐκδοχήν του, ὅσο καὶ γιατὶ καταλαμβάνει στὴν ἀπόδειξιν τοῦ Tao ἀντίστοιχην θέσιν μὲ αὐτὴν τοῦ Λήμματος Zorn στὴν ἐργοδικὴν ἀπόδειξιν τοῦ Furstenberg. Ἀντίστοιχον στὸ θεώρημα Roth, ὅπως καὶ σὲ κάποιες συνδυαστικὲς ἀποδείξεις τοῦ θεωρήματος Szemerédi (παραδείγματος χάριν [17], [33]), εἶναι τὸ ἐπιχείρημα διαδοχικῶν αὐξήσεων τῆς πυκνότητος. Τὸ λῆμμα, τὸ ὁποῖον διατυπώνεται ἀρκετὰ γενικά, θὰ χρησιμεύσει, εἴτε ἀπευθείας εἴτε ἐμμέσως, στὴν ἀπόδειξιν καὶ τῶν δύο Θεωρημάτων Διασπάσεως, καθὼς καὶ τοῦ Θεωρήματος Περιοδικῆς Δομῆς.

Λῆμμα 2.2.6 (Γενικὸν ἐπιχείρημα τῶν σταθερῶν προσαυξήσεων). *Ὑποθέτουμε ὅτι ἔχουμε μίαν ἰδιότητα $P(M)$ ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ κάποιαν παράμετρον $M > 0$. Ἔστω $d \geq 0$, καὶ ἔστω διανυσματικὴ συνάρτησις $f = (f_1, \dots, f_m)$ μὲ τὶς $f_j : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ φραγμένες.*

Ὑποθέτουμε ἐπιπλέον τὴν ὕπαρξιν κάποιου $\tau > 0$ γιὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ ἑξῆς **διχοτομία***: ἂν $X, X' > 0$, καὶ ἔχουμε συμπαγῆ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ τάξεως d καὶ πολυπλοκότητος τὸ πολὺ X, καὶ ἐπίσης συμπαγῆ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$ τάξεως d καὶ πολυπλοκότητος τὸ πολὺ X', καὶ ἰσχύει ἡ συνθήκη*

(2.18) (*Διαφορὰ τῆς ἐνεργείας*)

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{B}') - \mathcal{E}_f(\mathcal{B}) \leq \tau^2,$$

τότε εἴτε ἡ $P(M)$ ἀληθεύει γιὰ κάποιο $M = O_{d,\tau,X,X'}(1)$, εἴτε μποροῦμε νὰ βροῦμε συμπαγῆ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}''$ τάξεως d καὶ πολυπλοκότητος τὸ πολὺ $O_{d,\tau,X,X'}(1)$, ὥστε νὰ ἰσχύει ἡ συνθήκη

(2.19) (*Προσαύξησις τῆς ἐνεργείας*)

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{B}'') - \mathcal{E}_f(\mathcal{B}') \gg_{d,\tau,X} 1$$

(εἶναι σημαντικὸν τὸ κάτω φράγμα ποὺ ὑπονοεῖται στὴν (2.19) νὰ μὴν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα X' τῆς $\mathcal{B}'$).

Ἂν ἰσχύουν τὰ παραπάνω, τότε ἡ $P(M)$ ἀληθεύει γιὰ κάποιο $M = O_{m,d,\tau}(1)$.

Παρατηρήσεις. Τὸ λῆμμα 2.2.6 μᾶς ἐπιτρέπει, ἀντὶ νὰ προσπαθοῦμε νὰ ἀποδείξουμε εὐθέως τὴν ἰδιότητα P, νὰ ἀναζητήσουμε καὶ νὰ ἀποδείξουμε μίαν ἁπλούστερην διχοτομίαν, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν εἴτε ἡ $P(M)$ θὰ ἀληθεύει γιὰ κάποιο $M > 0$, εἴτε θὰ μποροῦμε νὰ αὐξήσουμε τὴν ἐνέργειαν δοθείσης σ-ἄλγεβρας ἐλέγχοντας ταυτοχρόνως πόσο θὰ αὐξηθεῖ ἡ πολυπλοκότης της. Ὅπως μπορεῖ νὰ μαντέψει κάποιος καὶ ἀπὸ τὰ σχόλια ποὺ προηγήθησαν, ἐνεργοποιοῦμε ἔτσι ἕναν ἀλγόριθμον γιὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ καταλλήλου M, καὶ ἕναν διπλὰ ἐπαναληπτικὸν βρόγχον μέσα σὲ αὐτόν. Ὁ τελευταῖος ἀναγκάζεται νὰ τερματίσει ἀκριβῶς ἐπειδὴ ἀπαιτοῦμε ἡ ποσότης τ νὰ μὴν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὶς πολυπλοκότητες X, X', καὶ ἡ προσαύξησις στὴν (2.19) νὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν μικρότερην πολυπλοκότητα X καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν X'. Χωρὶς αὐτὲς τὶς ἀπαιτήσεις, τὸ λῆμμα δὲν δουλεύει.

Σημειώνουμε ὅτι γιὰ τὴν ἀπόδειξιν δὲν χρειάζεται νὰ γνωρίζουμε ἀκριβῶς πόσο αὐξάνεται ἡ πολυπλοκότης τῆς $\mathcal{B}''$, οὔτε ποιὸ εἶναι τὸ κάτω φράγμα στὴν (2.19) (ἁπλῶς ὅτι δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα τῆς $\mathcal{B}'$). Βεβαίως ἂν κάποιος θελήσει νὰ ἐκτιμήσει τὸ τελικὸν φράγμα $O_{m,d,\tau}(1)$ γιὰ τὸ M (ὅπως στὶς ἑπόμενες ἀποδείξεις, στὶς ὁποῖες οἱ σταθερὲς καὶ οἱ ἐξαρτήσεις τῶν ποσοτήτων θὰ εἶναι ὑπολογίσιμες), θὰ χρειαστεῖ καὶ μπορεῖ νὰ ὑπολογίσει τὰ παραπάνω φράγματα. Τὸ ἀρνητικὸν τοῦ Λήμματος 2.2.6 εἶναι ὅτι καταφεύγουμε σὲ διπλὴν ἀναδρομήν, ἑπομένως τὰ φράγματα ποὺ προκύπτουν εἶναι τύπου Ackermann ἢ καὶ χειρότερα.

Ἀπόδειξις. Θὰ χρησιμοποιήσουμε τὸν παρακάτω ἀλγόριθμον μὲ διπλὴν ἐπανάληψιν:

- Βῆμα 1 Ἀρχικῶς θέτουμε τὴν $\mathcal{B}$ ἴσην μὲ τὴν τετριμμένην σ-ἄλγεβρα, $\mathcal{B} := \{\emptyset, \mathbb{Z}_N\}$.
- Βῆμα 2 Θέτουμε τὴν $\mathcal{B}'$ ἴσην μὲ τὴν $\mathcal{B}$ (ἑπομένως σίγουρα ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη (2.18)). Μὲ X συμβολίζουμε τὴν πολυπλοκότητα τῆς $\mathcal{B}$.
- Βῆμα 3 Μὲ X' συμβολίζουμε τὴν πολυπλοκότητα τῆς $\mathcal{B}'$. Ἂν ἡ $P(M)$ ἀληθεύει γιὰ κάποιο $M = O_{d,\tau,X,X'}(1)$, ὁ ἀλγόριθμος τερματίζει. Ἀλλιῶς, οἱ ὑποθέσεις μας μᾶς ἐξασφαλίζουν τὴν ὕπαρξιν σ-ἄλγεβρας $\mathcal{B}''$ ἡ ὁποία εἶναι συμπαγὴς τάξεως d καὶ πολυπλοκότητος τὸ πολὺ $O_{d,\tau,X,X'}(1)$, ἔτσι ὥστε νὰ ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη (2.19). Συνεχίζουμε στὸ Βῆμα 4.
- Βῆμα 4 Ἂν $\mathcal{E}_f(\mathcal{B}'') - \mathcal{E}_f(\mathcal{B}) \le \tau^2$, ἀντικαθιστοῦμε τὴν $\mathcal{B}'$ μὲ τὴν $\mathcal{B}''$ (ὁπότε συνεχίζει νὰ ἰσχύει ἡ (2.18)), καὶ ἐπιστρέφουμε στὸ Βῆμα 3. Ἀλλιῶς, ἀντικαθιστοῦμε τὴν $\mathcal{B}$ μὲ τὴν $\mathcal{B}''$, καὶ ἐπιστρέφουμε στὸ Βῆμα 2.

Παρατηροῦμε ὅτι ἔχοντας συγκεκριμένην σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ πολυπλοκότητος X, θὰ χρειαστεῖ νὰ ἐπαναλάβουμε τὰ παραπάνω βήματα τὸ πολὺ $O_{d,\tau,X}(1)$ φορὲς πρὶν ἀντικαταστήσουμε τὴν $\mathcal{B}$. Αὐτὸ γιατὶ κάθε φορὰν ποὺ ἡ $\mathcal{B}'$ ἀλλάζει, ἡ ἐνέργειά της $\mathcal{E}_f(\mathcal{B}')$ αὐξάνεται κατὰ μίαν ποσότητα $\gg_{d,\tau,X} 1$, ἀλλὰ ταυτοχρόνως δὲν ὑπερβαίνει τὴν ποσότητα $\mathcal{E}_f(\mathcal{B})+\tau^2$, ἀλλιῶς θὰ ἀντικαθιστούσαμε τὴν $\mathcal{B}$. Ἐδῶ φαίνεται γιατὶ ἡ προσαύξησις τῆς ἐνεργείας στὴν (2.19) δὲν πρέπει νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα X' τῆς $\mathcal{B}'$, ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ μεγαλώνει αὐθαίρετα κατὰ τὶς ἐπαναλήψεις. Ἕπεται ὅτι, ἂν τελικῶς ἀντικαταστήσουμε τὴν $\mathcal{B}$, ἡ πολυπλοκότης της θὰ ἔχει αὐξηθεῖ τὸ πολὺ κατὰ $O_{d,\tau,X}(1)$.

Ἔπειτα παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀλγόριθμος μπορεῖ νὰ ἀλλάξει τὴν σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ τὸ πολὺ $O_{m,\tau}(1)$ φορές. Αὐτὸ γιατὶ κάθε φορὰν ποὺ ἡ $\mathcal{B}$ ἀλλάζει, ἡ ἐνέργειά της $\mathcal{E}_f(\mathcal{B})$ αὐξάνεται τουλάχιστον κατὰ τ^2, ἀλλὰ ταυτοχρόνως εἶναι φραγμένη ἀπὸ m λόγῳ τῆς (2.16).

Συνδυάζοντας τὶς δύο αὐτὲς παρατηρήσεις, βλέπουμε ὅτι ὁ ἀλγόριθμος θὰ διατρέξει συνολικὰ $O_{m,d,\tau}(1)$ βήματα καὶ μετὰ θὰ τερματίσει. Ἐπίσης, ὅλες οἱ σ-ἄλγεβρες ποὺ θὰ ἔχουν κατασκευαστεῖ στὴν πορείαν θὰ ἔχουν πολυπλοκότητα τὸ πολὺ $O_{m,d,\tau}(1)$. Ἔχουμε ἑπομένως τὸ ζητούμενον. □

Παρατήρησις 2.2.7. Χρειάζεται ἴσως νὰ ξεκαθαρίσουμε κάποιες τεχνικὲς λεπτομέρειες, οἱ ὁποῖες θὰ γίνουν ἰδιαιτέρως ἐμφανεῖς στὸ τελικὸν βῆμα τῆς ἀποδείξεως τοῦ Θεωρήματος Περιοδικῆς Δομῆς: διατυπώνοντας κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὴν διχοτομίαν τοῦ λήμματος, δὲν ἐννοοῦμε ὅτι πρέπει μία ἀπὸ τὶς δύο περιπτώσεις της νὰ ἰσχύει ταυτοχρόνως γιὰ ὅλους τοὺς πρώτους N. Ἀντιθέτως, ἡ διχοτομία μπορεῖ νὰ διατυπωθεῖ ξεχωριστὰ γιὰ κάθε N, ἀρκεῖ τὰ φράγματα ποὺ ἐμφανίζονται νὰ μὴν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ N (αὐτὸ ἐξάλλου ὑπονοεῖται ἀπὸ τὸν συμβολισμὸν O). Ἡ ἀπόδειξις τοῦ λήμματος θὰ παραμείνει ἡ ἴδια: ὁ παραπάνω ἀλγόριθμος μπορεῖ νὰ ἐφαρμοστεῖ ξεχωριστὰ σὲ κάθε $\mathbb{Z}_N$ (ὅπου μὲ $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ θὰ συμβολίζουμε τὰ στοιχεῖα τῶν ἀντιστοίχων οἰκογενειῶν ποὺ εἶναι σ-ἄλγεβρες στὸ $\mathbb{Z}_N$), καὶ ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὶς παρατηρήσεις ποὺ ἀναφέρουμε ἀμέσως μετὰ τὰ βήματα τοῦ ἀλγορίθμου, θὰ τερματίσει ἐπιτυχῶς μετὰ ἀπὸ τὸ πολὺ $O_{m,d,\tau}(1)$ ἐπαναλήψεις. Μπορεῖ βεβαίως γιὰ κάποιον πρῶτον N νὰ τερματίσει πολὺ νωρίτερα ἀπὸ ὅ,τι γιὰ κάποιον ἄλλον.

Ἂς σημειωθεῖ ὅτι τέτοιου εἴδους διχοτομίες (ξεχωριστὰ γιὰ κάθε πρῶτον N) θὰ διατυπώσουμε τελικῶς γιὰ τὶς ἀποδείξεις καὶ τῶν δύο Θεωρημάτων Διασπάσεως, καθὼς καὶ τοῦ Θεωρήματος Περιοδικῆς Δομῆς. Μόνον ὅμως στὴν διχοτομίαν τῆς ἑνότητος 2.3.2 θὰ χρειαστεῖ αὐτὸ νὰ διευκρινιστεῖ ξανά, ὥστε ἡ ἀπόδειξίς της νὰ γίνει σαφής.

2.2.3 Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.4.4

Στὴν ἑνότητα αὐτὴν σταθεροποιοῦμε κάποιον φυσικὸν $k \geq 3$ (τὸ μῆκος δηλαδὴ τῶν ἀριθμητικῶν προόδων ποὺ ἀναζητοῦμε). Γιὰ νὰ προχωρήσουμε στὴν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος 1.4.4 χρησιμοποιῶντας τὰ ἐργαλεῖα τῶν προηγουμένων ἑνοτήτων, χρειάζεται νὰ συσχετίσουμε τὴν τυχοῦσαν f τῶν Θεωρημάτων Διασπάσεως μὲ κατάλληλες ὁμοιόμορφα σχεδὸν περιοδικὲς συναρτήσεις: ὅπως καὶ στὸν ὁρισμὸν τῶν νορμῶν U^d, μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε μίαν δυϊκὴν συνάρτησιν γιὰ τὴν f εἴτε ἐπαγωγικῶς εἴτε δίνοντας τὸν ἀκριβῆ της τύπον. Ὁρίζουμε $\mathcal{D}_0(f) := 1$, ἐνῷ γιὰ κάθε $d \geq 1$,

$$\mathcal{D}_d(f) = \mathbb{E}\big((\mathcal{D}_{d-1}(f\,T^h f)) \cdot T^h f \,|\, h \in \mathbb{Z}_N\big) \tag{2.20}$$

(ἡ $\mathcal{D}_d(f)$ εἶναι ἡ **δυϊκὴ συνάρτησις τάξεως d** τῆς f). Ἀποδεικνύουμε ἔπειτα τὸ ἑξῆς:

Λῆμμα 2.2.8. *Ἔστω $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτησις γιὰ τὴν ὁποίαν γιὰ κάποιο $\varepsilon > 0$ ἰσχύει $\|f\|_{U^{k-1}} > \varepsilon$ (δηλαδὴ ἡ f δὲν εἶναι $\varepsilon-$Gowers ὁμοιόμορφη). Τότε ὑπάρχει φραγμένη συνάρτησις $F \in UAP^{k-2}$ ὥστε $\|F\|_{UAP^{k-2}} \leq 1$ καὶ $|\langle f, F\rangle| > \varepsilon^{2^{k-1}}$.*

Ἀπόδειξις. Θὰ βροῦμε τὴν F ἀνάμεσα στὶς δυϊκὲς συναρτήσεις τῆς f. Δείχνουμε ἐπαγωγικῶς γιὰ $d \geq 0$, ὅτι γιὰ κάθε $g : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ ἰσχύει

$$\langle g, \mathcal{D}_d(g)\rangle = \|g\|_{U^d}^{2^d}.$$

Γιὰ $d = 0$, $\langle g, \mathcal{D}_d(g)\rangle = \mathbb{E}(g) = \|g\|_{U^0}$. Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι τὸ ζητούμενον ἰσχύει γιὰ κάποιο d, καὶ θεωρήσουμε τυχοῦσαν συνάρτησιν g, θὰ ἔχουμε, λόγῳ τῆς (2.20) καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου, ὅτι

$$\langle g, \mathcal{D}_{d+1}(g)\rangle = \mathbb{E}\left(\langle \mathcal{D}_d(gT^h g), gT^h g\rangle \,\middle|\, h \in \mathbb{Z}_N\right).$$

Τὸ ζητούμενον γιὰ τὸ $d{+}1$ ἕπεται τώρα ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴν ὑπόθεσιν καὶ τὸν ἀναδρομικὸν τύπον (1.14) τοῦ ὁρισμοῦ τῶν νορμῶν U^d.

Θέτουμε $F := \mathcal{D}_{k-1}(f)$. Εὔκολα μὲ ἐπαγωγήν, προκύπτει ὅτι ἡ F εἶναι φραγμένη. Μένει νὰ δείξουμε ὅτι $\|F\|_{UAP^{k-2}} \leq 1$. Πρὸς τοῦτο, δείχνουμε κάτι γενικότερον:

$$\|\mathcal{D}_d(g)\|_{UAP^{d-1}} \leq 1 \text{ γιὰ κάθε φραγμένην } g \text{ καὶ γιὰ κάθε } d \geq 1.$$

Αὐτὸ προφανῶς ἰσχύει ὅταν $d = 1$, ἀφοῦ τότε ἡ $\mathcal{D}_d(g)$ εἶναι ἡ σταθερὴ συνάρτησις $\mathbb{E}(g)$. Ἐπιπλέον, ὑποθέτοντας ὅτι ἰσχύει γιὰ κάποιο $d \geq 1$, παρατηροῦμε ἀπὸ τὴν (2.20) ὅτι γιὰ κάθε $g : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ καὶ γιὰ κάθε n ἰσχύει

$$\begin{aligned} T^n(\mathcal{D}_{d+1}(g))(x) &= (\mathcal{D}_{d+1}(g))(x-n) \\ &= \mathbb{E}\big((\mathcal{D}_d(gT^h g))(x-n)\cdot T^h g(x-n) \,|\, h \in \mathbb{Z}_N\big) \\ &= \mathbb{E}\big(T^n(\mathcal{D}_d(gT^h g))(x)\cdot T^{h+n} g(x) \,|\, h \in \mathbb{Z}_N\big), \end{aligned}$$

ἄρα $T^n(\mathcal{D}_{d+1}(g)) = \mathbb{E}\big(T^n(\mathcal{D}_d(gT^h g))\cdot T^{h+n} g \,|\, h \in \mathbb{Z}_N\big)$. Κάνοντας γιὰ κάθε n τὴν ἀλλαγὴν μεταβλητῶν $h \mapsto h - n$, προκύπτει ὅτι

$$\mathbb{E}\big(T^n(\mathcal{D}_d(gT^h g))\cdot T^{h+n} g \,|\, h \in \mathbb{Z}_N\big) = \mathbb{E}\big(T^n(\mathcal{D}_d(gT^{h-n} g))\cdot T^h g \,|\, h \in \mathbb{Z}_N\big),$$

ἄρα τελικῶς

$$T^n(\mathcal{D}_{d+1}(g)) = \sum_{h\in\mathbb{Z}_N} \frac{1}{N} c_{n,h} g'_h \text{ γιὰ κάθε } n \in \mathbb{Z}_N \tag{2.21}$$
$$\text{ὅπου } c_{n,h} := T^n(\mathcal{D}_d(gT^{h-n} g)),\ g'_h := T^h g.$$

Στὴν περίπτωσιν ποὺ ἡ g εἶναι φραγμένη, φραγμένες θὰ εἶναι προφανῶς καὶ οἱ μετατοπίσεις της (δηλαδὴ οἱ g'_h), ἄρα οἱ $c_{n,h}$ θὰ ἔχουν UAP^{d-1} νόρμα ≤ 1 ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴν ὑπόθεσιν καὶ ἐπειδὴ ἡ ἄλγεβρα UAP^{d-1} εἶναι ἀναλλοίωτη ὡς πρὸς μετατοπίσεις. Συνεπῶς, ἂν ἡ g εἶναι φραγμένη, ἡ (2.21) εἶναι ἀναπαράστασις τῆς μορφῆς (1.18) γιὰ τὴν τροχιὰν τῆς $\mathcal{D}_{d+1}(g)$ μὲ τὸ $M = 1$. □

Παρατήρησις 2.2.9. Ἐναλλακτικῶς, μποροῦμε νὰ παρατηρήσουμε ὅτι

$$\mathcal{D}f(x) := \mathcal{D}_{k-1}(f)(x) = \mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} f(x+\omega\cdot h) \,\middle|\, h \in \mathbb{Z}_N^{k-1}\right)$$

γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$ (ὅπου 0^{k-1} εἶναι τὸ διάνυσμα τοῦ $\{0,1\}^{k-1}$ μὲ μηδενικὲς μόνον συντεταγμένες), ἔπειτα νὰ ἀποδείξουμε ἀπευθείας τὸν τύπον $\langle f, \mathcal{D}f\rangle = \|f\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}}$, καθὼς καὶ τὸν τύπον $\|\mathcal{D}f\|_{(U^{k-1})^*} = \|f\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}-1}$ (θὰ πρέπει βεβαίως νὰ δείξουμε ξεχωριστὰ ὅτι $\|\mathcal{D}f\|_{UAP^{k-2}} \leq 1$).

Θὰ ἐπανέλθουμε στὶς συναρτήσεις αὐτὲς στὴν ἑνότητα 3.2, ἐπειδὴ μᾶς χρειάζονται καὶ γιὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος 1.5.2. Μάλιστα ἐκεῖ, θὰ περιοριστοῦμε στὶς δυϊκὲς συναρτήσεις $\mathcal{D}f$ ἐκείνων τῶν συναρτήσεων f οἱ ὁποῖες φράσσονται κατὰ σημεῖον ἀπὸ τὸ μέτρον ν (ἢ ἀπὸ $\nu+1$). Θὰ δείξουμε ὅτι τέτοιες $\mathcal{D}f$ ἱκανοποιοῦν τὶς ἐκτιμήσεις $\|\mathcal{D}f\|_{(U^{k-1})^*} = O(1)$ καὶ $\|\mathcal{D}f\|_{L^\infty} = O(1)$, καὶ ὅτι αὐτὲς οἱ ἐκτιμήσεις (οἱ ὁποῖες εἶναι ἀσθενέστερες ἀπὸ τὴν ἐκτίμησιν $\|\mathcal{D}f\|_{UAP^{k-2}} \leq 1$) ἀρκοῦν γιὰ νὰ δείξουμε τὸ Θεώρημα 1.5.2. Γιὰ αὐτὸν τὸν λόγον, οἱ προαναφερθεῖσες $\mathcal{D}f$ θὰ ἀποτελοῦν τὶς **βασικὲς Gowers ἀνομοιόμορφες συναρτήσεις** γιὰ τὸ γενικευμένον θεώρημα Szemerédi, δηλαδὴ τὶς συναρτήσεις ποὺ θὰ χρησιμοποιήσουμε γιὰ νὰ γράψουμε τὴν f τοῦ Θεωρήματος 1.1.10 ὡς ἄθροισμα μίας $\varepsilon-$Gowers ὁμοιόμορφης συνιστώσας f_1 καὶ μίας «ἀνομοιόμορφης» συνιστώσας f_2 ἡ ὁποία θὰ ἔχει ἀρκετὲς ἀριθμητικὲς προόδους μήκους k στὸν φορέα της.

Μένει νὰ ἀποδείξουμε τὸ Θεώρημα 1.4.4. Ἐξαιτίας τοῦ Λήμματος 2.2.6, ἀρκεῖ νὰ βροῦμε κατάλληλην διχοτομίαν:

Λῆμμα 2.2.10 (Διχοτομία γιὰ τὸ Θεώρημα 1.4.4). *Ἔστω f μὴ ἀρνητική, φραγμένη συνάρτησις τέτοια ὥστε $\int_{\mathbb{Z}_N} f \geq \delta$ γιὰ κάποιο $\delta > 0$. Ἔστω $F : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ συνάρτησις. Ἔστω ἐπίσης ὅτι ἔχουμε συμπαγεῖς σ-ἄλγεβρες $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ τάξεως $k-2$ καὶ πολυπλοκότητος τὸ πολὺ X, X' ἀντιστοίχως, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην* (2.18) *μὲ $\tau := \frac{\delta^2}{5000k}$. Τότε τουλάχιστον ἕν ἀπὸ τὰ ἑπόμενα δύο ἰσχύει:*

- *(Ἐπιτυχία) Μποροῦμε νὰ βροῦμε θετικὸν ἀριθμὸν $M = O_{k,\delta,X}(1)$, φραγμένην συνάρτησιν f_U, καὶ μὴ ἀρνητικές, φραγμένες συναρτήσεις $f_{U^\perp}, f_{UAP}$ ὥστε νὰ ἔχουμε $f = f_U + f_{U^\perp}$, καὶ νὰ ἰσχύουν οἱ ἐκτιμήσεις* (2.2), (2.3), (2.4), *καθὼς καὶ ἡ ἐκτίμησις* (2.1) *Gowers ὁμοιομορφίας τῆς f_U.*
- *(Προσαύξησις τῆς ἐνεργείας) Μποροῦμε νὰ βροῦμε συμπαγῆ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}'' \supseteq \mathcal{B}'$ τάξεως $k-2$ καὶ πολυπλοκότητος $O_{k,\delta,X,X'}(1)$ ὥστε νὰ ἰσχύει*

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{B}'') - \mathcal{E}_f(\mathcal{B}') \gg_{k,\delta,X,F} 1. \tag{2.22}$$

Ἀπόδειξις. Σταθεροποιοῦμε τὶς $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Ἐφ' ὅσον ἡ $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ καὶ φραγμένη, καὶ ἡ $\mathcal{B}$ εἶναι συμπαγὴς τάξεως $k-2$ καὶ πολυπλοκότητος $O(X)$, μποροῦμε ἐφαρμόζοντας τὴν Πρότασιν 2.2.3 νὰ βροῦμε μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην συνάρτησιν f_{UAP} ἔτσι ὥστε

$$\|\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) - f_{UAP}\|_{L^2} \leq \frac{\delta^2}{5000k} \tag{2.23}$$

καὶ

$$\|f_{UAP}\|_{UAP^{k-2}} < M$$

γιὰ κάποιον θετικὸν $M = O_{k,\delta,X}(1)$, τὸν ὁποῖον στὸ ἑξῆς σταθεροποιοῦμε.

Γράφουμε $f = f_U + f_{U^\perp}$, μὲ $f_{U^\perp} := \mathbb{E}(f|\mathcal{B}')$ καὶ $f_U := f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}')$. Προφανῶς γιὰ τὶς $f_{U^\perp}, f_{UAP}$, ἰσχύουν οἱ ἐκτιμήσεις (2.2), (2.3), ἐνῷ ἡ (2.4) ἕπεται ἀπὸ τὶς (2.17), (2.18) καὶ (2.23), καὶ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα (ἂν θυμηθοῦμε ὅτι $\tau = \frac{\delta^2}{5000k}$). Ἂν ἐπιπλέον ἰσχύει ἡ ἐκτίμησις (2.1) Gowers ὁμοιομορφίας τῆς f_U, βρισκόμαστε στὸ πρῶτον μισόν τῆς διχοτομίας, τὴν περίπτωσιν τῆς ἐπιτυχίας. Ἂν δὲν ἰσχύει ὅμως, ἔχουμε

$$\|f_U\|_{U^{k-1}} > F(M),$$

ἑπομένως ἀπὸ τὸ Λῆμμα 2.2.8 μποροῦμε νὰ βροῦμε $G \in UAP^{k-2}$ μὲ $\|G\|_{UAP^{k-2}} \leq 1$, ἔτσι ὥστε

$$|\langle f_U, G\rangle| \gg_{k,M,F} 1. \tag{2.24}$$

Ὁρίζουμε $\mathcal{B}'' := \mathcal{B}' \vee \mathcal{B}_\varepsilon(G)$ γιὰ κάποιο $\varepsilon = \varepsilon(k, M, F) > 0$ τὸ ὁποῖον θὰ ἐπιλέξουμε ἀργότερα. Μποροῦμε τώρα νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} f_U &= \big(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}'')\big) + \big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}'') - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}')\big) \text{ καὶ} \\ G &= \big(G - \mathbb{E}(G|\mathcal{B}'')\big) + \big(\mathbb{E}(G|\mathcal{B}'') - \mathbb{E}(G|\mathcal{B}')\big) + \mathbb{E}(G|\mathcal{B}'). \end{aligned}$$

Οἱ πρῶτοι ὅροι καὶ στὰ δύο ἀθροίσματα εἶναι ὀρθογώνιοι στὴν $\mathcal{B}''$ (ἄρα καὶ στὴν $\mathcal{B}'$), ἐνῷ οἱ δεύτεροι ὅροι εἶναι $\mathcal{B}''-$μετρήσιμοι καὶ ὀρθογώνιοι στὴν $\mathcal{B}'$, τέλος ὁ τρίτος ὅρος στὸ ἄθροισμα τῆς G εἶναι $\mathcal{B}'-$μετρήσιμος. Ἔχουμε ἑπομένως ὅτι

$$\langle f_U, G\rangle = \big\langle f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}''), G - \mathbb{E}(G|\mathcal{B}'')\big\rangle + \big\langle \mathbb{E}(f|\mathcal{B}'') - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}'), \mathbb{E}(G|\mathcal{B}'') - \mathbb{E}(G|\mathcal{B}')\big\rangle.$$

Ἐξαιτίας τοῦ ὅτι ἡ f εἶναι φραγμένη, καὶ ἐξαιτίας τῆς (2.5), ἰσχύει

$$\big|\big\langle f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}''), G - \mathbb{E}(G|\mathcal{B}'')\big\rangle\big| \leq 2\|G - \mathbb{E}(G|\mathcal{B}'')\|_{L^\infty} \ll \varepsilon.$$

Ἄρα, ἂν τὸ ε ἐπιλεγεῖ ἀρκετὰ μικρόν, βλέπουμε ἀπὸ τὴν (2.24) ὅτι

$$\big|\big\langle \mathbb{E}(f|\mathcal{B}'') - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}'), \mathbb{E}(G|\mathcal{B}'') - \mathbb{E}(G|\mathcal{B}')\big\rangle\big| \gg_{k,M,F} 1.$$

Ἀφοῦ καὶ ἡ G εἶναι φραγμένη, ἐφαρμόζοντας τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει

$$\|\mathbb{E}(f|\mathcal{B}'') - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}')\|_{L^2} \gg_{k,M,F} 1$$

(προφανῶς ἀφοῦ τὸ M ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ k, δ, X, ὅλες οἱ παραπάνω ποσότητες εἶναι κατ' οὐσίαν συναρτήσεις τῶν k, δ, X, F.) Ἀλλὰ τότε ἡ ζητουμένη προσαύξησις (2.22) ἕπεται ἀπὸ τὴν (2.17). Ἐπιπλέον, ἐξαιτίας τοῦ ὅτι $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}' \vee \mathcal{B}_\varepsilon(G)$, ἡ πολυπλοκότης τῆς $\mathcal{B}''$, βάσει τοῦ Ὁρισμοῦ 2.2.2, ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα X' τῆς $\mathcal{B}'$, καὶ ἀπὸ τὸ $\varepsilon = \varepsilon(k, \delta, X, F)$. Βρισκόμαστε ἑπομένως στὸ δεύτερον μισόν τῆς διχοτομίας, καὶ ἔχουμε ἀποδείξει τὸ λῆμμα. □

Τὸ Θεώρημα 1.4.4 ἕπεται ἀμέσως, ἂν ἐφαρμόσουμε τὸ Λῆμμα 2.2.10 στὸ Λῆμμα 2.2.6 (γιὰ $m = 1$, μὲ τὴν φραγμένην συνάρτησιν f, καὶ γιὰ $\tau = \frac{\delta^2}{5000k}$). Μένει πλέον γιὰ τὸ θεώρημα Szemerédi νὰ ἀποδείξουμε τὸ Θεώρημα Περιοδικῆς Δομῆς, κάτι ποὺ θὰ γίνει στὶς δύο ἑπόμενες ἑνότητες χρησιμοποιῶντας καὶ τὰ ἐργαλεῖα τῶν ἑνοτήτων 2.2.1, 2.2.2.

2.3 Τὸ Θεώρημα Περιοδικῆς Δομῆς

Ἂς θυμηθοῦμε ὅτι τὸ θεώρημα αὐτὸ μᾶς δίνει ἕναν τρόπον νὰ ἐντοπίζουμε ἀρκετὲς ἀριθμητικὲς προόδους μήκους k στὸν φορέα μίας μὴ ἀρνητικῆς, φραγμένης συναρτήσεως ἡ ὁποία σχετίζεται μὲ κάποιον τρόπον μὲ τὶς ἄλγεβρες UAP^d. Συγκεκριμένα, ἰσχύει τὸ ἑξῆς:

Θεώρημα 1.4.2. *Ἔστωσαν $d \geq 0$, $k \geq 1$ φυσικοὶ καὶ $0 < \delta, M < \infty$ πραγματικοί. Ἔστω ὅτι οἱ $f_{U^\perp}, f_{UAP} : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ εἶναι μὴ ἀρνητικές, φραγμένες συναρτήσεις γιὰ τὶς ὁποῖες ἰσχύουν*

$$\|f_{U^\perp} - f_{UAP}\|_{L^2} \leq \frac{\delta^2}{1024k}, \tag{2.25}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_N} f_{U^\perp} \geq \delta \tag{2.26}$$

καὶ

$$\|f_{UAP}\|_{UAP^d} < M. \tag{2.27}$$

Τότε ἔχουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp}(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \,\middle|\, 0 \leq r \leq N_1\right) \gg_{d,k,\delta,M} 1 \tag{2.28}$$

γιὰ κάθε $\mu \in \mathbb{Z}_N$ καὶ $N_1 \geq 0$.

Οὐσιαστικά, τὸ θεώρημα μᾶς λέει ὅτι ὄχι μόνον οἱ ὁμοιόμορφα σχεδὸν περιοδικὲς συναρτήσεις ἔχουν τὴν ἰδιότητα στὸν φορέα τους νὰ περιέχονται ἀρκετὲς ἀριθμητικὲς πρόοδοι μήκους k, ἀλλὰ καὶ ὅσες συναρτήσεις βρίσκονται ἀρκετὰ κοντὰ (ὡς πρὸς τὴν L^2 νόρμα) σὲ κάποιαν ὁμοιόμορφα σχεδὸν περιοδικὴν συνάρτησιν, ἢ καλύτερα ὅσες συναρτήσεις εἶναι ὅρια (στὸν $L^2(\mathbb{Z}_N)$) ὁμοιόμορφα σχεδὸν περιοδικῶν συναρτήσεων.

2.3.1 Περιοδικὲς ἰδιότητες κάποιων εἰδικῶν UAP συναρτήσεων: μία ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος van der Waerden

Τὸ 1927 ὁ van der Waerden διατυπώνει καὶ ἀποδεικνύει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα [38] :

Θεώρημα 4 (van der Waerden). *Γιὰ κάθε δύο φυσικοὺς $k, m \geq 1$, ὑπάρχει φυσικὸς $N = N_{vdW}(k,m) \geq 1$ ὥστε γιὰ κάθε χρωματισμὸν τοῦ $\{1, \ldots, N\}$ μὲ m χρώματα (δηλαδὴ γιὰ κάθε συνάρτησιν $\mathbf{c} : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, m\}$), νὰ ὑπάρχει μονοχρωματικὴ ἀριθμητικὴ πρόοδος μήκους k (δηλαδὴ πρόοδος στοὺς ὅρους τῆς ὁποίας ἡ $\mathbf{c}$ εἶναι σταθερή).*

Ἡ αὐθεντικὴ ἐκδοχὴ τοῦ θεωρήματος Szemerédi (Θεώρημα 3) εἶναι ἀκριβῶς ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον ὁ Szemerédi γενίκευσε τὸ παραπάνω θεώρημα, ἀπαντῶντας σὲ ἕνα ἐρώτημα τῶν Erdős καὶ Turán. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ θεώρημα 3, μαζὶ μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ περιστερεῶνος, συνεπάγονται τὴν ἰσχὺν τοῦ θεωρήματος van der Waerden (δίδοντας $N_{vdW}(k,m) := N_{SZ}(k, \frac{1}{m})$). Εἶναι ὅμως ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγὴ ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρει, καὶ ἡ ὁποία χρησιμοποιήθηκε καὶ ἀπὸ τὸν ἴδιον τὸν Szemerédi στὴν ἀρχικὴν συνδυαστικὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματός του [33].

Ἐξηγοῦμε πῶς χρησιμοποιεῖται τὸ Θεώρημα 4 στὴν ἐργοδικὴν ἀπόδειξιν τοῦ Tao: ἡ ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.4.2 θὰ γίνει μὲ ἐπαγωγὴν στὸ d. Τόσο ἡ βάσις τῆς ἐπαγωγῆς ὅσο καὶ τὸ ἐπαγωγικὸν βῆμα θὰ στηριχθοῦν σὲ μίαν πρότασιν ποὺ διατυπώνεται σὲ αὐτὴν τὴν ἑνότητα, καὶ ἡ ὁποία ξεκινάει ἀπὸ τὴν παρατήρησιν ὅτι ἂν θέλουμε νὰ μελετήσουμε συναρτήσεις f τῶν ὁποίων οἱ μετατοπίσεις $T^n f$ ἔχουν μίαν ἀναπαράστασιν σὰν τὴν (1.18), μποροῦμε ἀρχικῶς νὰ περιορίσουμε τὶς συναρτήσεις $c_{n,h}$ σὲ κάποιο ἀρκετὰ «συμπαγὲς» σύνολον τὸ ὁποῖον θὰ «χρωματίσουμε» μὲ πεπερασμένα τὸ πλῆθος χρώματα. Ἔπειτα θὰ μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ θεώρημα van der Waerden ὥστε νὰ δείξουμε ὅτι τέτοιου εἴδους f ἱκανοποιοῦν ἀνισότητες σὰν τὴν (2.28).

Ὁ Tao ἐμπνέεται τὸ ἐπιχείρημα αὐτὸ ἀπὸ ἐπιχειρήματα χρωματισμοῦ ποὺ χρησιμοποιοῦνται παραδείγματος χάριν στὸ [5], καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν ἐργοδικὴν ἀπόδειξιν τοῦ Furstenberg (στὴν ὁποίαν βασίζονται τὰ περισσότερα ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα ἐπιχειρήματα ποὺ εἴδαμε).

Πρότασις 2.3.1. *Θεωροῦμε πραγματικὸν ἀριθμὸν $M > 0$, σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ στὸ $\mathbb{Z}_N$, καὶ μὴ κενόν, πεπερασμένον σύνολον δεικτῶν H (τὸ ὁποῖον ἐπιτρέπεται νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ N). Ἔστω ὅτι γιὰ κάθε $n \in \mathbb{Z}_N$ καὶ $h \in H$, ἔχουμε φραγμένες $\mathcal{B}-$μετρήσιμες συναρτήσεις $c_{n,h} : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ καὶ φραγμένες $g_h : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$. Ἔστω ἐπίσης ὅτι οἱ t_h, $h \in H$, εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μὲ συνολικὸν ἄθροισμα τὴν μονάδα. Ὁρίζουμε γιὰ κάθε $n \in \mathbb{Z}_N$ μίαν συνάρτησιν $F_n : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ θέτοντας*

$$F_n := M \cdot \sum_{h \in H} t_h (c_{n,h} g_h) \tag{2.29}$$

(συμβολίζουμε μὲ F αὐτὴν τὴν οἰκογένειαν συναρτήσεων). Ὑποθέτουμε τέλος ὅτι δίδεται μὴ ἀρνητική, φραγμένη συνάρτησις $f_{U^\perp}$ (μὲ τὴν ἔννοιαν ποὺ ἀναφέρουμε στὴν Παρατήρησιν 1.1.2 (ii), δηλαδὴ στὴν πραγματικότητα οἰκογένεια συναρτήσεων $f_{U^\perp,N} : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$). Γιὰ $\delta > 0$, $n \in \mathbb{Z}_N$ καὶ $k \in \mathbb{Z}^+$ θέτουμε $E_n(k,\delta,\mathcal{B},F) \in \mathcal{B}$ νὰ εἶναι τὸ σύνολον

$$E_n(k,\delta,\mathcal{B},F) := \Big\{ x \in \mathbb{Z}_N : \mathbb{E}(T^n f_{U^\perp} | \mathcal{B})(x) \geq \frac{\delta}{2} \quad \textit{καὶ } \mathbb{E}\big(|T^n f_{U^\perp} - F_n| | \mathcal{B}\big)(x) \leq \frac{\delta}{8k} \Big\}. \tag{2.30}$$

Τότε γιὰ κάθε $\delta > 0$ καὶ $k \in \mathbb{Z}^+$ ὑπάρχει θετικὸς ἀκέραιος $k_* = k_*(k,\delta,M)$, ὁ ὁποῖος *δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$, τὴν οἰκογένειαν F ἢ τὴν συνάρτησιν $f_{U^\perp}$, ὥστε*

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N}\prod_{j=0}^{k-1}T^{\mu jr}f_{U^\perp}\,\middle|\,1\le r\le N_0\right) \gg_{k,\delta,M}\mathbb{E}\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\bigcap_{m=1}^{k_*}E_{\mu\lambda m}(k,\delta,\mathcal{B},F)\right)\,\middle|\,1\le\lambda\le\lfloor\frac{N_0}{k_*}\rfloor\right) \tag{2.31}$$

γιὰ κάθε $\mu\in\mathbb{Z}_N$ καὶ $N_0\ge k_*$ (ὑπενθυμίζουμε ὅτι γιὰ $A\subseteq\mathbb{Z}_N$, $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(A):=\mathbb{E}_{\mathbb{Z}_N}(\mathbf{1}_A)$).

Παρατηρήσεις. Ἡ Πρότασις 2.3.1 μᾶς ἐπιτρέπει, ἀντὶ νὰ προσπαθοῦμε νὰ φράξουμε ἀπὸ κάτω ἐκφράσεις ποὺ περιέχουν γινόμενα μετατοπίσεων τῆς $f_{U^\perp}$, νὰ φράσσουμε ἀπὸ κάτω ἐκφράσεις ποὺ περιέχουν τομὲς τῶν $\mathcal{B}-$μετρησίμων συνόλων $E_{\mu\lambda m}(k,\delta,\mathcal{B},F)$. Αὐτὸ εἶναι σαφῶς εὐκολότερον ὅταν ἡ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ εἶναι ἁπλούστερη ἀπὸ τὴν συνάρτησιν $f_{U^\perp}$, εἶναι μάλιστα ὁ λόγος ποὺ μποροῦμε νὰ ἀποδείξουμε τὸ Θεώρημα 1.4.2 μὲ ἐπαγωγὴν στὸ d : στὴν πράξιν, ἡ $f_{U^\perp}$ θὰ εἶναι πολὺ κοντὰ σὲ μίαν ὁμοιόμορφα σχεδὸν περιοδικὴν συνάρτησιν τάξεως d, ἐνῷ ἡ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ θὰ εἶναι συμπαγὴς τάξεως $d-1$, ὁπότε οἱ $\mathcal{B}-$μετρήσιμες συναρτήσεις θὰ προσεγγίζονται ἀπὸ ὁμοιόμορφα σχεδὸν περιοδικὲς συναρτήσεις τάξεως μικρότερης τοῦ d.

Ἀπὸ τὴν ἄλλην, ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως βρίσκουμε φράγματα γιὰ τοὺς θετικοὺς ἀκεραίους k_* βασιζόμενοι στοὺς ἀριθμοὺς van der Waerden, ἡ τελικὴ σταθερὰ στὴν ἀνισότητα (1.24) θὰ εἶναι πάρα πολὺ μικρή (ἂν καί, ἐκμεταλλευόμενοι τὰ ἀποτελέσματα τοῦ Shelah [30] γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς van der Waerden, μποροῦμε νὰ ἀποφύγουμε τουλάχιστον σὲ αὐτὴν τὴν πρότασιν φράγματα τύπου Ackermann).

Ἀπόδειξις. Γιὰ τὸ ζητούμενον, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι ὑπάρχει θετικὸς ἀκέραιος $k_*=k_*(k,\delta,M)$ ὥστε νὰ ἰσχύει «τοπικὰ» ἡ

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N}\prod_{j=0}^{k-1}T^{\mu\lambda js}f_{U^\perp}\,\middle|\,1\le s\le\lfloor\frac{k_*}{k}\rfloor\right)\gg_{\delta,k,k_*}\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\bigcap_{m=1}^{k_*}E_{\mu\lambda m}(k,\delta,\mathcal{B},F)\right) \tag{2.32}$$

γιὰ κάθε $\lambda\in\mathbb{Z}$. Πράγματι, ἂν δείξουμε τὴν (2.32) καὶ ὁλοκληρώσουμε ἔπειτα καὶ τὰ δύο μέλη της ὡς πρὸς $1\le\lambda\le\lfloor\frac{N_0}{k_*}\rfloor$ γιὰ κάποιο $N_0\ge k_*$, θὰ λάβουμε

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N}\prod_{j=0}^{k-1}T^{\mu\lambda js}f_{U^\perp}\,\middle|\,1\le\lambda\le\lfloor\frac{N_0}{k_*}\rfloor,\,1\le s\le\lfloor\frac{k_*}{k}\rfloor\right) \gg_{\delta,k,k_*}\mathbb{E}\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\bigcap_{m=1}^{k_*}E_{\mu\lambda m}(k,\delta,\mathcal{B},F)\right)\,\middle|\,1\le\lambda\le\lfloor\frac{N_0}{k_*}\rfloor\right). \tag{2.33}$$

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι γιὰ κάθε ἀκέραιον $r \in [1, N_0]$ ὑπάρχουν τὸ πολὺ $\lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor$ τρόποι νὰ γράψουμε τὸν r ὡς γινόμενον κάποιου $1 \leq \lambda \leq \lfloor \frac{N_0}{k_*} \rfloor$ καὶ κάποιου $1 \leq s \leq \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor$ (ἀπὸ τὸν κανόνα διαγραφῆς στὸ $\mathbb{Z}$), ἐνῷ προφανῶς κάθε τέτοιο γινόμενον ἀνήκει στὸ διάστημα $[1, N_0]$, συνεπῶς

$$\frac{k_*}{k} \sum_{1 \leq r \leq N_0} \int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp} \geq \sum_{\substack{1 \leq \lambda \leq \lfloor \frac{N_0}{k_*} \rfloor \\ 1 \leq s \leq \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor}} \int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu \lambda j s} f_{U^\perp}$$

καὶ

$$\begin{aligned} (2.34)\quad & \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp} \,\Big|\, 1 \leq r \leq N_0 \right) \\ & \geq \frac{k}{k_*} \frac{\lfloor \frac{N_0}{k_*} \rfloor \cdot \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor}{N_0} \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu \lambda j s} f_{U^\perp} \,\Big|\, 1 \leq \lambda \leq \lfloor \frac{N_0}{k_*} \rfloor, 1 \leq s \leq \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor \right) \\ & \gg_{k,k_*} \quad \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu \lambda j s} f_{U^\perp} \,\Big|\, 1 \leq \lambda \leq \lfloor \frac{N_0}{k_*} \rfloor, 1 \leq s \leq \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor \right). \end{aligned}$$

Ἀπὸ τὶς (2.33), (2.34), προκύπτει ἀκριβῶς ἡ (2.31) (δεδομένου ὅτι στὸ τέλος, ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα van der Waerden, θὰ ἐπιλέξουμε τὸν k_* βάσει τῶν k, δ καὶ M, ὁπότε καὶ ἡ ἐξάρτησις τῶν σταθερῶν ἀπὸ τὸ k_* θὰ εἶναι κατ' οὐσίαν ἐξάρτησις ἀπὸ τὰ k, δ, M).

Παρατηροῦμε στὴν συνέχειαν ὅτι ἀντὶ τῆς (2.32), μποροῦμε νὰ δείξουμε τὴν
(2.35)

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu\lambda(a+js)} f_{U^\perp} \,\Big|\, 1 \leq a, s \leq \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor \right) \gg_{\delta,k,k_*} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\bigcap_{m=1}^{k_*} E_{\mu\lambda m}(k, \delta, \mathcal{B}, F) \right),$$

ἀφοῦ γιὰ ὁποιουσδήποτε ἀκεραίους a, s ἰσχύει

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu\lambda(a+js)} f_{U^\perp} &= \int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu\lambda a} \left(T^{\mu\lambda j s} f_{U^\perp} \right) \\ = \int_{\mathbb{Z}_N} T^{\mu\lambda a} \left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu\lambda j s} f_{U^\perp} \right) &= \int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu\lambda j s} f_{U^\perp}, \end{aligned}$$

ἄρα

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu\lambda(a+js)} f_{U^\perp} \,\Big|\, 1 \leq a \leq \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor \right) = \int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu\lambda j s} f_{U^\perp}.$$

Ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖον προτιμοῦμε τὴν (2.35) ἀντὶ τῆς (2.32) εἶναι ὁ ἑξῆς: ἂν ἀλλάξουμε τὴν σειρὰν τῶν ὁλοκληρωμάτων στὴν (2.35), τὸ ἀριστερὸν μέλος της γράφεται ὡς

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu\lambda(a+js)} f_{U^\perp}(x) \,\Big|\, 1 \le a, s \le \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor\right) \Big|\, x \in \mathbb{Z}_N\right),$$

γίνεται ἑπομένως ὁλοκλήρωσις ὡς πρὸς x κάποιου μέσου ὅρου τῆς ποσότητος

$$f_{U^\perp}(x - \mu\lambda y_0) f_{U^\perp}(x - \mu\lambda y_1) \cdots f_{U^\perp}(x - \mu\lambda y_{k-1}),$$

τὸν ὁποῖον λαμβάνουμε πάνω ἀπὸ ὅλες τὶς ἀριθμητικὲς προόδους $y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1}$, γιὰ τὶς ὁποῖες $1 \le y_0, y_1 - y_0 \le k_*/k$, καὶ ὄχι μόνον πάνω ἀπὸ αὐτὲς ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ ἕναν συγκεκριμένον ἀκέραιον. Ἔχουμε συνεπῶς τὴν δυνατότητα νὰ ἐφαρμόσουμε κατάλληλα τὸ θεώρημα van der Waerden, μὲ στόχον βεβαίως νὰ ἐντοπίσουμε, τουλάχιστον γιὰ τὰ $x \in \bigcap_{m=1}^{k_*} E_{\mu\lambda m}(k, \delta, \mathcal{B}, F)$, κάποιες ἀπὸ τὶς παραπάνω ἀριθμητικὲς προόδους γιὰ τὶς ὁποῖες τὸ γινόμενον $f_{U^\perp}(x - \mu\lambda y_0) \cdots f_{U^\perp}(x - \mu\lambda y_{k-1})$ θὰ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο.

Σταθεροποιοῦμε στὸ ἑξῆς κάποια μ καὶ λ. Ἐπειδὴ μάλιστα τὸ λ μπορεῖ νὰ εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος, ὑποθέτουμε χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος ὅτι $\mu = 1$ (ἁπλοποιῶντας ἔτσι τοὺς συμβολισμούς), καὶ δείχνουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda(a+js)} f_{U^\perp} \,\Big|\, 1 \le a, s \le \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor\right) \gg_{\delta,k,k_*} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\bigcap_{m=1}^{k_*} E_{\lambda m}(k, \delta, \mathcal{B}, F)\right).$$

Τὸ $\bigcap_{m=1}^{k_*} E_{\lambda m}(k, \delta, \mathcal{B}, F)$ εἶναι $\mathcal{B}-$μετρήσιμον, ἄρα γράφεται ὡς ἕνωσις ἀτόμων τῆς $\mathcal{B}$. Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ δείξουμε γιὰ κάθε τέτοιο ἄτομον A τὴν «κατὰ σημεῖον» ἐκτίμησιν

$$\mathbb{E}\left(\int_A \prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda(a+js)} f_{U^\perp} \,\Big|\, 1 \le a, s \le \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor\right) \gg_{\delta,k,k_*} 1, \tag{2.36}$$

ἀφοῦ μετὰ ἡ (2.35) θὰ προκύψει πολλαπλασιάζοντας καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2.36) μὲ $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(A)$ καὶ ἀθροίζοντας πάνω ἀπὸ ὅλα τὰ ἄτομα $\subseteq \bigcap_{m=1}^{k_*} E_{\lambda m}(k, \delta, \mathcal{B}, F)$.

Θεωροῦμε λοιπὸν τυχὸν ἄτομον $A \subseteq \bigcap_{m=1}^{k_*} E_{\lambda m}(k, \delta, \mathcal{B}, F)$. Παρατηροῦμε μάλιστα ὅτι ἀφοῦ ὁλοκληρώνουμε πάνω ἀπὸ τὰ ζεύγη (a, s) μὲ $1 \le a, s \le \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor$, καὶ αὐτὰ εἶναι $(\lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor)^2$ τὸ πλῆθος, ἀρκεῖ γιὰ τὴν (2.36) νὰ βροῦμε **ἕνα καὶ μόνον** (a, s) ὥστε νὰ ἰσχύει

$$\int_A \prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda(a+js)} f_{U^\perp} \gg_{\delta,k} 1. \tag{2.37}$$

Πλέον μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ γεγονὸς ὅτι, ἀφοῦ τὸ A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ $\bigcap_{m=1}^{k_*} E_{\lambda m}(k,\delta,\mathcal{B},F)$, καὶ γιὰ κάθε $1 \le a, s \le \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor$ ἰσχύει

$$1 \le a \le a+s \le \cdots \le a+(k-1)s \le k_*,$$

οἱ τιμὲς τῶν μετατοπίσεων $T^{\lambda(a+js)} f_{U^\perp}$ στὰ $x \in A$ θὰ εἶναι κατὰ μέσον ὅρον κοντὰ στὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν συναρτήσεων $F_{\lambda(a+js)}$.

Ἰσχυρισμός. Ἡ (2.37) ἕπεται ἂν δείξουμε ὅτι ἰσχύει

$$\|F_{\lambda(a+js)} - F_{\lambda a}\|_{L^2(A)} \le \frac{\delta}{8k} \text{ γιὰ κάθε } 0 \le j \le k-1, \tag{2.38}$$

ὅπου $L^2(A)$ εἶναι ὁ χῶρος Hilbert τῶν συναρτήσεων ἀπὸ τὸ A στὸ $\mathbb{R}$ μὲ νόρμα τὴν $\|f\|_{L^2(A)} := (\mathbb{E}_A(|f|^2))^{1/2}$. (Προφανῶς γιὰ συναρτήσεις ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N$ στὸ $\mathbb{R}$, ὅπως οἱ παραπάνω, θεωροῦμε τοὺς περιορισμούς τους στὸ A.)

Ἀπόδειξις τοῦ Ἰσχυρισμοῦ. Ἂν δεχθοῦμε τὴν (2.38), ἐφαρμόζοντας τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz λαμβάνουμε

$$\int_A |F_{\lambda(a+js)} - F_{\lambda a}| \le \frac{\delta}{8k} \text{ γιὰ κάθε } 0 \le j \le k-1.$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν (2.30) τῶν συνόλων E_n, καὶ τὴν ἐπιλογὴν τοῦ A καὶ τῶν a, s, ἔχουμε ἐπίσης

$$\int_A |F_{\lambda(a+js)} - T^{\lambda(a+js)} f_{U^\perp}| \le \frac{\delta}{8k} \text{ γιὰ κάθε } 0 \le j \le k-1,$$

ἑπομένως ἀπὸ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα

$$\int_A |T^{\lambda(a+js)} f_{U^\perp} - T^{\lambda a} f_{U^\perp}| \le \frac{3\delta}{8k} \text{ γιὰ κάθε } 0 \le j \le k-1.$$

Θέτοντας γιὰ κάθε $0 \le j \le k-1$,

$$D_j := \big\{ x \in \mathbb{Z}_N : |T^{\lambda(a+js)} f_{U^\perp}(x) - T^{\lambda a} f_{U^\perp}(x)| > \frac{4}{5} T^{\lambda a} f_{U^\perp}(x) \big\},$$

συμπεραίνουμε ὅτι

$$\int_A \mathbf{1}_{D_j} T^{\lambda a} f_{U^\perp} \le \int_A \frac{5}{4} |T^{\lambda(a+js)} f_{U^\perp} - T^{\lambda a} f_{U^\perp}| \le \frac{15\delta}{32k},$$

ἄρα γιὰ τὴν ἕνωσιν τῶν D_j ἰσχύει

$$\int_A \mathbf{1}_{\bigcup_{j=0}^{k-1} D_j} T^{\lambda a} f_{U^\perp} \le \frac{15\delta}{32}.$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλην, πάλι ἀπὸ τὴν (2.30) ἔχουμε

$$\int_A T^{\lambda a} f_{U^\perp} \geq \delta/2,$$

ἐπομένως

$$\int_A \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_N \setminus (\bigcup_{j=0}^{k-1} D_j)} T^{\lambda a} f_{U^\perp} = \int_A T^{\lambda a} f_{U^\perp} - \int_A \mathbf{1}_{\bigcup_{j=0}^{k-1} D_j} T^{\lambda a} f_{U^\perp} \geq \delta/32.$$

Ἐφ' ὅσον ἡ $f_{U^\perp}$ εἶναι μὴ ἀρνητική, μποροῦμε ἐφαρμόζοντας τὴν ἀνισότητα Hölder νὰ καταλήξουμε ὅτι

$$\int_A \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_N \setminus (\bigcup_{j=0}^{k-1} D_j)} (T^{\lambda a} f_{U^\perp})^k \geq \big(\frac{\delta}{32}\big)^k.$$

Ἡ (2.37) τώρα προκύπτει χρησιμοποιῶντας τὴν κατὰ σημεῖον ἀνισότητα

$$\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda(a+js)} f_{U^\perp} \geq \frac{1}{5^k} \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_N \setminus (\bigcup_{j=0}^{k-1} D_j)} (T^{\lambda a} f_{U^\perp})^k,$$

ἡ ὁποία ἰσχύει ἐπειδὴ γιὰ $x \in \mathbb{Z}_N \setminus (\bigcup_{j=0}^{k-1} D_j)$,

$$|T^{\lambda(a+js)} f_{U^\perp}(x) - T^{\lambda a} f_{U^\perp}(x)| \leq \frac{4}{5} T^{\lambda a} f_{U^\perp}(x) \text{ γιὰ κάθε } 0 \leq j \leq k-1.$$

Μένει νὰ βροῦμε ἕνα ζεῦγος (a, s) ποὺ νὰ ἱκανοποιεῖ τὴν (2.38). Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν (2.29) τῶν F_n, πρέπει γιὰ τὸ (a, s) νὰ δείξουμε ὅτι

$$\Big\| \sum_{h \in H} t_h(c_{\lambda(a+js),h} g_h) - \sum_{h \in H} t_h(c_{\lambda a,h} g_h) \Big\|_{L^2(A)} \leq \frac{\delta}{8Mk} \text{ γιὰ κάθε } 0 \leq j \leq k-1. \tag{2.39}$$

Ἂς σημειωθεῖ ὅτι ἀφοῦ οἱ $c_{n,h}$ εἶναι $\mathcal{B}-$μετρήσιμες, οἱ περιορισμοί τους στὸ A εἶναι σταθερὲς συναρτήσεις, τὶς ὁποῖες μποροῦμε ἑπομένως νὰ χειριστοῦμε σὰν πραγματικοὺς ἀριθμοὺς στὸ διάστημα $[-1, 1]$ (αὐτὸς εἶναι καὶ ὁ λόγος ποὺ δουλεύουμε ξεχωριστὰ πάνω σὲ κάθε ἄτομον $A \subseteq \bigcap_{m=1}^{k_*} E_{\lambda m}(k, \delta, \mathcal{B}, F)$). Ἀπὸ τὴν ἄλλην, οἱ g_h δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην σταθερὲς στὸ A, θὰ χρησιμεύσει ὅμως τὸ ὅτι εἶναι φραγμένες.

Γιὰ νὰ συνεχίσουμε, θὰ χρειαστεῖ νὰ δείξουμε ὅτι τὸ σύνολον

$$\Big\{ \sum_{h \in H} t_h(c_{\lambda m,h} g_h) : 1 \leq m \leq k_* \Big\}$$

εἶναι «ὁλικῶς φραγμένον» στὸν $L^2(A)$, μὲ τὴν ἔννοιαν ὅτι μποροῦμε νὰ βροῦμε γιὰ αὐτὸ $\varepsilon-$δίκτυον, ἔτσι ὥστε ὁ πληθάριθμος τοῦ δικτύου νὰ εἶναι ἐλεγχόμενος, ἀνεξάρτητος τοῦ λ καὶ κυρίως, ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὸ ποιὸ θὰ εἶναι τελικῶς τὸ k_*.

Λῆμμα 2.3.2 (Ποσοτικοποίησις τῆς ἰδιότητος τοῦ *ὁλικῶς φραγμένου*). *Μποροῦμε γιὰ κάποιο $L \ll_{k,\delta,M} 1$ νὰ βροῦμε φυσικοὺς $1 \le m_1 \le \cdots \le m_L \le k_*$ ἔτσι ὥστε*

$$\min_{1\le l\le L} \Big\| \sum_{h\in H} t_h(c_{\lambda m,h} g_h) - \sum_{h\in H} t_h(c_{\lambda m_l,h} g_h)\Big\|_{L^2(A)} \le \frac{\delta}{16Mk}$$

γιὰ κάθε $1 \le m \le k_*$.

Ἀπόδειξις. Συμβολίζουμε μὲ f_m τὸν περιορισμὸν τῆς συναρτήσεως $\sum_{h\in H} t_h(c_{\lambda m,h} g_h)$ στὸ A. Θὰ κατασκευάσουμε ἓν ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀπὸ συναρτήσεις $v_1, v_2, \ldots, v_J$ στὸν $L^2(A)$ μέσῳ μίας ἐπαναληπτικῆς διαδικασίας, ἡ ὁποία θὰ στηριχθεῖ στὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν χώρων Hilbert: *ἂν ἔχουμε χῶρον Hilbert H, ἕνα μὴ κενόν, κλειστὸν καὶ κυρτὸν ὑποσύνολόν του M (ἐπὶ παραδείγματι, ἕναν κλειστὸν ὑπόχωρον), καθὼς καὶ ἕνα στοιχεῖον $x_0 \in H$, τότε ὑπάρχει μοναδικὸν $y_0 \in M$ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν $\|x_0 - y_0\|_H = \operatorname{dist}_H(x_0, M)$. Ἐπιπλέον, ἂν τὸ M εἶναι ὑπόχωρος, τὸ διάνυσμα $x_0 - y_0$ ἀνήκει στὸν $M^\perp$, εἶναι δηλαδὴ κάθετον σὲ κάθε διάνυσμα τοῦ M.*

Ὁ ἀλγόριθμος ποὺ θὰ διατυπώσουμε εἶναι μία ὑποτυπώδης ἐκδοχὴ τοῦ ἀλγορίθμου στὸ ἐπιχείρημα τῶν σταθερῶν προσαυξήσεων: ἐδῶ ἀντὶ γιὰ σ-ἄλγεβρες θὰ ἔχουμε πεπερασμένης διαστάσεως ὑποχώρους ἑνὸς χώρου Hilbert.

Βῆμα 0 Ἀρχικῶς θέτουμε $J = 0$.

Βῆμα 1 Ἔστω $V \subseteq L^2(A)$ ὁ ὑπόχωρος ποὺ παράγεται ἀπὸ τὰ διανύσματα $v_1, \ldots, v_J$ (ἀρχικῶς αὐτὸς θὰ εἶναι ὁ μηδενικὸς ὑπόχωρος). Παρατηροῦμε ὅτι ἀφοῦ ὁ V εἶναι πεπερασμένης διαστάσεως, εἶναι κλειστὸς ὑπόχωρος τοῦ $L^2(A)$.

Βῆμα 2 Ἂν ὑπάρχει δείκτης $1 \le m \le k_*$ γιὰ τὸν ὁποῖον $\operatorname{dist}_{L^2(A)}(f_m, V) \ge \delta/(64Mk)$, τότε μποροῦμε νὰ βροῦμε μοναδιαῖον διάνυσμα v_{J+1}, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι κάθετον στὸν V (ἄρα καὶ σὲ ὅλα τὰ $v_1, \ldots, v_J$), ὥστε νὰ ἰσχύει

$$|\langle f_m, v_{J+1}\rangle_{L^2(A)}| \ge \frac{\delta}{64Mk}.$$

Πράγματι, βρίσκουμε τὸ μοναδικὸν $u_m \in V$ μὲ τὴν ἰδιότητα $\|f_m - u_m\|_{L^2(A)} = \operatorname{dist}_{L^2(A)}(f_m, V)$, καὶ θέτουμε $v_{J+1} := (f_m - u_m)/\|f_m - u_m\|_{L^2(A)}$. Τότε τὸ v_{J+1} εἶναι μοναδιαῖον καὶ κάθετον στὸν V, ἄρα ἰσχύει $\langle u_m, v_{J+1}\rangle_{L^2(A)} = 0$. Ἕπεται ὅτι

$$\begin{aligned}\langle f_m, v_{J+1}\rangle_{L^2(A)} &= \langle f_m - u_m, v_{J+1}\rangle_{L^2(A)} = \Big\langle f_m - u_m, \frac{f_m - u_m}{\|f_m - u_m\|_{L^2(A)}}\Big\rangle_{L^2(A)} \\ &= \|f_m - u_m\|_{L^2(A)} = \operatorname{dist}_{L^2(A)}(f_m, V) \ge \frac{\delta}{64Mk}.\end{aligned}$$

Σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, ἐπιλέγουμε τὸν ἐλάχιστον τέτοιον δείκτην m_0 καὶ βρίσκουμε τὸ ἀντίστοιχον διάνυσμα v_{J+1}, ἔπειτα αὐξάνουμε τὸ J κατὰ 1 καὶ ἐπιστρέφουμε στὸ προηγούμενον βῆμα. Ἄλλιῶς, τερματίζουμε τὸν ἀλγόριθμον.

Ἰσχυριζόμαστε ὅτι αὐτὸς ὁ ἀλγόριθμος τερματίζει σὲ $O_{k,M,\delta}(1)$ βήματα. Πράγματι, γιὰ κάθε διάνυσμα v_j ποὺ ἐπιλέγουμε ὑπάρχει $m = m(j) \in \mathbb{Z}_N$ ὥστε

$$\Big|\sum_{h\in H} t_h c_{\lambda m,h}\langle g_h, v_j\rangle_{L^2(A)}\Big| = |\langle f_m, v_j\rangle_{L^2(A)}| \geq \frac{\delta}{64Mk},$$

ὅπου χρησιμοποιοῦμε τὴν ὑπόθεσιν ὅτι οἱ $c_{n,h}$ εἶναι σταθερὲς στὸ A. Ἀφοῦ εἶναι ἐπίσης φραγμένες, βλέπουμε ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz ὅτι

$$\begin{aligned}\sum_{h\in H} t_h|\langle g_h, v_j\rangle_{L^2(A)}|^2 &\geq \left(\sum_{h\in H} t_h|c_{\lambda m,h}|^2\right)\left(\sum_{h\in H} t_h|\langle g_h, v_j\rangle_{L^2(A)}|^2\right)\\ &\geq \Big|\sum_{h\in H} t_h c_{\lambda m,h}\langle g_h, v_j\rangle_{L^2(A)}\Big|^2 \geq \left(\frac{\delta}{64Mk}\right)^2.\end{aligned}$$

Ἀθροίζοντας ὡς πρὸς $1 \leq j \leq J$, λαμβάνουμε ὅτι

$$\sum_{h\in H}\left(t_h \cdot \sum_{j=1}^{J} |\langle g_h, v_j\rangle_{L^2(A)}|^2\right) \geq \left(\frac{\delta}{64Mk}\right)^2 J.$$

Ὅμως τὰ v_j σχηματίζουν ὀρθοκανονικὸν σύνολον τοῦ $L^2(A)$, ἄρα ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Bessel γιὰ κάθε h,

$$\sum_{j=1}^{J} |\langle g_h, v_j\rangle_{L^2(A)}|^2 \leq \|g_h\|^2_{L^2(A)} \leq 1$$

ἀφοῦ ἡ g_h εἶναι φραγμένη. Προκύπτει τὸ ζητούμενον: $J \leq \left(\frac{64Mk}{\delta}\right)^2 = O_{k,M,\delta}(1)$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι κατὰ τὸν τερματισμὸν τοῦ ἀλγορίθμου ὅλες οἱ συναρτήσεις f_m ἀπέχουν λιγότερον ἀπὸ $\delta/(64Mk)$ ἀπὸ τὸν τελικὸν ὑπόχωρον V διαστάσεως $J = O_{k,M,\delta}(1)$ (μὲ τὴν μετρικὴν τοῦ $L^2(A)$). Ὡς συνέπειαν αὐτοῦ θὰ δείξουμε τὸ ἑξῆς:

Ἰσχυρισμός. Ἂν θεωρήσουμε L ἀπὸ τὶς k_* συναρτήσεις μας, $f_{m_1}, \ldots, f_{m_L}$, μὲ τὴν ἰδιότητα κάθε δύο ἀπὸ τὶς f_{m_l} νὰ ἀπέχουν τουλάχιστον $\delta/(16Mk)$ στὴν μετρικὴν τοῦ $L^2(A)$, τότε τὸ L δὲν θὰ ξεπερνᾶ μίαν σταθερὰν ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰ k, M, δ καὶ J (ἄρα κατ' οὐσίαν ἀπὸ τὰ k, M, δ).

Ἀπόδειξις τοῦ Ἰσχυρισμοῦ. Θεωροῦμε $f_{m_1}, \ldots, f_{m_L}$ μὲ τὴν παραπάνω ἰδιότητα, καὶ γιὰ κάθε $1 \leq l \leq L$, βρίσκουμε $w_l \in V$ ὥστε

$$\|f_{m_l} - w_l\|_{L^2(A)} = \mathrm{dist}_{L^2(A)}(f_{m_l}, V) < \frac{\delta}{64Mk}.$$

Δείχνουμε ἀρχικῶς ὅτι $\|w_l\|_{L^2(A)} < 1 + \delta/(64Mk)$: αὐτὸ ἕπεται ἀπὸ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα καὶ τὴν ἐκτίμησιν $\|f_{m_l}\|_{L^2(A)} \leq 1$, ἡ ὁποία προκύπτει ἐπειδὴ οἱ συναρτήσεις $c_{n,h}$ καὶ g_h εἶναι φραγμένες, ἄρα φραγμένη εἶναι καὶ ἡ $\sum_{h\in H} t_h(c_{\lambda m_l,h} g_h)$.

Παρατηροῦμε ἔπειτα ὅτι ἐπειδὴ

$$\|f_{m_l} - f_{m_s}\|_{L^2(A)} \geq \frac{\delta}{16Mk} \text{ ὅταν } l \neq s,$$

ἰσχύει κάτι ἀντίστοιχον γιὰ τὶς w_l, δηλαδὴ

$$\|w_l - w_s\|_{L^2(A)} \geq \frac{\delta}{32Mk} \text{ ὅταν } l \neq s.$$

Αὐτὸ γιατὶ

$$\begin{aligned} \|f_{m_l} - f_{m_s}\|_{L^2(A)} &\leq \|f_{m_l} - w_l\|_{L^2(A)} + \|w_l - w_s\|_{L^2(A)} + \|w_s - f_{m_s}\|_{L^2(A)} \\ &< \frac{\delta}{32Mk} + \|w_l - w_s\|_{L^2(A)}. \end{aligned}$$

Ἕπεται ὅτι, στὸν ὑπόχωρον V μὲ τὴν ἐπαγομένην μετρικήν, οἱ L κλειστὲς μπάλες

$$\bar{B}_V(w_l, \tfrac{\delta}{64Mk}) := \big\{u \in V : \|u - w_l\|_{L^2(A)} \leq \tfrac{\delta}{64Mk}\big\}$$

ἔχουν ξένα ἐσωτερικὰ καὶ περιέχονται ὅλες στὴν $\bar{B}_V(0, 1 + \frac{\delta}{32Mk})$. Ἀφοῦ ὁ V ἔχει διάστασιν J, τὸ L δὲν μπορεῖ νὰ ξεπερνᾷ μίαν σταθερὰν ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰ k, M, δ καὶ J. *Γιὰ νὰ τὸ δείξουμε αὐτό, μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε τὸ $J-$διάστατον μέτρον Lebesgue στὸν χῶρον $(V, \|\cdot\|_{L^2(A)})$ (παρατηρῶντας ὅτι εἶναι ἰσομετρικῶς ἰσόμορφος μὲ τὸν $(\mathbb{R}^J, \|\cdot\|_2)$), καὶ ἔπειτα νὰ χρησιμοποιήσουμε τὶς ἰδιότητές του: (i) ὅτι εἶναι ἀναλλοίωτον ὡς πρὸς μεταφορές, ἄρα*

$$m_J\big(\bar{B}_V(w_l, \tfrac{\delta}{64Mk})\big) = m_J\big(\bar{B}_V(0, \tfrac{\delta}{64Mk})\big) \text{ γιὰ κάθε } 1 \leq l \leq L,$$

καὶ (ii) ὅτι γιὰ κάθε μετρήσιμον σύνολον $D \subseteq V$ καὶ κάθε $r \in (0, +\infty)$ ἰσχύει $m_J(rD) = r^J \cdot m_J(D)$, ἄρα $m_J\big(\bar{B}_V(0,r)\big) = r^J \cdot m_J\big(\bar{B}_V(0,1)\big)$.

Πλέον, γιὰ νὰ ὁλοκληρώσουμε τὴν ἀπόδειξιν τοῦ λήμματος, ἀρκεῖ νὰ βροῦμε ἕνα μεγιστικὸν ὑποσύνολον $\{f_{m_1}, \ldots, f_{m_L}\}$ τῶν k_* συναρτήσεων f_m, μὲ τὴν ἰδιότητα κάθε δύο ἀπὸ τὶς f_{m_l} νὰ ἀπέχουν τουλάχιστον $\delta/(16Mk)$ στὸν $L^2(A)$ (ὅπως εἴδαμε παραπάνω, ὁ πληθάριθμος ἑνὸς τέτοιου συνόλου θὰ εἶναι οὕτως ἢ ἄλλως $\ll_{k,M,\delta} 1$). Χρησιμοποιοῦμε τὸν συνήθη «ἄπληστον» ἀλγόριθμον: θέτουμε $f_{m_1} := f_1$, καὶ ἔχοντας ἐπιλέξει τὶς $f_{m_1}, \ldots, f_{m_l}$ θέτουμε m_{l+1} νὰ εἶναι ὁ ἐλάχιστος δείκτης m γιὰ τὸν ὁποῖον ἡ f_m ἀπέχει τουλάχιστον $\delta/(16Mk)$ ἀπὸ καθεμίαν ἀπὸ τὶς $f_{m_1}, \ldots, f_{m_l}$ (ἂν βεβαίως ὑπάρχει τέτοιος δείκτης). Προφανῶς ἡ διαδικασία τερματίζει σὲ $L \leq k_*$ βήματα, καὶ $L = O_{k,M,\delta,J}(1) = O_{k,M,\delta}(1)$. $\square$

Χρησιμοποιῶντας τὸ Λῆμμα 2.3.2, μποροῦμε νὰ «χρωματίσουμε» τοὺς δεῖκτες m μὲ L τὸ πολὺ χρώματα, ὁρίζοντας $\boldsymbol{c} : \{1, \ldots, k_*\} \to \{1, \ldots, L\}$ ἔτσι ὥστε

$$\boldsymbol{c}(m) := \min\left\{1 \leq l \leq L : \Big\| \sum_{h \in H} t_h(c_{\lambda m,h} g_h) - \sum_{h \in H} t_h(c_{\lambda m_l,h} g_h)\Big\|_{L^2(A)} \leq \frac{\delta}{16Mk}\right\}.$$

Ἀπὸ τὸ θεώρημα van der Waerden, ἐφ' ὅσον τὸ $k_* = k_*(k, L) = k_*(k, \delta, M)$ ἐπιλεγεῖ ἀρκετὰ μεγάλο (μᾶς ἀρκεῖ $k_* := kN_{vdW}(k, L)$), θὰ μποροῦμε νὰ βροῦμε $1 \leq a, s \leq \lfloor \frac{k_*}{k} \rfloor$ ὥστε ἡ πρόοδος $a, a+s, \ldots, a+(k-1)s$ νὰ εἶναι μονοχρωματική. Ἡ (2.39) προκύπτει τώρα ἀπὸ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα, καὶ ὅπως εἴδαμε συνεπάγεται τὸ συμπέρασμα τῆς Προτάσεως 2.3.1. □

Ἄμεσον πόρισμα τῆς Προτάσεως 2.3.1 εἶναι ἡ περίπτωσις $d = 1$ τοῦ Θεωρήματος Περιοδικῆς Δομῆς, ἡ ὁποία θὰ λειτουργήσει ὡς βάσις τῆς ἐπαγωγῆς μας.

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.4.2 *ὅταν* $d = 1$. Ἔστωσαν συναρτήσεις $f_{U^\perp}, f_{UAP}$ καὶ παράμετροι k, δ, M ὅπως στὴν διατύπωσιν τοῦ θεωρήματος. Ἔστω ἐπίσης $k_* = k_*(k, \delta, M)$ ὁ θετικὸς ἀκέραιος ποὺ μᾶς δίνει ἡ Πρότασις 2.3.1. Ἀπὸ τὴν (2.27) καὶ τοὺς Ὁρισμοὺς $1.3.2, 1.3.4$, μποροῦμε νὰ βροῦμε μὴ κενὸν σύνολον δεικτῶν H, οἰκογένειες φραγμένων σταθερῶν $(c_{n,h})_{n\in\mathbb{Z}_N, h\in H}$ καὶ φραγμένων συναρτήσεων $(g_h)_{h\in H}$, καὶ μὴ ἀρνητικοὺς πραγματικοὺς t_h, $h \in H$, οἱ ὁποῖοι ἀθροίζονται στὴν μονάδα, ὥστε νὰ ἔχουμε τὴν ἀναπαράστασιν (2.29) μὲ $F_n := T^n f_{UAP}$. Θεωροῦμε $\mu \in \mathbb{Z}_N$, $N_1 \geq 0$ καὶ ἐξετάζουμε τὴν ἔκφρασιν $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp}(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \big|\, 0 \leq r \leq N_1\right)$: γιὰ $r = 0$ ἰσχύει

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp}(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) = \int_{\mathbb{Z}_N} (f_{U^\perp})^k \geq \left(\int_{\mathbb{Z}_N} f_{U^\perp}\right)^k \geq \delta^k$$

ἀπὸ τὴν (2.26) καὶ τὴν ἀνισότητα Hölder (δεδομένου ὅτι ἡ $f_{U^\perp}$ εἶναι μὴ αρνητική). Ἄρα, ὅταν $0 \leq N_1 < k_*$,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp}(x) \,\big|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \Big|\, 0 \leq r \leq N_1\right) \geq \delta^k / k_*.$$

Ὅταν $N_1 \geq k_*$, ἐφαρμόζουμε τὴν Πρότασιν 2.3.1 μὲ $\mathcal{B}$ τὴν τετριμμένην σ-ἄλγεβρα $\{\emptyset, \mathbb{Z}_N\}$ (ἐφ' ὅσον οἱ $c_{n,h}$ εἶναι ὁμοιόμορφα σχεδὸν περιοδικὲς τάξεως 0, ἄρα $\{\emptyset, \mathbb{Z}_N\}$−μετρήσιμες), καὶ λαμβάνουμε ὅτι

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp} \,\big|\, 0 \leq r \leq N_1\right) \\
&\qquad \geq \frac{N_1}{N_1+1}\, \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp} \,\big|\, 1 \leq r \leq N_1\right) \\
&\qquad \gg_{k,\delta,M} \mathbb{E}\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\bigcap_{m=1}^{k_*} E_{\mu\lambda m}(k, \delta, \mathcal{B}, F)\right) \Big|\, 1 \leq \lambda \leq \lfloor \frac{N_1}{k_*} \rfloor\right),
\end{aligned}$$

ὅπου ἀπὸ τὴν (2.30), τὰ σύνολα $E_{\mu\lambda m}(k,\delta,\mathcal{B},F)$ εἶναι εἴτε τὸ κενὸν σύνολον εἴτε ὅλο τὸ $\mathbb{Z}_N$. Μάλιστα, τὸ δεύτερον συμβαίνει ἂν

$$\int_{\mathbb{Z}_N} T^{\mu\lambda m} f_{U^\perp} \geq \delta/2 \text{ καὶ } \int_{\mathbb{Z}_N} \left|T^{\mu\lambda m} f_{U^\perp} - F_{\mu\lambda m}\right| \leq \frac{\delta}{8k} \tag{2.40}$$

(ἀπὸ τὸν τύπον τῆς δεσμευμένης μέσης τιμῆς ὡς πρὸς τὴν σ-ἄλγεβρα $\{\emptyset, \mathbb{Z}_N\}$). Θυμόμαστε ὅμως ὅτι οἱ μετατοπίσεις δὲν μεταβάλλουν τὰ ὁλοκληρώματα, δηλαδὴ

$$\int_{\mathbb{Z}_N} T^{\mu\lambda m} f_{U^\perp} = \int_{\mathbb{Z}_N} f_{U^\perp},$$

$$\int_{\mathbb{Z}_N} \left|T^{\mu\lambda m} f_{U^\perp} - F_{\mu\lambda m}\right| = \int_{\mathbb{Z}_N} T^{\mu\lambda m}(|f_{U^\perp} - f_{UAP}|) = \int_{\mathbb{Z}_N} |f_{U^\perp} - f_{UAP}|,$$

συνεπῶς τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα στὴν (2.40) εἶναι πάντοτε $\geq \delta$, ἐνῷ τὸ δεύτερον, λόγῳ τῆς (2.25) καὶ τῆς ἀνισότητος Cauchy-Schwarz, πάντοτε $\leq \frac{\delta^2}{1024k}$. Δηλαδὴ γιὰ τὶς $f_{U^\perp}, f_{UAP}$ τῆς διατυπώσεως, $E_{\mu\lambda m}(k,\delta,\mathcal{B},F) = \mathbb{Z}_N$ γιὰ κάθε λ καὶ m. Τὸ ζητούμενον ἕπεται. □

2.3.2 Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.4.2

Γιὰ νὰ καταλήξουμε ὅτι τὸ Θεώρημα Περιοδικῆς Δομῆς ἰσχύει γιὰ κάθε φυσικὸν d, μένει νὰ διατυπώσουμε καὶ νὰ ἀποδείξουμε τὸ βῆμα τῆς ἐπαγωγῆς μας. (*Ἡ περίπτωσις $d=0$ μπορεῖ νὰ ἀναχθεῖ στὴν περίπτωσιν $d=1$, ἢ καὶ νὰ ἀποδειχθεῖ ἀπευθείας, ἀφοῦ τότε ἡ f_{UAP} θὰ εἶναι σταθερή, καὶ μάλιστα, ἐξαιτίας τῆς* (2.25), *τῆς* (2.26) *καὶ τῆς ἀνισότητος Cauchy-Schwarz, θὰ εἶναι $\geq 3\delta/4$. Ἄρα τὰ σύνολα στὰ ὁποῖα ἡ $f_{U^\perp}$ καὶ οἱ μετατοπίσεις της θὰ παίρνουν τιμές, παραδείγματος χάριν, $> \delta/2$, θὰ ἔχουν, λόγῳ τῆς* (2.25) *καὶ τῆς ἀνισότητος Markov, ἀρκετὰ μεγάλον πληθάριθμον, ἂς ποῦμε $> (1-\frac{1}{2k})N$. Προκύπτει ὅτι γιὰ κάθε r, τὰ $x \in \mathbb{Z}_N$ γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp}(x) \leq (\frac{\delta}{2})^k$, θὰ ἀνήκουν σὲ κάποιο σύνολον πληθαρίθμου $\leq N/2$, πράγμα ποὺ δίνει τὸ ζητούμενον.*)

Σταθεροποιοῦμε ἑπομένως στὴν ἑνότητα αὐτὴν κάποιο $d > 1$ καὶ ὑποθέτουμε ὅτι τὸ θεώρημα ἔχει ἤδη δειχθεῖ γιὰ $d-1$. Ὑπενθυμίζουμε ἀπὸ τὴν Παρατήρησιν 1.4.3 ὅτι αὐτὸ μᾶς ἐξασφαλίζει γιὰ κάθε ἐπιλογὴν θετικοῦ ἀκεραίου k' καὶ πραγματικῶν $0 < \delta', M' < \infty$, μίαν σταθερὰν $c(d-1,k',\delta',M')$, ἡ ὁποία εἶναι κάτω φράγμα τῶν ἐκφράσεων

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp} \,\middle|\, 0 \leq r \leq N_1\right),\ \mu \in \mathbb{Z}_N, N_1 \geq 0,$$

ὅποτε κάποιες μὴ αρνητικές, φραγμένες συναρτήσεις $f_{U^\perp}, f_{UAP}$ ἱκανοποιοῦν τὶς ἐκτιμήσεις (2.25) – (2.27) γιὰ τὶς παραμέτρους $d-1, k', \delta'$ καὶ M'.

Σταθεροποιῶντας λοιπὸν θετικὸν ἀκέραιον k, καὶ πραγματικοὺς $0 < \delta, M < \infty$, θέλουμε νὰ δείξουμε ὅτι ὑπάρχει ἀντίστοιχη σταθερὰ $c(d,k,\delta,M)$. Μποροῦμε μάλιστα νὰ θεωρήσουμε ὅτι $k \geq 2$ (καὶ αὐτὸ θὰ χρειαστεῖ σὲ κάποιους ὑπολογισμούς), ἀφοῦ γιὰ $k = 1$,

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp} \,\middle|\, 0 \leq r \leq N_1\right) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} f_{U^\perp} \,\middle|\, 0 \leq r \leq N_1\right) = \int_{\mathbb{Z}_N} f_{U^\perp},$$

ἄρα ἀπὸ τὴν (2.26), $c(d, 1, \delta, M) = \delta$.

Πλέον, ἐπειδὴ ἔχουμε καὶ τὸ Λῆμμα 2.2.6, ἀρκεῖ νὰ βροῦμε κατάλληλην διχοτομίαν:

Πρότασις 2.3.3 (Διχοτομία γιὰ τὸ Θεώρημα 1.4.2). *Ἔστω ὅτι γιὰ τὸν φυσικὸν $d \geq 2$ ποὺ ἔχουμε σταθεροποιήσει, καὶ γιὰ φυσικὸν $k \geq 2$, πραγματικοὺς $0 < \delta, M < \infty$, κάποιο ζευγάρι μὴ ἀρνητικῶν, φραγμένων συναρτήσεων $f_{U^\perp}, f_{UAP}$ ἱκανοποιεῖ τὶς $(2.25) - (2.27)$. Θέτουμε*

$$f := (f_{U^\perp}, |f_{U^\perp} - f_{UAP}|)$$

(ὁπότε οἱ συντεταγμένες συναρτήσεις εἶναι φραγμένες). Ἔστωσαν $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ συμπαγεῖς σ-ἄλγεβρες τάξεως $d-1$ καὶ πολυπλοκότητος τὸ πολὺ X, X' ἀντιστοίχως, τέτοιες ὥστε νὰ ἰσχύει ἡ (2.18) γιὰ κάποιο ἀρκετὰ μικρὸν $\tau > 0$, ἀνεξάρτητον τῶν X, X' (ὅπως θὰ δοῦμε, μᾶς ἀρκεῖ $\tau = \frac{\delta^3}{2^{27} k k_*}$, ὅπου $k_* = k_*(k, \delta, M)$ εἶναι ὁ θετικὸς ἀκέραιος ποὺ μᾶς δίνει ἡ Πρότασις 2.3.1). Τότε γιὰ κάθε πρῶτον N τουλάχιστον ἕν ἀπὸ τὰ ἑπόμενα δύο ἰσχύει:

- (*Ἐπιτυχία*) *Ἔχουμε*

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp} \,\middle|\, 0 \leq r \leq N_1\right) \geq c(\tau, X) > 0 \tag{2.41}$$

γιὰ κάθε $\mu \in \mathbb{Z}_N$ καὶ $N_1 \geq 0$, γιὰ μίαν θετικὴν σταθερὰν $c(\tau, X)$ ποὺ ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ τὰ d, k, δ, M, καὶ ἡ ὁποία θὰ προκύψει κατὰ τὴν ἀπόδειξιν.

- (*Προσαύξησις τῆς ἐνεργείας*) *Μποροῦμε νὰ βροῦμε συμπαγῆ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}''_N$ τοῦ $\mathbb{Z}_N$ ἡ ὁποία περιέχει τὴν $\mathcal{B}'_N$, εἶναι τάξεως $d-1$ καὶ πολυπλοκότητος $O_{\tau,X,X'}(1)$, καὶ γιὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει*

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{B}''_N) - \mathcal{E}_f(\mathcal{B}'_N) \gg_{\tau,X} 1. \tag{2.42}$$

(Ὅπως καὶ στὴν διχοτομίαν γιὰ τὸ Θεώρημα Διασπάσεως, τὸ φράγμα γιὰ τὴν προσαύξησιν τῆς ἐνεργείας δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα X' τῆς $\mathcal{B}'$. Ἀντιθέτως, τόσο αὐτὸ τὸ φράγμα ὅσο καὶ τὸ φράγμα γιὰ τὴν πολυπλοκότητα τῆς $\mathcal{B}''_N$ θὰ ἐξαρτῶνται ὁπωσδήποτε καὶ ἀπὸ τὰ d, k, δ καὶ M, γιὰ ἁπλότητα ὅμως στοὺς συμβολισμοὺς δὲν θὰ τὸ γράφουμε πάντα.)

Σημείωσις. Μποροῦμε νὰ διατυπώσουμε μίαν ἰδιότητα P γιὰ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ἡ ὁποία θὰ ἀληθεύει γιὰ $R > 0$ ἂν

$$«\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp} \,\middle|\, 0 \le r \le N_1\right) \ge \frac{1}{R} \text{ γιὰ κάθε } \mu \in \mathbb{Z}_N \text{ καὶ } N_1 \ge 0».$$

Βλέπουμε ἔτσι ὅτι ἡ παραπάνω διχοτομία εἶναι αὐτὴ ἀκριβῶς ποὺ ζητεῖται ἀπὸ τὸ Λῆμμα 2.2.6, στὴν πιὸ λεπτομερῆ της μορφὴν ὅπως ἐξηγεῖται στὴν Παρατήρησιν 2.2.7. Προκύπτει ἑπομένως τὸ Θεώρημα Περιοδικῆς Δομῆς γιὰ τὸν φυσικὸν d ποὺ ἔχουμε σταθεροποιήσει, ἂν ἐφαρμόσουμε στὸ Λῆμμα 2.2.6 (μὲ $m = 2$, $f = (f_{U^\perp}, |f_{U^\perp} - f_{UAP}|)$) τὴν Πρότασιν 2.3.3, ἡ ὁποία βεβαίως θὰ ἰσχύει ἐφ' ὅσον ὑποθέσουμε τὸ Θεώρημα 1.4.2 γιὰ $d-1$. Αὐτό, μαζὶ μὲ τὴν περίπτωσιν $d = 1$, ἀρκεῖ ὥστε νὰ καταλήξουμε ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ἐπαγωγῆς ὅτι τὸ θεώρημα ἰσχύει γιὰ κάθε φυσικόν.

Ἀπόδειξις. Ὅπως ἔχει ἀναφερθεῖ ἤδη, θὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν Πρότασιν 2.3.1, ἀφοῦ πρῶτα ἀντιμετωπίσουμε κάποια προβλήματα ποὺ ἐμφανίζονται. Ἀπὸ τὴν (2.27) καὶ τοὺς Ὁρισμοὺς 1.3.2, 1.3.4, μποροῦμε νὰ βροῦμε πεπερασμένον, μὴ κενὸν σύνολον δεικτῶν H, μὴ ἀρνητικοὺς πραγματικοὺς t_h, $h \in H$, οἱ ὁποῖοι ἀθροίζονται στὴν μονάδα, οἰκογένειαν φραγμένων συναρτήσεων $(g_h)_{h \in H}$, καὶ οἰκογένειαν συναρτήσεων $(c_{n,h})_{n \in \mathbb{Z}_N, h \in H}$ στὴν UAP^{d-1} μὲ $\|c_{n,h}\|_{UAP^{d-1}} \le 1$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{Z}_N, h \in H$, ὥστε νὰ μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$T^n f_{UAP} = M \cdot \sum_{h \in H} t_h (c_{n,h} g_h) \text{ γιὰ κάθε } n \in \mathbb{Z}_N.$$

Τὸ πρῶτον πρόβλημα εἶναι ὅτι δὲν ὑπάρχει καμμία ἀπαίτησις οἱ $c_{n,h}$ νὰ εἶναι μετρήσιμες οὔτε κάν στὴν μεγαλύτερην σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}'$. Μάλιστα, τὸ πλῆθος τους προφανῶς δὲν εἶναι φραγμένον, ἀφοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ N, ὁπότε ἂν τὶς προσθέσουμε ὅλες στὴν $\mathcal{B}'$ ἡ πολυπλοκότης θὰ αὐξηθεῖ χωρὶς ἔλεγχον. Θὰ χρειαστεῖ ἑπομένως νὰ σταθεροποιήσουμε ἕναν μεγάλον φυσικὸν $N_0(\tau, X)$, ὁ ὁποῖος θὰ καθορίζει πόσες ἀπὸ τὶς $c_{n,h}$ ἀρκεῖ νὰ προσθέσουμε ὥστε τὰ σφάλματα, τὰ ὁποῖα θὰ ἐξαρτῶνται ἐπίσης ἀπὸ τὸ N_0, νὰ εἶναι ἀμελητέα.

Σταθεροποιοῦμε κάποιον πρῶτον N καὶ ἀποδεικνύουμε τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς: ξεχωριστὰ γιὰ κάθε $\mu \in \mathbb{Z}_N$, δείχνουμε εἴτε ὅτι ἱκανοποιεῖται ἡ (2.41) γιὰ κάθε $N_1 \ge 0$ (μὲ μίαν σταθερὰν βεβαίως ποὺ δὲν θὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μ), εἴτε ὅτι μποροῦμε νὰ βροῦμε συμπαγῆ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}''_N = \mathcal{B}''_{N,\mu}$ τάξεως d καὶ πολυπλοκότητος $O_{\tau,X,X'}(1)$, ἡ ὁποία νὰ περιέχει τὴν $\mathcal{B}'_N$, ἔτσι ὥστε νὰ ἰσχύει ἡ (2.42) (πάλι τὰ ὑπονοούμενα φράγματα γιὰ τὴν (2.42) ἢ γιὰ τὴν πολυπλοκότητα τῆς $\mathcal{B}''_N$ δὲν θὰ πρέπει νὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ μ οὔτε ἀπὸ τὸ N). Παραδείγματος χάριν, γιὰ $\mu = 0$ δὲν ἔχουμε παρὰ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp}(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \,\middle|\, 0 \le r \le N_1\right) = \int_{\mathbb{Z}_N} (f_{U^\perp})^k \ge \left(\int_{\mathbb{Z}_N} f_{U^\perp}\right)^k \ge \delta^k$$

γιὰ κάθε $N_1 \geq 0$, ἐξαιτίας τῆς (2.26) καὶ τῆς ἀνισότητος Hölder (ἐφ' ὅσον ἡ $f_{U^\perp}$ εἶναι μὴ αρνητική). Ἔτσι, ἂν δείξουμε ὅτι ἱκανοποιεῖται ἡ (2.41) γιὰ κάθε $\mu \in \mathbb{Z}_N$, θὰ ἔχουμε τὴν περίπτωσιν τῆς ἐπιτυχίας, ἀλλιῶς θὰ ἔχουμε βρεθεῖ στὸ δεύτερον μισὸν τῆς διχοτομίας.

Σημείωσις. Γιὰ ἁπλότητα, ἀφοῦ ἔχουμε σταθεροποιήσει τὸ N, θὰ παραλείπουμε τοὺς δεῖκτες στὶς σ-ἄλγεβρες $\mathcal{B}'_N, \mathcal{B}''_N$, χωρὶς ὅμως νὰ συγχέουμε τὴν οἰκογένειαν σ-ἄλγεβρῶν $\mathcal{B}'$ (βλέπε Παρατήρησιν 1.1.2 (ii)) μὲ τὸ στοιχεῖον της ποὺ εἶναι σ-ἄλγεβρα στὸ $\mathbb{Z}_N$.

Ἄς θεωρήσουμε ἑπομένως κάποιο $\mu \in \mathbb{Z}_N$ καὶ κάποιον ἀκέραιον $N_1 \geq 0$. Ζητοῦμε νὰ φράξουμε ἀπὸ κάτω τὴν ἔκφρασιν $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp}(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \big|\, 0 \leq r \leq N_1\right)$: ὅταν $N_1 < N_0$, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσουμε τὸν ὅρον γιὰ $r = 0$ ὥστε νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp}(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \big|\, 0 \leq r \leq N_1\right) \geq \delta^k / N_0.$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλην, ἔχοντας $N_1 \geq N_0$, καὶ δεδομένου ὅτι ὑπάρχουν τὸ πολὺ N_0 τρόποι νὰ παραστήσουμε κάποιον ἀκέραιον $r \in [0, N_1]$ ὡς γινόμενον ἀκεραίων $\lambda \in [1, \lfloor \frac{N_1}{N_0} \rfloor]$ καὶ $s \in [1, N_0]$, ἐνῷ κάθε τέτοιο γινόμενον ἀνήκει στὸ διάστημα $[1, N_1]$, γράφουμε

$$\begin{aligned}(2.43)\quad & \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu j r} f_{U^\perp}(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \big|\, 0 \leq r \leq N_1\right) \\ & \geq \frac{\lfloor \frac{N_1}{N_0} \rfloor}{N_1} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu \lambda j s} f_{U^\perp}(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \big|\, 1 \leq \lambda \leq \lfloor \frac{N_1}{N_0} \rfloor, 1 \leq s \leq N_0\right) \\ & \gg_{N_0} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu \lambda j s} f_{U^\perp}(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \big|\, 1 \leq \lambda \leq \lfloor \frac{N_1}{N_0} \rfloor, 1 \leq s \leq N_0\right).\end{aligned}$$

Αὐτὸ μᾶς διευκολύνει, ἐπειδὴ τώρα ἔχουμε τὴν δυνατότητα νὰ σταθεροποιήσουμε κάποιο $\lambda \in [1, \lfloor \frac{N_1}{N_0} \rfloor]$ καὶ νὰ δουλέψουμε μὲ τὴν ἔκφρασιν

$$(2.44)\qquad \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu \lambda j s} f_{U^\perp}(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \big|\, 1 \leq s \leq N_0\right),$$

ὅπου πλέον οἱ ἐκθέτες $\mu \lambda j s$ συγκεντρώνονται σὲ ἕνα σχετικῶς μικρὸν σύνολον, μὲ πληθάριθμον ἀνεξάρτητον τοῦ N, τὸ $\mu\lambda \cdot \{0, \ldots, (k-1)N_0\}$. Μάλιστα, ἐφ' ὅσον οἱ περιορισμοὶ γιὰ τὸ λ δὲν μᾶς εἶναι χρήσιμοι, ἀφοῦ στὸ διάστημα $[1, \lfloor \frac{N_1}{N_0} \rfloor]$ μπορεῖ νὰ ἀντιπροσωπεύονται ὅλες οἱ κλάσεις ὑπολοίπων $\bmod N$, μποροῦμε νὰ ἀπορροφήσουμε τὸ μ καὶ νὰ γράφουμε λ ἀντὶ τοῦ $\mu\lambda$.

Ἔχουμε ἔπειτα νὰ ἐλέγξουμε καὶ τὸ μέγεθος τοῦ συνόλου δεικτῶν H, τὸ ὁποῖον ἐπίσης μπορεῖ νὰ μὴν εἶναι φραγμένον, ἐφ' ὅσον σύμφωνα μὲ τοὺς ὁρισμοὺς ἐπιτρέπεται νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ N, καὶ οὕτως ἢ ἄλλως ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ τὴν συνάρτησιν f_{UAP}. Πρὸς τοῦτο, χρειαζόμαστε τὴν ἑξῆς παραλλαγὴν τοῦ Λήμματος 2.3.2:

Λῆμμα 2.3.4. *Θεωροῦμε* $\lambda \in \mathbb{Z}_N$ *καὶ θέτουμε γιὰ συντομίαν* $D := N_0^{100}$. *Μποροῦμε νὰ βροῦμε* $h_1, \ldots, h_D \in H$ *(ὄχι ἀπαραιτήτως διαφορετικά, καὶ τὰ ὁποῖα ἐπιτρέπεται νὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ* λ*) ὥστε*

$$\Big\| \sum_{h \in H} t_h(c_{\lambda m,h} g_h) - \sum_{1 \leq j \leq D} \frac{1}{D}(c_{\lambda m,h_j} g_{h_j})\Big\|_{L^2} \ll N_0^{-40}$$

γιὰ κάθε $0 \leq m \leq (k-1)N_0$.

Παρατήρησις 2.3.5. Γιὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ λήμματος, χρειάζεται νὰ ἀναφέρουμε ἕναν κάπως διαφορετικόν, ἀλλὰ ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸν ποὺ ἔχουμε δώσει, ὁρισμὸν γιὰ τὶς ὁμοιόμορφα σχεδὸν περιοδικὲς συναρτήσεις, ποὺ εἶναι ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον ὁρίζει ὁ Tao τὶς UAP συναρτήσεις στὸ [2]. Παρατηροῦμε ἀρχικῶς ὅτι ἔχοντας μὴ ἀρνητικοὺς πραγματικοὺς t_h οἱ ὁποῖοι ἀθροίζονται στὴν μονάδα, εἶναι σὰν νὰ ἔχουμε μίαν κατανομὴν πιθανότητος στὸ σύνολον δεικτῶν H, ἢ καλύτερα στὸν χῶρον $(H, \mathcal{P}(H))$, ὅπου θεωροῦμε ὅτι $t_h = \mathbb{P}(\{h\})$. Κάλλιστα ἐπίσης μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ σύνολον δεικτῶν εἶναι ὑποσύνολον τῶν πραγματικῶν· σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ κατανομὴ πιθανότητος $\{t_s : s \in H\}$ μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ ὅτι ἐπάγεται ἀπὸ κάποιαν τυχαίαν μεταβλητὴν h. Ἡ h θὰ ὁρίζεται σὲ κάποιον χῶρον πιθανότητος $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, γιὰ τὸν ὁποῖον δὲν χρειάζεται καταρχὰς νὰ ὑποθέσουμε τίποτε πέραν αὐτοῦ ποὺ ἔχουμε ἤδη στὶς ὑποθέσεις μας, δηλαδὴ ὅτι γιὰ κάθε $s \in H$, $\mathbb{P}([h = s]) = t_s$.

Ἔχοντας αὐτὰ ὑπ' ὄψιν, οἱ $(c_{n,h}(x))_{x \in \mathbb{Z}_N}$ καὶ $(g_h(x))_{x \in \mathbb{Z}_N}$, ὅπως καὶ τὸ γινόμενόν τους, μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν οἰκογένειες συναρτήσεων τῆς h, συνθέσεις δηλαδὴ τῆς h μὲ τὶς ἀντίστοιχες συναρτήσεις ἀπὸ τὸ $H \subseteq \mathbb{R}$ στὸ $\mathbb{R}$, ἄρα τυχαῖες μεταβλητὲς ἐπίσης. Γιὰ αὐτὲς ὁρίζεται μέση τιμὴ μὲ τὴν κλασσικὴν ἔννοιαν τῆς Θεωρίας Πιθανοτήτων: ἐπειδὴ μιλᾶμε γιὰ ἁπλὲς τυχαῖες μεταβλητές, μὲ πεπερασμένον δηλαδὴ πεδίον τιμῶν, ἀσφαλῶς ἡ μέση τιμή τους ὁρίζεται καὶ εἶναι πεπερασμένη. Μάλιστα γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$,

$$\mathbb{E}(c_{n,h}(x) g_h(x)) = \sum_{s \in H} t_s\big(c_{n,s}(x) g_s(x)\big),$$

ἄρα ἂν ὁρίσουμε τὶς ὁμοιόμορφα σχεδὸν περιοδικὲς συναρτήσεις νὰ εἶναι αὐτὲς ποὺ ἡ τροχιά τους ἔχει μίαν ἀναπαράστασιν τῆς μορφῆς

$$T^n f = M \cdot \mathbb{E}(c_{n,h} g_h) \text{ γιὰ κάθε } n \in \mathbb{Z}_N,$$

θὰ καταλήξουμε στὶς ἴδιες συναρτήσεις ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὸν Ὁρισμὸν 1.3.2.

Ἀναλόγως, ἡ ζητουμένη στὸ Λῆμμα 2.3.4 ἀνισότης μπορεῖ νὰ γραφεῖ πλέον καὶ ὡς

$$\Big\|\mathbb{E}(c_{\lambda m,h} g_h) - \frac{\sum_{j=1}^{D} c_{\lambda m,h_j} g_{h_j}}{D}\Big\|_{L^2} \ll N_0^{-40}.$$

Μάλιστα, ἔτσι θυμίζει πιὸ πολὺ ἐκτιμήσεις ἀπὸ τὴν Θεωρίαν Πιθανοτήτων, μὲ ἐργαλεῖα τῆς ὁποίας ἐξάλλου θὰ ἀποδειχθεῖ τὸ λῆμμα.

Ἀπόδειξις. Θὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἀνισότητα Markov. Γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχει χῶρος πιθανότητος $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ στὸν ὁποῖον μποροῦν νὰ ὁριστοῦν D ἀνεξάρτητες τυχαῖες μεταβλητὲς $h_1, \dots, h_D$, καθεμία ἀπὸ τὶς ὁποῖες θὰ εἶναι ἰσόνομη μὲ τὴν τυχαίαν μεταβλητὴν h τῆς παραπάνω παρατηρήσεως. Σταθεροποιοῦμε κάποιο $m \in [0, (k-1)N_0]$, θέτουμε γιὰ συντομίαν $G_h := c_{\lambda m,h} g_h$ καὶ $F := \mathbb{E}(G_h)$, καὶ δείχνουμε ὅτι

$$\mathbb{P}\left(\big\|F - \frac{G_{h_1} + \cdots + G_{h_D}}{D}\big\|_{L^2} > \frac{(kN_0)^{1/2}}{N_0^{50}} \right) \leq \frac{1}{kN_0},$$

ὅπου προφανῶς γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$, $F(x) := \mathbb{E}(G_h(x))$. Θὰ προκύψει ἔπειτα τὸ ζητούμενον μὲ θετικὴν πιθανότητα $\geq 1 - \frac{(k-1)N_0+1}{kN_0}$.

Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Markov, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\big\|F - \frac{G_{h_1} + \cdots + G_{h_D}}{D}\big\|_{L^2}^2 \right) \leq 1/D.$$

Ἡ ἔκφρασις μέσα στὴν μέσην τιμὴν ἀναπτύσσεται ὡς

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{Z}_N} \left(F^2 - 2F\frac{G_{h_1} + \cdots + G_{h_D}}{D} + \left(\frac{G_{h_1} + \cdots + G_{h_D}}{D}\right)^2 \right) \\ = &\sum_{x \in \mathbb{Z}_N} \frac{1}{N} \left((F(x))^2 - 2F(x)\frac{G_{h_1}(x) + \cdots + G_{h_D}(x)}{D} + \left(\frac{G_{h_1}(x) + \cdots + G_{h_D}(x)}{D}\right)^2 \right), \end{aligned}$$

ὁπότε ἀπὸ τὶς βασικὲς ἰδιότητες τῆς πιθανοθεωρητικῆς μέσης τιμῆς,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\big\|F - \frac{G_{h_1} + \cdots + G_{h_D}}{D}\big\|_{L^2}^2 \right) \\ &= \|F\|_{L^2}^2 - 2\sum_{j=1}^{D} \frac{1}{D} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}_N} \frac{1}{N} \left(F(x)\mathbb{E}(G_{h_j}(x)) \right) \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq j,j' \leq D} \frac{1}{D^2} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}_N} \frac{1}{N} \mathbb{E}\big(G_{h_j}(x) G_{h_{j'}}(x)\big) \right). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Ἐφ' ὅσον οἱ $h_j, h_{j'}$ εἶναι ἰσόνομες μὲ τὴν τυχαίαν μεταβλητὴν h, καὶ ἀνὰ δύο ἀνεξάρτητες ὅταν $j \neq j'$, ἔχουμε γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$ τὶς ταυτότητες

$$\mathbb{E}(G_{h_j}(x)) = \mathbb{E}(G_h(x)) = F(x)$$

καὶ

$$\mathbb{E}\big(G_{h_j}(x) G_{h_{j'}}(x)\big) = \mathbb{E}(G_{h_j}(x))\mathbb{E}(G_{h_{j'}}(x)) = (F(x))^2 \text{ ὅταν } j \neq j'.$$

Συνεπῶς, ἡ (2.45) ξαναγράφεται ὡς

$$\|F\|_{L^2}^2 - 2\|F\|_{L^2}^2 + \|F\|_{L^2}^2 + \sum_{1\leq j,j'\leq D} \frac{\delta_{j,j'}}{D^2} \int_{\mathbb{Z}_N} \big(\mathbb{E}(G_{h_j} G_{h_{j'}}) - F^2\big),$$

ὅπου $\delta_{j,j'}$ εἶναι τὸ δέλτα τοῦ Kronecker. Γιὰ $j = j'$ ἔχουμε

$$\mathbb{E}\big(G_{h_j}(x) G_{h_{j'}}(x)\big) - (F(x))^2 = \mathbb{E}\left[(G_h(x))^2\right] - \left[\mathbb{E}(G_h(x))\right]^2 \leq \mathbb{E}\left[(G_h(x))^2\right] \leq 1,$$

ἐπειδὴ ἡ $G_h(x) := c_{\lambda m,h}(x) g_h(x)$ εἶναι φραγμένη συνάρτησις τῆς h. Προκύπτει ἑπομένως τὸ ζητούμενον. □

Γιὰ κάθε $\lambda \in \mathbb{Z}_N$ θεωροῦμε δεῖκτες $h_1, \ldots, h_{N_0^{100}}$ ὅπως αὐτοὶ ποὺ μᾶς ἐξασφαλίζει τὸ Λῆμμα 2.3.4. Τότε γιὰ κάθε $0 \leq m \leq (k-1)N_0$,

$$\big\|T^{\lambda m} f_{UAP} - M \cdot \sum_{1\leq j\leq N_0^{100}} \frac{1}{N_0^{100}} (c_{\lambda m,h_j} g_{h_j})\big\|_{L^2} \ll_M N_0^{-40}. \tag{2.46}$$

Ὁρίζουμε σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_\lambda''$ (ἡ ὁποία θὰ ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ τὴν ἐπιλογὴν τῶν $h_1, \ldots, h_{N_0^{100}}$) θέτοντας

$$\mathcal{B}_\lambda'' := \left(\bigvee_{-(k-1)N_0 \leq m \leq (k-1)N_0} T^{\lambda m} \mathcal{B}' \right) \vee \left(\bigvee_{\substack{0\leq m\leq (k-1)N_0 \\ 1\leq j\leq N_0^{100}}} \mathcal{B}_{N_0^{-100}}(c_{\lambda m,h_j}) \right), \tag{2.47}$$

ὅπου γιὰ κάθε ε, G, $\mathcal{B}_\varepsilon(G)$ εἶναι ἡ σ-ἄλγεβρα ποὺ ἔχουμε σταθεροποιήσει χρησιμοποιῶντας τὴν Πρότασιν 2.2.1 (βλέπε σχόλια μετὰ τὴν Πρότασιν). Λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ $c_{\lambda m,h_j}$ βρίσκονται στὴν UAP^{d-1} μὲ νόρμα τὸ πολὺ 1, ἐνῷ ἡ $\mathcal{B}'$ εἶναι συμπαγὴς τάξεως $d-1$ καὶ πολυπλοκότητος τὸ πολὺ X', ἄρα ἀπὸ τὸν Ὁρισμὸν 2.2.2 καὶ τὴν σχέσιν (2.9) κάθε $T^{\lambda m}\mathcal{B}'$ εἶναι ἐπίσης συμπαγὴς τάξεως $d-1$ καὶ πολυπλοκότητος τὸ πολὺ X', συμπεραίνουμε ὅτι ἡ $\mathcal{B}_\lambda''$ εἶναι συμπαγὴς τάξεως $d-1$ καὶ πολυπλοκότητος $O_{N_0,X'}(1)$. Ἀπὸ τὴν πρώτην ἰδιότητα τῆς Προτάσεως 2.2.1 βλέπουμε ἐπίσης ὅτι

$$\|c_{\lambda m,h_j} - \mathbb{E}(c_{\lambda m,h_j} | \mathcal{B}_\lambda'')\|_{L^\infty} \ll N_0^{-100} \text{ γιὰ κάθε } 0 \leq m \leq (k-1)N_0,$$

ἑπομένως, ἐφ' ὅσον οἱ g_{h_j} εἶναι φραγμένες,

$$\big\|M \cdot \sum_{1\leq j\leq D} \frac{1}{D} (c_{\lambda m,h_j} g_{h_j}) - M \cdot \sum_{1\leq j\leq D} \frac{1}{D} \big(\mathbb{E}(c_{\lambda m,h_j} | \mathcal{B}_\lambda'')\, g_{h_j}\big)\big\|_{L^\infty} \ll_M N_0^{-100}.$$

Σὲ συνδυασμὸν μὲ τὴν (2.46) καταλήγουμε ὅτι

$$\|T^{\lambda m} f_{UAP} - F_{\lambda m}\|_{L^2} \ll_M N_0^{-40} \text{ γιὰ κάθε } 0 \leq m \leq (k-1)N_0, \tag{2.48}$$

ὅπου ἡ F_n ὁρίζεται γιὰ κάθε $n \in \mathbb{Z}_N$ θέτοντας

$$F_n := M \cdot \sum_{1 \le j \le D} \frac{1}{D} \big(\mathbb{E}(c_{\lambda m, h_j} | \mathcal{B}''_\lambda)\, g_{h_j} \big),$$

δηλαδὴ εἶναι τῆς μορφῆς (2.29) ἂν θεωρήσουμε τὴν $\mathcal{B}''_\lambda$ στὴν θέσιν τῆς σ-ἄλγεβρας $\mathcal{B}$ τῆς Προτάσεως 2.3.1. Συνεπάγεται ὅτι γιὰ τὴν ἔκφρασιν (2.44) τὴν ὁποίαν θέλουμε νὰ ἐξετάσουμε, μποροῦμε ἐφαρμόζοντας τὴν Πρότασιν 2.3.1 γιὰ τὴν σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}''_{\mu\lambda}$ καὶ τὴν οἰκογένειαν F τῶν ἀντιστοίχων F_n νὰ λάβουμε

$$\text{(2.44)} \gg_{k,\delta,M} \mathbb{E}\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N} \left(\bigcap_{m=1}^{k_*} E_{\mu\lambda\xi m} \right) \Big| \, 1 \le \xi \le \lfloor \frac{N_0}{k_*} \rfloor \right), \tag{2.49}$$

ὅπου $k_* = O(1)$ εἶναι ὁ θετικὸς ἀκέραιος ποὺ μᾶς δίνει ἡ Πρότασις 2.3.1 βάσει τῶν παραμέτρων k, δ, M, καὶ $E_{\mu\lambda\xi m} = E_{\mu\lambda\xi m}(k, \delta, \mathcal{B}''_{\mu\lambda}, F)$ εἶναι τὰ σύνολα ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὴν (2.30).

Στόχος μας πλέον εἶναι νὰ φράξουμε ἀπὸ κάτω τοὺς πληθαρίθμους τῶν συνόλων $E_{\mu\lambda\xi m}$. Πρῶτον βῆμα εἶναι νὰ ἐπιστρέψουμε ἀπὸ τὶς συναρτήσεις F_n (οἱ ὁποῖες κατεσκευάσθησαν γιὰ νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν Πρότασιν 2.3.1) πίσω στὶς ἀρχικὲς συναρτήσεις $T^n f_{UAP}$. Θὰ μποροῦμε νὰ ἐλέγξουμε, ὅπως θὰ δοῦμε, τὰ σφάλματα τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἔτσι, ἐπιλέγοντας κατάλληλα μεγάλο τὸ N_0. Ἀπὸ τὴν (2.48) (γιὰ τὶς ἀντίστοιχες F_n ποὺ εἶναι $\mathcal{B}''_{\mu\lambda}-$μετρήσιμες βεβαίως), ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz καὶ ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῆς δεσμευμένης μέσης τιμῆς, προκύπτει γιὰ κάθε $0 \le m \le (k-1)N_0$,

$$\int_{\mathbb{Z}_N} \mathbb{E}\big(|T^{\mu\lambda m} f_{UAP} - F_{\mu\lambda m}| | \mathcal{B}''_{\mu\lambda} \big) = \int_{\mathbb{Z}_N} |T^{\mu\lambda m} f_{UAP} - F_{\mu\lambda m}| \ll_M N_0^{-40},$$

ἄρα ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Markov

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\left[\mathbb{E}\big(|T^{\mu\lambda m} f_{UAP} - F_{\mu\lambda m}| | \mathcal{B}''_{\mu\lambda} \big) > \frac{\delta}{16k} \right] \right) \ll_{k,\delta,M} N_0^{-40}.$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἂν ὁρίσουμε τὰ σύνολα

$$\begin{aligned} E'_n := \Big\{ x \in \mathbb{Z}_N : \mathbb{E}(T^n f_{U^\perp} | \mathcal{B}''_{\mu\lambda})(x) \ge \frac{\delta}{2} \\ \text{καὶ } \mathbb{E}\big(|T^n f_{U^\perp} - T^n f_{UAP}| | \mathcal{B}''_{\mu\lambda} \big)(x) \le \frac{\delta}{16k} \Big\}, \end{aligned}$$

τότε γιὰ κάθε $0 \le m \le (k-1)N_0$ θὰ ἰσχύει

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(E'_{\mu\lambda m}) &= \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(E'_{\mu\lambda m} \bigcap \left[\mathbb{E}\big(|T^{\mu\lambda m} f_{UAP} - F_{\mu\lambda m}| | \mathcal{B}''_{\mu\lambda} \big) \le \frac{\delta}{16k} \right] \right) \\ &\quad + \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(E'_{\mu\lambda m} \bigcap \left[\mathbb{E}\big(|T^{\mu\lambda m} f_{UAP} - F_{\mu\lambda m}| | \mathcal{B}''_{\mu\lambda} \big) > \frac{\delta}{16k} \right] \right) \\ &\le \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(E_{\mu\lambda m}) + O(N_0^{-40}). \end{aligned}$$

Συνεπῶς, ἀφοῦ γιὰ $1 \leq \xi \leq N_0/k_*$ καὶ γιὰ κάθε $1 \leq m \leq k_*$, τὸ γινόμενον ξm ἀνήκει στὸ διάστημα $[1, N_0] \subseteq [0, (k-1)N_0]$ (ἂς θυμηθοῦμε ὅτι γιὰ τὴν Πρότασιν 2.3.3 ἔχουμε ὑποθέσει $k \geq 2$), ἀπὸ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα θὰ προκύψει

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\bigcap_{m=1}^{k_*} E_{\mu\lambda\xi m}\right) \geq \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\bigcap_{m=1}^{k_*} E'_{\mu\lambda\xi m}\right) - O(N_0^{-30}). \tag{2.50}$$

Τὸ ἑπόμενον βῆμα εἶναι νὰ δείξουμε ὅτι ἡ δεσμευμένη μέση τιμὴ ὡς πρὸς τὴν σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}''_{\mu\lambda}$ «μετατίθεται» μὲ ἀρκετὲς ἀπὸ τὶς μετατοπίσεις τῶν συναρτήσεων ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρουν (μὲ τὴν ἔννοιαν ποὺ διατυπώνεται στὸ παρακάτω λῆμμα), καὶ συνεπῶς μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε τὴν οἰκογένειαν τῶν συνόλων E'_n μὲ κάποιαν πιὸ ἁπλήν.

Λῆμμα 2.3.6. *Ἔστω $\lambda \in \mathbb{Z}_N$ καὶ ἔστω $\mathcal{B}''_\lambda$ ἡ σ-ἄλγεβρα ποὺ ὁρίζεται στὴν* (2.47). *Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι γιὰ κάποιον ἀκέραιον m μὲ $-(k-1)N_0 \leq m \leq (k-1)N_0$ ἰσχύει τουλάχιστον μία ἀπὸ τὶς*

$$\|\mathbb{E}(T^{\lambda m} f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_\lambda) - T^{\lambda m}\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_\lambda)\|_{L^2} \geq N_0^{-100},$$
$$\big\|\mathbb{E}\big(T^{\lambda m}\big|f_{U^\perp} - f_{UAP}\big|\big|\mathcal{B}''_\lambda\big) - T^{\lambda m}\mathbb{E}\big(\big|f_{U^\perp} - f_{UAP}\big|\big|\mathcal{B}''_\lambda\big)\big\|_{L^2} \geq N_0^{-100},$$

τότε εἴτε ἡ $\mathcal{B}''_\lambda$ εἴτε κάποια ἀπὸ τὶς μετατοπίσεις της ἱκανοποιεῖ τὸ δεύτερον μισὸν τῆς διχοτομίας ποὺ διετυπώσαμε, μὲ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἀνήκει στὶς συμπαγεῖς σ-ἄλγεβρες $\mathcal{B}''$ (τάξεως $d-1$ καὶ πολυπλοκότητος $O_{N_0,X'}(1)$ ὅπως εἴδαμε) οἱ ὁποῖες περιέχουν τὴν $\mathcal{B}'$ καὶ ἱκανοποιοῦν τὴν

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{B}'') - \mathcal{E}_f(\mathcal{B}') \geq \frac{1}{4}N_0^{-200}. \tag{2.51}$$

Ἀπόδειξις. Ἀρχικῶς ὑποθέτουμε ὅτι

$$\|\mathbb{E}(T^{\lambda m} f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_\lambda) - T^{\lambda m}\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_\lambda)\|_{L^2} \geq N_0^{-100}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι

$$\mathbb{E}(T^{\lambda m} f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_\lambda) = T^{\lambda m}\mathbb{E}(f_{U^\perp}|T^{-\lambda m}\mathcal{B}''_\lambda),$$

ἄρα ἡ ὑπόθεσίς μας δίνει

$$\|\mathbb{E}(f_{U^\perp}|T^{-\lambda m}\mathcal{B}''_\lambda) - \mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_\lambda)\|_{L^2} \geq N_0^{-100}.$$

Ἀπὸ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα ἑπομένως, ἰσχύει τουλάχιστον μία ἀπὸ τὶς

$$\|\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_\lambda) - \mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}')\|_{L^2} \geq \frac{1}{2}N_0^{-100},$$
$$\|\mathbb{E}(f_{U^\perp}|T^{-\lambda m}\mathcal{B}''_\lambda) - \mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}')\|_{L^2} \geq \frac{1}{2}N_0^{-100}.$$

Ἀφοῦ ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν (2.47) καὶ τοὺς περιορισμοὺς γιὰ τὸ m, τόσο ἡ $\mathcal{B}''_\lambda$ ὅσο καὶ ἡ $T^{-\lambda m}\mathcal{B}''_\lambda$ περιέχουν τὴν $\mathcal{B}'$, μένει νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν (2.17) ὥστε νὰ συμπεράνουμε ὅτι τουλάχιστον μία ἀπὸ τὶς $\mathcal{B}''_\lambda$, $T^{-\lambda m}\mathcal{B}''_\lambda$ ἱκανοποιεῖ ἐπιπλέον τὴν (2.51).

Ἀνάλογα συμπεράσματα προκύπτουν ἂν ὑποθέσουμε ὅτι

$$\big\|\mathbb{E}\big(T^{\lambda m}\big|f_{U^\perp}-f_{UAP}\big|\big|\mathcal{B}''_\lambda\big)-T^{\lambda m}\mathbb{E}\big(\big|f_{U^\perp}-f_{UAP}\big|\big|\mathcal{B}''_\lambda\big)\big\|_{L^2}\geq N_0^{-100},$$

χρησιμοποιῶντας ὅμως σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὴν δεύτερην συντεταγμένην τῆς $f = (f_{U^\perp}, |f_{U^\perp}-f_{UAP}|)$ ἀντὶ τῆς πρώτης. □

Ἑμεῖς θὰ ἐξετάσουμε βεβαίως τὴν περίπτωσιν ποὺ οὔτε ἡ $\mathcal{B}''_{\mu\lambda}$ οὔτε κάποια ἀπὸ τὶς μετατοπίσεις της ἱκανοποιοῦν τὸ δεύτερον μισὸν τῆς διχοτομίας μὲ τὴν παραπάνω ἔννοιαν. Ἐξαιτίας τοῦ λήμματος, θὰ ἔχουμε τότε

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{E}(T^{\mu\lambda m}f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_{\mu\lambda})-T^{\mu\lambda m}\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_{\mu\lambda})\|_{L^2},\\ &\qquad\big\|\mathbb{E}\big(T^{\mu\lambda m}\big|f_{U^\perp}-f_{UAP}\big|\big|\mathcal{B}''_{\mu\lambda}\big)-T^{\mu\lambda m}\mathbb{E}\big(\big|f_{U^\perp}-f_{UAP}\big|\big|\mathcal{B}''_{\mu\lambda}\big)\big\|_{L^2}\leq N_0^{-100}\end{aligned}$$

γιὰ κάθε $0\leq m\leq (k-1)N_0$, καὶ ἄρα

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\big([|\mathbb{E}(T^{\mu\lambda m}f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_{\mu\lambda})-T^{\mu\lambda m}\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_{\mu\lambda})|\geq\delta/4]\big)\ll_\delta N_0^{-100},\\ &\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\left[\big|\mathbb{E}\big(T^{\mu\lambda m}\big|f_{U^\perp}-f_{UAP}\big|\big|\mathcal{B}''_{\mu\lambda}\big)-T^{\mu\lambda m}\mathbb{E}\big(\big|f_{U^\perp}-f_{UAP}\big|\big|\mathcal{B}''_{\mu\lambda}\big)\big|\geq\frac{\delta}{32k}\right]\right)\ll_{k,\delta} N_0^{-100}\end{aligned}$$

γιὰ κάθε $0\leq m\leq (k-1)N_0$. Μποροῦμε συνεπῶς νὰ ὁρίσουμε γιὰ κάθε $n\in\mathbb{Z}_N$,

$$E''_n := \Big\{x\in\mathbb{Z}_N : T^n\,\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_{\mu\lambda})(x)\geq\frac{3\delta}{4}\text{ καὶ }T^n\,\mathbb{E}\big(\big|f_{U^\perp}-f_{UAP}\big|\big|\mathcal{B}''_{\mu\lambda}\big)(x)\leq\frac{\delta}{32k}\Big\},$$

συμπεραίνοντας ὅπως καὶ προηγουμένως ὅτι

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\bigcap_{m=1}^{k_*}E'_{\mu\lambda\xi m}\right)\geq\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\bigcap_{m=1}^{k_*}E''_{\mu\lambda\xi m}\right)-O(N_0^{-50}).\tag{2.52}$$

Τώρα ὅμως γιὰ τὴν οἰκογένειαν τῶν E''_n ἰσχύει

$$E''_n = T^nE''_0\text{ γιὰ κάθε }n,$$

συνεπῶς

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\bigcap_{m=1}^{k_*}E''_{\mu\lambda\xi m}\right)=\int_{\mathbb{Z}_N}\prod_{m=1}^{k_*}T^{\mu\lambda\xi m}\mathbf{1}_{E''_0},$$

καὶ λόγῳ τῶν (2.49), (2.50) καὶ (2.52),

$$(2.44)\gg\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N}\prod_{m=1}^{k_*}T^{\mu\lambda\xi m}\mathbf{1}_{E''_0}\,\big|\,1\leq\xi\leq\lfloor\frac{N_0}{k_*}\rfloor\right)-O(N_0^{-30}).\tag{2.53}$$

Ἐφ' ὅσον ἡ συνάρτησις $\mathbf{1}_{E_0''}$ εἶναι $\mathcal{B}_{\mu\lambda}''-$μετρήσιμη, καὶ ἡ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_{\mu\lambda}''$ εἶναι συμπαγῆς τάξεως $d-1$, ἡ $\mathbf{1}_{E_0''}$ θὰ προσεγγίζεται, ὅπως εἴδαμε στὴν Πρότασιν 2.2.3, ἀπὸ UAP συναρτήσεις τάξεως μικρότερης τοῦ d. Αὐτὸ μᾶς χρησιμεύει ὡς ἑξῆς: ἃς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε ἤδη δείξει ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς $\mathbf{1}_{E_0''}$ φράσσεται ἀπὸ κάτω ἀπὸ μίαν θετικὴν σταθερὰν δ' (ἡ ὁποία θὰ δοῦμε ὅτι ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ δ). Μποροῦμε τότε νὰ βροῦμε μίαν μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην $\tilde{f}_{UAP}$ στὴν UAP^{d-1} μὲ

$$\|\mathbf{1}_{E_0''}-\tilde{f}_{UAP}\|_{L^2} \leq \frac{(\delta')^2}{1024k_*} \text{ καὶ } \|\tilde{f}_{UAP}\|_{UAP^{d-1}} < C',$$

ὅπου C' σταθερὰ ἀνεξάρτητη τοῦ N, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ L^2-σφάλμα $\frac{(\delta')^2}{1024k_*}$, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα τῆς $\mathcal{B}_{\mu\lambda}''$, δηλαδὴ ἐξαιτίας τοῦ ὁρισμοῦ (2.47) ἀπὸ τὸν φυσικὸν $N_0(\tau, X)$ καὶ ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα X' τῆς $\mathcal{B}'$. Σκεφτόμαστε ἔπειτα νὰ ἐπικαλεστοῦμε τὴν ἐπαγωγικήν μας ὑπόθεσιν, δηλαδὴ τὸ Θεώρημα Περιοδικῆς Δομῆς γιὰ $d-1$, ὥστε νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N}\prod_{m=1}^{k_*} T^{\mu\lambda\xi m}\mathbf{1}_{E_0''} \,\Big|\, 1\leq \xi \leq \lfloor \frac{N_0}{k_*}\rfloor\right) \gg_{N_0} c(d-1,k_*,\delta',C'),$$

καὶ κατὰ συνέπειαν ὅτι

$$(2.44) \gg c(d-1,k_*,\delta',C') - O(N_0^{-30}).$$

Προκύπτει ὅμως τὸ ἑξῆς πρόβλημα: ἡ σταθερὰ $c(d-1,k_*,\delta',C')$ ἐξαρτᾶται ὅπως εἴπαμε ἀπὸ τὴν πολυπλοκότητα τῆς $\mathcal{B}'$, ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ εἶναι αὐθαίρετα μεγάλη, ἐνῷ ἐμεῖς τὸ N_0 πρέπει νὰ τὸ ἐπιλέξουμε μόνον βάσει τῶν τ καὶ X. Δὲν μποροῦμε ἑπομένως νὰ γνωρίζουμε οὔτε κάν ἂν ἡ ποσότης $c(d-1,k_*,\delta',C') - O(N_0^{-30})$ εἶναι μὴ ἀρνητική. Γιὰ νὰ λύσουμε αὐτὸ τὸ πρόβλημα, χρησιμοποιοῦμε ἀντὶ τοῦ συνόλου E_0'' τὴν τομήν του μὲ ἕνα $\mathcal{B}-$μετρήσιμον σύνολον, τὸ

$$\tilde{E} := \left\{x\in\mathbb{Z}_N : \mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B})(x) \geq \frac{7\delta}{8} \text{ καὶ } \mathbb{E}\big(|f_{U^\perp}-f_{UAP}||\mathcal{B}\big)(x) \leq \frac{\delta}{64k}\right\}.$$

Λῆμμα 2.3.7. *Εἴτε ἰσχύει*

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(\tilde{E}\setminus E_0'') \ll \tau^2 \text{ καὶ } \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(\tilde{E}\cap E_0'') \geq \delta/32,$$

εἴτε ἡ $\mathcal{B}_{\mu\lambda}''$ ἱκανοποιεῖ τὸ δεύτερον μισὸν τῆς διχοτομίας.

Ἀπόδειξις. Ἤδη στὸ Λῆμμα 2.3.6 ἔχουμε ζητήσει, γιὰ νὰ ἱκανοποιεῖται τὸ δεύτερον μισὸν τῆς διχοτομίας, ἡ προσαύξησις τῆς ἐνεργείας νὰ εἶναι $\geq \frac{1}{4}N_0^{-200}$. Προφανῶς μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $\frac{1}{4}N_0^{-200} \leq \tau^2$ (ὅπως θὰ δοῦμε, αὐτὸς δὲν εἶναι οὐσιαστικὸς περιορισμὸς γιὰ τὸ N_0, τὸ ὁποῖον θὰ ἐπιλεγεῖ κατὰ πολὺ μεγαλύτερον τῶν $\frac{1}{\tau}$ καὶ X). Συνεπῶς, ἂν ἡ $\mathcal{B}_{\mu\lambda}''$ δὲν ἱκανοποιεῖ τὸ δεύτερον μισὸν τῆς διχοτομίας, θὰ ἰσχύει

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{B}_{\mu\lambda}'') - \mathcal{E}_f(\mathcal{B}') \leq \frac{1}{4}N_0^{-200} \leq \tau^2,$$

καὶ σὲ συνδυασμὸν μὲ τὴν (2.18),

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{B}''_{\mu\lambda}) - \mathcal{E}_f(\mathcal{B}) \leq 2\tau^2.$$

Ἕπεται ἀπὸ τὴν (2.17) καὶ τὸν ὁρισμὸν τῆς f ὅτι

$$\int_{\mathbb{Z}_N} |\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_{\mu\lambda}) - \mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B})|^2 \leq 2\tau^2$$

καὶ

$$\int_{\mathbb{Z}_N} \left|\mathbb{E}\big(\big|f_{U^\perp} - f_{UAP}\big||\mathcal{B}''_{\mu\lambda}\big) - \mathbb{E}\big(\big|f_{U^\perp} - f_{UAP}\big||\mathcal{B}\big)\right|^2 \leq 2\tau^2,$$

ἄρα ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Chebyshev

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\big([|\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}''_{\mu\lambda}) - \mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B})| \geq \delta/8]\big) \leq \frac{128\tau^2}{\delta^2},\\
&\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\left[\left|\mathbb{E}\big(\big|f_{U^\perp} - f_{UAP}\big||\mathcal{B}''_{\mu\lambda}\big) - \mathbb{E}\big(\big|f_{U^\perp} - f_{UAP}\big||\mathcal{B}\big)\right| \geq \frac{\delta}{64k}\right]\right) \leq \frac{8192k^2\tau^2}{\delta^2}.
\end{aligned}$$

Εἶναι ἄμεσον τώρα ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν συνόλων E''_0 καὶ $\tilde{E}$ ὅτι

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(\tilde{E} \setminus E''_0) \leq \frac{128\tau^2}{\delta^2} + \frac{8192k^2\tau^2}{\delta^2} \leq \frac{9000k^2\tau^2}{\delta^2}. \tag{2.54}$$

Θέλουμε ἐπίσης νὰ ἰσχύει $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(\tilde{E} \cap E''_0) \geq \delta/32$: ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(\tilde{E}) \geq \delta/16 \ \text{ καὶ } \ \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(\tilde{E} \setminus E''_0) \leq \delta/32.$$

Γιὰ νὰ ἰσχύει τὸ δεύτερον, ἀρκεῖ ἐξαιτίας τῆς (2.54) νὰ ἐπιλέξουμε τὸ τ ἀρκετὰ μικρόν, ὥστε νὰ ἔχουμε $\tau^2 \leq \frac{\delta^3}{32\cdot 9000k^2}$, ἐνῷ γιὰ νὰ δείξουμε τὴν $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(\tilde{E}) \geq \delta/16$, θὰ χρειαστοῦμε τὶς ὑποθέσεις (2.25), (2.26) γιὰ τὶς $f_{U^\perp}, f_{UAP}$. Ἀπὸ τὴν (2.26) καὶ τὶς ἰδιότητες τῆς δεσμευμένης μέσης τιμῆς, ἔχουμε

$$\int_{\mathbb{Z}_N} \mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}) = \int_{\mathbb{Z}_N} f_{U^\perp} \geq \delta.$$

Ὅμως, ἐπειδὴ ἡ $\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B})$ εἶναι φραγμένη,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}_N} \mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}) &\leq \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\big([\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}) \geq 7\delta/8]\big) + \frac{7\delta}{8}\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\big([\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}) < 7\delta/8]\big)\\
&\leq \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\big([\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}) \geq 7\delta/8]\big) + \frac{7\delta}{8},
\end{aligned}$$

ἄρα $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\big([\mathbb{E}(f_{U^\perp}|\mathcal{B}) \geq 7\delta/8]\big) \geq \delta/8$.

Ἐπίσης, ἀπὸ τὴν (2.25), τὶς ἰδιότητες τῆς δεσμευμένης μέσης τιμῆς καὶ τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\int_{\mathbb{Z}_N} \mathbb{E}\big(|f_{U^\perp} - f_{UAP}|\big|\mathcal{B}\big) = \int_{\mathbb{Z}_N} |f_{U^\perp} - f_{UAP}| \leq \|f_{U^\perp} - f_{UAP}\|_{L^2} \leq \frac{\delta^2}{1024k},$$

ἄρα ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Markov

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}\left(\left[\mathbb{E}\big(|f_{U^\perp} - f_{UAP}|\big|\mathcal{B}\big) > \frac{\delta}{64k}\right]\right) \leq \frac{\delta}{16}.$$

Συνδυάζοντας τὰ παραπάνω, καταλήγουμε στὸ ζητούμενον:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(\mathbb{Z}_N \setminus \tilde{E}) \leq \frac{7\delta}{8} + \frac{\delta}{16} = \frac{15\delta}{16}.$$

□

Εἴμαστε πλέον σὲ θέσιν νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν ἐπαγωγικὴν ὑπόθεσιν: στὴν περίπτωσιν ποὺ ἐξετάζουμε, ἡ $\mathcal{B}''_{\mu\lambda}$ δὲν ἱκανοποιεῖ τὸ δεύτερον μισὸν τῆς διχοτομίας, ἄρα ἀπὸ τὸ Λῆμμα 2.3.7 προκύπτει

$$\|\mathbf{1}_{E_0''\cap\tilde{E}} - \mathbf{1}_{\tilde{E}}\|_{L^2} = \|\mathbf{1}_{\tilde{E}\setminus E_0''}\|_{L^2} = \big(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_N}(\tilde{E}\setminus E_0'')\big)^{1/2} \leq \frac{100k}{\delta}\tau$$

καὶ

$$\int_{\mathbb{Z}_N} \mathbf{1}_{E_0''\cap\tilde{E}} \geq \delta/32.$$

Ἐπίσης γιὰ τὸ $\tilde{E} \in \mathcal{B}$ μποροῦμε νὰ βροῦμε μὴ ἀρνητικήν, φραγμένην $\tilde{f}_{UAP}$ στὴν UAP^{d-1} ἔτσι ὥστε

$$\|\mathbf{1}_{\tilde{E}} - \tilde{f}_{UAP}\|_{L^2} \leq \tau \text{ καὶ } \|\tilde{f}_{UAP}\|_{UAP^{d-1}} < C_{\tau,X},$$

γιὰ μίαν σταθερὰν $C_{\tau,X}$ ἀνεξάρτητην τοῦ N, ἡ ὁποία ἔχει προκύψει κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς Προτάσεως 2.2.3. Γιὰ νὰ πετύχουμε καὶ τὴν ἐκτίμησιν

$$\|\mathbf{1}_{E_0''\cap\tilde{E}} - \tilde{f}_{UAP}\|_{L^2} \leq \frac{\left(\frac{\delta}{32}\right)^2}{1024k_*} = \frac{\delta^2}{2^{20}k_*}$$

(ὥστε νὰ πληροῦνται ὅλες οἱ ὑποθέσεις τοῦ Θεωρήματος Περιοδικῆς Δομῆς), ἀρκεῖ ἀπὸ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα νὰ θέσουμε τὸν ἐπιπλέον περιορισμὸν $(1 + \frac{100k}{\delta})\tau \leq \frac{\delta^2}{2^{20}k_*}$. Ἔπειτα, ἐφαρμόζοντας τὴν ἐπαγωγικὴν ὑπόθεσιν, συμπεραίνουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{m=1}^{k_*} T^{\mu\lambda\xi m}\mathbf{1}_{E_0''} \,\Big|\, 1 \leq \xi \leq \lfloor\frac{N_0}{k_*}\rfloor\right) \geq \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{m=1}^{k_*} T^{\mu\lambda\xi m}\mathbf{1}_{E_0''\cap\tilde{E}} \,\Big|\, 1 \leq \xi \leq \lfloor\frac{N_0}{k_*}\rfloor\right)$$
$$\gg_{N_0} c\big(d-1, k_*, \frac{\delta}{32}, C_{\tau,X}\big).$$

Ἐδῶ πλέον γίνεται καὶ ἡ ἐπιλογὴ τοῦ N_0, ὥστε χρησιμοποιῶντας τὴν (2.53) νὰ φράξουμε ἀπὸ κάτω τὴν (2.44) ἀπὸ $\frac{c(d-1,k_*,\delta/32,C_{\tau,X})}{2}$.

Ἔχουμε οὐσιαστικὰ τελειώσει: ἂν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι δὲν ἰσχύει γενικῶς τὸ δεύτερον μισὸν τῆς διχοτομίας γιὰ τὸ συγκεκριμένον ζευγάρι τῶν σ-ἄλγεβρῶν $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ποὺ ἔχουμε θεωρήσει (μὲ τὰ φράγματα γιὰ τὴν πολυπλοκότητα τῆς $\mathcal{B}''$ καὶ τὴν (2.42) ὅπως προέκυψαν ἀπὸ τὴν παραπάνω ἀνάλυσιν), τότε αὐτὸ θὰ μᾶς δώσει ὅτι γιὰ κάθε μ, λ,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu\lambda js} f_{U^\perp}(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}_N\right) \Big|\, 1 \leq s \leq N_0\right) \geq \frac{1}{2} \cdot c\big(d-1, k_*, \frac{\delta}{32}, C_{\tau,X}\big),$$

ὁπότε τελικῶς, λόγῳ τῆς (2.43), γιὰ κάθε $N_1 \geq N_0$ θὰ ἰσχύει

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{Z}_N} \prod_{j=0}^{k-1} T^{\mu jr} f_{U^\perp} \,\big|\, 0 \leq r \leq N_1\right) \gg \frac{1}{2N_0} \cdot c\big(d-1, k_*, \frac{\delta}{32}, C_{\tau,X}\big).$$

Θὰ βρισκόμαστε ἑπομένως στὴν περίπτωσιν τῆς ἐπιτυχίας. □

Κεφάλαιον 3

Ἀποδείξεις τῶν κυρίων θεωρημάτων γιὰ τὸ γενικευμένον θεώρημα Szemerédi

3.1 Τὸ γενικευμένον θεώρημα von Neumann γιὰ ψευδοτυχαῖα μέτρα

Ἡ ἰδέα τῶν Green καὶ Tao νὰ ἀποδείξουν τὸ Θεώρημα 1.1.10 ὑποθέτοντας τὸ Θεώρημα 1.1.1, μὲ χρῆσιν τῶν νορμῶν U^d καὶ τῶν δυϊκῶν τους, ἐπιβεβαιώνεται ἐν μέρει ἀπὸ τὶς ἑξῆς δύο παρατηρήσεις: (i) ἐξαιτίας τῆς συνθήκης γραμμικῶν μορφῶν, γιὰ κάθε $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ν ἰσχύει $\|\nu\|_{U^d} = 1+o(1) = \|\nu_{const}\|_{U^d}+o(1)$ (τουλάχιστον γιὰ $d \leq k-1$), ἐνῷ (ii) ἀπὸ τὸν τύπον (1.16) γιὰ τὶς νόρμες U^d βλέπουμε ὅτι, ἂν f, g εἶναι συναρτήσεις μὲ $|f| \leq g$, τότε $\|f\|_{U^d} \leq \|g\|_{U^d}$ γιὰ κάθε $d \geq 1$. Γιὰ τὸ (i) μάλιστα μποροῦμε νὰ ποῦμε κάτι περισσότερον:

Λῆμμα 3.1.1. *Ἔστω ὅτι τὸ μέτρον ν εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον (σύμφωνα μὲ τὸν Ὁρισμὸν 1.1.7). Τότε ἔχουμε ὅτι*

$$\|\nu - \nu_{const}\|_{U^d} = \|\nu - 1\|_{U^d} = o(1)$$

γιὰ κάθε $1 \leq d \leq k-1$.

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\|\cdot\|_{U^d} \leq \|\cdot\|_{U^{d+1}}$ ποὺ ἱκανοποιοῦν οἱ νόρμες U^d, $d \geq 1$, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε τὸ λῆμμα γιὰ $d = k-1$. Ὑψώνοντας στὴν δύναμιν 2^{k-1}, βλέπουμε ἀπὸ τὸν τύπον (1.16) ὅτι πρέπει νὰ δείξουμε

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\omega\in\{0,1\}^{k-1}} \big(\nu(x+\omega\cdot h)-1\big)\,\big|\, x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N^{k-1}\right) = o(1).$$

Τὸ ἀριστερὸν μέλος γράφεται καὶ ὡς

$$\sum_{A\subseteq\{0,1\}^{k-1}} (-1)^{|A|}\mathbb{E}\left(\prod_{\omega\in A}\nu(x+\omega\cdot h)\,\middle|\, x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N^{k-1}\right). \tag{3.1}$$

Ὅμως γιὰ κάθε $A\subseteq\{0,1\}^{k-1}$, ἡ ἔκφρασις

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\omega\in A}\nu(x+\omega\cdot h)\,\middle|\, x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N^{k-1}\right) \tag{3.2}$$

εἶναι τῆς μορφῆς

$$\mathbb{E}\left(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_{|A|}(\boldsymbol{x}))\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_N^k\right),$$

ὅπου $\boldsymbol{x}:=(x,h_1,\ldots,h_{k-1})$ καὶ $\psi_1,\ldots,\psi_{|A|}$ εἶναι μία διάταξις τῶν $|A|$ γραμμικῶν μορφῶν $x+\omega\cdot h$, $\omega\in A$. Προφανῶς καμμία ἀπὸ αὐτὲς τὶς γραμμικὲς μορφὲς δὲν εἶναι πολλαπλάσιον κάποιας ἄλλης, ἑπομένως μποροῦμε νὰ ἐπικαλεστοῦμε τὴν $(2^{k-1},k,1)-$συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν, τὴν ὁποίαν τὸ $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ν ἱκανοποιεῖ, καὶ νὰ συμπεράνουμε ὅτι ἡ (3.2) εἶναι $1+o(1)$.

Ἐπιστρέφοντας στὴν (3.1), βλέπουμε ὅτι τώρα τὸ ζητούμενον προκύπτει ἀπὸ τὸ διωνυμικὸν θεώρημα: $\sum_{A\subseteq\{0,1\}^{k-1}}(-1)^{|A|}=(1-1)^{k-1}=0$. $\square$

Τὸ Λῆμμα 3.1.1 μᾶς ἐπιτρέπει καταρχὰς νὰ συμπεράνουμε γιὰ κάθε f ἡ ὁποία φράσσεται ἀπολύτως ἀπὸ ν (ἢ ἀπὸ $\nu+1$) ὅτι ἡ U^{k-1} νόρμα της εἶναι φραγμένη, $\|f\|_{U^{k-1}}\le 2+o(1)$.

Θεωροῦμε τώρα $f_0,\ldots,f_{k-1}$ ὅπως στὴν διατύπωσιν τοῦ Θεωρήματος 1.5.1, ἀπολύτως φραγμένες ἀπὸ $\nu+1$, καθὼς καὶ μίαν μετάθεσιν $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{k-1})$ τοῦ $\{0,\ldots,k-1\}$, καὶ δείχνουμε ὅτι

$$\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1}T^{\lambda_j r}f_j(x)\,\middle|\,x,r\in\mathbb{Z}_N\right)\right|\le 2^{k-1}\cdot\left(\min_{0\le j\le k-1}\|f_j\|_{U^{k-1}}\right)+o(1).$$

Ἀρχικῶς κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις οἱ ὁποῖες ἁπλοποιοῦν τὴν ζητουμένην ἀνισότητα: διαιρῶντας τὶς f_j μὲ 2 καὶ χρησιμοποιῶντας τὸ Λῆμμα 1.1.8, βλέπουμε ὅτι φράσσονται ἀπολύτως ἀπὸ τὸ $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον $(\nu+1)/2$. Συμβολίζοντας στὸ ἑξῆς τὶς $f_j/2$ μὲ f_j, καὶ τὸ $(\nu+1)/2$ μὲ ν, ἀρκεῖ νὰ ξαναγράψουμε τὰ κατὰ σημεῖον φράγματα τῆς διατυπώσεως ὡς

$$|f_j(x)|\le\nu(x) \text{ γιὰ ὅλα τὰ } x\in\mathbb{Z}_N, 0\le j\le k-1, \tag{3.3}$$

καὶ νὰ δείξουμε ὅτι

$$\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1}T^{\lambda_j r}f_j(x)\,\middle|\,x,r\in\mathbb{Z}_N\right)\right|\le\min_{0\le j\le k-1}\|f_j\|_{U^{k-1}}+o(1). \tag{3.4}$$

Μεταθέτοντας τὶς f_j καὶ τὰ λ_j ἂν χρειάζεται, ὑποθέτουμε ὅτι $\min_{0\le j\le k-1}\|f_j\|_{U^{k-1}} = \|f_0\|_{U^{k-1}}$. Ἐπίσης, ἀφοῦ $\|f_0\|_{U^{k-1}} \le 2+o(1) = O(1)$, ἀρκεῖ νὰ φράξουμε τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (3.4) ἀπὸ $(1+o(1))\|f_0\|_{U^{k-1}}$.
Χρησιμοποιῶντας τὴν 1-1 καὶ ἐπὶ ἀντιστοιχίαν $(x,r)\mapsto(x+\lambda_0 r, r)$, βλέπουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{\lambda_j r} f_j(x)\,\middle|\, x,r\in\mathbb{Z}_N\right) = \mathbb{E}\left(f_0(x)\cdot\prod_{j=1}^{k-1} T^{\lambda'_j r} f_j(x)\,\middle|\, x,r\in\mathbb{Z}_N\right) \tag{3.5}$$

$$\text{μὲ τὰ } \lambda'_j := \lambda_j - \lambda_0 \neq 0,$$

ὁπότε τελικῶς ἔχουμε νὰ δείξουμε ὅτι

$$\left|\mathbb{E}\left(f_0(x)\cdot\prod_{j=1}^{k-1} T^{\lambda'_j r} f_j(x)\,\middle|\, x,r\in\mathbb{Z}_N\right)\right| \le (1+o(1))\|f_0\|_{U^{k-1}}. \tag{3.6}$$

Ἡ ἀπόδειξις θὰ χωριστεῖ σὲ δύο μέρη: πρῶτα ἐφαρμόζοντας τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz $k-1$ φορές καὶ χρησιμοποιῶντας τὴν (3.3), θὰ φράξουμε τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (3.6) ἀπὸ γινόμενα, πολλαπλασιασμένα μὲ κάποια βάρη, τιμῶν τῆς f_0 πάνω σὲ κύβους διαστάσεως $k-1$. Τὰ βάρη αὐτὰ δὲν θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ὁμοιόμορφα, γι' αυτὸ καὶ δὲν συμπεραίνουμε ἀπευθείας ὅτι τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (3.6) φράσσεται ἀπὸ τὴν U^{k-1} νόρμα τῆς f_0. Μᾶς χρειάζεται ἐπιπλέον νὰ δείξουμε, ἐφαρμόζοντας τὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν, ὅτι τὰ βάρη εἶναι κατὰ μέσην τιμὴν περίπου 1.

Γιὰ νὰ γίνει σαφὴς ἡ ἀπόδειξις, θὰ δειχθεῖ πρῶτα σὰν παράδειγμα ἡ ἁπλούστερη δυνατὴ περίπτωσις ($k=3, \lambda_j=j$), στὴν ὁποίαν τὰ βήματα εἶναι τὰ ἴδια, ἀλλὰ δὲν ἀπαιτοῦνται περίπλοκοι συμβολισμοί.

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.5.1 *ὅταν* $k=3, \lambda_j=j$. Θεωροῦμε $f_0, f_1, f_2 : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ ἀπολύτως φραγμένες ἀπὸ ν, καὶ δείχνουμε ὅτι

$$\left|\mathbb{E}\big(f_0(x)f_1(x-r)f_2(x-2r)\,|\,x,r\in\mathbb{Z}_N\big)\right| \le (1+o(1))\|f_0\|_{U^{k-1}}.$$

Ἀφοῦ ὁ N εἶναι κάποιος μεγάλος πρῶτος, ὁρίζεται ἀντιστοιχία $(y_1,y_2)(\equiv(x,r))\mapsto(y_1+y_2, y_1+\frac{y_2}{2})$, μέσῳ τῆς ὁποίας τὸ διάνυσμα $(x, x-r, x-2r)$ γίνεται $(y_1+y_2, y_2/2, -y_1)$. Ὁ σκοπὸς εἶναι ἡ δεύτερη συντεταγμένη νὰ μὴν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ y_1 καὶ ἡ τρίτη νὰ μὴν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ y_2, ὥστε χρησιμοποιῶντας τὸ θεώρημα Fubini (στὴν τετριμμένην του μορφὴν γιὰ πεπερασμένα σύνολα) νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν Cauchy-Schwarz σὲ κατάλληλες διαδοχικὲς μέσες τιμές. Ἄς δοῦμε τὶ σημαίνει αὐτό: ἔχουμε νὰ ἐκτιμήσουμε τὴν ποσότητα

$$J_0 := \mathbb{E}\big(f_0(y_1+y_2)f_1(y_2/2)f_2(-y_1)\,|\,y_1,y_2\in\mathbb{Z}_N\big). \tag{3.7}$$

Ἀπὸ τὴν (3.3) γιὰ τὴν f_2,

$$\begin{aligned}|J_0| &= \left|\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(f_0(y_1+y_2)f_1(y_2/2)\,|\,y_2\in\mathbb{Z}_N\right)\cdot f_2(-y_1)\,\middle|\,y_1\in\mathbb{Z}_N\right)\right| \\ &\le \mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(f_0(y_1+y_2)f_1(y_2/2)\,|\,y_2\in\mathbb{Z}_N\right)\right|\cdot\nu(-y_1)\,\middle|\,y_1\in\mathbb{Z}_N\right).\end{aligned}$$

῾Η τελευταία ἔκφρασις φράσσεται, χρησιμοποιῶντας τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz καὶ τὴν (1.4), ἀπὸ τὴν ποσότητα

$$(1+o(1)) \cdot \mathbb{E}\left(\left| \mathbb{E}\left(f_0(y_1+y_2) f_1(y_2/2) \,|\, y_2 \in \mathbb{Z}_N \right) \right|^2 \cdot \nu(-y_1) \,\Big|\, y_1 \in \mathbb{Z}_N \right)^{1/2},$$

τὴν ὁποίαν γράφουμε ὡς $(1+o(1)) \cdot J_1^{1/2}$, ὅπου

$$J_1 := \mathbb{E}\big(f_0(y_1+y_2) f_0(y_1+y_2') f_1(y_2/2) f_1(y_2'/2) \nu(-y_1) \,|\, y_1, y_2, y_2' \in \mathbb{Z}_N \big).$$

᾿Απὸ τὴν (3.3) γιὰ τὴν f_1, φράσσουμε τὸ J_1 ἀπὸ τὴν ποσότητα

$$\mathbb{E}\left(\left| \mathbb{E}\left(f_0(y_1+y_2) f_0(y_1+y_2') \nu(-y_1) \,|\, y_1 \in \mathbb{Z}_N \right) \right| \cdot \nu(y_2/2) \nu(y_2'/2) \,\Big|\, y_2, y_2' \in \mathbb{Z}_N \right),$$

καὶ αὐτὴν μὲ τὴν σειράν της ἀπὸ $1+o(1)$ ἐπὶ

$$\mathbb{E}\left(\left| \mathbb{E}\left(f_0(y_1+y_2) f_0(y_1+y_2') \nu(-y_1) \,|\, y_1 \in \mathbb{Z}_N \right) \right|^2 \cdot \nu(y_2/2) \nu(y_2'/2) \,\Big|\, y_2, y_2' \in \mathbb{Z}_N \right)^{1/2}$$

χρησιμοποιῶντας πάλι τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz καὶ τὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν, ἡ ὁποία μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι $\mathbb{E}\left(\nu(y_2/2) \nu(y_2'/2) \,|\, y_2, y_2' \in \mathbb{Z}_N \right) = 1 + o(1)$. ᾿Εδῶ τελειώνει τὸ πρῶτον βῆμα τῆς ἀποδείξεως, μὲ τὴν ἐκτίμησιν

$$|J_0| \leq (1+o(1)) \cdot J_2^{1/4} \tag{3.8}$$

ὅπου

$$J_2 := \mathbb{E}\big(f_0(y_1+y_2) f_0(y_1'+y_2) f_0(y_1+y_2') f_0(y_1'+y_2') \nu(-y_1) \nu(-y_1') \nu(y_2/2) \nu(y_2'/2) \\ \,|\, y_1, y_1', y_2, y_2' \in \mathbb{Z}_N \big).$$

῎Αν δὲν ὑπῆρχε ὁ παράγων $\nu(-y_1)\nu(-y_1')\nu(y_2/2)\nu(y_2'/2)$, αὐτὴ θὰ ἦταν ἡ $\|f_0\|_{U^2}^4$. Πράγματι, μέσῳ τῆς 1-1 καὶ ἐπὶ ἀντιστοιχίας

$$\boldsymbol{v} = (y_1, y_1', y_2, y_2') \mapsto (y_1, y_1+y_2, y_1'-y_1, y_2'-y_2) = (y(\boldsymbol{v}), x(\boldsymbol{v}), h_1(\boldsymbol{v}), h_2(\boldsymbol{v})),$$

ἡ ὁποία στέλνει τὸ διάνυσμα $(y_1+y_2, y_1'+y_2, y_1+y_2', y_1'+y_2')$ στὸ $(x, x+h_1, x+h_2, x+h_1+h_2)$, βλέπουμε ὅτι

$$J_2 = \mathbb{E}\big(f_0(x) f_0(x+h_1) f_0(x+h_2) f_0(x+h_1+h_2) W(x, h_1, h_2) \,|\, x, h_1, h_2 \in \mathbb{Z}_N \big)$$

ὅπου

$$W(x, h_1, h_2) := \mathbb{E}\left(\nu(-y) \nu(-y-h_1) \nu((x-y)/2) \nu((x-y+h_2)/2) \,\big|\, y \in \mathbb{Z}_N \right). \tag{3.9}$$

Γιὰ νὰ καταλήξουμε ἑπομένως στὸ ζητούμενον, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι

$$\begin{aligned}&J_2 - \|f_0\|_{U^2}^4\\ &= \mathbb{E}\big((W(x,h_1,h_2)-1)f_0(x)f_0(x+h_1)f_0(x+h_2)f_0(x+h_1+h_2)\,|\,x,h_1,h_2\in\mathbb{Z}_N\big)\\ &= o(1),\end{aligned}$$

ἀφοῦ τότε θὰ ἔχουμε $|J_0| \le (1+o(1))\cdot J_2^{1/4} = (1+o(1))\|f_0\|_{U^2}$. Ὅμως, χρησιμοποιῶντας γιὰ τελευταίαν φορὰν τὰ κατὰ σημεῖον φράγματα (3.3), καθὼς καὶ τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz, βλέπουμε ὅτι

(3.10)

$$\begin{aligned}&\big|\mathbb{E}\big((W(x,h_1,h_2)-1)f_0(x)f_0(x+h_1)f_0(x+h_2)f_0(x+h_1+h_2)\,|\,x,h_1,h_2\in\mathbb{Z}_N\big)\big|^2\\ \le\ &\big[\mathbb{E}\big(|W(x,h_1,h_2)-1|\nu(x)\nu(x+h_1)\nu(x+h_2)\nu(x+h_1+h_2)\,|\,x,h_1,h_2\in\mathbb{Z}_N\big)\big]^2\\ \le\ &\mathbb{E}\big((W(x,h_1,h_2)-1)^2D(x,h_1,h_2)\,|\,x,h_1,h_2\in\mathbb{Z}_N\big)\cdot\mathbb{E}\big(D(x,h_1,h_2)\,|\,x,h_1,h_2\in\mathbb{Z}_N\big)\end{aligned}$$

ὅπου $D(x,h_1,h_2) := \nu(x)\nu(x+h_1)\nu(x+h_2)\nu(x+h_1+h_2)$ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τιμῶν τοῦ ν στὸν κύβον $\{x+\omega\cdot(h_1,h_2) : \omega\in\{0,1\}^2\}$, δηλαδὴ

$$\mathbb{E}\big(D(x,h_1,h_2)\,|\,x,h_1,h_2\in\mathbb{Z}_N\big) = \|\nu\|_{U^2}^4,$$

τὸ ὁποῖον εἴδαμε ὅτι εἶναι ἴσον μὲ $1+o(1)$. Ἐξαιτίας καὶ πάλι τῆς συνθήκης γραμμικῶν μορφῶν, προκύπτει ὅτι $\mathbb{E}\big((W(x,h_1,h_2))^nD(x,h_1,h_2)\,|\,x,h_1,h_2\in\mathbb{Z}_N\big) = 1+o(1)$ καὶ ὅταν $n=1$ ἢ 2 : γιὰ νὰ τὸ δοῦμε, χρησιμοποιοῦμε γιὰ $n=1$ τὴν $(8,4,2)-$συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν, ἐνῷ γιὰ $n=2$ τὴν $(12,5,2)-$συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν. Αὐτὲς ἱκανοποιοῦνται ἀπὸ τὸ $3-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ν ἐξαιτίας τοῦ Ὁρισμοῦ 1.1.7 ποὺ ἔχουμε δώσει· ἡ ἔκφρασις γιὰ $n=2$ εἶναι ἀκριβῶς τὸ παράδειγμα (1.8). Καταλήγουμε ὅτι

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big((W-1)^2\cdot D\,|\,x,h_1,h_2\in\mathbb{Z}_N\big)\\ &=\mathbb{E}\big(W^2\cdot D\,|\,x,h_1,h_2\in\mathbb{Z}_N\big) - 2\mathbb{E}\big(W\cdot D\,|\,x,h_1,h_2\in\mathbb{Z}_N\big) + \mathbb{E}\big(D\,|\,x,h_1,h_2\in\mathbb{Z}_N\big)\\ &=o(1),\end{aligned}$$

καὶ ἀπ' αὐτὸ καὶ τὴν (3.10) ἕπεται τὸ ζητούμενον. □

Ἂς ἐπανέλθουμε τώρα στὴν γενικὴν περίπτωσιν: ὅπως εἴπαμε, θὰ ἐφαρμόσουμε τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz $k-1$ φορὲς ὥστε νὰ ἀντικαταστήσουμε καθεμίαν ἀπὸ τὶς f_i μὲ τὸ μέτρον ν. Θὰ συμπεριλάβουμε ὅλες αὐτὲς τὶς ἐφαρμογὲς στὸ ἑπόμενον λῆμμα, τὸ ὁποῖον μᾶς δίνει τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα καθὼς καὶ κάθε ἐνδιάμεσον βῆμα. Γιὰ νὰ μπορέσουμε νὰ γράψουμε σαφῶς τὶς ἐνδιάμεσες μέσες τιμὲς ὅμως χρειάζεται νὰ εἰσαγάγουμε κάποιον συμβολισμόν: ἂς ὑποθέσουμε ὅτι $0\le d\le k-1$, καὶ ὅτι ἔχουμε διανύσματα $y=(y_1,\dots,y_{k-1})\in\mathbb{Z}_N^{k-1}$ καὶ $y'=(y'_{k-d},\dots,y'_{k-1})\in\mathbb{Z}_N^d$ μήκους $k-1$

καὶ d ἀντιστοίχως. Γιὰ κάθε σύνολον $S \subseteq \{k-d,\dots,k-1\}$, ὁρίζουμε τὸ διάνυσμα $y^{(S)} = (y_1^{(S)},\dots,y_{k-1}^{(S)}) \in \mathbb{Z}_N^{k-1}$ θέτοντας

$$y_i^{(S)} := \begin{cases} y_i & \text{ἂν } i \notin S \\ y_i' & \text{ἂν } i \in S \end{cases}.$$

Δηλαδὴ τὸ σύνολον S δείχνει ποιὲς συντεταγμένες τοῦ $y^{(S)}$ προέρχονται ἀπὸ τὸ y' καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ y.

Λῆμμα 3.1.2. *Ἔστω $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ ὁποιοδήποτε μέτρον. Ἔστωσαν $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1} : \mathbb{Z}_N^{k-1} \to \mathbb{Z}_N$ συναρτήσεις στὶς $k-1$ μεταβλητὲς $y_1,\dots,y_{k-1}$, τέτοιες ὥστε ἡ ϕ_i δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταβλητὴν y_i γιὰ κάθε $1 \le i \le k-1$. Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ $f_0, f_1, \dots, f_{k-1} : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ εἶναι συναρτήσεις οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τὶς $|f_i(x)| \le \nu(x)$ γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$ καὶ $0 \le i \le k-1$. Ὁρίζουμε γιὰ κάθε $0 \le d \le k-1$ τὶς ποσότητες*

$$J_d := \mathbb{E}\Bigg(\prod_{S \subseteq \{k-d,\dots,k-1\}} \Big(\prod_{i=0}^{k-d-1} f_i(\phi_i(y^{(S)}))\Big)\Big(\prod_{i=k-d}^{k-1} \nu^{1/2}(\phi_i(y^{(S)}))\Big) \,\Big|\, y \in \mathbb{Z}_N^{k-1}, y' \in \mathbb{Z}_N^d \Bigg)$$

καὶ

$$P_d := \mathbb{E}\Bigg(\prod_{S \subseteq \{k-d,\dots,k-1\}} \nu(\phi_{k-d-1}(y^{(S)})) \,\Big|\, y \in \mathbb{Z}_N^{k-1}, y' \in \mathbb{Z}_N^d \Bigg).$$

Τότε γιὰ κάθε $0 \le d \le k-2$ ἰσχύει

$$|J_d|^2 \le P_d J_{d+1}.$$

Παρατήρησις. Μπορεῖ νὰ φαίνεται περίεργον ὅτι στὶς ποσότητες J_d ἐμφανίζονται οἱ παράγοντες $\nu^{1/2}(\phi_i(y^{(S)})$. Ὅμως, ἀφοῦ ἡ ϕ_i δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν συντεταγμένην στὴν θέσιν i, παρατηροῦμε ὅτι κάθε τέτοιος παράγων ἐμφανίζεται δύο φορὲς στὸ γινόμενον. Ἂν θεωρήσουμε $k=3$ καὶ

$$\phi_0(y_1,y_2) = y_1 + y_2, \quad \phi_1(y_1,y_2) = y_2/2, \quad \phi_2(y_1,y_2) = -y_1, \tag{3.11}$$

τότε οἱ παραπάνω ὁρισμοὶ μᾶς δίνουν τὶς ἴδιες ποσότητες J_0, J_1, J_2 ποὺ ὁρίσαμε στὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμε τὴν ποσότητα J_d. Ἀφοῦ ἡ ϕ_{k-d-1} δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταβλητὴν y_{k-d-1}, μποροῦμε νὰ ἐξαιρέσουμε ὅλες τὶς ποσότητες ποὺ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν ϕ_{k-d-1} ἀπὸ τὴν ὁλοκλήρωσιν ὡς πρὸς y_{k-d-1}. Γράφουμε δηλαδὴ

$$J_d = \mathbb{E}\big(G(\bar{y},y')H(\bar{y},y') |\, y_1,\dots,y_{k-d-2}, y_{k-d},\dots,y_{k-1}, y'_{k-d},\dots,y'_{k-1} \in \mathbb{Z}_N\big),$$

ὅπου

$$G(\bar{y},y') := \prod_{S\subseteq\{k-d,\dots,k-1\}} f_{k-d-1}(\phi_{k-d-1}(y^{(S)}))$$

καὶ

$$H(\bar{y},y') := \mathbb{E}\Bigg(\prod_{S\subseteq\{k-d,\dots,k-1\}} \Big(\prod_{i=0}^{k-d-2} f_i(\phi_i(y^{(S)}))\Big)\Big(\prod_{i=k-d}^{k-1} \nu^{1/2}(\phi_i(y^{(S)}))\Big)\,\Big|\, y_{k-d-1}\in\mathbb{Z}_N\Bigg)$$

γιὰ $\bar{y} = (y_1,\dots,y_{k-d-2},y_{k-d},\dots,y_{k-1})$, ὅπου μὲ $y^{(S)}$ στὴν περίπτωσιν τῆς H ἐννοοῦμε τὸ διάνυσμα ποὺ προκύπτει ὅπως παραπάνω ἀπὸ τὰ $(\bar{y},y_{k-d-1})$ καὶ y', ἐνῷ στὴν περίπτωσιν τῆς G μᾶς ἀρκεῖ ὁποιαδήποτε ἐπέκτασις τοῦ $\bar{y}$ γιὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ ἀντιστοίχου διανύσματος.

Προφανῶς,

$$\begin{aligned}|J_d| &\le \mathbb{E}\big(|G(\bar{y},y')|\cdot|H(\bar{y},y')|\;|\,\bar{y}\in\mathbb{Z}_N^{k-2}, y'\in\mathbb{Z}_N^d\big)\\ &\le \mathbb{E}\Big[\Big(\prod_{S\subseteq\{k-d,\dots,k-1\}} \nu(\phi_{k-d-1}(y^{(S)}))\Big)\cdot|H(\bar{y},y')|\,\big|\,\bar{y}\in\mathbb{Z}_N^{k-2}, y'\in\mathbb{Z}_N^d\Big]\end{aligned}$$

ἀπὸ τὰ κατὰ σημεῖον φράγματα γιὰ τὴν f_{k-d-1}. Συνεπῶς, θέτοντας

$$\bar{G}(\bar{y},y') := \prod_{S\subseteq\{k-d,\dots,k-1\}} \nu^{1/2}(\phi_{k-d-1}(y^{(S)}))$$

καὶ

$$\bar{H}(\bar{y},y') := \Big(\prod_{S\subseteq\{k-d,\dots,k-1\}} \nu^{1/2}(\phi_{k-d-1}(y^{(S)}))\Big)\cdot|H(\bar{y},y')|$$

$$= \Bigg|\mathbb{E}\Bigg(\prod_{S\subseteq\{k-d,\dots,k-1\}} \Big(\prod_{i=0}^{k-d-2} f_i(\phi_i(y^{(S)}))\Big)\Big(\prod_{i=k-d-1}^{k-1} \nu^{1/2}(\phi_i(y^{(S)}))\Big)\,\Big|\, y_{k-d-1}\in\mathbb{Z}_N\Bigg)\Bigg|,$$

καὶ ἐφαρμόζοντας τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz στὶς $\bar{G}$ καὶ $\bar{H}$, καταλήγουμε ὅτι

$$\begin{aligned}|J_d|^2 &\le \mathbb{E}\Big[\Big(\prod_{S\subseteq\{k-d,\dots,k-1\}} \nu(\phi_{k-d-1}(y^{(S)}))\Big)\cdot|H(\bar{y},y')|\,\big|\,\bar{y}\in\mathbb{Z}_N^{k-2}, y'\in\mathbb{Z}_N^d\Big]^2\\ &= \mathbb{E}\big(\bar{G}(\bar{y},y')\bar{H}(\bar{y},y')|\,y_1,\dots,y_{k-d-2},y_{k-d},\dots,y_{k-1},y'_{k-d},\dots,y'_{k-1}\in\mathbb{Z}_N\big)^2\\ &\le \mathbb{E}\big((\bar{G}(\bar{y},y'))^2|\,y_1,\dots,y_{k-d-2},y_{k-d},\dots,y_{k-1},y'_{k-d},\dots,y'_{k-1}\in\mathbb{Z}_N\big)\times\\ &\quad\times\mathbb{E}\big((\bar{H}(\bar{y},y'))^2|\,y_1,\dots,y_{k-d-2},y_{k-d},\dots,y_{k-1},y'_{k-d},\dots,y'_{k-1}\in\mathbb{Z}_N\big).\end{aligned}$$

Ὅμως, ἀφοῦ ἡ $\bar{G}(\bar{y}, y')$ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταβλητὴν y_{k-d-1}, ἔχουμε ὅτι ἡ

$$P_d = \mathbb{E}\big((\bar{G}(\bar{y}, y'))^2 |\, y \in \mathbb{Z}_N^{k-1}, y' \in \mathbb{Z}_N^d\big)$$

εἶναι ἀκριβῶς ἴση μὲ

$$\mathbb{E}\big((\bar{G}(\bar{y}, y'))^2 |\, y_1, \dots, y_{k-d-2}, y_{k-d}, \dots, y_{k-1}, y'_{k-d}, \dots, y'_{k-1} \in \mathbb{Z}_N\big).$$

Ἐπίσης, ἀναπτύσσοντας τὸ $(\bar{H}(\bar{y}, y'))^2$ καὶ ἀντικαθιστῶντας τὴν μεταβλητὴν y_{k-d-1} ἀπὸ δύο μεταβλητὲς y_{k-d-1} καὶ y'_{k-d-1}, βλέπουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\big((\bar{H}(\bar{y}, y'))^2 |\, y_1, \dots, y_{k-d-2}, y_{k-d}, \dots, y_{k-1}, y'_{k-d}, \dots, y'_{k-1} \in \mathbb{Z}_N\big) = J_{d+1}.$$

Ἔχουμε ἑπομένως τὸ ζητούμενον. □

Μετὰ ἀπὸ $k-1$ ἐφαρμογὲς τοῦ παραπάνω λήμματος προκύπτει γιὰ τὴν

$$J_0 = \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k-1} f_i(\phi_i(y)) \,\big|\, y \in \mathbb{Z}_N^{k-1}\right) \tag{3.12}$$

ὅτι

$$|J_0|^{2^{k-1}} \le J_{k-1} \prod_{d=0}^{k-2} P_d^{2^{k-2-d}}. \tag{3.13}$$

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.5.1. Ἂς θυμηθοῦμε ὅτι ἔχουμε νὰ δείξουμε ὅτι

$$\left|\mathbb{E}\left(f_0(x) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} T^{\lambda'_j r} f_j(x) \,\big|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right)\right| \le (1 + o(1)) \|f_0\|_{U^{k-1}},$$

ὅπου τὰ $\lambda'_j = \lambda_j - \lambda_0$ εἶναι μὴ μηδενικὰ καὶ κατ' ἀπόλυτην τιμὴν μικρότερα τοῦ k (ἀφοῦ τὰ $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ σχηματίζουν μετάθεσιν τοῦ $\{0, 1, \dots, k-1\}$). Ἡ μέση τιμὴ στὸ ἀριστερὸν μέλος μπορεῖ νὰ γραφεῖ ὅπως στὴν (3.12) ἂν ὁρίσουμε κατάλληλα τὶς ϕ_i. Γιὰ $y = (y_1, \dots, y_{k-1})$, θέτουμε

$$\phi_i(y) := \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda'_i}{\lambda'_j}\right) y_j$$

γιὰ κάθε $i = 0, 1, \dots, k-1$. Τότε $\phi_0(y) = y_1 + \cdots + y_{k-1}$, γιὰ κάθε $i \neq 0$ τὸ $\phi_i(y)$ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ y_i, καὶ τέλος, γιὰ κάθε y ἔχουμε $\phi_i(y) = x - \lambda'_i r$ ὅπου

$$x = y_1 + \cdots + y_{k-1} \text{ καὶ } r = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{y_j}{\lambda'_j}$$

(ἡ (3.11) εἶναι ἀκριβῶς ἡ περίπτωσις $k = 3, \lambda_j = j$ αὐτῆς τῆς γενικῆς κατασκευῆς). Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\Phi : \mathbb{Z}_N^{k-1} \to \mathbb{Z}_N^2$ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὶς παραπάνω σχέσεις,

$$\Phi(y) := \left(y_1 + \cdots + y_{k-1}, \frac{y_1}{\lambda_1'} + \frac{y_2}{\lambda_2'} + \cdots + \frac{y_{k-1}}{\lambda_{k-1}'}\right),$$

εἶναι ὁμοιόμορφον κάλυμμα (βλέπε ὁρολογίαν ἑνότητος 1.1), καταλήγουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(f_0(x) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} f_j(x - \lambda_j' r) \,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k-1} f_i(\phi_i(y)) \,\middle|\, y \in \mathbb{Z}_N^{k-1}\right) = J_0 \tag{3.14}$$

(αὐτὸ γενικεύει τὴν (3.7)).

Ἀπὸ τὴν ἄλλην, ἔχουμε $P_d = 1 + o(1)$ γιὰ κάθε $0 \leq d \leq k-2$, ἀφοῦ ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὸ ν εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον συνεπάγεται τὴν $(2^d, k-1+d, k)-$συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν (ἐλέγχουμε βεβαίως καὶ ὅτι, ἔτσι ὅπως ὁρίσαμε τὶς ϕ_i, καθεμία είναι γραμμικὴ μορφὴ μὲ ῥητοὺς συντελεστὲς

$$1 - \frac{\lambda_i'}{\lambda_j'} = \frac{\lambda_j' - \lambda_i'}{\lambda_j'} = \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_0}$$

τῶν ὁποίων οἱ ἀριθμητὲς καὶ οἱ παρονομαστὲς εἶναι ἀπολύτως μικρότεροι τοῦ k). Ἀντικαθιστῶντας στὴν (3.13) βλέπουμε ὅτι

$$J_0^{2^{k-1}} \leq (1 + o(1)) J_{k-1} \tag{3.15}$$

(αὐτὸ γενικεύει τὴν (3.8)).

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι γιὰ σταθερὸν $y \in \mathbb{Z}_N^{k-1}$ οἱ διάφορες τιμὲς τοῦ $\phi_0(y^{(S)})$, καθὼς τὸ S μεταβάλλεται μεταξὺ τῶν ὑποσυνόλων τοῦ $\{1, \ldots, k-1\}$, σχηματίζουν ἕναν κύβον διαστάσεως $k-1$, τὸ σύνολον $\{x + \omega \cdot h : \omega \in \{0,1\}^{k-1}\}$ ὅπου $x := y_1 + \cdots + y_{k-1}$ καὶ $h_i := y_i' - y_i, i = 1, \ldots, k-1$. Μποροῦμε ἑπομένως νὰ γράφουμε

$$J_{k-1} = \mathbb{E}\left(W(x,h) \prod_{\omega \in \{0,1\}^{k-1}} f_0(x + \omega \cdot h) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N, h \in \mathbb{Z}_N^{k-1}\right) \tag{3.16}$$

ὅπου ὁ παράγων $W(x,h)$ δίνεται ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$\begin{aligned} W(x,h) &= \mathbb{E}\left(\prod_{\omega \in \{0,1\}^{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} \nu^{1/2}(\phi_i(y + \omega h)) \middle| y_1, \ldots, y_{k-2} \in \mathbb{Z}_N\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{k-1} \prod_{\substack{\omega \in \{0,1\}^{k-1} \\ \omega_i = 0}} \nu(\phi_i(y + \omega h)) \middle| y_1, \ldots, y_{k-2} \in \mathbb{Z}_N\right), \end{aligned}$$

στὴν ὁποίαν $\omega h \in \mathbb{Z}_N^{k-1}$ εἶναι τὸ διάνυσμα μὲ συντεταγμένες $(\omega h)_j := \omega_j h_j$ γιὰ $1 \leq j \leq k-1$, ἐνῷ $y \in \mathbb{Z}_N^{k-1}$ τὸ διάνυσμα μὲ συντεταγμένες y_j γιὰ $1 \leq j \leq k-2$ καὶ $y_{k-1} := x - y_1 - \cdots - y_{k-2}$ (ἔτσι γενικεύουμε τὴν (3.9)). Θυμόμαστε ὅμως ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς U^{k-1} νόρμας ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\omega\in\{0,1\}^{k-1}} f_0(x+\omega\cdot h) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N, h \in \mathbb{Z}_N^{k-1}\right) = \|f_0\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}},$$

ἑπομένως τὸ ζητούμενον θὰ προκύψει ἀπὸ τὶς (3.14), (3.15) καὶ (3.16) ἂν δείξουμε τὴν

$$\mathbb{E}\left((W(x,h)-1)\prod_{\omega\in\{0,1\}^{k-1}} f_0(x+\omega\cdot h) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N, h \in \mathbb{Z}_N^{k-1}\right) = o(1).$$

Ἀπὸ τὰ κατὰ σημεῖον φράγματα (3.3) γιὰ τὴν f_0, μᾶς ἀρκεῖ ἡ ἐκτίμησις

$$\mathbb{E}\left(|W(x,h)-1|\prod_{\omega\in\{0,1\}^{k-1}} \nu(x+\omega\cdot h) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N, h \in \mathbb{Z}_N^{k-1}\right) = o(1),$$

ἡ ὁποία τελικῶς ἕπεται ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz καὶ τὸ ἑπόμενον λῆμμα:

Λῆμμα 3.1.3. *Γιὰ $n = 0, 2$ ἰσχύει*

$$\mathbb{E}\left(|W(x,h)-1|^n\prod_{\omega\in\{0,1\}^{k-1}} \nu(x+\omega\cdot h) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N, h \in \mathbb{Z}_N^{k-1}\right) = 0^n + o(1).$$

Ἀπόδειξις. Ἀναπτύσσοντας τὸ $(W(x,h)-1)^2$ στὴν περίπτωσιν $n=2$, βλέπουμε ὅτι ἀρκεῖ νὰ δειχθοῦν οἱ ἐκτιμήσεις

$$\mathbb{E}\left(W^q(x,h)\prod_{\omega\in\{0,1\}^{k-1}} \nu(x+\omega\cdot h) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_N, h \in \mathbb{Z}_N^{k-1}\right) = 1 + o(1)$$

γιὰ $q = 0, 1, 2$. Θὰ χρειαστοῦμε τρεῖς ἐφαρμογὲς τῆς συνθήκης γραμμικῶν μορφῶν:

$\boldsymbol{q=0.}$ Ἐπικαλούμαστε τὴν $(2^{k-1}, k, 1)-$συνθήκην γιὰ τὶς γραμμικὲς μορφὲς

$$x + \omega\cdot h, \quad \omega \in \{0,1\}^{k-1},$$

στὶς μεταβλητὲς $x, h_1, \ldots, h_{k-1}$.

$\boldsymbol{q=1.}$ Ἐπικαλούμαστε τὴν $(2^{k-2}(k+1), 2k-2, k)-$συνθήκην γιὰ τὶς γραμμικὲς μορφὲς

$$\begin{aligned} \phi_i(y+\omega h) \quad & \text{γιὰ } \omega \in \{0,1\}^{k-1} \text{ μὲ } \omega_i = 0,\ 1 \leq i \leq k-1, \\ x + \omega\cdot h \quad & \text{γιὰ } \omega \in \{0,1\}^{k-1}, \end{aligned}$$

στὶς μεταβλητὲς $x, h_1, \dots, h_{k-1}, y_1, \dots, y_{k-2}$ (ὅπου, ὅπως εἴπαμε, μὲ y συμβολίζουμε τὸ διάνυσμα $(y_1, \dots, y_{k-2}, x - y_1 - \cdots - y_{k-2}) \in \mathbb{Z}_N^{k-1}$, καὶ μὲ ωh τὸ $(\omega_1 h_1, \dots, \omega_{k-1} h_{k-1})$).

$\boldsymbol{q = 2}$. Ἐπικαλούμαστε τὴν $(k \cdot 2^{k-1}, 3k-4, k)-$συνθήκην γιὰ τὶς γραμμικὲς μορφὲς

$$\begin{aligned} \phi_i(y + \omega h) &\quad \text{γιὰ } \omega \in \{0,1\}^{k-1} \text{ μὲ } \omega_i = 0,\ 1 \le i \le k-1, \\ \phi_i(y' + \omega h) &\quad \text{γιὰ } \omega \in \{0,1\}^{k-1} \text{ μὲ } \omega_i = 0,\ 1 \le i \le k-1, \\ x + \omega \cdot h &\quad \text{γιὰ } \omega \in \{0,1\}^{k-1}, \end{aligned}$$

στὶς μεταβλητὲς $x, h_1, \dots, h_{k-1}, y_1, \dots, y_{k-2}, y_1', \dots, y_{k-2}'$ (ἀναλόγως μὲ πρίν, y' εἶναι τὸ διάνυσμα $(y_1, \dots, y_{k-2}, x - y_1 - \cdots - y_{k-2}) \in \mathbb{Z}_N^{k-1}$).

Ἔτσι ἀποδεικνύουμε τὸ λῆμμα, καθὼς καὶ τὸ Θεώρημα 1.5.1. □

3.2 Τὸ Θεώρημα Διασπάσεως 1.5.2

Ἂς θυμηθοῦμε ὅτι ἔχουμε νὰ δείξουμε τὸ

Θεώρημα 1.5.2. *Ἔστω ν $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον. Ἔστω f συνάρτησις τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$, $0 \le f(x) \le \nu(x)$, καὶ ἔστω $0 < \varepsilon \ll 1$ παράμετρος. Τότε ὑπάρχουν σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ καὶ σύνολον $\Omega \in \mathcal{B}$ ἔτσι ὥστε:*

- *(τὸ Ω εἶναι μικρὸν ὡς πρὸς τὸ μέτρον ν)*

$$\mathbb{E}(\nu \mathbf{1}_\Omega) = o_\varepsilon(1), \tag{3.17}$$

- *(τὸ ν κατανέμεται ὁμοιόμορφα ἔξω ἀπὸ τὸ Ω)*

$$\|(1 - \mathbf{1}_\Omega)\mathbb{E}(\nu - 1|\mathcal{B})\|_{L^\infty} = o_\varepsilon(1), \tag{3.18}$$

- *(ἡ ὀρθογώνια στὴν $\mathcal{B}$ συνιστῶσα τῆς f εἶναι Gowers ὁμοιόμορφη) γιὰ κάθε $N >$ ἀπὸ κάποιο $N_0(\varepsilon)$,*

$$\|(1 - \mathbf{1}_\Omega)(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}))\|_{U^{k-1}} \le \varepsilon^{1/2^k}. \tag{3.19}$$

3.2.1 Οἱ βασικὲς Gowers-ἀνομοιόμορφες συναρτήσεις γιὰ τὸ θεώρημα τῶν Green καὶ Tao

Στὸ Λῆμμα 2.2.8 εἴδαμε ὅτι κάθε φραγμένη συνάρτησις f συσχετίζεται μὲ μία φραγμένην, ὁμοιόμορφα σχεδὸν περιοδικὴν συνάρτησιν $\mathcal{D}f$, ἡ οποία ἔχει UAP^{k-2} νόρμα ≤ 1. Θὰ δοῦμε τώρα ὅτι ἡ ἴδια δυϊκὴ συνάρτησις εἶναι Gowers ἀνομοιόμορφη ὅταν ἡ f φράσσεται ἀπὸ κάποιο ψευδοτυχαῖον μέτρον ν, δηλαδὴ ὅτι ἰσχύει $\|\mathcal{D}f\|_{U^{k-1}} = O(1)$ καὶ $\|\mathcal{D}f\|_{L^\infty} = O(1)$, κάτι ποὺ μᾶς ἀρκεῖ γιὰ νὰ διατυπώσουμε προτάσεις ἀντίστοιχες τῶν 2.2.1, 2.2.3 γιὰ τὸ Θεώρημα Διασπάσεως 1.5.2. Ὑπενθυμίζουμε ἀπὸ τὴν Παρατήρησιν

2.2.9 ὅτι γιὰ κάθε συνάρτησιν $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$, ἡ δυϊκὴ συνάρτησις τάξεως $k-1$ τῆς f δίνεται ἀπὸ τὸν τύπον

$$\mathcal{D}f(x) := \mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega \in \{0,1\}^{k-1} \\ \omega \neq 0^{k-1}}} f(x + \omega \cdot h) \,\Big|\, h \in \mathbb{Z}_N^{k-1} \right). \tag{3.20}$$

Λῆμμα 3.2.1. *Ἔστω $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ν, καὶ ἔστω $F : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ συνάρτησις. Τότε ἰσχύουν οἱ ταυτότητες*

$$\langle F, \mathcal{D}F \rangle = \|F\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}} \tag{3.21}$$

καὶ

$$\|\mathcal{D}F\|_{(U^{k-1})^*} = \|F\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}-1}. \tag{3.22}$$

Ἂν ἐπιπλέον ἰσχύει

$$|F(x)| \leq \frac{3}{2}(\nu(x) + 1) \text{ γιὰ κάθε } x \in \mathbb{Z}_N,$$

τότε μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι

$$\|\mathcal{D}F\|_{L^\infty} \leq 3^{2^{k-1}-1} + o(1) \tag{3.23}$$

μὲ τὰ σφάλματα στὴν (3.23) νὰ ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὸ μέτρον ν καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν ἑκάστοτε F.

Ἀπόδειξις. Τὴν ταυτότητα (3.21) τὴν ἔχουμε ἤδη δείξει στὸ Λῆμμα 2.2.8 (ἀποδεικνύεται καὶ ἀπευθείας, ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου δύο συναρτήσεων, τὸν τύπον (3.20) καὶ τὸν τύπον (1.16) τῆς U^{k-1} νόρμας). Ἀπὸ τὴν (3.21) καὶ τὴν προφανῆ ἀνισότητα $\langle F, \mathcal{D}F \rangle \leq \|F\|_{U^{k-1}} \|\mathcal{D}F\|_{(U^{k-1})^*}$, ἔχουμε ὅτι

$$\|\mathcal{D}F\|_{(U^{k-1})^*} \geq \|F\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}-1}.$$

Ἑπομένως γιὰ τὴν (3.22), ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι γιὰ κάθε συνάρτησιν $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ ἰσχύει

$$|\langle f, \mathcal{D}F \rangle| \leq \|f\|_{U^{k-1}} \|F\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}-1}.$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸν τύπον (3.20) γιὰ τὴν δυϊκὴν συνάρτησιν τῆς F, τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον $\langle f, \mathcal{D}F \rangle$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον Gowers τῆς ἀκολουθίας $(f_\omega)_{\omega \in \{0,1\}^{k-1}}$ ὅπου $f_\omega := f$ ὅταν $\omega = 0^{k-1}$, $f_\omega := F$ ἀλλιῶς. Ἄρα, τὸ ζητούμενον ἕπεται ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Gowers-Cauchy-Schwarz.

Ἡ (3.23), τέλος, εἶναι συνέπεια τῆς συνθήκης γραμμικῶν μορφῶν: ἀφοῦ ἡ F φράσσεται ἀπὸ $3(\nu+1)/2 =: 3\nu_{1/2}$, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι

$$\mathcal{D}\nu_{1/2}(x) \leq 1 + o(1)$$

ὁμοιόμορφα γιὰ x στὸ $\mathbb{Z}_N$. Ἀπὸ τὸν τύπον (3.20), τὸ ἀριστερὸν μέλος γράφεται ὡς

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} \nu_{1/2}(x+\omega\cdot h) \,\Big|\, h\in\mathbb{Z}_N^{k-1}\right),$$

ἐνῷ ἀπὸ τὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν γιὰ τὸ μέτρον $\nu_{1/2}$ (τὸ ὁποῖον εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον ἀπὸ τὸ Λῆμμα 1.1.8), ἔχουμε ὅτι ἡ παραπάνω μέση τιμὴ εἶναι ἴση μὲ $1 + o(1)$.

Σημείωσις. Αὐτὴ εἶναι ἡ μόνη φορὰ ποὺ θὰ χρειαστεῖ νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν μὲ τοὺς σταθεροὺς ὅρους b_i στὶς γραμμικὲς μορφὲς νὰ μὴν εἶναι ὅλοι 0 (ἐδῶ τὰ b_i εἶναι ὅλα ἴσα μὲ x). Τὸ παράδειγμα (1.7) ἀντιστοιχεῖ στὴν περίπτωσιν $k = 3$ τῆς παραπάνω ἐκφράσεως. □

Παρατήρησις 3.2.2. Εἴδαμε ὅτι ἐξαιτίας τοῦ Λήμματος 3.1.1, ἂν ἡ F φράσσεται ἀπολύτως ἀπὸ $\frac{3}{2}(\nu+1)$, τότε $\|F\|_{U^{k-1}} \leq 3 + o(1)$. Ἕπεται ἀπὸ τὶς (3.22), (3.23) ὅτι ἡ δυϊκή της $\mathcal{D}F$ εἶναι Gowers ἀνομοιόμορφη, δηλαδὴ $\|\mathcal{D}F\|_{(U^{k-1})^*} = O(1)$ καὶ $\|\mathcal{D}F\|_{L^\infty} = O(1)$. Ὅπως εἴπαμε καὶ στὴν Παρατήρησιν 2.2.9, αὐτὲς οἱ δυϊκὲς συναρτήσεις θὰ εἶναι οἱ βασικὲς Gowers ἀνομοιόμορφες συναρτήσεις γιὰ τὸ Θεώρημα 1.1.10, αὐτὲς δηλαδὴ ποὺ θὰ συσχετίσουμε μὲ κατάλληλες σ-ἄλγεβρες, ἀνάμεσα στὶς ὁποῖες θὰ βρίσκεται καὶ ἡ ζητουμένη στὸ Θεώρημα Διασπάσεως 1.5.2 σ-ἄλγεβρα. Ἀπὸ τὴν (3.23) προκύπτει ὅτι ἂν τὸ N εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο (σὲ σχέσιν μὲ τὸ μέτρον ν), τότε ὅλες οἱ βασικὲς Gowers ἀνομοιόμορφες συναρτήσεις παίρνουν τιμὲς στὸ διάστημα $I := [-3^{2^{k-1}}, 3^{2^{k-1}}]$.

Συνδυάζοντας τὸ Λῆμμα 3.1.1 καὶ τὴν (3.22), ἔχουμε ὅτι γιὰ κάθε βασικὴν Gowers ἀνομοιόμορφην συνάρτησιν $\mathcal{D}F$ ἰσχύει $\langle \nu - 1, \mathcal{D}F\rangle = o(1)$ (οἱ Green καὶ Tao λένε γιὰ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα ὅτι «τὸ μέτρον ν κατανέμεται ὁμοιόμορφα ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν $\mathcal{D}F$»). Θὰ δοῦμε τώρα ὅτι ἡ ἰδιότης μεταφέρεται καὶ στοὺς συνεχεῖς συνδυασμοὺς τῶν βασικῶν Gowers ἀνομοιομόρφων συναρτήσεων.

Πρότασις 3.2.3. *Ἔστω ὅτι τὸ ν εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον. Ἔστω $M \geq 1$ φυσικός, ἔστω $\Phi : I^M \to \mathbb{R}$ συνεχὴς συνάρτησις, καὶ ἔστωσαν $\mathcal{D}F_1, \ldots, \mathcal{D}F_M$ βασικὲς Gowers ἀνομοιόμορφες συναρτήσεις. Ὁρίζουμε τὴν συνάρτησιν $\psi : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ θέτοντας*

$$\psi(x) := \Phi(\mathcal{D}F_1(x), \ldots, \mathcal{D}F_M(x)),$$

καὶ ἔχουμε ὅτι

$$\langle \nu - 1, \psi\rangle = o_\Phi(1). \tag{3.24}$$

Ἐπιπλέον, ἂν ἡ Φ ἐπιλέγεται ἀπὸ κάποιο συμπαγὲς σύνολον E τοῦ χώρου $C^0(I^M)$ τῶν πραγματικῶν συνεχῶν συναρτήσεων ἀπὸ τὸ I^M (μὲ τὴν τοπολογίαν ποὺ ἐπάγεται ἀπὸ τὴν supremum νόρμα), τότε τὰ φράγματα στὴν (3.24) εἶναι ὁμοιόμορφα ὡς πρὸς Φ (δηλαδὴ μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε τὸ $o_\Phi(1)$ μὲ $o_E(1)$).

Ἀπόδειξις. Θὰ δείξουμε τὸ ζητούμενον σὲ δύο στάδια, πρῶτα δείχνοντάς το γιὰ Φ πολυώνυμον, καὶ μετὰ χρησιμοποιῶντας τὸ θεώρημα Weierstrass γιὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν. Θεωροῦμε λοιπὸν φυσικὸν $M \geq 1$, καὶ συναρτήσεις $F_1, \ldots, F_M : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ τέτοιες ὥστε νὰ ἰσχύει

$$|F_j(x)| \leq \nu(x) + 1 \text{ γιὰ κάθε } x \in \mathbb{Z}_N, 1 \leq j \leq M. \tag{3.25}$$

Λῆμμα 3.2.4. *Ἔστω $d \geq 1$. Γιὰ κάθε πολυώνυμον P βαθμοῦ d, μὲ M μεταβλητὲς καὶ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὲς ἀνεξαρτήτους τοῦ N, ἔχουμε ὅτι*

$$\|P(\mathcal{D}F_1, \ldots, \mathcal{D}F_M)\|_{(U^{k-1})^*} = O_{M,d,P}(1).$$

Σημείωσις. Φαίνεται ἴσως περίεργον ὅτι δὲν ὑπάρχει κανένας περιορισμὸς στὰ M, d, δεδομένου ὅτι τὰ μέσα ποὺ ἔχουμε νὰ χρησιμοποιήσουμε εἶναι οἱ συνθῆκες γραμμικῶν μορφῶν καὶ συσχετισμοῦ, καὶ αὐτὲς ἔχουν φραγμένες παραμέτρους. Ἂς θυμηθοῦμε ὅμως ὅτι, ἐνῷ τὸ m στὴν (1.10) εἶναι φραγμένον, δὲν ὑπάρχει περιορισμὸς γιὰ τὸ q στὴν (1.9).

Φαίνεται ἐπίσης πλεονασμὸς νὰ γράφουμε $O_{M,d,P}(1)$, ὅταν τὰ M καὶ d προφανῶς καθορίζονται ἀπὸ τὸ πολυώνυμον P. Αὐτὸ ποὺ ἐννοοῦμε, ὅπως θὰ φανεῖ στὴν ἀπόδειξιν, εἶναι ὅτι μποροῦμε νὰ βροῦμε φράγμα ποὺ ἐξαρτᾶται (μὲ τρόπον ὑπολογίσιμον) μόνον ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν μεταβλητῶν M, τὸν βαθμὸν d, καὶ τὸν μέγιστον κατ' ἀπόλυτην τιμὴν συντελεστὴν τοῦ P.

Ἀπόδειξις λήμματος. Ἀφοῦ ἡ $(U^{k-1})^*$ εἶναι θετικῶς ὁμογενὴς καὶ ἱκανοποιεῖ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε τὸ ζητούμενον γιὰ μονώνυμα. Ἀφήνοντας μάλιστα τὸ M νὰ μεταβάλλεται μεταξὺ 1 καὶ d, καὶ ἐπαναλαμβάνοντας κατάλληλα ἢ παραλείποντας κάποιες ἀπὸ τὶς F_j (δηλαδὴ θεωρῶντας ὅλες τὶς δυνατὲς ἐπιλογὲς τὸ πολὺ d συναρτήσεων ἀπὸ τὶς F_j), βλέπουμε ὅτι ἀρκεῖ νὰ δείξουμε τὸ ζητούμενον γιὰ τὸ μονώνυμον $P(x_1, \ldots, x_M) = x_1 \ldots x_M$. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς $(U^{k-1})^*$ νόρμας, ἔχουμε ἑπομένως νὰ δείξουμε ὅτι

$$\Big\langle f, \prod_{j=1}^{M} \mathcal{D}F_j \Big\rangle = O_M(1)$$

γιὰ κάθε $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ γιὰ τὴν ὁποίαν $\|f\|_{U^{k-1}} \leq 1$. Μάλιστα, ὅπως καὶ στὴν ἀπόδειξιν τοῦ γενικευμένου θεωρήματος von Neumann, μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε τὸ ν μὲ τὸ $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον $(\nu+1)/2$, νὰ διαιρέσουμε τὶς F_j μὲ 2, καὶ νὰ ξαναγράψουμε τὶς ἐκτιμήσεις (3.25) ὡς

$$|F_j(x)| \leq \nu(x) \text{ γιὰ κάθε } x \in \mathbb{Z}_N, 1 \leq j \leq M, \tag{3.26}$$

μὲ τὸ ζητούμενον νὰ παραμένει ἡ σχέσις $\left\langle f, \prod_{j=1}^M \mathcal{D}F_j \right\rangle = O_M(1)$.

Ἀπὸ τὴν (3.20) ἀναπτύσσουμε τὸ παραπάνω ἐσωτερικὸν γινόμενον ὡς

$$\mathbb{E}\left(f(x) \prod_{j=1}^M \mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} F_j(x+\omega\cdot h^{(j)}) \,\Big|\, h^{(j)} \in \mathbb{Z}_N^{k-1} \right) \Bigg|\, x\in\mathbb{Z}_N \right). \tag{3.27}$$

Γιὰ κάθε $h \in \mathbb{Z}_N^{k-1}$ κάνουμε τὴν ἀλλαγὴν μεταβλητῶν $h^{(j)} = h + H^{(j)}$, καὶ βλέπουμε ὅτι

$$\prod_{j=1}^M \mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} F_j(x+\omega\cdot h^{(j)}) \,\Big|\, h^{(j)} \in \mathbb{Z}_N^{k-1} \right) =$$

$$\prod_{j=1}^M \mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} F_j(x+\omega\cdot H^{(j)}+\omega\cdot h) \,\Big|\, H^{(j)} \in \mathbb{Z}_N^{k-1} \right),$$

ἄρα ἡ (3.27) γράφεται καὶ ὡς

$$\mathbb{E}\left(f(x) \prod_{j=1}^M \mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} F_j(x+\omega\cdot H^{(j)}+\omega\cdot h) \,\Big|\, H^{(j)} \in \mathbb{Z}_N^{k-1} \right) \Bigg|\, x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N^{k-1} \right).$$

Ἀναπτύσσοντας τὸ γινόμενον ὡς πρὸς j καὶ ἐναλλάσσοντας τὴν σειρὰν τῶν ὁλοκληρώσεων, βλέπουμε ὅτι, ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου Gowers, γιὰ κάθε $H := (H^{(1)}, \ldots, H^{(M)})$ ἡ

$$\mathbb{E}\left(f(x) \prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} \left(\prod_{j=1}^M F_j(x+\omega\cdot H^{(j)}+\omega\cdot h) \right) \Bigg|\, x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N^{k-1} \right)$$

εἶναι ἀκριβῶς τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον διαστάσεως $k-1$ τῆς ἀκολουθίας $(f_{\omega,H})_{\omega\in\{0,1\}^{k-1}}$, μὲ $f_{0,H} := f$, καὶ $f_{\omega,H} := g_{\omega\bullet H}$ γιὰ $\omega \neq 0^{k-1}$, ὅπου συμβολίζουμε μὲ $\omega\bullet H$ τὸ διάνυσμα $(\omega\cdot H^{(1)}, \ldots, \omega\cdot H^{(M)})$ καὶ ὁρίζουμε

$$g_{u^{(1)},\ldots,u^{(M)}}(x) := \prod_{j=1}^M F_j(x+u^{(j)}) \text{ γιὰ ὅλα τὰ } u^{(1)},\ldots,u^{(M)}\in\mathbb{Z}_N. \tag{3.28}$$

Ἕπεται ὅτι ἡ (3.27) εἶναι ἴση μὲ τὴν μέση τιμὴν ὡς πρὸς H αὐτῶν τῶν ἐσωτερικῶν γινομένων Gowers, δηλαδὴ μὲ τὴν

$$\mathbb{E}\left(\left\langle (f_{\omega,H})_{\omega\in\{0,1\}^{k-1}}\right\rangle_{U^{k-1}} \,\middle|\, H \in \left(\mathbb{Z}_N^{k-1}\right)^M\right).$$

Τὸ ἑπόμενον βῆμα εἶναι, χρησιμοποιῶντας τὴν ἀνισότητα Gowers-Cauchy-Schwarz, νὰ φράξουμε ἀπολύτως τὴν παραπάνω μέσην τιμὴν ἀπὸ

$$\mathbb{E}\left(\|f\|_{U^{k-1}} \prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} \|g_{\omega\bullet H}\|_{U^{k-1}} \,\middle|\, H \in \left(\mathbb{Z}_N^{k-1}\right)^M\right),$$

ὁπότε θὰ χρειάζεται νὰ δείξουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} \|g_{\omega\bullet H}\|_{U^{k-1}} \,\middle|\, H \in \left(\mathbb{Z}_N^{k-1}\right)^M\right) = O_M(1).$$

Δεδομένου ὅτι γιὰ κάθε $H \in \left(\mathbb{Z}_N^{k-1}\right)^M$ ἰσχύει

$$\prod_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} \|g_{\omega\bullet H}\|_{U^{k-1}} \leq \left(\max_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} \|g_{\omega\bullet H}\|_{U^{k-1}}\right)^{2^{k-1}-1} \leq \sum_{\substack{\omega\in\{0,1\}^{k-1}\\ \omega\neq 0^{k-1}}} \|g_{\omega\bullet H}\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}-1},$$

ἀρκεῖ νὰ φράξουμε (ὁμοιόμορφα ὡς πρὸς N) τὴν $\mathbb{E}\left(\|g_{\omega\bullet H}\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}-1} \middle| H \in \left(\mathbb{Z}_N^{k-1}\right)^M\right)$ γιὰ κάθε $\omega \in \{0,1\}^{k-1} \setminus \{0^{k-1}\}$. Μάλιστα, ἀφοῦ κάθε $\|g_{\omega\bullet H}\|_{U^{k-1}}$ μπορεῖ νὰ γραφεῖ ὡς μία μέση τιμὴ ὑψωμένη στὴν δύναμιν $1/2^{k-1}$, βολεύει περισσότερον καὶ ἀρκεῖ, χρησιμοποιῶντας τὴν ἀνισότητα Hölder, νὰ δείξουμε τὴν

$$\mathbb{E}\left(\|g_{\omega\bullet H}\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}} \middle| H \in \left(\mathbb{Z}_N^{k-1}\right)^M\right) = O_M(1). \tag{3.29}$$

Γιὰ κάθε $\omega \neq 0^{k-1}$, ἡ ἀπεικόνισις $H \mapsto \omega \bullet H$ ἐπάγει ὁμοιόμορφον κάλυμμα τοῦ $\mathbb{Z}_N^M$ ἀπὸ τὸ $\left(\mathbb{Z}_N^{k-1}\right)^M$ (βλέπε ὁρολογίαν ἑνότητος 1.1), ἄρα τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (3.29) ἰσοῦται μὲ

$$\mathbb{E}\left(\|g_{u^{(1)},\ldots,u^{(M)}}\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}} \,\middle|\, u^{(1)},\ldots,u^{(M)} \in \mathbb{Z}_N\right).$$

Ἀναπτύσσοντας τὴν $\|g_{u^{(1)},\ldots,u^{(M)}}\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}}$, μὲ χρῆσιν τοῦ τύπου (1.16) καὶ τῆς (3.28), μποροῦμε νὰ τὸ ξαναγράψουμε ὡς

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\tilde{\omega}\in\{0,1\}^{k-1}}\prod_{j=1}^{M}F_j(x+u^{(j)}+h\cdot\tilde{\omega})\,\big|\,x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N^{k-1}, u^{(1)},\ldots,u^{(M)}\in\mathbb{Z}_N\right)$$

ἤ, ἔπειτα ἀπὸ παραγοντοποίησιν, ὡς

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{M}\mathbb{E}\left(\prod_{\tilde{\omega}\in\{0,1\}^{k-1}}F_j(x+u^{(j)}+h\cdot\tilde{\omega})\,\big|\,u^{(j)}\in\mathbb{Z}_N\right)\,\Bigg|\,x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N^{k-1}\right).$$

Χρησιμοποιῶντας καὶ τὶς ἐκτιμήσεις (3.26), καταλήγουμε ὅτι γιὰ τὸ ζητούμενον ἀρκεῖ νὰ ἰσχύει ἡ

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{\tilde{\omega}\in\{0,1\}^{k-1}}\nu(x+u+h\cdot\tilde{\omega})\,\big|\,u\in\mathbb{Z}_N\right)^M\,\Bigg|\,x\in\mathbb{Z}_N, h\in\mathbb{Z}_N^{k-1}\right)=O_M(1).$$

Κάνουμε ἐπιπλέον τὴν ἀλλαγὴν μεταβλητῶν $y:=x+u$, ὁπότε ἡ ὁλοκλήρωσις ὡς πρὸς x παύει νὰ ἔχει σημασίαν, καὶ μένει νὰ δείξουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{\tilde{\omega}\in\{0,1\}^{k-1}}\nu(y+h\cdot\tilde{\omega})\,\big|\,y\in\mathbb{Z}_N\right)^M\,\Bigg|\,h\in\mathbb{Z}_N^{k-1}\right)=O_M(1).$$

Ἐδῶ πλέον μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν συνθήκην συσχετισμοῦ (εἶναι μάλιστα τὸ μοναδικὸν σημεῖον στὴν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος 1.1.10 ποὺ θὰ μᾶς χρειαστεῖ αὐτὴ ἡ συνθήκη), καὶ νὰ λάβουμε

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\tilde{\omega}\in\{0,1\}^{k-1}}\nu(y+h\cdot\tilde{\omega})\,\big|\,y\in\mathbb{Z}_N\right)\le\sum_{\tilde{\omega},\tilde{\omega}'\in\{0,1\}^{k-1}\colon\tilde{\omega}\neq\tilde{\omega}'}\tau(h\cdot(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')),$$

ὅπου τ εἶναι ἡ συνάρτησις βάρους τοῦ Ὁρισμοῦ 1.1.6 γιὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει $\mathbb{E}(\tau^q)=O_q(1)$ γιὰ κάθε $q\geq 1$. Ἐφαρμόζοντας τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα στὸν $L^M(\mathbb{Z}_N^{k-1})$, βλέπουμε ὅτι ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\tau(h\cdot(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}'))^M\,|\,h\in\mathbb{Z}_N^{k-1}\right)=O_M(1)\tag{3.30}$$

γιὰ κάθε ζεῦγος $\tilde{\omega},\tilde{\omega}'\in\{0,1\}^{k-1}$ μὲ $\tilde{\omega}\neq\tilde{\omega}'$. Ἀλλὰ γιὰ κάθε τέτοιο ζεῦγος ἡ ἀπεικόνισις $h\mapsto h\cdot(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')$ ἐπάγει ὁμοιόμορφον κάλυμμα τοῦ $\mathbb{Z}_N$ ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N^{k-1}$, ἄρα τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (3.30) εἶναι ἴσον μὲ $\mathbb{E}(\tau^M)$, καὶ τελικῶς ἴσον μὲ $O_M(1)$.

Σημείωσις: Ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν στὴν ἀρχὴν τῆς ἀποδείξεως, προκύπτει ὅτι ἂν

$$P(x_1,\ldots,x_M) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_M\in\mathbb{Z}^+\\ i_1+\cdots+i_M\le d}} b_{i_1,\ldots,i_M} x_1^{i_1}\cdots x_M^{i_M}$$

εἶναι τὸ πολυώνυμον, τότε

$$\begin{aligned}
\|P(\mathcal{D}F_1,\ldots,\mathcal{D}F_M)\|_{(U^{k-1})^*} &\le \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_M\in\mathbb{Z}^+\\ i_1+\cdots+i_M\le d}} |b_{i_1,\ldots,i_M}| \Big\| \prod_{j=1}^{M} (\mathcal{D}F_j)^{i_j} \Big\|_{(U^{k-1})^*} \\
&\le \sum_{q=0}^{d} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_M\in\mathbb{Z}^+\\ i_1+\cdots+i_M=q}} \left(O(\mathbb{E}(\tau^q)) \cdot \max_{i_1+\cdots+i_M=q} |b_{i_1,\ldots,i_M}| \right) \\
&\le \left(\max_{\substack{i_1,\ldots,i_M\in\mathbb{Z}^+\\ i_1+\cdots+i_M\le d}} |b_{i_1,\ldots,i_M}| \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{d} \begin{bmatrix} M \\ q \end{bmatrix} O(\mathbb{E}(\tau^q)) \right),
\end{aligned}$$

ὅπου συμβολίζουμε μὲ $\left[\begin{smallmatrix} M \\ q \end{smallmatrix}\right]$ τοὺς συνδυασμοὺς μὲ ἐπαναλήψεις q στοιχείων ἀπὸ M στοιχεῖα. Ἡ σταθερὰ ποὺ ὑπονοεῖται στοὺς ὅρους $O(\mathbb{E}(\tau^q))$ προκύπτει βεβαίως ἀπὸ τὴν παραπάνω ἀπόδειξιν καὶ εἶναι ἀνεξάρτητη τοῦ q ἢ τοῦ πολυωνύμου P. □

Ἀπόδειξις τῆς Προτάσεως 3.2.3. Ἔστω ὅτι οἱ Φ, ψ εἶναι ὅπως στὴν διατύπωσιν. Θὰ δείξουμε τὸ ζητούμενον μὲ τὸν $\varepsilon-$ὁρισμὸν τῆς συγκλίσεως ἀκολουθίας: ἀφοῦ ἡ Φ ὁρίζεται στὸ συμπαγὲς σύνολον I^M, γιὰ τὸ τυχὸν $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει, ἀπὸ τὸ θεώρημα Weierstrass, πολυώνυμον P_ε μὲ M μεταβλητὲς καὶ πραγματικοὺς συντελεστές (ποὺ ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὴν συνάρτησιν Φ), ὥστε

$$|\Phi(x_1,\ldots,x_M) - P_\varepsilon(x_1,\ldots,x_M)| \le \varepsilon \text{ γιὰ κάθε } (x_1,\ldots,x_M) \in I^M.$$

Ἕπεται, χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν (1.4), ὅτι

$$\begin{aligned}
&\big|\big\langle \nu-1, \Phi(\mathcal{D}F_1,\ldots,\mathcal{D}F_M) - P_\varepsilon(\mathcal{D}F_1,\ldots,\mathcal{D}F_M)\big\rangle\big| \\
&\qquad \le \|\Phi(\mathcal{D}F_1,\ldots,\mathcal{D}F_M) - P_\varepsilon(\mathcal{D}F_1,\ldots,\mathcal{D}F_M)\|_{L^\infty} \cdot \mathbb{E}(\nu+1) \le (2+o(1))\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλην, συνδυάζοντας τὰ Λήμματα 3.1.1 καὶ 3.2.4, βλέπουμε ὅτι

$$\big\langle \nu-1, P_\varepsilon(\mathcal{D}F_1,\ldots,\mathcal{D}F_M)\big\rangle = o_{M,P_\varepsilon}(1),$$

ἄρα τελικῶς ὑπάρχει $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\Phi)$ ὥστε γιὰ κάθε $N > N_\varepsilon$,

$$|\langle \nu-1, \psi\rangle| = |\mathbb{E}_{\mathbb{Z}_N}((\nu-1)\psi)| \le 4\varepsilon.$$

Ἀφοῦ τὸ ε ἦταν τυχόν, ἡ ποσότης $\langle \nu-1, \psi\rangle$ τείνει στὸ 0 (χωρὶς τὸ παραπάνω ἐπιχείρημα νὰ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσουμε καὶ τὸν ῥυθμὸν μὲ τὸν ὁποῖον συγκλίνει, ὅπως μπορούσαμε προηγουμένως νὰ κάνουμε μὲ τὰ πολυώνυμα).

Ἂν τώρα ἔχουμε συμπαγὲς σύνολον E τοῦ $C^0(I^M)$, γιὰ κάθε $\varepsilon > 0$ μποροῦμε νὰ βροῦμε πεπερασμένα τὸ πλῆθος πολυώνυμα $P_1, \dots, P_K$, ὥστε γιὰ κάθε $\Phi \in E$ νὰ ὑπάρχει P_j μὲ

$$|\Phi(x_1, \dots, x_M) - P_j(x_1, \dots, x_M)| \leq \varepsilon \text{ γιὰ κάθε } (x_1, \dots, x_M) \in I^M.$$

Ἡ παραπάνω ἀπόδειξις δείχνει ὅτι σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὰ σφάλματα μποροῦν νὰ ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὸ σύνολον E. $\square$

3.2.2 Οἱ ἀντίστοιχες προτάσεις γιὰ σ-ἄλγεβρες

Μποροῦμε πλέον νὰ διατυπώσουμε τὶς ἀντίστοιχες τῶν Προτάσεων 2.2.1, 2.2.3 γιὰ ψευδοτυχαῖα μέτρα:

Πρότασις 3.2.5. *Ἔστω $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ν. Ἔστωσαν παράμετροι $0 < \varepsilon < 1$ καὶ $0 < \eta < 1/2$, καὶ ἔστω $G : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ συνάρτησις μὲ τιμὲς στὸ διάστημα $I := [-3^{2^{k-1}}, 3^{2^{k-1}}]$. Τότε ὑπάρχει σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(G)$ μὲ τὶς ἑξῆς τρεῖς ἰδιότητες:*

- *(ἡ G εἶναι σχεδὸν $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(G)-$μετρήσιμη) γιὰ κάθε σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$, ἰσχύει*

$$\|G - \mathbb{E}(G|\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(G) \vee \mathcal{B})\|_{L^\infty} \ll \varepsilon, \tag{3.31}$$

- *(Φραγμένη πολυπλοκότης) ἡ $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(G)$ παράγεται ἀπὸ τὸ πολὺ $O(1/\varepsilon)$ ἄτομα,*

- *(οἱ $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(G)-$μετρήσιμες προσεγγίζονται ἀπὸ συνεχεῖς συναρτήσεις τῆς G) ἂν A εἶναι ἄτομον τῆς $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(G)$, ὑπάρχει συνεχὴς συνάρτησις $\Psi_A : I \to [0,1]$ τέτοια ὥστε*

$$\|(\mathbf{1}_A - \Psi_A(G))(\nu+1)\|_{L^1} = O(\eta). \tag{3.32}$$

Ἐπιπλέον, ἡ Ψ_A ἀνήκει σὲ συγκεκριμένον συμπαγὲς σύνολον $E = E_{\varepsilon,\eta}$ τοῦ χώρου $C^0(I)$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ μέτρου ν, τῆς G ἢ τῶν A, N.

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμε ἀρχικῶς ὅτι γιὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν r,

$$\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{r\in[n-\eta+\alpha, n+\eta+\alpha]} d\alpha = 2\eta.$$

Ὅπως εἴπαμε καὶ στὴν ἀπόδειξιν τῆς Προτάσεως 2.2.1, *γιὰ νὰ δείξουμε αὐτὴν τὴν ἰσότητα, μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε περιπτώσεις γιὰ τὴν διαφορὰν $r - \lfloor r \rfloor$, ἂν δηλαδὴ $r - \lfloor r \rfloor \leq \eta$, ἢ ἂν $\eta < r - \lfloor r \rfloor < 1 - \eta$, ἢ τέλος ἂν $1 - \eta \leq r - \lfloor r \rfloor$.* Ἕπεται ἀπὸ τὰ θεωρήματα

Beppo-Levi καὶ Fubini ὅτι

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{G(x)\in[\varepsilon(n-\eta+\alpha),\varepsilon(n+\eta+\alpha)]}(\nu(x)+1)\,|\, x\in\mathbb{Z}_N\big)d\alpha \\
&= \int_0^1 \mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{\frac{G(x)}{\varepsilon}\in[n-\eta+\alpha,n+\eta+\alpha]}(\nu(x)+1)\,\Big|\, x\in\mathbb{Z}_N\right)d\alpha \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{\frac{G(x)}{\varepsilon}\in[n-\eta+\alpha,n+\eta+\alpha]}(\nu(x)+1)d\alpha\,\Big|\, x\in\mathbb{Z}_N\right) \\
&= 2\eta\mathbb{E}(\nu(x)+1|x\in\mathbb{Z}_N)\le C\eta,
\end{aligned}
$$

γιὰ μίαν σταθερὰν $C>0$ ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ μέτρον ν. Συνεπῶς ὑπάρχει $0\le\alpha\le 1$ ὥστε

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{G(x)\in[\varepsilon(n-\eta+\alpha),\varepsilon(n+\eta+\alpha)]}(\nu(x)+1)\,|\, x\in\mathbb{Z}_N)\le C\eta. \tag{3.33}
$$

Γιὰ ἓν τέτοιο α, θέτουμε $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(G)$ νὰ εἶναι ἡ σ-ἄλγεβρα τῆς ὁποίας τὰ ἄτομα εἶναι οἱ ἀντίστροφες εἰκόνες $G^{-1}\big([\varepsilon(n+\alpha),\varepsilon(n+1+\alpha))\big), n\in\mathbb{Z}$. Ὅπως καὶ στὴν Πρότασιν 2.2.1, προκύπτει ὅτι γιὰ κάθε σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$, $\|G-\mathbb{E}(G|\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(G)\vee\mathcal{B})\|_{L^\infty}\le\varepsilon$. Ἐπίσης, ἀφοῦ ἡ G παίρνει τιμὲς στὸ διάστημα I, γιὰ νὰ εἶναι τὸ σύνολον $G^{-1}\big([\varepsilon(n+\alpha),\varepsilon(n+1+\alpha))\big)$ μὴ κενόν, πρέπει νὰ ἰσχύει

$$
\text{εἴτε } -3^{2^{k-1}}<\varepsilon(n+1+\alpha),\ \text{ εἴτε } \varepsilon(n+\alpha)\le 3^{2^{k-1}}.
$$

Προφανῶς αὐτὸ ἱκανοποιεῖται ἀπὸ $O(1/\varepsilon)$ ἀκεραίους n, ὁπότε τὰ ἄτομα τῆς $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(G)$ εἶναι τὸ πολὺ τόσα.

Ἔστω κάποιο τέτοιο ἄτομον A. Σταθεροποιοῦμε μίαν συνεχῆ συνάρτησιν $\psi_\eta:\mathbb{R}\to[0,1]$, ἡ ὁποία ζητοῦμε νὰ εἶναι ἴση μὲ 1 στὸ διάστημα $[\eta,1-\eta]$, καὶ ἴση μὲ 0 ἔξω ἀπὸ τὸ διάστημα $[-\eta,1+\eta]$. Γιὰ τὸ $A:=G^{-1}\big([\varepsilon(n_A+\alpha),\varepsilon(n_A+1+\alpha))\big)$, ὁρίζουμε

$$
\Psi_A(x):=\psi_\eta(\tfrac{x}{\varepsilon}-n_A-\alpha) \text{ γιὰ κάθε } x\in\mathbb{Z}_N,
$$

ὁπότε, δεδομένου ὅτι $n_A=O_{\varepsilon,\eta}(1)$ καὶ $0\le\alpha\le 1$, ἡ Ψ_A περιέχεται σὲ κάποιο συμπαγὲς ὑποσύνολον $E_{\varepsilon,\eta}$ τοῦ $C^0(I)$ ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὶς παραμέτρους ε καὶ η. Ἐπιπλέον, γιὰ κάθε $x\in\mathbb{Z}_N$,

$$
|\mathbf{1}_A(x)-\Psi_A(G(x))|\le\mathbf{1}_{G(x)\in[\varepsilon(n_A-\eta+\alpha),\varepsilon(n_A+\eta+\alpha)]}+\mathbf{1}_{G(x)\in[\varepsilon(n_A+1-\eta+\alpha),\varepsilon(n_A+1+\eta+\alpha)]},
$$

ἄρα ἡ (3.32) ἕπεται ἀπὸ τὴν (3.33). □

Ἂς ἐπικεντρωθοῦμε τώρα στὴν περίπτωσιν ποὺ οἱ συναρτήσεις G εἶναι βασικὲς Gowers ἀνομοιόμορφες, δηλαδὴ δυϊκὲς συναρτήσεων F ποὺ φράσσονται ἀπολύτως ἀπὸ $\frac{3}{2}(\nu+1)$:

Πρότασις 3.2.6. *Ἔστω $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ν. Ἔστω ὅτι, γιὰ $M \geq 1$ φυσικόν, ἔχουμε M βασικὲς Gowers ἀνομοιόμορφες συναρτήσεις $\mathcal{D}F_1, \dots, \mathcal{D}F_M$, καὶ ἐπίσης ἔχουμε παραμέτρους $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \eta < 1/2$. Ἂν $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_j)$, $j = 1, \dots, M$, εἶναι οἱ σ-ἄλγεβρες ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὴν Πρότασιν 3.2.5, θέτουμε $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_1) \vee \dots \vee \mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_M)$. Τότε ἔχουμε ὅτι*

$$\|\mathcal{D}F_j - \mathbb{E}(\mathcal{D}F_j|\mathcal{B})\|_{L^\infty} \leq \varepsilon \text{ γιὰ κάθε } 1 \leq j \leq M, \tag{3.34}$$

καί, ὑποθέτοντας ὅτι $\eta < \eta_0(\varepsilon, M)$ καὶ $N > N_0(\varepsilon, M, \eta)$, μποροῦμε νὰ βροῦμε σύνολον $\Omega \in \mathcal{B}$ τέτοιο ὥστε

$$\mathbb{E}((\nu + 1)\mathbf{1}_\Omega) = O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}) \tag{3.35}$$

καὶ

$$\|(1 - \mathbf{1}_\Omega)\mathbb{E}(\nu - 1|\mathcal{B})\|_{L^\infty} = O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}). \tag{3.36}$$

Παρατήρησις 3.2.7. Αὐτὸ ποὺ ἐννοοῦμε μὲ τὸν συμβολισμὸν O στὶς (3.35), (3.36) εἶναι ὅτι ὑπάρχει μία σταθερὰ $C = C(M, \varepsilon)$, ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰ M, ε, καὶ τὸ μέτρον ν φυσικά, ἔτσι ὥστε γιὰ κάθε $\eta < \eta_0(\varepsilon, M)$ νὰ ὑπάρχει σύνολον Ω στὴν $\mathcal{B}$ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὶς

$$\mathbb{E}((\nu + 1)\mathbf{1}_\Omega) \leq C(M, \varepsilon)\eta^{1/2}, \ \|(1 - \mathbf{1}_\Omega)\mathbb{E}(\nu - 1|\mathcal{B})\|_{L^\infty} \leq C(M, \varepsilon)\eta^{1/2}$$

ὅταν τὸ N εἶναι μεγάλο, $N > N_0(\varepsilon, M, \eta)$. Ὅπως θὰ δοῦμε καὶ στὴν ἀπόδειξιν, τὸ σύνολον Ω ἀλλάζει, γίνεται ὅλο καὶ μικρότερον, ὅσο τὸ η τείνει στὸ 0 (ἂν καί, γιὰ νὰ εἴμαστε ἀκριβεῖς, μὲ τὸ η ἀλλάζει καὶ ἡ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$), αὐτὸ ὅμως δὲν χαλάει τὴν (3.36), ἀφοῦ θεωροῦμε ἀντιστοίχως ὅλο καὶ μεγαλύτερα N.

Ἀπόδειξις. Ἡ (3.34) ἕπεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν πρώτην ἰδιότητα τῶν $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_j)$ ποὺ ἐδείχθη στὴν προηγουμένην πρότασιν. Ὅπως ἐπίσης εἴδαμε, κάθε $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_j)$ παράγεται ἀπὸ $O(1/\varepsilon)$ ἄτομα, ἄρα ἡ $\mathcal{B}$ περιέχει τὸ πολὺ $(O(1/\varepsilon))^M = O_{M,\varepsilon}(1)$ ἄτομα. Θὰ λέμε *μικρὸν* κάθε ἄτομον A τῆς $\mathcal{B}$ γιὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει

$$\mathbb{E}((\nu + 1)\mathbf{1}_A) \leq \eta^{1/2}.$$

Ὁρίζουμε Ω νὰ εἶναι ἡ ἕνωσις ὅλων τῶν μικρῶν ἀτόμων, ὁπότε ἀμέσως προκύπτει ὅτι $\mathbb{E}((\nu + 1)\mathbf{1}_\Omega) \leq C_{M,\varepsilon}\eta^{1/2}$, ὅπου $C_{M,\varepsilon}$ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀτόμων τῆς $\mathcal{B}$.

Μένει νὰ δείξουμε τὴν (3.36), δηλαδὴ νὰ δείξουμε ὅτι γιὰ κάθε $x \notin \Omega$ ἰσχύει

$$\mathbb{E}(\nu - 1|\mathcal{B})(x) := \mathbb{E}(\nu(y) - 1|y \in \mathcal{B}(x)) = O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}),$$

ὅπου $\mathcal{B}(x)$ εἶναι τὸ μοναδικὸν ἄτομον τῆς $\mathcal{B}$ ποὺ περιέχει τὸ x. Προφανῶς τὸ $\mathcal{B}(x)$ ἀνήκει στὰ ἄτομα A τῆς $\mathcal{B}$ τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι «μικρά». Ἄρα, γιὰ κάθε τέτοιο A θέλουμε νὰ δείξουμε ὅτι

$$\frac{\mathbb{E}((\nu - 1)\mathbf{1}_A)}{\mathbb{E}(\mathbf{1}_A)} = \mathbb{E}(\nu(y) - 1|y \in A) = O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}),$$

ἐνῷ ἔχουμε ὅτι ἰσχύει

$$\mathbb{E}((\nu-1)\mathbf{1}_A)+2\mathbb{E}(\mathbf{1}_A)=\mathbb{E}((\nu+1)\mathbf{1}_A)\geq \eta^{1/2}. \tag{3.37}$$

Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ δείξουμε ὅτι

$$\mathbb{E}((\nu-1)\mathbf{1}_A)=O_{M,\varepsilon}(\eta), \tag{3.38}$$

ἀφοῦ τότε μποροῦμε, θεωρῶντας τὸ η κατάλληλα μικρόν, νὰ καταλήξουμε ἀπὸ τὴν (3.37) στὴν

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A)\geq \frac{1}{2}(\eta^{1/2}-O_{M,\varepsilon}(\eta))=\frac{1}{2}(1-O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}))\eta^{1/2}\geq \frac{1}{4}\eta^{1/2},$$

ἡ ὁποία, σὲ συνδυασμὸν πάλι μὲ τὴν (3.38), μᾶς δίνει ὅτι

$$\frac{\mathbb{E}((\nu-1)\mathbf{1}_A)}{\mathbb{E}(\mathbf{1}_A)}\leq 4C'_{M,\varepsilon}\eta^{1/2}$$

μὲ τὴν ἴδιαν σταθερὰν $C'_{M,\varepsilon}>0$ ποὺ ὑπονοεῖται παραπάνω.

Δείχνουμε τὴν (3.38) γιὰ τὸ τυχὸν ἄτομον A τῆς $\mathcal{B}$ (καὶ ὄχι μόνον γιὰ τὰ ἄτομα ἐκεῖνα ποὺ δὲν εἶναι «μικρά»): ἀπὸ τὸν τρόπον ὁρισμοῦ τῆς $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_1)\vee\cdots\vee\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_M)$, ὑπάρχουν ἄτομα $A_i\in\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_i)$ ὥστε $A=\bigcap_{i=1}^M A_i$. Ἀπὸ τὴν Πρότασιν 3.2.5, γιὰ κάθε $1\leq i\leq M$ ὑπάρχει συνάρτησις $\Psi_{A_i}:I\to[0,1]$ ὥστε νὰ ἰσχύει

$$\|(\mathbf{1}_{A_i}-\Psi_{A_i}(\mathcal{D}F_i))(\nu+1)\|_{L^1}\leq C\eta,$$

ὅπου $C>0$ σταθερὰ τέτοια ὥστε $2\mathbb{E}(\nu(x)+1|x\in\mathbb{Z}_N)\leq C$. Μάλιστα οἱ Ψ_{A_i} περιέχονται σὲ κάποιο συμπαγὲς ὑποσύνολον $E_{\varepsilon,\eta}$ τοῦ $C^0(I)$, ἀνεξάρτητον τοῦ N, τῶν A_i καὶ τῶν $\mathcal{D}F_i$, ἢ τοῦ μέτρου ν. Θεωροῦμε τὴν $\Psi_A:I^M\to[0,1]$ μὲ $\Psi_A(x_1,\dots,x_M):=\prod_{i=1}^M\Psi_{A_i}(x_i)$, καὶ ὅπως καὶ στὴν Πρότασιν 2.2.3, ἔχουμε γιὰ κάθε $x\in\mathbb{Z}_N$ ὅτι

$$\begin{aligned}|\mathbf{1}_A(x)-\Psi_A(\mathcal{D}F_1(x),\dots,\mathcal{D}F_M(x))| &= \Big|\prod_{i=1}^M\mathbf{1}_{A_i}(x)-\prod_{i=1}^M\Psi_{A_i}(\mathcal{D}F_i(x))\Big|\\ &\leq \sum_{i=1}^M|\mathbf{1}_{A_i}(x)-\Psi_{A_i}(\mathcal{D}F_i(x))|.\end{aligned}$$

Συνεπάγεται ὅτι

$$\|(\nu+1)\big(\mathbf{1}_A-\Psi_A(\mathcal{D}F_1,\dots,\mathcal{D}F_M)\big)\|_{L^1}\leq\sum_{i=1}^M\|(\nu+1)(\mathbf{1}_{A_i}-\Psi_{A_i}(\mathcal{D}F_i))\|_{L^1}\leq MC\eta,$$

ὁπότε ἐπίσης

$$\|(\nu-1)\big(\mathbf{1}_A-\Psi_A(\mathcal{D}F_1,\dots,\mathcal{D}F_M)\big)\|_{L^1}\leq MC\eta.$$

Ἐπιπλέον, λόγῳ τῆς ἀντίστοιχης ἰδιότητος γιὰ τὶς Ψ_{A_i}, ἡ Ψ_A ἀνήκει σὲ συμπαγὲς ὑποσύνολον $E_{M,\varepsilon,\eta}$ τοῦ $C^0(I^M)$ ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰ M, ε καὶ η, καὶ συνεπῶς ἀπὸ τὴν Πρότασιν 3.2.3,

$$|\mathbb{E}\big((\nu-1)\Psi_A(\mathcal{D}F_1,\ldots,\mathcal{D}F_M)\big)| = |\langle \nu-1, \Psi_A(\mathcal{D}F_1,\ldots,\mathcal{D}F_M)\rangle| = o_{M,\varepsilon,\eta}(1) \leq MC\eta,$$

ἐφ' ὅσον θεωρήσουμε τὸ N κατάλληλα μεγάλο σὲ σχέσιν μὲ τὰ M, ε καὶ η. Προκύπτει τελικῶς τὸ ζητούμενον:

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}((\nu-1)\mathbf{1}_A)| \\
\leq\; &\|(\nu-1)\big(\mathbf{1}_A - \Psi_A(\mathcal{D}F_1,\ldots,\mathcal{D}F_M)\big)\|_{L^1} + |\mathbb{E}\big((\nu-1)\Psi_A(\mathcal{D}F_1,\ldots,\mathcal{D}F_M)\big)| \\
\leq\; &2MC\eta.
\end{aligned}$$

□

3.2.3 Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.5.2

Ἡ διαδικασία γιὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος 1.5.2 εἶναι παρόμοια μὲ αὐτὴν τοῦ Θεωρήματος 1.4.4 : θὰ ξεκινήσουμε μὲ τὴν τετριμμένην σ-ἄλγεβρα $\{\emptyset, \mathbb{Z}_N\}$, κατασκευάζοντας ὅλο καὶ καταλληλότερες σ-ἄλγεβρες μέχρι νὰ βροῦμε μίαν ἡ οποία νὰ ἱκανοποιεῖ ἀκριβῶς τὸ θεώρημα. Θὰ θεωρήσουμε ἑπομένως μίαν διχοτομίαν τοῦ τύπου «ἢ ἡ τάδε σ-ἄλγεβρα πληροῖ τὶς προϋποθέσεις, ἢ μποροῦμε νὰ βροῦμε καλύτερην μὲ κάποια ἐπιπλέον χαρακτηριστικά», ἐνεργοποιῶντας ἔτσι μίαν ἐπαναληπτικὴν διαδικασίαν, ἡ ὁποία θὰ δείξουμε ὅτι τερματίζει ἐπιτυχῶς μὲ χρῆσιν τοῦ ἐπιχειρήματος τῶν σταθερῶν προσαυξήσεων.

Ἡ μόνη διαφορὰ μὲ τὸ Θεώρημα 1.4.4 εἶναι ὅτι δὲν μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε ἀκριβῶς τὸ Λῆμμα 2.2.6, ἐπειδή, ἀπὸ τὴν διατύπωσιν τοῦ Θεωρήματος 1.5.2, δὲν ζητεῖται ἁπλῶς ἡ κατασκευὴ μίας σ-ἄλγεβρας, ἀλλὰ καὶ ἡ εὕρεσις ἑνὸς ξεχωριστοῦ συνόλου Ω μέσα σὲ αὐτήν. Πολὺ λογικὰ ἑπομένως, οἱ προσαυξήσεις τῆς ἐνεργείας θὰ ἐξαρτῶνται καὶ ἀπὸ τὰ ξεχωριστὰ αὐτὰ σύνολα. Ἡ πρότασις ποὺ χρησιμοποιεῖται ἀντὶ τῆς διχοτομίας τοῦ Λήμματος 2.2.6 εἶναι ἡ ἑξῆς:

Πρότασις 3.2.8. *Ἔστω $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ν, καὶ ἔστω $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ τέτοια ὥστε $0 \leq f(x) \leq \nu(x)$ γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$. Ἔστωσαν $0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$ μικρὲς παράμετροι, καὶ $M \geq 0$ φυσικός. Στὰ παρακάτω θὰ ὑποθέτουμε ὅτι τὸ η εἶναι ἀρκετὰ μικρόν, $\eta < \eta_0(\varepsilon, M)$, καὶ ὅτι τὸ N εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο, $N > N_0(\varepsilon, M, \eta)$. Θεωροῦμε συναρτήσεις $F_1, \ldots, F_M : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ τέτοιες ὥστε*

$$|F_j(x)| \leq (1 + O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}))(\nu(x)+1) \text{ γιὰ κάθε } x \in \mathbb{Z}_N, 1 \leq j \leq M, \tag{3.39}$$

καὶ θέτουμε $\mathcal{B}_M := \mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_1) \vee \cdots \vee \mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_M)$, ὅπου κάθε σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_j)$ εἶναι ὅπως στὴν Πρότασιν 3.2.5 (ἐδῶ, παραδείγματος χάριν, χρειάζεται νὰ περιορίσουμε κατάλληλα τὸ η καὶ νὰ θεωρήσουμε ἀρκετὰ μεγάλα N, ὥστε κάθε F_j νὰ φράσσεται ἀπολύτως ἀπὸ $\frac{3}{2}(\nu+1)$). Ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει σύνολον Ω_M στὴν $\mathcal{B}_M$ ἔτσι ὥστε:

- *(τὸ Ω_M εἶναι μικρὸν ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν $\nu+1$)*

$$\mathbb{E}((\nu+1)\mathbf{1}_{\Omega_M}) = O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}), \tag{3.40}$$

- *(τὸ ν κατανέμεται ὁμοιόμορφα ἔξω ἀπὸ τὸ Ω_M)*

$$\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(\nu-1|\mathcal{B}_M)\|_{L^\infty} = O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}). \tag{3.41}$$

Ὁρίζουμε $F_{M+1} := (1-\mathbf{1}_{\Omega_M})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))$, καὶ παρατηροῦμε ὅτι

$$\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^\infty} \le 1 + O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}), \tag{3.42}$$

δηλαδὴ ἡ $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)$ εἶναι φραγμένη ἐκτὸς τοῦ συνόλου Ω_M, καὶ ἐπίσης

$$|F_{M+1}(x)| \le (1+O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}))(\nu(x)+1) \text{ γιὰ κάθε } x\in\mathbb{Z}_N, \tag{3.43}$$

ἄρα ὁρίζεται ἡ $\mathcal{B}_{M+1} := \mathcal{B}_M \vee \mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_{M+1}) = \mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_1)\vee\cdots\vee\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_M)\vee\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_{M+1})$ (πάλι ἐφ' ὅσον περιορίσουμε κατάλληλα τὸ η καὶ θεωρήσουμε ἀντιστοίχως μεγάλα N, ὥστε καὶ ἡ F_{M+1} νὰ φράσσεται ἀπολύτως ἀπὸ $\frac{3}{2}(\nu+1)$).

Ἂν ἐπιπροσθέτως ὑποθέσουμε ὅτι ἡ F_{M+1} δὲν εἶναι $\varepsilon^{1/2^k}$–Gowers ὁμοιόμορφη, δηλαδὴ ἂν ἰσχύει

$$\|F_{M+1}\|_{U^{k-1}} > \varepsilon^{1/2^k},$$

τότε μποροῦμε νὰ βροῦμε σύνολον $\Omega_{M+1}\in\mathcal{B}_{M+1}$, $\Omega_{M+1}\supseteq\Omega_M$, ὥστε νὰ ἰσχύουν ἀντίστοιχες ἐκτιμήσεις:

- *(τὸ Ω_{M+1} εἶναι μικρὸν ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν $\nu+1$)*

$$\mathbb{E}((\nu+1)\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}) = O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}), \tag{3.44}$$

- *(τὸ ν κατανέμεται ὁμοιόμορφα ἔξω ἀπὸ τὸ Ω_{M+1})*

$$\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(\nu-1|\mathcal{B}_{M+1})\|_{L^\infty} = O_{M,\varepsilon}(\eta^{1/2}), \tag{3.45}$$

ταυτοχρόνως μὲ τὴν ἐκτίμησιν

- *(προσαύξησις τῆς ἐνεργείας)*

$$\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})\|_{L^2}^2 \ge \|(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2 + 2^{-2^k+1}\varepsilon. \tag{3.46}$$

Παρατήρησις 3.2.9. Τὸ πόσο μικρὲς χρειάζεται νὰ εἶναι οἱ παράμετροι ε καὶ η θὰ φανεῖ στὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως. Μάλιστα, οἱ περιορισμοὶ γιὰ τὸ η θὰ ἐξαρτῶνται καὶ ἀπὸ τὶς σταθερὲς ποὺ ἐμφανίζονται στὶς ἐκτιμήσεις (3.39), (3.40) καὶ (3.41). Οἱ ἐκτιμήσεις αὐτὲς ἀνήκουν στὶς ὑποθέσεις μας, δηλαδὴ κάθε φορὰν ποὺ ἐφαρμόζουμε τὴν Πρότασιν 3.2.8, θὰ μᾶς δίνονται σταθερὲς C_1, C_2, C_3 ὥστε νὰ ἰσχύει

$$|F_j(x)| \leq (1 + C_1 \cdot \eta^{1/2})(\nu(x) + 1) \text{ γιὰ κάθε } x \in \mathbb{Z}_N, 1 \leq j \leq M,$$
$$\mathbb{E}((\nu + 1)\mathbf{1}_{\Omega_M}) \leq C_2 \cdot \eta^{1/2} \text{ καὶ } \|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(\nu - 1|\mathcal{B}_M)\|_{L^\infty} \leq C_3 \cdot \eta^{1/2}$$

ἀπὸ κάποιο $N_0(M, \varepsilon, \eta)$ καὶ πάνω (τὸ πῶς ἐξαρτᾶται τὸ N_0 ἀπὸ τὸ η θὰ μᾶς ἔχει δοθεῖ ἐπίσης). Οὐσιαστικὰ λοιπὸν θὰ ἔχουμε M συναρτήσεις ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N$ στὸ $\mathbb{R}$ (πιὸ σωστά, M οἰκογένειες συναρτήσεων), οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν κατὰ σημεῖον φράγματα τῆς μορφῆς

$$|F_j(x)| \leq (1 + o(1))(\nu(x) + 1) \text{ γιὰ κάθε } x \in \mathbb{Z}_N, 1 \leq j \leq M.$$

Αὐτὰ τὰ φράγματα θὰ τὰ γράφουμε ὅπως παραπάνω, χρησιμοποιῶντας τὴν βοηθητικὴν παράμετρον η, ὥστε νὰ μποροῦμε νὰ ὁρίζουμε τὶς σ-ἄλγεβρες $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_j)$. Ἔπειτα, ὑποθέτοντας καὶ ὅτι ὑπάρχει σύνολον $\Omega_M \in \mathcal{B}_M := \bigvee_{j=1}^{M} \mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_j)$ ποὺ νὰ ἱκανοποιεῖ τὶς (3.40), (3.41), θὰ δείξουμε τὰ συμπεράσματα τῆς προτάσεως βρίσκοντας θετικὲς σταθερὲς C_1', C_2', C_3' καὶ σύνολον $\Omega_{M+1} \in \mathcal{B}_M \vee \mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_{M+1})$ ὥστε νὰ ἰσχύουν οἱ

$$|F_{M+1}| \leq (1 + C_1' \cdot \eta^{1/2})(\nu + 1), \|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^\infty} \leq 1 + C_1' \cdot \eta^{1/2},$$
$$\mathbb{E}((\nu + 1)\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}) \leq C_2' \cdot \eta^{1/2} \text{ καὶ } \|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(\nu - 1|\mathcal{B}_{M+1})\|_{L^\infty} \leq C_3' \cdot \eta^{1/2},$$

καθὼς καὶ ἡ (3.46). Αὐτὸ βεβαίως εἶναι κάπως παραπλανητικόν: τὸ σημαντικὸν δὲν εἶναι νὰ βροῦμε τὶς σταθερὲς C_i', ἀλλὰ ἀπὸ ποιὸ $N_0'(M, \varepsilon, \eta)$ καὶ πάνω ἰσχύουν τὰ ζητούμενα μὲ τὶς σταθερὲς ποὺ θὰ ἐπιλέξουμε.

Ὅπως θὰ δοῦμε, ἀρκεῖ νὰ θέσουμε $C_1' = C_3,\ C_2' := C_2 + (O(1/\varepsilon))^{M+1}$ ὅπου $O(1/\varepsilon)$ εἶναι τὸ μέγιστον πλῆθος ἀτόμων ποὺ μπορεῖ νὰ περιέχει μία σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(G)$, καὶ τέλος $C_3' := 8(M + 1)C_\nu$, ὅπου C_ν εἶναι ἡ σταθερὰ τῆς Προτάσεως 3.2.6 γιὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει

$$\mathbb{E}(\nu(x) + 1|x \in \mathbb{Z}_N) \leq C_\nu \text{ γιὰ κάθε } N.$$

Ἄρα, εἶναι δυνατὸν ἡ C_3' νὰ μὴν ἐξαρτᾶται καθόλου ἀπὸ τὶς σταθερὲς C_1, C_2, C_3 ποὺ μᾶς δίνονται, ἀλλὰ μόνον ἀπὸ τὸ μέτρον ν καὶ τὸ πλῆθος M τῶν συναρτήσεων F_j. Οὕτως ἢ ἄλλως ὅμως, καὶ αὐτὴ θὰ ἐπηρεάζει τὸ πόσο μεγάλα N πρέπει νὰ θεωρήσουμε τελικῶς.

Παρατηροῦμε τέλος ὅτι οἱ περιορισμοὶ ποὺ θὰ προκύψουν γιὰ τὸ ε θὰ ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὸ μέτρον ν, καὶ εἶναι αὐτοὶ ἀκριβῶς ποὺ ὑπονοοῦνται καὶ στὴν διατύπωσιν τοῦ Θεωρήματος Διασπάσεως 1.5.2, στὴν ὁποίαν ζητοῦμε νὰ ἰσχύει $0 < \varepsilon \ll 1$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι τὰ $\nu, f, M, \varepsilon, \eta, F_1, \ldots, F_M, F_{M+1}, \mathcal{B}_M, \Omega_M, \mathcal{B}_{M+1}$ εἶναι ὅπως στὴν διατύπωσιν. Δείχνουμε καταρχὰς ὅτι ἰσχύουν οἱ (3.42), (3.43) : ἀπὸ τὴν (3.41) ἔχουμε ὅτι

$$\|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(\nu - 1|\mathcal{B}_M)\|_{L^\infty} \leq C_3 \cdot \eta^{1/2}$$

ἀπὸ κάποιο $N_0(M,\varepsilon,\eta)$ καὶ πάνω. Συνεπῶς, ἀφοῦ ἡ f φράσσεται κατὰ σημεῖον ἀπὸ τὸ μέτρον ν, γιὰ κάθε $x \in \mathbb{Z}_N$ ἰσχύει

$$\begin{aligned}|((1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))(x)| &= ((1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))(x)\\ &\le ((1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(\nu|\mathcal{B}_M))(x)\\ &\le 1 + C_3\cdot\eta^{1/2},\end{aligned}$$

καὶ μάλιστα ἀπὸ τὸ ἴδιο N_0 καὶ πάνω. Ἐπίσης,

$$\begin{aligned}|F_{M+1}(x)| &\le f(x) + ((1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))(x)\\ &\le \nu(x) + (1 + C_3\cdot\eta^{1/2})\\ &\le (1 + C_3\cdot\eta^{1/2})(\nu(x)+1).\end{aligned}$$

Ἑπομένως, ὅπως καὶ στὴν ἀπόδειξιν τοῦ Λήμματος 3.2.1, μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι

$$\|\mathcal{D}F_{M+1}\|_{L^\infty} \le (2(1+C_3\cdot\eta^{1/2}))^{2^{k-1}-1}(1+o(1))$$

ὅπου $o(1)$ εἶναι τὰ σφάλματα ποὺ ἐμφανίζονται στὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν γιὰ τὸ μέτρον ν ποὺ ἔχουμε. Ἀναπτύσσοντας τὸ δεξιὸν μέλος, βλέπουμε ὅτι ἀπὸ κάποιο $N_1(\nu,M,\varepsilon,\eta)$ καὶ πάνω μποροῦμε νὰ ἔχουμε

$$\|\mathcal{D}F_{M+1}\|_{L^\infty} \le 2^{2^{k-1}-1} + C_{k,C_3}\cdot\eta^{1/2}. \tag{3.47}$$

Ἐξάλλου, ἤδη ἔχουμε ἀναφέρει ὅτι χρειάζεται νὰ περιορίσουμε τὸ η σὲ σχέσιν μὲ τὶς σταθερὲς C_1 καὶ C_3, ὥστε καθεμία ἀπὸ τὶς $F_j, 1\le j\le M+1$, νὰ φράσσεται ἀπολύτως ἀπὸ $\frac{3}{2}(\nu+1)$, καὶ νὰ ὁρίζονται οἱ σ-ἄλγεβρες $\mathcal{B}_M$ καὶ $\mathcal{B}_{M+1}$. Ἐφαρμόζοντας ἑπομένως τὴν Πρότασιν 3.2.6 συμπεραίνουμε ὅτι γιὰ κάθε $1\le j\le M+1$,

$$\|\mathcal{D}F_j - \mathbb{E}(\mathcal{D}F_j|\mathcal{B}_{M+1})\|_{L^\infty} \le \varepsilon, \tag{3.48}$$

καὶ ὅτι ὑπάρχει σύνολον $\Omega\in\mathcal{B}_{M+1}$ ὥστε

$$\mathbb{E}((\nu+1)\mathbf{1}_\Omega) = (O(1/\varepsilon))^{M+1}\eta^{1/2},\ \|(1-\mathbf{1}_\Omega)\mathbb{E}(\nu-1|\mathcal{B}_{M+1})\|_{L^\infty} \le 8(M+1)C_\nu\cdot\eta^{1/2} \tag{3.49}$$

γιὰ κάθε N ἀπὸ κάποιο $N_2(M,\varepsilon,\eta)$ καὶ πάνω, ἐφ' ὅσον τὸ $\eta<\eta_1(M,\varepsilon)$ εἶναι κατάλληλα μικρόν. Θέτουμε $\Omega_{M+1} := \Omega_M\cup\Omega$, καὶ βλέπουμε ὅτι ἡ (3.44) προκύπτει ἀπὸ τὶς (3.40) καὶ (3.49), ἐνῷ ἡ (3.45) προκύπτει ἀπὸ τὴν (3.49) καὶ τὴν σχέσιν $|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(\nu-1|\mathcal{B}_{M+1})| \le |(1-\mathbf{1}_\Omega)\mathbb{E}(\nu-1|\mathcal{B}_{M+1})|$.

Μένει νὰ δείξουμε ὅτι ἰσχύει ἡ (3.46), δηλαδὴ ὅτι

$$\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})\|_{L^2}^2 \ge \|(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2 + 2^{-2^k+1}\varepsilon.$$

Ἐδῶ θὰ χρησιμεύσει ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ F_{M+1} δὲν εἶναι ἀρκούντως Gowers ὁμοιόμορφη. Γράφουμε τὴν $(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})$ ὡς

$$(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)+(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big),$$

καὶ ἔχουμε ἀπὸ τὸν κανόνα τοῦ συνημιτόνου ὅτι

$$\begin{aligned}\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})&\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})\|_{L^2}^2\\ &=\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2\\ &\quad+\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)\|_{L^2}^2\\ &\quad+2\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)\big\rangle.\end{aligned}\tag{3.50}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτησις $(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)$ διαφέρει ἀπὸ τὴν $(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)$, τὴν L^2 νόρμα τῆς ὁποίας θέλουμε νὰ εκτιμήσουμε, μόνον στὰ x ἐκεῖνα ποὺ ἀνήκουν στὸ Ω_M καὶ ὄχι στὸ Ω_{M+1}. Ἐπίσης, ἂν δὲν ὑπῆρχαν καθόλου τὰ ξεχωριστὰ σύνολα Ω_M,Ω_{M+1}, τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον στὸ δεξιὸν μέλος τῆς (3.50) θὰ ἦταν 0. Θὰ δείξουμε ἐπομένως ὅτι ἐξαιτίας τῶν ἐκτιμήσεών μας γιὰ τὰ σύνολα Ω_M,Ω_{M+1}, τὸ δεξιὸν μέλος τῆς (3.50) δὲν ἀπέχει πολὺ ἀπὸ τὸ νὰ ἰσοῦται μὲ

$$\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2+\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)\|_{L^2}^2.$$

Μένει ἔπειτα νὰ ἐκτιμήσουμε τὴν $\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)\|_{L^2}^2$.

Ἰσχυρισμὸς 1. Γιὰ κάθε ἐπιτρεπτὸν η, ἔχουμε ὅτι

$$\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2\ge\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2-\frac{9}{4}C_2'\cdot\eta^{1/2}.$$

Ἀπόδειξις. Θυμόμαστε ἀπὸ τὴν (3.42) ὅτι ἡ $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)$ εἶναι φραγμένη ἔξω ἀπὸ τὸ σύνολον Ω_M, $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\le 1+C_1'\cdot\eta^{1/2}$, καὶ ὅτι ἤδη ἔχουμε περιορίσει τὰ ἐπιτρεπτὰ η ὥστε νὰ ἰσχύει $1+C_1'\cdot\eta^{1/2}\le 3/2$. Ἄρα

$$\|(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2\le\frac{9}{4}\|\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}-\mathbf{1}_{\Omega_M}\|_{L^2}^2=\frac{9}{4}\|\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}-\mathbf{1}_{\Omega_M}\|_{L^1}\le\frac{9}{4}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}),$$

μὲ τὴν τελευταίαν ἔκφρασιν νὰ εἶναι $\le\frac{9}{4}C_2'\cdot\eta^{1/2}$ ἀπὸ τὴν (3.44). Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι γιὰ κάθε x στὸ $\mathbb{Z}_N$ ἰσχύει

$$(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})(x)\cdot(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}-\mathbf{1}_{\Omega_M})(x)=0,$$

ἄρα

$$\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big\rangle=0,$$

καὶ ἀπὸ τὸν κανόνα τοῦ συνημιτόνου

$$\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2=\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2+\|(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2.$$

Συνδυάζοντας τὰ παραπάνω, ἔχουμε τὸ ζητούμενον.

Ἰσχυρισμὸς 2. Οἱ συναρτήσεις $(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)$ καὶ $(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)$ εἶναι σχεδὸν κάθετες ἡ μία στὴν ἄλλην, δηλαδὴ ἰσχύει

$$\big|\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)\big\rangle\big|\leq\frac{9}{4}C_2'\cdot\eta^{1/2}$$

γιὰ κάθε ἐπιτρεπτὸν η.

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ $(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})$ καὶ $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)$ εἶναι $\mathcal{B}_{M+1}$–μετρήσιμες, ἄρα γιὰ τὴν συνάρτησιν

$$G:=(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})^2\,\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\cdot(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))$$

ἰσχύει

$$\mathbb{E}(G|\mathcal{B}_{M+1})=(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})^2\,\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\cdot\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big),$$

καὶ συνεπῶς

$$\begin{aligned}\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(1-&\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)\big\rangle\\&=\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(G|\mathcal{B}_{M+1})\big)=\mathbb{E}(G)\\&=\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))\big\rangle.\end{aligned}$$

Ἄρα ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι

$$\big|\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))\big\rangle\big|\leq\frac{9}{4}C_2'\cdot\eta^{1/2}.$$

Παρομοίως, ἔχουμε ὅτι $\mathbb{E}((1-\mathbf{1}_{\Omega_M})f|\mathcal{B}_M)=(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)$, ἄρα ἀπὸ τὶς γνωστὲς σχέσεις καθετότητος,

$$\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))\big\rangle=0.$$

Ἀφοῦ, ὅπως εἴδαμε καὶ πρίν, γιὰ κάθε $x\in\mathbb{Z}_N$,

$$(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})(x)\cdot(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}-\mathbf{1}_{\Omega_M})(x)=0,$$

ἰσχύει ἐπιπλέον

$$\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}-\mathbf{1}_{\Omega_M})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))\big\rangle=0,$$

ὁπότε τελικῶς

$$\begin{aligned}\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),&(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))\big\rangle\\&=\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))\big\rangle\\&\quad-\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}-\mathbf{1}_{\Omega_M})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))\big\rangle\\&\quad-\big\langle(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))\big\rangle\\&=-\big\langle(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M),(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))\big\rangle.\end{aligned}$$

Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ φράξουμε τὸν τελευταῖον ὅρον: χρησιμοποιοῦμε πάλι ὅτι ἡ $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)$ εἶναι φραγμένη ἔξω ἀπὸ τὸ σύνολον Ω_M, $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M) \leq 1 + C_1' \cdot \eta^{1/2} \leq 3/2$. Ἀναλόγως, παρατηροῦμε ὅτι $|(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))| = |F_{M+1}| \leq \frac{3}{2}(\nu+1)$, συνεπῶς

$$\begin{aligned}&\big|\big\langle(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}} - \mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M), (1-\mathbf{1}_{\Omega_M})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))\big\rangle\big| \\ &\qquad\qquad \leq \mathbb{E}\big((\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}} - \mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)|F_{M+1}|\big) \leq \frac{9}{4}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}(\nu+1)) \leq \frac{9}{4}C_2' \cdot \eta^{1/2}\end{aligned}$$

ἐξαιτίας τῆς (3.44).

Ἰσχυρισμὸς 3. Ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι $\|F_{M+1}\|_{U^{k-1}} > \varepsilon^{1/2^k}$, προκύπτει ὅτι

$$\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)\|_{L^2} \geq 2^{-2^{k-1}+1}\varepsilon^{1/2} - C_{k,\varepsilon,C_3,C_2'} \cdot \eta^{1/2} - C_{k,\nu} \cdot \varepsilon.$$

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 3.2.1 καὶ τὸν ὁρισμὸν τῆς F_{M+1} ἔχουμε

$$\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)), \mathcal{D}F_{M+1}\big\rangle = \big\langle F_{M+1}, \mathcal{D}F_{M+1}\big\rangle = \|F_{M+1}\|_{U^{k-1}}^{2^{k-1}} \geq \varepsilon^{1/2}.$$

Ἔχουμε ἤδη περιορίσει κατάλληλα τὸ η ὥστε νὰ ἰσχύει $|F_{M+1}| \leq \frac{3}{2}(\nu+1)$, ἐνῷ γιὰ νὰ ὁρίσουμε τὶς σ-ἄλγεβρες $\mathcal{B}_{\varepsilon,\eta}(\mathcal{D}F_j)$, ἔχουμε θεωρήσει ἀρκετὰ μεγάλα N σὲ σχέσιν μὲ τὸ μέτρον ν, ὥστε κάθε $\mathcal{D}F_j$ νὰ παίρνει τιμὲς στὸ διάστημα $[-3^{2^{k-1}}, 3^{2^{k-1}}]$. Αὐτὰ, μαζὶ μὲ τὴν (3.44), ἀρκοῦν γιὰ νὰ δοῦμε ὅτι

$$\begin{aligned}&\big|\big\langle(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}} - \mathbf{1}_{\Omega_M})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)), \mathcal{D}F_{M+1}\big\rangle\big| \\ \leq &\|\mathcal{D}F_{M+1}\|_{L^\infty} \cdot \mathbb{E}((\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}} - \mathbf{1}_{\Omega_M})|f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)|) \leq 3^{2^{k-1}}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}|F_{M+1}|) \\ \leq &\frac{3^{2^{k-1}+1}}{2}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}(\nu+1)) \leq \frac{3^{2^{k-1}+1}}{2}C_2' \cdot \eta^{1/2}.\end{aligned}$$

Συνεπῶς, ἀπὸ τριγωνικὴν ἀνισότητα

$$\big|\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)), \mathcal{D}F_{M+1}\big\rangle\big| \geq \varepsilon^{1/2} - C_{k,C_2'} \cdot \eta^{1/2}.$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλην, χρησιμοποιῶντας τὴν (3.48) βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned}&\big|\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)), \mathcal{D}F_{M+1} - \mathbb{E}(\mathcal{D}F_{M+1}|\mathcal{B}_{M+1})\big\rangle\big| \\ &\qquad\qquad \leq \|\mathcal{D}F_{M+1} - \mathbb{E}(\mathcal{D}F_{M+1}|\mathcal{B}_{M+1})\|_{L^\infty} \cdot \mathbb{E}\big((1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})|f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)|\big) \\ &\qquad\qquad \leq \varepsilon\mathbb{E}(|F_{M+1}|) \leq \frac{3}{2}\varepsilon\mathbb{E}(\nu+1) \leq \frac{3}{2}C_\nu \cdot \varepsilon.\end{aligned}$$

Ἕπεται πάλι ἀπὸ τριγωνικὴν ἀνισότητα ὅτι

$$\big|\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)), \mathbb{E}(\mathcal{D}F_{M+1}|\mathcal{B}_{M+1})\big\rangle\big| \geq \varepsilon^{1/2} - C_{k,C_2'} \cdot \eta^{1/2} - \frac{3}{2}C_\nu \cdot \varepsilon. \tag{3.51}$$

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι οἱ συναρτήσεις $(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}}), \mathbb{E}(\mathcal{D}F_{M+1}|\mathcal{B}_{M+1})$ καὶ $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)$ εἶναι ὅλες $\mathcal{B}_{M+1}-$μετρήσιμες, ἄρα, ὅπως καὶ πρίν, ἡ συνάρτησις

$$(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)\cdot\mathbb{E}(\mathcal{D}F_{M+1}|\mathcal{B}_{M+1})$$

εἶναι ἡ δεσμευμένη μέση τιμὴ τῆς

$$(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))\cdot\mathbb{E}(\mathcal{D}F_{M+1}|\mathcal{B}_{M+1})$$

ὡς πρὸς τὴν σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_{M+1}$, καὶ ἰσχύει

$$\begin{aligned}&\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big),\mathbb{E}(\mathcal{D}F_{M+1}|\mathcal{B}_{M+1})\big\rangle\\ &\qquad\qquad=\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)),\mathbb{E}(\mathcal{D}F_{M+1}|\mathcal{B}_{M+1})\big\rangle.\end{aligned}$$

Ἕπεται ἀπὸ τὴν (3.51) καὶ τὴν ἀνισότητα Cauchy-Schwarz ὅτι

$$\begin{aligned}&\big|\big\langle(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big),\mathbb{E}(\mathcal{D}F_{M+1}|\mathcal{B}_{M+1})\big\rangle\big|\\ &\qquad\qquad\geq\frac{1}{\|\mathcal{D}F_{M+1}\|_{L^\infty}}\big(\varepsilon^{1/2}-C_{k,C_2'}\cdot\eta^{1/2}-\frac{3}{2}C_\nu\cdot\varepsilon\big),\end{aligned}$$

ὁπότε χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν ἐκτίμησιν (3.47) ποὺ ἔχουμε γιὰ τὴν $\|\mathcal{D}F_{M+1}\|_{L^\infty}$, καταλήγουμε στὶς διαδοχικὲς ἀνισότητες

$$\begin{aligned}&\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)\|_{L^2}\\ &\geq\frac{2^{-2^{k-1}+1}}{1+C_{k,C_3}\cdot\eta^{1/2}}\big(\varepsilon^{1/2}-C_{k,C_2'}\cdot\eta^{1/2}-\frac{3}{2}C_\nu\cdot\varepsilon\big)\\ &\geq 2^{-2^{k-1}+1}(1-C_{k,C_3}\cdot\eta^{1/2})\big(\varepsilon^{1/2}-C_{k,C_2'}\cdot\eta^{1/2}-\frac{3}{2}C_\nu\cdot\varepsilon\big)\\ &\geq 2^{-2^{k-1}+1}\varepsilon^{1/2}-C_{k,\varepsilon,C_3,C_2'}\cdot\eta^{1/2}-C_{k,\nu}\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

Μποροῦμε πλέον νὰ βροῦμε κάτω ἀπὸ ποιοὺς περιορισμοὺς γιὰ τὰ ε καὶ η ἰσχύει ἡ (3.46) : ἀπὸ τὸν δεύτερον ἰσχυρισμόν

$$\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)\|_{L^2}\geq 2^{-2^{k-1}+1}\varepsilon^{1/2}-C_{k,\varepsilon,C_3,C_2'}\cdot\eta^{1/2}-C_{k,\nu}\cdot\varepsilon,$$

ὁπότε ὑποθέτοντας ὅτι ἡ ἔκφρασις

$$2^{-2^{k-1}+1}\varepsilon^{1/2}-C_{k,\varepsilon,C_3,C_2'}\cdot\eta^{1/2}-C_{k,\nu}\cdot\varepsilon$$

εἶναι θετική, τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἂν τὸ ε εἶναι ἀρκετὰ μικρὸν σὲ σχέσιν μὲ τὸ k καὶ τὸ μέτρον ν, καὶ τὸ η ἀρκετὰ μικρὸν σὲ σχέσιν μὲ τὰ k,ε καὶ τὶς σταθερὲς C_3, C_2', μποροῦμε νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\big)\|_{L^2}^2\geq 2^{-2^k+2}\varepsilon-C'_{k,\varepsilon,C_3,C_2'}\cdot\eta^{1/2}-C'_{k,\nu}\cdot\varepsilon^{3/2}.$$

῞Επεται ἀπὸ τὴν (3.50) καὶ τοὺς δύο πρώτους ἰσχυρισμοὺς ὅτι

$$\begin{aligned} &\|(1-\mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})\|_{L^2}^2 \\ &\geq \|(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2 + 2^{-2^k+2}\varepsilon - C'_{k,\nu}\cdot\varepsilon^{3/2} - C'_{k,\varepsilon,C_3,C'_2}\cdot\eta^{1/2} - \frac{9}{2}C'_2\cdot\eta^{1/2} \\ &= \|(1-\mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2 + 2^{-2^k+1}\varepsilon + \left(2^{-2^k+1}\varepsilon - C'_{k,\nu}\cdot\varepsilon^{3/2} - C''_{k,\varepsilon,C_3,C'_2}\eta^{1/2}\right), \end{aligned}$$

ὁπότε ἔχουμε τὸ ζητούμενον, ἀφοῦ ἡ ἔκφρασις

$$2^{-2^k+1}\varepsilon - C'_{k,\nu}\cdot\varepsilon^{3/2} - C''_{k,\varepsilon,C_3,C'_2}\eta^{1/2}$$

γίνεται θετικὴ ἂν περιορίσουμε ἀκόμη μίαν φορὰ τὸ ε σὲ σχέσιν μὲ τὸ k καὶ τὸ μέτρον ν, καὶ ἔπειτα τὸ η σὲ σχέσιν μὲ τὰ k,ε καὶ τὶς σταθερὲς C_3, C'_2. □

Σημείωσις. ῞Οπως τελικῶς φαίνεται ἀπὸ τὴν ἀπόδειξιν, δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει ποιὲς ἀκριβῶς εἶναι οἱ συναρτήσεις F_j, ἁπλῶς ὅτι αὐτὲς ἱκανοποιοῦν τὶς ἐκτιμήσεις (3.39) – (3.41) γιὰ κάποιες σταθερὲς C_1, C_2, C_3, γιὰ κάθε ἀρκετὰ μικρὸν η, μικρότερον ἀπὸ κάποιο η_0 ποὺ μᾶς δίνεται, καὶ γιὰ κάθε $N > N_0(\eta)$. Τότε, μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε τὴν συνάρτησιν F_{M+1}, καὶ μέσῳ αὐτῆς τὴν σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_{M+1}$ γιὰ κάθε η μικρότερον ἀπὸ κάποιο $\eta'_0 \leq \eta_0$, καὶ γιὰ κάθε N μεγαλύτερον ἀπὸ κάποιο $N'_0(\eta,\varepsilon,M) \geq N_0(\eta)$, καὶ νὰ δείξουμε ὅτι ἱκανοποιοῦνται καὶ οἱ τέσσερις ἐκτιμήσεις (3.42) – (3.45) γιὰ ὅλα τὰ ἐπιτρεπτὰ η καὶ N (μὲ σταθερὲς C'_1, C'_2, C'_3 ποὺ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὶς δοθεῖσες C_i), καὶ ὅτι ὅταν ἡ F_{M+1} δὲν εἶναι $\varepsilon^{1/2^k}$–Gowers ὁμοιόμορφη (πιὸ σωστά, ὅταν γιὰ κάποιο ἀπὸ τὰ ἐπιτρεπτὰ N, ἡ $F_{M+1,N}$ δὲν εἶναι Gowers ὁμοιόμορφη), τότε ἰσχύει καὶ ἡ προσαύξησις τῆς ἐνεργείας (3.46) γιὰ τὶς ἀντίστοιχες σ-ἄλγεβρες.

Οὐσιαστικὰ λοιπόν, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι οἱ ὑποθέσεις μας, μαζὶ φυσικὰ μὲ τὶς παραμέτρους ε καὶ M, εἶναι οἱ τρεῖς θετικὲς σταθερὲς C_1, C_2, C_3, τὸ ἐπιτρεπτὸν διάστημα $(0,\eta_0)$ γιὰ τὴν παράμετρον η, καὶ τὸ κάτω φράγμα $N_0(\eta)$ γιὰ τοὺς πρώτους N γιὰ τοὺς ὁποίους ἰσχύουν οἱ ἐκτιμήσεις (3.39) – (3.41). Ἀπὸ τὴν ἄλλην, τὰ ζητούμενα εἶναι οἱ τρεῖς καινούριες σταθερὲς C'_1, C'_2, C'_3, καὶ τὸ πόσο πρέπει νὰ περιορίσουμε τὸ διάστημα $(0,\eta_0)$, καὶ νὰ μεγαλώσουμε τὸ $N_0(\eta)$, ὥστε νὰ ἀληθεύουν τὰ συμπεράσματα τῆς προτάσεως.

Μένει νὰ ἀποδείξουμε τὸ Θεώρημα Διασπάσεως:

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1.5.2. Θεωροῦμε $\varepsilon > 0$ (τὸ ὁποῖον ὑπακούει στοὺς περιορισμοὺς ποὺ εἴδαμε στὴν ἀπόδειξιν τῆς Προτάσεως 3.2.8), καὶ θέτουμε M_0 νὰ εἶναι ὁ ἐλάχιστος φυσικὸς $\geq 2^{2^k}/\varepsilon + 1$. Εἰσάγοντας μίαν βοηθητικὴν παράμετρον η, τὴν ὁποίαν μετὰ θὰ ἀφήσουμε νὰ τείνει στὸ 0, ἐφαρμόζουμε τὴν Πρότασιν 3.2.8 M_0 φορές ξεκινῶντας ἀπὸ $M = 0$, δηλαδὴ ξεκινῶντας ἀπὸ τὴν τετριμμένην σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_0 := \{\emptyset, \mathbb{Z}_N\}$, γιὰ τὴν ὁποίαν οἱ ἐκτιμήσεις (3.39), (3.40) προφανῶς ἰσχύουν (μὲ $\Omega_0 := \emptyset$). Γιὰ νὰ ἰσχύει καὶ ἡ (3.41), βρίσκουμε γιὰ κάθε $\eta < 1/2$ κατάλληλα μεγάλο $N_0(\eta)$ ὥστε νὰ ἔχουμε

$$1-\eta^{1/2} \leq \mathbb{E}(\nu(x)|x\in\mathbb{Z}_N) \leq 1+\eta^{1/2} \Leftrightarrow \|\mathbb{E}(\nu-1|\mathcal{B}_0)\|_{L^\infty} \leq \eta^{1/2}$$

γιὰ κάθε $N > N_0(\eta)$. Σκοπός μας εἶναι νὰ βροῦμε ἔπειτα ἀπὸ τὶς M_0 ἐφαρμογὲς σταθερὲς C_1, C_2, C_3 γιὰ τὶς ὁποῖες ἰσχύουν οἱ ἐκτιμήσεις (3.42) – (3.45) γιὰ κάθε σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}_M$, κάθε σύνολον Ω_{M+1} καὶ συνάρτησιν $F_{M+1}, 0 \leq M \leq M_0$, ποὺ θὰ προκύψουν σὲ κάποιαν ἀπὸ τὶς ἐνδιάμεσες ἐφαρμογές, γιὰ κάθε η μικρότερον ἀπὸ κάποιο $\eta_0(\varepsilon, M_0)$ καὶ γιὰ κάθε $N > N_0(\varepsilon, M_0, \eta)$. Ταυτοχρόνως παρατηροῦμε ὅτι θὰ ἰσχύει καὶ ἡ (3.46), ὅποτε ἔχουμε γιὰ κάποιο $M < M_0$, καὶ γιὰ κάποια ἀπὸ τὰ ἐπιτρεπτὰ η καὶ N, ὅτι ἡ $F_{M+1} := (1 - \mathbf{1}_{\Omega_M})(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M))$ δὲν εἶναι $\varepsilon^{1/2^k}$–Gowers ὁμοιόμορφη.

Ἰσχυρισμός. Ἐφ' ὅσον περιορίσουμε γιὰ μίαν τελευταίαν φορὰν τὸ η_0 σὲ σχέσιν μὲ τὰ k καὶ ε, θὰ ὑπάρχει γιὰ κάθε ζεῦγος (η, N) ἀπὸ τὰ ἐπιτρεπτά, τουλάχιστον ἕνα $M < M_0$ ὥστε ἡ ἀντίστοιχη συνάρτησις F_{M+1} νὰ εἶναι $\varepsilon^{1/2^k}$–Gowers ὁμοιόμορφη.

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ συμπέρασμα δὲν ἰσχύει γιὰ κάποια η, N, τότε ἀπὸ τὴν (3.46) θὰ ἔχουμε γιὰ κάθε $M < M_0$,

$$\|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_{M+1}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M+1})\|_{L^2}^2 \geq \|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_M})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_M)\|_{L^2}^2 + 2^{-2^k+1}\varepsilon,$$

ὅπου $\mathcal{B}_M, \mathcal{B}_{M+1}$ καὶ Ω_M, Ω_{M+1} οἱ ἀντίστοιχες, γιὰ τὰ συγκεκριμένα η, N, σ-ἄλγεβρες καὶ τὰ ξεχωριστὰ σύνολα σ' αὐτές. Αὐτὸ θὰ συνεπάγεται ὅτι

$$\|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_{M_0}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M_0})\|_{L^2}^2 \geq \|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_0})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_0)\|_{L^2}^2 + (M_0 - 1)2^{-2^k+1}\varepsilon \geq 2.$$

Ταυτοχρόνως ὅμως ἀπὸ τὴν (3.46),

$$\|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_{M_0}})\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{M_0})\|_{L^\infty} \leq 1 + C_1 \cdot \eta^{1/2},$$

τὸ ὁποῖον μπορεῖ νὰ συμβαίνει μόνον ἂν $1 + C_1 \cdot \eta^{1/2} \geq \sqrt{2}$.

Ζητῶντας ἑπομένως νὰ ἰσχύει $1 + C_1 \cdot \eta_0^{1/2} \leq \sqrt{2}$, μποροῦμε πλέον νὰ χρησιμοποιήσουμε τὰ παραπάνω ὥστε νὰ βροῦμε τὴν οἰκογένειαν σ-ἄλγεβρῶν $\mathcal{B}'$ καὶ τὰ ξεχωριστὰ σύνολα $\Omega'_N \in \mathcal{B}'_N$ ποὺ ζητοῦνται στὸ Θεώρημα 1.5.2 : γιὰ κάθε $\eta_m := \frac{\eta_0}{m+1}$ καὶ γιὰ κάθε πρῶτον N μὲ $N_0(\varepsilon, M_0, \eta_m) < N \leq N_0(\varepsilon, M_0, \eta_{m+1})$, βρίσκουμε τὸν ἐλάχιστον $M < M_0$ ὥστε ἡ ἀντίστοιχη συνάρτησις F_{M+1} νὰ εἶναι $\varepsilon^{1/2^k}$–Gowers ὁμοιόμορφη (τέτοιος ὑπάρχει ἀπὸ τὸν προηγούμενον ἰσχυρισμόν). Θέτουμε $\mathcal{B}'_N := \mathcal{B}_M$ νὰ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη σ-ἄλγεβρα, καὶ $\Omega'_N := \Omega_M$ τὸ ξεχωριστὸν σύνολον σ' αὐτήν, ὅπως προκύπτουν ἀπὸ τὴν Πρότασιν 3.2.8.

Καταλήγουμε ὅτι γιὰ κάθε πρῶτον $N > N_0(\varepsilon, M_0, \eta_1) \equiv N_0(\varepsilon, k)$ ἱκανοποιεῖται ἡ (3.19), δηλαδὴ

$$\|(1 - \mathbf{1}_{\Omega'_N})(f_N - \mathbb{E}(f_N|\mathcal{B}'_N))\|_{U^{k-1}} \leq \varepsilon^{1/2^k}.$$

Ἐπίσης, γιὰ κάθε $N_0(\varepsilon, M_0, \eta_m) < N \leq N_0(\varepsilon, M_0, \eta_{m+1})$ ἰσχύουν οἱ

$$\mathbb{E}(\nu \mathbf{1}_{\Omega'_N}) \leq C_2 \cdot \eta_m^{1/2}, \;\; \|(1 - \mathbf{1}_{\Omega'_N})\mathbb{E}(\nu - 1|\mathcal{B}'_N)\|_{L^\infty} \leq C_3 \cdot \eta_m^{1/2},$$

ἀφοῦ ἔχουμε ἐξασφαλίσει, μὲ τὶς διαδοχικὲς ἐφαρμογὲς τῆς Προτάσεως 3.2.8, οἱ ἐκτιμήσεις αὐτὲς νὰ ἱκανοποιοῦνται ἀπὸ ὅλες τὶς σ-ἄλγεβρες $\mathcal{B}_M$ καὶ τὰ σύνολα $\Omega_M \in \mathcal{B}_M$ ποὺ κατεσκευάσαμε γιὰ $0 \leq M \leq M_0$, γιὰ τὰ ἐπιτρεπτὰ η καὶ N. Παρατηροῦμε ἑπομένως, ἔτσι ὅπως ὁρίσαμε τὴν οἰκογένειαν σ-ἀλγεβρῶν $\mathcal{B}'$ καὶ τὰ ξεχωριστὰ σύνολα $\Omega'_N \in \mathcal{B}'_N$, ὅτι ἱκανοποιοῦνται καὶ οἱ $(3.17), (3.18)$, δηλαδὴ

$$\mathbb{E}(\nu \mathbf{1}_{\Omega'}) = o_\varepsilon(1) \text{ καὶ } \|(1 - \mathbf{1}_{\Omega'})\mathbb{E}(\nu - 1|\mathcal{B}')\|_{L^\infty} = o_\varepsilon(1).$$

Συνεπῶς, ἔχουμε βρεῖ τὰ ζητούμενα τοῦ θεωρήματος. □

Ἐδῶ ὁλοκληρώνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ τοῦ γενικευμένου θεωρήματος Szemerédi. Πλέον, γιὰ νὰ βροῦμε ἀριθμητικὲς προόδους μήκους k στοὺς πρώτους, ἀρκεῖ νὰ βροῦμε μίαν μὴ αρνητικὴν συνάρτησιν f μὲ φορέα τοὺς πρώτους, ἡ ὁποία θὰ ἔχει θετικὸν ὁλοκλήρωμα, καὶ ἡ ὁποία θὰ φράσσεται ἀπὸ κατάλληλον $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ν. Αὐτὸς εἶναι ὁ σκοπὸς τοῦ ἑπομένου κεφαλαίου, στὸ ὁποῖον θὰ χρειαστεῖ νὰ θυμηθοῦμε ἐπίσης κάποια ἀπαραίτητα ἐργαλεῖα καὶ ἀποτελέσματα ἀπὸ τὴν ἀναλυτικὴν θεωρίαν ἀριθμῶν.

Κεφάλαιον 4

Κατασκευὴ ψευδοτυχαίου μέτρου γιὰ τοὺς πρώτους

4.1 Μία συνάρτησις μὲ «φορέα» τοὺς πρώτους

Ἡ πιὸ γνωστὴ συνάρτησις μὲ φορέα τοὺς πρώτους καὶ τὶς δυνάμεις τους στὴν ἀναλυτικὴν θεωρίαν ἀριθμῶν εἶναι ἡ συνάρτησις von Mangoldt, μὲ τύπον

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{ἂν } n = p^m \text{ ὅπου } p \text{ πρῶτος καὶ } m \geq 1 \\ 0 & \text{ἀλλιῶς} \end{cases}.$$

Τὸ διάσημον Θεώρημα Πρώτων Ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον, ὅπως εἴπαμε στὴν Εἰσαγωγήν, δίνει ἕναν ἀσυμπτωτικὸν τύπον γιὰ τὸ πλῆθος $\pi(n)$ τῶν πρώτων ποὺ εἶναι μικρότεροι ἀπὸ ἢ ἴσοι μὲ n, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν ἐκτίμησιν

$$\mathbb{E}(\Lambda(n)|1 \leq n \leq N) = 1 + o(1).$$

Μάλιστα οἱ μεγαλύτερες δυνάμεις εἶναι τόσο ἀραιὰ κατανεμημένες, ὥστε ἡ ἴδια ἐκτίμησις ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν συνάρτησιν

$$\lambda(n) = \begin{cases} \log n & \text{ἂν } n \text{ πρῶτος} \\ 0 & \text{ἀλλιῶς} \end{cases},$$

δηλαδὴ $\mathbb{E}(\lambda(n)|1 \leq n \leq N) = 1 + o(1)$. Αὐτὸ ὅμως μᾶς λέει ὅτι ἡ οἰκογένεια συναρτήσεων $\{\lambda|_{[1,N]} \colon N \, \text{πρῶτος}\}$ ἔχει ὁλοκληρώματα φραγμένα ἀπὸ κάτω ἀπὸ θετικὴν σταθεράν, ἀκριβῶς ὅπως ζητεῖται στὸ Θεώρημα 1.1.10, ὅπου βεβαίως ταυτίζουμε τὸ $[1, N]$ μὲ τὸ $\mathbb{Z}_N$ κατὰ προφανῆ τρόπον. Ἔχει ἐπίσης φορέα τοὺς πρώτους, συνεπῶς, ἂν μπορούσαμε νὰ βροῦμε κάποιο $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ν τὸ ὁποῖον νὰ ἔφρασσε κατὰ σημεῖον τὶς $\lambda|_{[1,N]}$ ἢ κάποιο θετικὸν πολλαπλάσιόν τους, μία ἁπλὴ ἐφαρμογὴ τοῦ γενικευμένου θεωρήματος

Szemerédi θὰ μᾶς ἐξησφάλιζε ἄπειρες ἀριθμητικὲς προόδους μήκους k μέσα στὸ σύνολον τῶν πρώτων, ἢ τουλάχιστον στὶς εἰκόνες αὐτοῦ τοῦ συνόλου μέσα στοὺς δακτυλίους $\mathbb{Z}_N$.

Δυστυχῶς, τέτοιο ψευδοτυχαῖον μέτρον δὲν ὑπάρχει, καὶ μάλιστα τὸ πρόβλημα δημιουργεῖται ἀπὸ τὴν ἴδιαν τὴν κατανομὴν τῶν πρώτων: πολὺ ἁπλά, ὑπάρχει μόνον ἕνας πρῶτος ὁ ὁποῖος διαιρεῖται ἀπὸ τὸ 2, μόνον δύο οἱ ὁποῖοι **δὲν** εἶναι σχετικῶς πρῶτοι μὲ τὸ 6, κανένας ὁ ὁποῖος νὰ εἶναι ἰσοϋπόλοιπος μὲ τὸ 15 modulo 20, κ.ο.κ. Πιὸ αὐστηρά, γιὰ κάθε φυσικὸν q ἰσχύει

$$\mathbb{E}(\lambda(n)|1 \leq n \leq N) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq q \\ (\alpha, q)=1}} \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \equiv \alpha \bmod q}} \lambda(n) \right) + o(1), \tag{4.1}$$

δηλαδὴ μποροῦμε νὰ παραλείψουμε τὶς κλάσεις ὑπολοίπων $\alpha \bmod q$ γιὰ ἐκεῖνα τὰ α τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι σχετικῶς πρῶτα μὲ τὸ q χωρὶς νὰ μεταβάλουμε τὸ ἀρχικὸν ὁλοκλήρωμα σημαντικά.

Ἀντιθέτως, τὰ ψευδοτυχαῖα μέτρα, ἔτσι ὅπως τὰ ἔχουμε ὁρίσει, κατανέμονται ὁμοιόμορφα στὶς διάφορες ἀριθμητικὲς προόδους ποὺ σχηματίζουν οἱ ἰσοϋπόλοιποι ἀριθμοὶ modulo q, δηλαδὴ ἰσχύει τὸ ἑξῆς:

Λῆμμα 4.1.1. *Ἔστω $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ν ($k \geq 3$), καὶ ἔστω $q \geq 1$ φυσικός. Γιὰ κάθε $1 \leq \alpha \leq q$ συμβολίζουμε μὲ $Q_{N,\alpha}$ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν $n \in [1, N]$ οἱ ὁποῖοι εἶναι ἰσοϋπόλοιποι μὲ τὸ $\alpha \bmod q$. Τότε ἰσχύει*

$$\mathbb{E}(\nu \mathbf{1}_{Q_{N,\alpha}}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Q_{N,\alpha}}) + o(1) = \frac{1}{q} + o(1), \tag{4.2}$$

ὅπου ταυτίζουμε τὰ ὑποσύνολα τοῦ $[1, N]$ μὲ τὰ ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{Z}_N$ κατὰ προφανῆ τρόπον.

Σημείωσις. Ἂς προσέξουμε ὅτι τὸ σφάλμα στὴν (4.2), ὅπως καὶ στὴν (4.1), ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ποιὸς εἶναι ὁ φυσικὸς q.

Τὸ λῆμμα μᾶς λέει οὐσιαστικὰ ὅτι ἡ ἀντίστοιχη ἄθροισις πάνω ἀπὸ τὶς κλάσεις ὑπολοίπων $\alpha \bmod q$ γιὰ τὰ α τὰ ὁποῖα εἶναι σχετικῶς πρῶτα μὲ τὸ q δὲν προσεγγίζει καλὰ τὴν μέσην τιμὴν τοῦ ν, ἀλλὰ ἰσχύει

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq q \\ (\alpha, q)=1}} \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \equiv \alpha \bmod q}} \nu(n) \right) = \frac{\phi(q)}{q} + o(1), \tag{4.3}$$

ὅπου ϕ εἶναι ἡ συνάρτησις τοῦ Euler, ἡ ὁποία σὲ κάθε φυσικὸν n ἀναθέτει τὸ πλῆθος τῶν φυσικῶν $\in [1, n]$ οἱ ὁποῖοι εἶναι σχετικῶς πρῶτοι μὲ τὸν n. Ὅμως ὁ λόγος $\phi(q)/q$ μπορεῖ νὰ γίνει ὁσοδήποτε μικρός, παραδείγματος χάριν ὅταν q εἶναι τὸ γινόμενον τῶν πρώτων ποὺ εἶναι μικρότεροι ἀπὸ κάποιον φυσικὸν m, ὅπου

$$\frac{\phi(q)}{q} = \prod_{\substack{p \text{ πρῶτος} \\ p<m}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \to 0 \text{ καθὼς } m \to +\infty.$$

Συνεπῶς, ἐξαιτίας τῶν (4.1), (4.3), δὲν μποροῦμε νὰ περιμένουμε νὰ ἰσχύει $\nu(n) \geq c \cdot \lambda(n)$ γιὰ κάποιο $c > 0$.

Γιὰ νὰ διορθώσουν αὐτὸ τὸ πρόβλημα, οἱ Green καὶ Tao ὁρίζουν πρῶτα μίαν παραλλαγὴν τῆς συναρτήσεως λ :

Ὁρισμός 4.1.2. Ἔστω $w(N)$ μία συνάρτησις τοῦ N, ἡ ὁποία θὰ μᾶς χρειαστεῖ νὰ τείνει στὸ $+\infty$ καθὼς τὸ N αὐξάνεται, ἀλλὰ μὲ ἀρκετὰ ἀργὸν ῥυθμόν. (Ὅπως θὰ δοῦμε, μία δυνατὴ ἐπιλογὴ γιὰ τὴν συνάρτησιν $w(N)$ εἶναι ἡ $w(N) = \log\log\log N$.) Θεωροῦμε τὴν παράμετρον

$$W_N := \prod_{\substack{p \text{ πρῶτος} \\ p\leq w(N)}} p,$$

ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ N καὶ εἶναι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν μικρῶν πρώτων, $\leq w(N)$.

Ὁρίζουμε μίαν οἰκογένειαν ἀπὸ παραλλαγὲς τῆς συναρτήσεως λ θέτοντας γιὰ κάθε πρῶτον N, $\tilde{\lambda}_N : [1, N] \to \mathbb{R}^+$ νὰ εἶναι ἡ συνάρτησις μὲ τύπον

$$\tilde{\lambda}_N(n) := \begin{cases} \frac{\phi(W_N)}{W_N} \log(W_N n + 1) & \text{ὅταν } W_N n + 1 \text{ εἶναι πρῶτος} \\ 0 & \text{ἀλλιῶς} \end{cases}.$$

Κατὰ προφανῆ τρόπον ἐπίσης, θεωροῦμε ὅτι ἡ $\tilde{\lambda}_N$ ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\mathbb{Z}_N$.

Πλέον, δὲν ὑπάρχει ἐμφανὴς λόγος γιατὶ τὰ $n \in \mathbb{Z}_N$ μὲ τὴν ἰδιότητα $\tilde{\lambda}_N(n) \neq 0$ νὰ συγκεντρώνονται σὲ συγκεκριμένες κλάσεις ὑπολοίπων, τουλάχιστον modulo τοὺς μικροὺς πρώτους καὶ τὰ γινόμενά τους, δηλαδὴ τοὺς διαιρέτες τοῦ W_N. Βεβαίως, δὲν γνωρίζουμε ἀκόμη ἂν ὑπάρχει ἔστω καὶ ἕνα n μὲ $\tilde{\lambda}_N(n) \neq 0$, καὶ μάλιστα χρειαζόμαστε ἀρκετὰ τέτοια n ὥστε νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$\mathbb{E}(\tilde{\lambda}_N(n)|n \in \mathbb{Z}_N) \gg 1. \tag{4.4}$$

Αὐτὸ ἐξασφαλίζεται ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Dirichlet, γνωστὸν καὶ ὡς Θεώρημα τῶν Πρώτων Ἀριθμῶν σὲ Ἀριθμητικὲς Προόδους:

Θεώρημα 5. *Ἔστω $0 < \varepsilon < 1$ μία μικρὴ ποσότης. Θεωροῦμε γιὰ κάθε $x \geq 1$, ὅλα τὰ ζεύγη (q, α) ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ σχετικῶς πρώτους φυσικούς, μὲ τὸν q νὰ ἱκανοποιεῖ τὴν ἀνισότητα*

$$q \leq (\log x)^{1-\varepsilon}.$$

Ὑπάρχει σταθερὰ $c_\varepsilon > 0$ ὥστε (ὁμοιόμορφα γιὰ κάθε τέτοιο ζεῦγος) νὰ ἰσχύει

$$\frac{1}{x} \cdot \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \equiv \alpha \bmod q}} \lambda(n) = \frac{1}{\phi(q)} + O_\varepsilon\big(\exp(-c_\varepsilon \sqrt{\log x})\big) = \frac{1}{\phi(q)} + o_\varepsilon(1).$$

Τὸ σημαντικότερον σὲ αὐτὴν τὴν ἐκδοχὴν τοῦ θεωρήματος Dirichlet εἶναι ὅτι τὰ σφάλματα εἶναι ὁμοιόμορφα φραγμένα γιὰ ὅλα τὰ $q \leq (\log x)^{1-\varepsilon}$. Γιὰ νὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι ἡ (4.4) ἀληθεύει, ἀρκεῖ τώρα νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἰσχύει

$$\log(W_N) = \sum_{\substack{p \text{ πρῶτος} \\ p \leq w(N)}} \log p = w(N) + o(w(N)) = O(w(N)) \Rightarrow W_N = e^{O(w(N))}$$

ἀπὸ τὴν ἰσοδύναμην διατύπωσιν τοῦ Θεωρήματος Πρώτων Ἀριθμῶν, καὶ κατὰ συνέπειαν, μὲ τὴν ἐπιλογὴν $w(N) = \log\log\log N$, προκύπτει ὅτι

$$W_N = \exp(O(\log\log\log N)) = \log^{O(1)}(\log N) \leq \sqrt{\log N}$$

γιὰ τὰ μεγάλα N. Ἔτσι ἀπὸ τὸ θεώρημα Dirichlet,

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq n \leq N} \tilde{\lambda}_N(n) &= \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{\phi(W_N)}{W_N} \lambda(W_N n + 1) = \frac{\phi(W_N)}{W_N} \cdot \sum_{\substack{1 \leq n \leq W_N N+1 \\ n \equiv 1 \bmod W_N}} \lambda(n) \\ &= \frac{\phi(W_N)}{W_N} \left(\frac{W_N N + 1}{\phi(W_N)} + (W_N N + 1) O\Big(\exp\big(-c_{1/2}\sqrt{\log(W_N N)}\big)\Big)\right) \\ &= N + \frac{1}{W_N} + O(N) \cdot \phi(W_N) \exp\big(-c_{1/2}\sqrt{\log N}\big)\end{aligned}$$

$$(4.5) \quad \Rightarrow \mathbb{E}(\tilde{\lambda}_N(n) | n \in \mathbb{Z}_N) = 1 + \frac{1}{W_N N} + O\big(\log^{O(1)}(\log N) \cdot \exp\big(-c_{1/2}\sqrt{\log N}\big)\big) = 1 + o(1).$$

Ἐπιπλέον, παρότι εἶναι ἀκόμη πολὺ δύσκολον, μὲ τὰ ἐργαλεῖα ποὺ διαθέτουμε, νὰ ἐξετάσουμε ἂν ἡ ἴδια ἡ συνάρτησις $\tilde{\lambda}$ μᾶς δίνει ἕνα $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον, ἦταν πλέον δυνατὸν γιὰ τοὺς Green καὶ Tao νὰ βροῦν $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ποὺ νὰ φράσσει κατὰ σημεῖον κατάλληλον πολλαπλάσιον τῆς $\tilde{\lambda}$.

Πρότασις 4.1.3. *Γιὰ κάθε $k \geq 3$, θεωροῦμε τὴν βοηθητικὴν παράμετρον $\epsilon_k := \frac{1}{2^k(k+4)!}$. Ὑπάρχει $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ ὥστε γιὰ κάθε ἀρκετὰ μεγάλον πρῶτον $N > N_0(k)$ νὰ ἰσχύει*

$$\nu_N(n) \geq k^{-1} 2^{-k-5} \tilde{\lambda}_N(n) \text{ γιὰ κάθε } \epsilon_k N \leq n \leq 2\epsilon_k N.$$

Παρατήρησις 4.1.4. Ὁ κύριος λόγος ποὺ εἰσάγουμε τὴν βοηθητικὴν παράμετρον ϵ_k καὶ ζητοῦμε τὸ ν νὰ φράσσει ἕναν περιορισμὸν τῆς συναρτήσεως $\tilde{\lambda}$ σὲ κάποιο ὑποδιάστημα τοῦ $[1, N] \equiv \mathbb{Z}_N$ μήκους $\epsilon_k N$, εἶναι γιὰ νὰ μπορέσουμε νὰ ἀντιστοιχίσουμε τὶς ἀριθμητικὲς προόδους ποὺ θὰ βροῦμε μέσῳ τοῦ Θεωρήματος 1.1.10, καὶ οἱ ὁποῖες θὰ εἶναι πρόοδοι στὸ $\mathbb{Z}_N$ (συγκεκριμένα μέσα στὸ διάστημα $[\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]$), σὲ γνήσιες ἀριθμητικὲς προόδους στὸ $\mathbb{Z}$. Αὐτὸ ἀκριβῶς κάναμε καὶ στὴν ἑνότητα 1.1, ὅταν ἀπεδείξαμε ὅτι ἡ συναρτησιακὴ ἐκδοχὴ τοῦ θεωρήματος Szemerédi, ποὺ ἀσχολεῖται μὲ συναρτήσεις στὸ $\mathbb{Z}_N$, συνεπάγεται τὴν συνολοθεωρητικὴν ἐκδοχήν του, ποὺ μελετᾶ ὑποσύνολα τῶν φυσικῶν.

Στὸ τέλος τοῦ κεφαλαίου θὰ γίνει σαφὲς ὅτι μποροῦμε, καὶ μάλιστα χρειάζεται στὶς ἀποδείξεις τῶν Θεωρημάτων 1 καὶ 2, νὰ θεωρήσουμε τὴν συνάρτησιν $w(N)$ τελικῶς σταθερήν. Πρὸς τὸ παρόν, ζητοῦμε ἡ συνάρτησις $w(N)$ νὰ αὐξάνεται ἀπεριόριστα ἐπειδή, ὅπως θὰ δοῦμε, ἡ παράμετρος W_N θὰ ἐμφανίζεται καὶ στὸν ὁρισμὸν τοῦ μέτρου ν ποὺ θὰ δώσουμε, ἐπηρεάζοντας τὶς ἐκτιμήσεις ποὺ χρειαζόμαστε γιὰ νὰ συμπεράνουμε ὅτι τὸ ν ἱκανοποιεῖ τὶς συνθῆκες γραμμικῶν μορφῶν καὶ συσχετισμοῦ. Ἔτσι, γιὰ παράδειγμα, θὰ μπορέσουμε νὰ δείξουμε ὅτι $\mathbb{E}(\nu) = 1 + o(1)$, ἀκριβῶς ἐπειδὴ τὸ W_N αὐξάνεται ἀπεριόριστα ἀλλὰ ἀργὰ σὲ σχέσιν μὲ τὸ N. Ὅπως ὅμως θὰ ἐξηγήσουμε στὴν ἑνότητα 4.5, ἡ ἀπόδειξις τοῦ γενικευμένου θεωρήματος Szemerédi, μὲ σταθεροποιημένες κάθε φορὰν τὶς παραμέτρους k καὶ δ, μπορεῖ νὰ γίνει ἀκόμη καὶ ἂν ἔχουμε προσεγγίσεις τῆς μορφῆς

$$|\mathbb{E}(\nu_N(x)|x \in \mathbb{Z}_N) - 1| \leq \varepsilon \text{ γιὰ κάθε πρῶτον } N \geq N_0(k, \delta)$$

(καὶ ἀναλόγως γιὰ τὶς ὑπόλοιπες ἐκτιμήσεις στὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν) γιὰ κάποιο σταθερὸν $\varepsilon > 0$, ὅπου βεβαίως τὸ πόσο μικρὸν πρέπει νὰ εἶναι τὸ ε, ὥστε νὰ δουλεύουν τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Κεφαλαίου 3, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ ἑκάστοτε k καὶ δ. Προφανῶς γιὰ αὐτὸν τὸν λόγον, τὸ ποιὰ θὰ εἶναι ἡ τελικὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $w(N)$, ἄρα καὶ τὸ πόσο μεγάλη θὰ εἶναι ἡ παράμετρος W, θὰ προκύπτει ἀπὸ τὸ ἑκάστοτε πρόβλημα καί, ὅπως θὰ δοῦμε, θὰ διαφέρει στὰ Θεωρήματα 1 καὶ 2.

Μερικὴ ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1 *ὑποθέτοντας τὴν Πρότασιν* 4.1.3. Ὅπως ἔχουμε ἤδη ἀναφέρει, θὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ Θεώρημα 1.1.10. Θεωροῦμε τὴν οἰκογένειαν συναρτήσεων $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ θέτοντας γιὰ κάθε N,

$$f_N(n) := \begin{cases} k^{-1}2^{-k-5}\tilde{\lambda}_N(n) & \text{ὅταν } \epsilon_k N \leq n \leq 2\epsilon_k N \\ 0 & \text{ἀλλιῶς} \end{cases} .$$

Ὅπως ἐδείχθη ἡ (4.5), μποροῦμε ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Dirichlet νὰ δείξουμε καὶ τὶς

$$\sum_{1 \leq n \leq \epsilon_k N} \tilde{\lambda}_N(n) = \epsilon_k N + o(N), \quad \sum_{1 \leq n \leq 2\epsilon_k N} \tilde{\lambda}_N(n) = 2\epsilon_k N + o(N),$$

ἄρα προκύπτει ὅτι

$$\mathbb{E}(f_N(n)|n \in \mathbb{Z}_N) = \frac{k^{-1}2^{-k-5}}{N} \sum_{\epsilon_k N \leq n \leq 2\epsilon_k N} \tilde{\lambda}_N(n) = k^{-1}2^{-k-5}\epsilon_k(1 + o(1)).$$

Μποροῦμε ἑπομένως, ἐξαιτίας καὶ τῆς Προτάσεως 4.1.3, νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ Θεώρημα 1.1.10 καὶ νὰ καταλήξουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr}f(x)\,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k, k^{-1}2^{-k-5}\epsilon_k) - o(1). \tag{4.6}$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν f καὶ $\tilde{\lambda}$, γιὰ ὁποιαδήποτε $x, r \in \mathbb{Z}_N$ γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr}f(x) \neq 0$, ὑπάρχουν φυσικοὶ $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1} \in [\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]$ μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες: (i) γιὰ κάθε $0 \leq j \leq k-1$ τὸ n_j εἶναι ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως ὑπολοίπων $x - jr \pmod N$, καὶ (ii) τὸ $W_N n_j + 1$ εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Μάλιστα, ἔχουμε τότε ὅτι

$$\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr}f(x) \leq \prod_{j=0}^{k-1} \log(W_N n_j + 1) = O_k\big(\log^k(W_N N)\big).$$

Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι τὰ ζεύγη (x, r) μὲ $r = 0$ συνεισφέρουν στὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (4.6) τὸ πολὺ $\frac{1}{N}\|f\|_{L^\infty}^k = O(\frac{1}{N}\log^k(W_N N)) = o(1)$, δεδομένου ὅτι $W_N = \log^{O(1)}(\log N)$. Ἄρα ἀπὸ κάποιο $N_0(k)$ καὶ πάνω,

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{r\neq 0} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} T^{jr}f(x)\,\middle|\, x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k, k^{-1}2^{-k-5}\epsilon_k)/2. \tag{4.7}$$

Θὰ δείξουμε γιὰ κάθε ζεῦγος $(x, r) \in \mathbb{Z}_N^2, r \neq 0$, μὲ τὴν ἰδιότητα $\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr}f(x) \neq 0$, ὅτι οἱ ἀντίστοιχοι φυσικοὶ $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1} \in [\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]$ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον στὸ $\mathbb{N}$ (προφανῶς τότε, τὸ ἴδιον θὰ ἰσχύει καὶ γιὰ τοὺς πρώτους $W_N n_j + 1$, $0 \leq j \leq k-1$). Ἀφοῦ $2\epsilon_k \leq 1/k$, μποροῦμε νὰ μιμηθοῦμε τὴν ἀπόδειξιν τῆς συνολοθεωρητικῆς ἐκδοχῆς τοῦ θεωρήματος Szemerédi ποὺ δώσαμε στὴν ἑνότητα 1.1: συμβολίζοντας μὲ r_0 τὸν ἀντιπρόσωπον τῆς κλάσεως ὑπολοίπων $r \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0\}$ στὸ διάστημα $[1, N-1]$, καταλήγουμε ὅτι πρέπει εἴτε νὰ ἰσχύει $r_0 \in [1, \epsilon_k N]$ εἴτε $r_0 \in [(1-\epsilon_k)N, N-1]$. Στὴν περίπτωσιν ποὺ $r_0 \in [1, \epsilon_k N]$, τὰ $n_0 > n_1 > \cdots > n_{k-1}$ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον φυσικῶν μὲ ἀρχικὸν ὅρον τὸ $n_{k-1} = n_0 - (k-1)r_0$ καὶ κοινὴν διαφορὰν r_0. Στὴν περίπτωσιν ποὺ $r_0 \in [(1-\epsilon_k)N, N-1]$, τὰ $n_0 < n_1 < \cdots < n_{k-1}$ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ ἀρχικὸν ὅρον τὸ n_0 καὶ κοινὴν διαφορὰν $N - r_0$.

Τελικῶς, μὲ τὸν τρόπον ποὺ περιγράφουμε, ἡ ἴδια ἀριθμητικὴ πρόοδος $W_N n_j + 1$, $0 \leq j \leq k-1$, ἀπὸ πρώτους ἀριθμοὺς $< W_N N$ εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψει ἀπὸ δύο διαφορετικὰ ζεύγη $\in \mathbb{Z}_N^2$ (τῆς μορφῆς $(x, r), (x, N-r), r \neq 0$), ἐνῷ μπορεῖ καὶ νὰ μὴν προσμετρᾶται καθόλου στὸ ὁλοκλήρωμα τῆς (4.7). Συμπεραίνουμε ἐπομένως ὅτι

$$\frac{2\mathrm{app}(W_N N,k)\,O_k(\log^k(W_N N))}{N^2} \geq \frac{2\mathrm{app}(W_N N,k)\|f\|_{L^\infty}^k}{N^2}$$
$$\geq \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{r\neq 0}\cdot\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr}f(x)\,\Big|\, x,r\in\mathbb{Z}_N\right) \geq c(k,k^{-1}2^{-k-5}\epsilon_k)/2$$

γιὰ κάθε $N > N_0(k)$, ποὺ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει σταθερὰ $\gamma_0(k)$, ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν παράμετρον k, ὥστε γιὰ ὅλους τοὺς μεγάλους πρώτους νὰ ἰσχύει ἡ ἀνισότης

$$\mathrm{app}(W_N N,k) \geq \gamma_0(k)\frac{N^2}{\log^k(W_N N)}.$$

□

Γιὰ νὰ ὁρίσουν οἱ Green καὶ Tao τὸ $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ποὺ ἀναφέρεται στὴν Πρότασιν 4.1.3 (τὸ ὁποῖον, ὅπως μόλις εἴδαμε, εἶναι τὸ μόνον ποὺ λείπει γιὰ νὰ συμπεράνουμε ὅτι οἱ πρῶτοι περιέχουν ἄπειρες ἀριθμητικὲς προόδους μήκους k), θεώρησαν ἀκόμη μίαν παραλλαγὴν τῆς συναρτήσεως von Mangoldt ἤ, καλύτερα, μίαν προσέγγισίν της, ἡ ὁποία ὅμως παίρνει μὴ μηδενικὲς τιμὲς καὶ σὲ φυσικοὺς ποὺ δὲν εἶναι πρῶτοι ἢ δυνάμεις πρώτων. Ἰδιότητες αὐτῆς τῆς συναρτήσεως, σὰν αὐτὲς ποὺ χρειαζόμαστε γιὰ νὰ δείξουμε τὶς συνθῆκες γραμμικῶν μορφῶν καὶ συσχετισμοῦ, εἶχαν ἤδη μελετήσει σὲ διάφορα ἄρθρα τους δύο ἄλλοι μαθηματικοί, οἱ Dan Goldston καὶ Cem Yildirim, στὴν δικιάν τους προσπάθειαν νὰ δείξουν μίαν σημαντικὴν εἰκασίαν στὴν ἀναλυτικὴν θεωρίαν ἀριθμῶν. Σύμφωνα μὲ τὴν εἰκασίαν αὐτήν, ἡ διαφορὰ μεταξὺ διαδοχικῶν πρώτων εἶναι πολὺ μικρή, καὶ σίγουρα πολὺ μικρότερη τῆς ἀναμενομένης, ἄπειρες φορές, δηλαδὴ ἰσχύει

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n) < +\infty$$

ὅπου p_n ὁ $n-$οστὸς πρῶτος (τὸ ὁποῖον εἶναι πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τῆς εὐρύτερα γνωστῆς εἰκασίας τῶν διδύμων πρώτων), ἢ τουλάχιστον ἰσχύει τὸ ἀσθενέστερον

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} = 0.$$

Ἄς θυμηθοῦμε ὅτι ἀπὸ τὸ Θεώρημα τῶν Πρώτων Ἀριθμῶν, ὁ $n-$οστὸς πρῶτος εἶναι ἀσυμπτωτικὰ ἴσος μὲ $n\log n$, ἄρα ἡ μέση τιμὴ τοῦ πόσο ἀπέχει καθένας ἀπὸ τοὺς $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ἀπὸ τὸν ἑπόμενόν του εἶναι ἴση μὲ

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n}(p_{j+1}-p_j) = \frac{p_{n+1}-p_1}{n} = (1+o(1))\frac{(n+1)\log n}{n} = (1+o(1))\log p_n.$$

Οἱ Goldston καὶ Yildirim εἶχαν ξεκινήσει τὸ πρόγραμμά τους αὐτό, μὲ σκοπὸν νὰ δείξουν ὅτι ὑπάρχουν πολὺ μικρά, ἢ καὶ φραγμένα, κενὰ μεταξὺ πρώτων ἀριθμῶν, ἀπὸ τὸ 1999 προχωρῶντας σὲ ὅλο καὶ καλύτερες προσεγγίσεις τοῦ προβλήματος. Μάλιστα, ἡ μέθοδός τους εἶχε ἀποσαφηνιστεῖ καὶ ἁπλουστευτεῖ κατὰ πολὺ ἀπὸ τοὺς Andrew Granville καὶ Kannan Soundararajan [31]. Ὅμως, αὐτὲς καθαυτὲς οἱ ἐκτιμήσεις ποὺ εἶχαν δείξει γιὰ διάφορες παραλλαγὲς τῆς συναρτήσεως von Mangoldt ἦταν δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ σὲ ἄλλες ἐφαρμογές, καὶ ὄχι μόνον στὴν εὕρεσιν μικρῶν κενῶν μεταξὺ πρώτων ἀριθμῶν. Μία ἀπὸ αὐτὲς τὶς ἐκτιμήσεις, ἡ ὁποία ὑπάρχει στὸ ἄρθρον [15] ποὺ ἑτοίμαζαν τὸ 2004, καὶ τὸ ὁποῖον εἶχαν δώσει καὶ στοὺς Green καὶ Tao νὰ διαβάσουν, ἀρκοῦσε γιὰ νὰ ὁρίσουν οἱ τελευταῖοι τὸ μέτρον ποὺ ζητεῖται στὴν Πρότασιν 4.1.3. Ἡ ἐν λόγῳ πρότασις τοῦ ἄρθρου τῶν Goldston καὶ Yildirim ἐξησφάλιζε οὐσιαστικὰ τὴν συνθήκην συσχετισμοῦ γιὰ τὸ ν. Οἱ Green καὶ Tao δανείστηκαν κάποια ἀπὸ τὰ βήματα στὴν ἀπόδειξίν της, στὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται βασικὰ ἐργαλεῖα τῆς ἀναλυτικῆς θεωρίας ἀριθμῶν, καὶ προσήρμοσαν τὰ ὑπόλοιπα ἐπιχειρήματα γιὰ νὰ δείξουν καὶ τὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν.

Γιὰ νὰ γίνουν πιὸ κατανοητὰ αὐτά, περιγράφουμε καταρχὰς στὴν ἑπομένην ἑνότητα τὴν μέθοδον τῶν Goldston καὶ Yildirim καὶ τὸ γιατὶ εἰσάγουν καὶ μελετοῦν τὴν παραλλαγὴν τῆς συναρτήσεως von Mangoldt ποὺ θὰ χρειαστοῦμε:

4.2 Τὸ πρόγραμμα τῶν Goldston καὶ Yildirim

4.2.1 Περικεκομμένα ἀθροίσματα τῆς συναρτήσεως von Mangoldt

Ἕνας τρόπος νὰ δειχθεῖ ὅτι $\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)<+\infty$ εἶναι νὰ θεωρήσουμε, γιὰ κάποιον φυσικὸν $r\geq 1$ καὶ γιὰ κάθε $n\in\mathbb{N}$, τὸ ζεῦγος

$$(n, n+2r)$$

καὶ νὰ προσπαθήσουμε νὰ δείξουμε γιὰ ἄπειρα n ὅτι καὶ οἱ δύο συντεταγμένες τοῦ ἀντιστοίχου διανύσματος εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί. (Τότε προφανῶς θὰ ἰσχύει $\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)\leq 2r$.) Πόσο πιθανὸν εἶναι νὰ συμβαίνει αὐτό; Ὅπως ἔχουμε πεῖ, τὸ Θεώρημα Πρώτων Ἀριθμῶν μᾶς δίνει ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ποὺ εἶναι μικρότεροι ἀπὸ ἢ ἴσοι μὲ κάποιο $x\geq 2$ εἶναι περίπου $x/\log x$. Αὐτὸ ὁδήγησε τοὺς ἀριθμοθεωρητικοὺς στὴν εἰσαγωγὴν ἑνὸς τυχαίου μοντέλου γιὰ τοὺς πρώτους, τοῦ μοντέλου Cramér, τὸ ὁποῖον θὰ ἐπέτρεπε νὰ προβλέψουμε τουλάχιστον τὴν ἀπάντησιν σὲ ἐρωτήματα ὅπως τὸ παραπάνω. Σύμφωνα μὲ τὸ μοντέλο Cramér, κάθε φυσικὸς n ἀπὸ αὐτοὺς ποὺ βρίσκονται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ x ἔχει πιθανότητα περίπου $1/\log x$ νὰ εἶναι πρῶτος, ἐνῷ γιὰ δύο διαφορετικοὺς φυσικοὺς $n_1, n_2\leq x$ τὰ ἀντίστοιχα ἐνδεχόμενα εἶναι ἀνεξάρτητα, μὲ ἄλλα λόγια τὸ ἐνδεχόμενον οἱ n_1 καὶ n_2 νὰ εἶναι ταυτοχρόνως πρῶτοι ἔχει πιθανότητα περίπου $1/\log^2 x$. Ἕπεται μὲ αὐτὸ τὸ σκεπτικὸν ὅτι καὶ γιὰ κάθε $n\leq x$, τὸ ἐνδεχόμενον νὰ εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ οἱ δύο συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $(n, n+2r)$ ἔχει πιθανότητα περίπου $1/\log^2 x$, ἄρα θὰ περιμέναμε νὰ ἰσχύει

$$\#\{n \leq x : \text{οἱ συντεταγμένες τοῦ } (n, n+2r) \text{ εἶναι πρῶτοι}\} \sim \frac{x}{\log^2 x}.$$

Δυστυχῶς, τὴν ἴδιαν ἐκτίμησιν μᾶς δίνει τὸ μοντέλο Cramér καὶ γιὰ τὸν πληθάριθμον τοῦ συνόλου

$$\{n \leq x : \text{οἱ συντεταγμένες τοῦ } (n, n+1) \text{ εἶναι πρῶτοι}\},$$

παρότι ὡς γνωστόν, ἂν κάποιος φυσικὸς $n > 2$ εἶναι πρῶτος, τότε ὁ $n+1$ σίγουρα δὲν εἶναι. Τὸ πρόβλημα βεβαίως προκύπτει ἐπειδὴ σὲ κάθε περίπτωσιν εἴτε ὁ n εἴτε ὁ $n+1$ θὰ διαιρεῖται ἀπὸ τὸ 2, κάτι ποὺ τὸ μοντέλο Cramér δὲν συνυπολογίζει. Γιὰ τὸν ἴδιον λόγον ἐπίσης, ἂν ὁ φυσικὸς $n > 2$ εἶναι πρῶτος, τότε τὸ ἐνδεχόμενον νὰ εἶναι καὶ ὁ $n+2r$ πρῶτος ἔχει διπλάσιαν πιθανότητα ἀπ' αὐτὴν ποὺ δίνει τὸ μοντέλο Cramér, ἀφοῦ γνωρίζουμε ἤδη ὅτι ὁ $n+2r$ εἶναι περιττός.

Οἱ Hardy καὶ Littlewood πρῶτοι διετύπωσαν τὴν εἰκασίαν [24] ὅτι ἂν συνυπολογίσουμε καὶ αὐτοῦ τοῦ εἴδους τὶς ἐξαρτήσεις μεταξὺ δύο φυσικῶν $n, n+h$, αὐτὸ ἀρκεῖ ὥστε νὰ ἐκτιμήσουμε σωστὰ τὸν πληθάριθμον τοῦ συνόλου

$$\{n \leq x : \text{οἱ συντεταγμένες τοῦ } (n, n+h) \text{ εἶναι πρῶτοι}\}.$$

Δηλαδὴ στὴν περίπτωσιν ποὺ $h = 2r$, ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ οἱ δύο συντεταγμένες κάποιου ζεύγους $(n, n+2r)$ εἶναι κανένας ἀπὸ τοὺς πρώτους $p < n$ νὰ μὴν διαιρεῖ τὸ n ἢ τὸ $n+2r$. Αὐτὸ ὅμως σημαίνει ὅτι $n \not\equiv 0$ καὶ $n \not\equiv -2r$ modulo αὐτοὺς τοὺς πρώτους. Ἄρα, ἂν συμβολίσουμε μὲ $\nu_p(\{0, 2r\})$ τὸ πλῆθος τῶν διαφορετικῶν κλάσεων ὑπολοίπων στὶς ὁποῖες ἀνήκουν οἱ ἀριθμοὶ $0, 2r \pmod p$ (προφανῶς $\nu_p(\{0, 2r\}) = 2$ ἂν $p > 2r$), τότε θὰ πρέπει γιὰ κάθε $p < n$, τὸ n νὰ ἀνήκει σὲ μίαν ἀπὸ τὶς ὑπόλοιπες κλάσεις $(\text{mod } p)$, καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ πιθανότης τὸ p νὰ μὴν διαιρεῖ οὔτε τὸ n οὔτε τὸ $n+2r$ θὰ εἶναι (ἀσυμπτωτικὰ ἴση μὲ) $1 - \nu_p(\{0, 2r\})/p$, δηλαδὴ θὰ ἰσχύει

$$\#\{n \leq x : p \nmid n \text{ καὶ } p \nmid n+2r\} \sim x \cdot \left(1 - \frac{\nu_p(\{0, 2r\})}{p}\right).$$

Αὐτὴ ἡ πιθανότης προφανῶς διαφέρει ἀπὸ τὴν πιθανότητα $(1-1/p)^2$ ποὺ ἔχει τὸ ἐνδεχόμενον δύο τυχαῖα ἐπιλεγμένοι φυσικοὶ $n_1, n_2 \leq x$ νὰ μὴν διαιροῦνται ἀπὸ τὸ p. Οἱ Hardy καὶ Littlewood ἑπομένως ἰσχυρίστηκαν ὅτι γιὰ νὰ βελτιώσουμε τὴν λανθασμένην ἐκτίμησιν τοῦ μοντέλου Cramér γιὰ τὸν πληθάριθμον τοῦ συνόλου

$$\{n \leq x : \text{οἱ συντεταγμένες τοῦ } (n, n+2r) \text{ εἶναι πρῶτοι}\},$$

ἀρκεῖ νὰ τὴν πολλαπλασιάσουμε μὲ τὸν «διορθωτικὸν» παράγοντα

$$\left(1 - \frac{\nu_p(\{0, 2r\})}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2}$$

γιὰ κάθε πρῶτον $p \leq x$. Ἂν θεωρήσουμε τὸ γινόμενον ὅλων αὐτῶν τῶν «διορθωτικῶν» παραγόντων, λαμβάνουμε τὸ ἀπειρογινόμενον

$$\prod_{p\,\text{πρῶτος}} \left(1 - \frac{\nu_p(\{0,2r\})}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2}$$

τὸ ὁποῖον συγκλίνει ἀφοῦ γιὰ $p > 2r$,

$$\left(1 - \frac{\nu_p(\{0,2r\})}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} = \left(1 - \frac{2}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} < 1.$$

Συνεπῶς, ἡ εἰκασία μᾶς δίνει ὅτι

$$\#\{n \leq x : \text{οἱ συντεταγμένες τοῦ } (n, n+2r) \text{ εἶναι πρῶτοι}\}$$
$$\sim \frac{x}{\log^2 x} \cdot \prod_{p\,\text{πρῶτος}} \left(1 - \frac{\nu_p(\{0,2r\})}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2}.$$

Αὐτὸ γενικεύεται εὔκολα ὅταν θεωροῦμε διανύσματα μὲ k συντεταγμένες, δηλαδὴ ὅταν ἔχουμε κάποιο σύνολον $\mathcal{H} = \{h_1 < h_2 < \cdots < h_k\}$ ἀπὸ μὴ ἀρνητικοὺς ἀκεραίους, καὶ θέλουμε νὰ δοῦμε γιὰ πόσα $n \leq x$ τὸ διάνυσμα

$$(n + h_1, n + h_2, \ldots, n + h_k)$$

ἔχει σὲ ὅλες τὶς συντεταγμένες του πρώτους. (Προφανῶς, ἂν αὐτὸ συμβαίνει γιὰ ἄπειρα n, τότε $\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) \leq h_k - h_1$.) Ἡ εἰκασία σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν μᾶς λέει ὅτι τὸ πλῆθος αὐτῶν τῶν $n \leq x$ εἶναι ἀσυμπτωτικὰ ἴσον μὲ

$$\frac{x}{\log^k x} \cdot \prod_{p\,\text{πρῶτος}} \left(1 - \frac{\nu_p(\mathcal{H})}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k}$$

ὅπου $\nu_p(\mathcal{H})$ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν κλάσεων ὑπολοίπων ποὺ καταλαμβάνουν οἱ ἀκέραιοι $h_1, \ldots, h_k \pmod p$. Μάλιστα, ἂν γιὰ κάθε πρῶτον p ἰσχύει $\nu_p(\mathcal{H}) < p$, τότε τὸ ἀπειρογινόμενον

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) := \prod_{p\,\text{πρῶτος}} \left(1 - \frac{\nu_p(\mathcal{H})}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k},$$

γνωστὸν καὶ ὡς **ἰδιάζουσα σειρὰ** τῶν Hardy καὶ Littlewood, συγκλίνει σὲ ἕναν θετικὸν ἀριθμόν, δεδομένου ὅτι γιὰ $p > h_k = \max \mathcal{H}$,

$$\left(1 - \frac{\nu_p(\mathcal{H})}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k} = \left(1 - \frac{k}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k} = 1 - a_p(k)$$

καὶ ἡ σειρὰ αὐτῶν τῶν $a_p(k)$ συγκλίνει ἀπολύτως.

Μποροῦμε τώρα νὰ διατυπώσουμε πλήρως τὴν εἰκασίαν τῶν Hardy καὶ Littlewood: *ἂν γιὰ κάποιο σύνολον $\mathcal{H} = \{h_1 < h_2 < \cdots < h_k\}$ μὴ ἀρνητικῶν ἀκεραίων ἰσχύει*

$$\nu_p(\mathcal{H}) < p \text{ γιὰ κάθε πρῶτον } p, \tag{4.8}$$

τότε γιὰ κάθε $x \geq 2$, τὸ πλῆθος τῶν φυσικῶν $n \leq x$ γιὰ τοὺς ὁποίους τὸ διάνυσμα

$$(n + h_1, n + h_2, \dots, n + h_k)$$

ἔχει σὲ ὅλες τὶς συντεταγμένες του πρώτους ἀριθμούς, εἶναι ἀσυμπτωτικὰ ἴσον μὲ

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \frac{x}{\log^k x}.$$

Ἐπιπλέον, ἂν θεωρήσουμε τὴν συνάρτησιν

$$\Lambda(n + h_1)\Lambda(n + h_2) \cdots \Lambda(n + h_k),$$

ἡ ὁποία ἐντοπίζει τὰ n γιὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἀντίστοιχον διάνυσμα ἔχει σὲ ὅλες τὶς συντεταγμένες του πρώτους ἢ δυνάμεις πρώτων, τότε ἰσχύει ἡ ἐκτίμησις

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n + h_1)\Lambda(n + h_2) \cdots \Lambda(n + h_k) = (\mathfrak{S}(\mathcal{H}) + o(1))x. \tag{4.9}$$

Τὰ παραπάνω ἰσχύουν βεβαίως καὶ ὅταν τὸ $\mathcal{H}$ δὲν ἱκανοποιεῖ τὴν (4.8), ἀφοῦ τότε $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = 0$, καὶ ἐπιπλέον

$$\#\{n \leq x : \text{οἱ συντεταγμένες τοῦ } (n+h_1, \dots, n+h_k) \text{ εἶναι πρῶτοι}\} = O(1) = o(x/\log^k x).$$

Ἀξίζει νὰ σημειωθεῖ ὅτι μία εἰδικὴ περίπτωσις τῆς παραπάνω εἰκασίας παρέχει κι ἕναν ἀσυμπτωτικὸν τύπον γιὰ τὸν ἀριθμὸν $\mathrm{app}(n, k)$ τοῦ Θεωρήματος 1, τὸ πλῆθος δηλαδὴ τῶν ἀριθμητικῶν προόδων μήκους k τῶν ὁποίων ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ μικρότεροι τοῦ n. Συγκεκριμένα, στηριζόμενοι στὴν μέθοδον τῶν Hardy καὶ Littlewood μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι θὰ ἰσχύει ἡ ἐκτίμησις

$$\#\{m, d \in \{1, \dots, n\} : \text{οἱ } m, m+d, \dots, m+(k-1)d \text{ εἶναι ὅλοι πρῶτοι}\} = (\gamma'(k) + o(1)) \frac{n^2}{\log^k n}$$

ὅπου

$$\gamma'(k) := \prod_{p \text{ πρῶτος}} \beta_p(k) \tag{4.10}$$

εἶναι τὸ γινόμενον τῶν «διορθωτικῶν» παραγόντων σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, μὲ τὰ

$$\beta_p(k) := \begin{cases} \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-(k-1)} & \text{ἂν } p \le k \\ \left(1-\frac{k-1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-(k-1)} & \text{ἂν } p > k \end{cases}.$$

Ὅπως εἴπαμε στὴν Εἰσαγωγήν, ὁ van der Corput [37] τὸ 1939, καὶ ὁ Chowla [7] τὸ 1944, ἀπέδειξαν ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρες ἀριθμητικὲς πρόοδοι μήκους 3 ἀπὸ πρώτους, καταφέρνοντας μάλιστα νὰ ἐπιβεβαιώσουν τὴν παραπάνω ἀσυμπτωτικὴν ἐκτίμησιν, μὲ μόνην διαφορὰν ὅτι ἡ σταθερὰ ποὺ βρῆκαν ἦταν τὸ $1/4$ τῆς παραπάνω σταθερᾶς γ_3'. Ὅπως θὰ ἐξηγήσουμε στὴν ἑνότητα 4.5, τελικῶς τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 2010 οἱ Green, Tao καὶ Ziegler ἐπιβεβαίωσαν τὴν παραπάνω ἐκτίμησιν καὶ γιὰ τὰ μεγαλύτερα k (μὲ λίγο διαφορετικὲς σταθερές), ξεπερνῶντας ἑπομένως τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ Θεωρήματος 1. Δυστυχῶς, μὲ τὰ ἐργαλεῖα ποὺ παρουσιάζουμε σὲ αὐτὴν τὴν ἐργασίαν, δηλαδὴ τὰ ἐργαλεῖα ποὺ χρησιμοποίησαν οἱ Green καὶ Tao στὸ [1], ἡ σταθερὰ ποὺ μποροῦμε νὰ βροῦμε γιὰ τὸ Θεώρημα 1 εἶναι πολὺ μικρότερη τῆς σταθερᾶς τῶν Hardy καὶ Littlewood, εἰδικὰ γιὰ τὰ μεγάλα k, καὶ φυσικὰ δὲν μποροῦμε νὰ πετύχουμε ἀσυμπτωτικὴν ἐκτίμησιν. Παραταῦτα, ἦταν ἤδη γνωστὸν τὸ 2004 ὅτι τὸ θεώρημα τῶν Green καὶ Tao μᾶς δίνει τὴν σωστὴν τάξιν μεγέθους γιὰ τὸν ἀριθμὸν $\mathrm{app}(n,k)$ ἂν τὸ συνδυάσουμε μὲ ἀποτελέσματα ἀπὸ τὴν θεωρίαν κοσκίνου (προγενέστερα τοῦ [1]), τὰ ὁποῖα μᾶς ἐξασφαλίζουν ὅτι γιὰ κάθε k,

$$\mathrm{app}(n,k) = O_k\left(\frac{n^2}{\log^k n}\right).$$

Ἐπιστρέφοντας στὰ διανύσματα μὲ συντεταγμένες πρώτους, ὁ πρῶτος στόχος τῶν Goldston καὶ Yildirim ἦταν νὰ δείξουν ἐκτιμήσεις σὰν τὴν (4.9), ὄχι βεβαίως ἀπευθείας γιὰ τὴν συνάρτησιν von Mangoldt, ἀλλὰ γιὰ κατάλληλες προσεγγίσεις της. Ξεκινῶντας ἀπὸ τὴν ταυτότητα

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\log(n/d)$$

ποὺ ἰσχύει γιὰ κάθε φυσικὸν n, ὅπου $\mu : \mathbb{N} \to \{-1,0,1\}$ εἶναι ἡ συνάρτησις Möbius μὲ τύπον $\mu(m) := 1$ ἂν $m = 1$, $\mu(m) := (-1)^s$ ἂν τὸ m γράφεται ὡς γινόμενον s διακεκριμένων πρώτων ($m = p_1 \cdots p_s$ μὲ τοὺς p_i διαφορετικοὺς ἀνὰ δύο πρώτους), καὶ $\mu(m) = 0$ σὲ κάθε ἄλλην περίπτωσιν, σκέφτηκαν νὰ χρησιμοποιήσουν ἕνα παρόμοιον ἄθροισμα, πάνω ὅμως ἀπὸ τοὺς ἀρχικοὺς διαιρέτες τοῦ n. Ὅρισαν λοιπὸν τὴν συνάρτησιν

$$\Lambda_R(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d\le R}} \mu(d)\log(R/d) = \sum_{d|n} \mu(d)\log(R/d)_+ \tag{4.11}$$

ὅπου R μία παράμετρος ἡ ὁποία ἐν γένει ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ διάστημα $[1,x]$ στὸ ὁποῖον θεωροῦμε τοὺς φυσικοὺς n (στὶς ἐφαρμογὲς τὸ R θὰ εἶναι μία μικρὴ δύναμις τοῦ x, ὥστε νὰ τείνει στὸ ἄπειρον μαζὶ μὲ τὸ x). Ἂς σημειώσουμε ὅτι θέλουμε τὸ R νὰ μεγαλώνει ἀπεριόριστα, ἐπειδὴ ἔτσι ἡ Λ_R γίνεται ὅλο καὶ καλύτερη προσέγγισις τῆς Λ. Πράγματι, δεδομένου ὅτι γιὰ τὴν συνάρτησιν Möbius ἰσχύει ἡ ταυτότης

$$\sum_{d|m} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{ἂν } m = 1 \\ 0 & \text{ἀλλιῶς} \end{cases},$$

θὰ ἔχουμε γιὰ κάθε φυσικὸν $n > 1$ ποὺ εἶναι μικρότερος ἀπὸ ἢ ἴσος μὲ τὸ R,

$$\begin{aligned} \Lambda_R(n) &= \sum_{\substack{d|n \\ d\le R}} \mu(d)\log(R/d) = \sum_{d|n} \mu(d)\log(R/d) \\ &= \log R \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d)\log(d) = 0 - \sum_{d|n} \mu(d)\log(d) \\ &= \log n \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d)\log(d) = \Lambda(n). \end{aligned}$$

Ὅμως, θέλουμε ταυτοχρόνως τὸ R νὰ μεγαλώνει ἀργὰ σὲ σχέσιν μὲ τὸ x, ὥστε τὸ πρόβλημα τοῦ νὰ βροῦμε ἐκτιμήσεις σὰν τὴν (4.9) γιὰ τὴν Λ_R νὰ μὴν εἶναι τόσο δύσκολον ὅσο ἡ ἴδια ἡ εἰκασία τῶν Hardy καὶ Littlewood. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι γιὰ τοὺς φυσικοὺς n οἱ ὁποῖοι εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τοῦ R, ἰσχύει

$$\Lambda_R(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d\le R}} \mu(d)\log(R/d) = \log R < \Lambda(n),$$

ἐπειδὴ σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν οἱ μόνοι διαιρέτες τοῦ n εἶναι τὸ 1 καὶ ὁ ἑαυτός του, καὶ ὁ διαιρέτης $n > R$ ἀποκλείεται στὸ παραπάνω ἄθροισμα.

Ἡ πρότασις γιὰ τὴν Λ_R ποὺ διατυπώνουν καὶ ἀποδεικνύουν στὸ [15] οἱ Goldston καὶ Yildirim εἶναι ἡ ἑξῆς:

Πρότασις 4.2.1. *Ἔστω ὅτι γιὰ κάθε φυσικὸν N, ἔχουμε θεωρήσει κάποιο σύνολον $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$ μὴ ἀρνητικῶν ἀκεραίων, μαζὶ μὲ «πολλαπλότητες» $j_i \in \{1,2\}, 1 \le i \le k$, γιὰ τὰ h_i, καθὼς καὶ μίαν παράμετρον $R = o(N^{1/(2k)})$. Ὑποθέτουμε ἐπίσης ὅτι ἰσχύει $\max \mathcal{H} \le R^A$ γιὰ κάποιαν θετικὴν σταθερὰν A ἀνεξάρτητην τοῦ N. Συμβολίζουμε μὲ r τὸ πλῆθος τῶν δεικτῶν $i \in \{1, \ldots, k\}$ γιὰ τοὺς ὁποίους $j_i = 2$. Τότε, ἐφ' ὅσον τὸ N καὶ τὸ R τείνουν στὸ ἄπειρον, ἔχουμε τὴν ἐκτίμησιν*

$$\sum_{n\le N} \Lambda_R^{j_1}(n+h_1)\cdots\Lambda_R^{j_k}(n+h_k) = (\mathfrak{S}(\mathcal{H}) + o_{k,A}(1))N(\log R)^r.$$

Ἂς παρατηρήσουμε ἀρχικῶς ὅτι στὴν περίπτωσιν ποὺ ὅλα τὰ j_i εἶναι ἴσα μὲ 1, ἡ πρότασις τῶν Goldston καὶ Yildirim δίνει

$$\sum_{n\le N} \Lambda_R(n+h_1)\cdots\Lambda_R(n+h_k) = (\mathfrak{S}(\mathcal{H}) + o_k(1))N,$$

τὸ ὁποῖον εἶναι συνεπὲς μὲ τὴν εἰκασίαν (4.9) τῶν Hardy καὶ Littlewood. Εἶναι ὅμως ἡ περίπτωσις ποὺ τὰ j_i εἶναι ὅλα ἴσα μὲ 2 ἡ ὁποία ἐνδιέφερε περισσότερον τόσο τοὺς Goldston καὶ Yildirim, γιὰ τὴν ἐφαρμογήν της στὰ κενὰ μεταξὺ διαδοχικῶν πρώτων, ὅσο καὶ τοὺς Green καὶ Tao. Ὅπως εἴπαμε καὶ προηγουμένως, γιὰ ὅλους τοὺς πρώτους n οἱ ὁποῖοι εἶναι μεγαλύτεροι τῆς παραμέτρου R ἰσχύει $\Lambda_R(n) = \log R$, ἄρα ἡ συνάρτησις $\Lambda_R^2(n)/\log^2 R$, ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι μὴ ἀρνητική, φράσσει κατὰ σημεῖον τὴν χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν $\mathbf{1}_P(n)$ τῶν πρώτων ἀριθμῶν στὸ διάστημα $\{n \in \mathbb{N} : n > R\}$. Κατὰ συνέπειαν, ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\sum_{N<n\leq 2N} \mathbf{1}_P(n+h_1)\cdots\mathbf{1}_P(n+h_k) \leq \sum_{N<n\leq 2N} \frac{\Lambda_R^2(n+h_1)}{\log^2 R}\cdots\frac{\Lambda_R^2(n+h_k)}{\log^2 R} \tag{4.12}$$

ὅταν τὸ R εἶναι μία μικρὴ δύναμις τοῦ N ὅπως στὴν πρότασιν τῶν Goldston καὶ Yildirim. Ὅμως, τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (4.12) εἶναι ἀκριβῶς τὸ πλῆθος $\pi((N,2N],\mathcal{H})$ τῶν φυσικῶν n μεταξὺ N καὶ $2N$ ποὺ ἔχουν τὴν ἰδιότητα ὅλες οἱ συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $(n+h_1,\ldots,n+h_k)$ νὰ εἶναι πρῶτοι, ἐνῷ τὸ δεξιὸν μέλος μπορεῖ νὰ ὑπολογιστεῖ ἀπὸ τὴν Πρότασιν 4.2.1 :

$$\sum_{N<n\leq 2N} \frac{\Lambda_R^2(n+h_1)}{\log^2 R}\cdots\frac{\Lambda_R^2(n+h_k)}{\log^2 R} = (\mathfrak{S}(\mathcal{H}) + o_k(1))\frac{N}{(\log R)^k}.$$

Λαμβάνουμε ἔτσι ἕνα ἄνω φράγμα γιὰ τὸ $\pi((N,2N],\mathcal{H})$ τῆς ἰδίας τάξεως μεγέθους μὲ αὐτὴν ποὺ προέβλεψαν οἱ Hardy καὶ Littlewood.

Αὐτὸς εἶναι καὶ ὁ κύριος λόγος γιὰ τὸν ὁποῖον οἱ Goldston καὶ Yildirim ἐπιλέγουν τὴν Λ_R, ἢ καὶ ἀκόμη πιὸ ἀποτελεσματικὲς ἐκδοχές της, γιὰ νὰ προσεγγίσουν τὴν συνάρτησιν von Mangoldt. Οὐσιαστικά, ἡ ἰδέα γιὰ περικεκομμένα ἀθροίσματα πάνω ἀπὸ τοὺς διαιρέτες κάποιου φυσικοῦ n προέρχεται ἀπὸ τὴν θεωρίαν τοῦ κοσκίνου τοῦ Selberg, ἡ ὁποία προσπαθεῖ νὰ ὑπολογίζει τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν σὲ κάποιο σύνολον φράσσοντας τὴν χαρακτηριστικήν τους ἀπὸ συναρτήσεις ποὺ ἀναθέτουν μεγάλες τιμὲς μόνον σὲ ἀριθμοὺς μὲ ὄχι καὶ πολλοὺς πρώτους διαιρέτες. Παραδείγματος χάριν, γιὰ ὁποιανδήποτε ἐπιλογὴν $\alpha = (\alpha_d)_{d=1}^R$ πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ $\alpha_1 := 1$, θὰ μπορούσαμε νὰ ὁρίσουμε τὴν συνάρτησιν

$$\sigma_\alpha(n) := \left(\sum_{\substack{d|n\\ d\leq R}} \alpha_d\right)^2,$$

καὶ τότε εἴτε τὸ ἄθροισμα

$$\sum_{N<n\leq 2N} \sigma_\alpha(n+h_1)\cdots\sigma_\alpha(n+h_k),$$

εἴτε τὸ

$$\sum_{N<n\le 2N} \sigma_\alpha\big((n+h_1)\cdots(n+h_k)\big) = \sum_{N<n\le 2N} \left(\sum_{\substack{d|(n+h_1)\cdots(n+h_k) \\ d\le R}} \alpha_d \right)^2$$

θὰ ἔδιναν ἄνω φράγματα γιὰ τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (4.12). Ἐφ' ὅσον ὅμως μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε ὁποιουσδήποτε πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α_d, λογικὸν εἶναι νὰ προσπαθήσουμε νὰ βελτιστοποιήσουμε τὴν ἐπιλογήν μας ὡς πρὸς κάποια κριτήρια ποὺ θὰ διαλέξουμε.

Γιὰ παράδειγμα, μπορεῖ νὰ χρειάζεται νὰ ἐλαχιστοποιήσουμε τὴν μέσην τιμὴν τῆς συναρτήσεως σ_α σὲ κάποιο διάστημα, ὅπως ὅταν ἐπιχειροῦμε νὰ κατασκευάσουμε ἕνα ψευδοτυχαῖον μέτρον γιὰ τοὺς πρώτους. Θέλοντας λοιπὸν νὰ ἐλαχιστοποιήσουμε τὴν

$$\mathbb{E}(\sigma_\alpha(n)|N<n\le 2N),$$

ἀναλύουμε ἀρχικῶς ἀπὸ τὸν τύπον τῆς σ_α τὸ ἄθροισμα

$$\begin{aligned}
\sum_{N<n\le 2N} \sigma_\alpha(n) &= \sum_{N<n\le 2N} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d\le R}} \alpha_d \right)^2 = \sum_{N<n\le 2N} \left(\sum_{\substack{d_1|n \\ d_1\le R}} \sum_{\substack{d_2|n \\ d_2\le R}} \alpha_{d_1}\alpha_{d_2} \right) \\
&= \sum_{d_1\le R} \sum_{d_2\le R} \left(\alpha_{d_1}\alpha_{d_2} \cdot \sum_{n<N\le 2N} \mathbf{1}_{d_1|n\ \&\ d_2|n} \right) \\
&= \sum_{d_1\le R} \sum_{d_2\le R} \left(\alpha_{d_1}\alpha_{d_2} \cdot \sum_{N<n\le 2N} \mathbf{1}_{[d_1,d_2]|n} \right) \\
&= \sum_{d_1\le R} \sum_{d_2\le R} \alpha_{d_1}\alpha_{d_2} \left(\frac{N}{[d_1,d_2]} + O(1) \right),
\end{aligned}$$

ὅπου μὲ $[d_1,d_2]$ συμβολίζουμε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν d_1, d_2, καὶ ἔπειτα παρατηροῦμε ὅτι ἂν $R \ll N^{1/2-\varepsilon}$ γιὰ κάποιο μικρὸν $\varepsilon > 0$, καὶ οἱ ἀριθμοὶ α_d ἔχουν ἐπιλεγεῖ ἀπὸ τὸ διάστημα $[-N^{\varepsilon/2}, N^{\varepsilon/2}]$, ὅπως εἶναι δυνατὸν στὶς περισσότερες ἐφαρμογές, τότε οἱ ὅροι $O(1)\cdot\alpha_{d_1}\alpha_{d_2}$ θὰ συνεισφέρουν τὸ πολὺ

$$\sum_{d_1\le R} \sum_{d_2\le R} O(1) \max_{d\le R} \alpha_d^2 = O(R^2\, N^\varepsilon) = O(N^{1-\varepsilon}) = o(N).$$

Κατὰ συνέπειαν, θὰ ἀρκεῖ νὰ ἐλαχιστοποιήσουμε τὴν τετραγωνικὴν μορφὴν

$$\sum_{d_1\le R} \sum_{d_2\le R} \frac{\alpha_{d_1}\alpha_{d_2}}{[d_1,d_2]}.$$

Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνει μὲ διάφορες τεχνικές (βλέπε παραδείγματος χάριν [15]), καὶ δίνει τελικῶς τὴν βέλτιστην ἐπιλογὴν

$$\alpha_d^{SEL} \approx \mu(d)\frac{\log(R/d)}{\log R},$$

ποὺ σημαίνει ὅτι κατ' οὐσίαν ἡ συνάρτησις σ_α^{SEL} ποὺ ζητούσαμε στὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν, μὲ τὴν ἰδιότητα νὰ ἐλαχιστοποιεῖ τὴν μέσην τιμὴν $\mathbb{E}(\sigma_\alpha(n)|N < n \leq 2N)$, εἶναι ἡ συνάρτησις $\Lambda_R^2/\log^2 R$ τῶν Goldston καὶ Yildirim.

4.2.2 Μικρὰ κενὰ μεταξὺ πρώτων ἀριθμῶν

Θὰ κλείσουμε αὐτὴν τὴν ἑνότητα γιὰ τοὺς Goldston καὶ Yildirim περιγράφοντας τὸ πῶς ἐφαρμόζουν τὶς ἐκτιμήσεις τους γιὰ τὴν Λ_R στὴν εὕρεσιν μικρῶν κενῶν μεταξὺ διαδοχικῶν πρώτων. Τὸ ἀρκετὰ ἁπλὸν ἐπιχείρημα ποὺ ἀκολουθεῖ τούς τὸ ὑπέδειξαν οἱ Granville καὶ Soundararajan: ὅπως εἴπαμε, θέλουμε, γιὰ κάποιαν θετικὴν παράμετρον H, νὰ δείξουμε ὅτι γιὰ ἄπειρα n τὸ διάστημα $[n, n+H]$ περιέχει τουλάχιστον δύο πρώτους. Ἀρχικῶς, δὲν ὑποθέτουμε τὴν H σταθερήν, ἀλλὰ ἐπιτρέπουμε νὰ εἶναι καὶ κάποιο μικρὸν πολλαπλάσιον τῆς ἀναμενομένης διαφορᾶς μεταξὺ διαδοχικῶν πρώτων. Παρατηροῦμε ὅτι θὰ μᾶς ἀρκοῦσε ἡ ἔκφρασις

$$\sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{0\leq h\leq H}\lambda(n+h) - \log(3N)\right) \tag{4.13}$$

νὰ εἶναι γνησίως θετικὴ γιὰ τὰ μεγάλα N, ὅπου ὑπενθυμίζουμε ὅτι $\lambda(n) = \log n$ ἂν τὸ n εἶναι πρῶτος, ἀλλιῶς $\lambda(n) = 0$. Δυστυχῶς ὅμως, ἀπὸ τὸ Θεώρημα Πρώτων Ἀριθμῶν, καὶ δεδομένου ὅτι $H \ll \log N$, προκύπτει ὅτι

$$\begin{aligned}(4.13) &= \sum_{0\leq h\leq H}\sum_{n=N+1}^{2N}\lambda(n+h) - \sum_{n=N+1}^{2N}\log(3N)\\ &= \sum_{0\leq h\leq H}\sum_{n=N+h+1}^{2N+h}\lambda(n) - N\log(3N) = (1+o(1))NH - N\log(3N) \leq 0.\end{aligned}$$

Ἡ συνήθης τεχνικὴ γιὰ αὐτὸ τὸ πρόβλημα εἶναι νὰ πολλαπλασιάσουμε τὴν ἔκφρασιν ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρει μὲ κατάλληλα μὴ ἀρνητικὰ βάρη (ἀρκετὰ ἁπλὰ ὥστε νὰ μποροῦμε νὰ ὑπολογίσουμε τὴν καινούριαν ἔκφρασιν, ἀλλὰ καὶ τέτοια ὥστε τὸ ἀποτέλεσμα νὰ βγεῖ θετικόν). Γιὰ κάθε σύνολον $\{h_1, \ldots, h_k\}$ ἀπὸ k μὴ ἀρνητικοὺς ἀκεραίους $\leq H$, θεωροῦμε τὴν ἔκφρασιν

$$\sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{0\leq h\leq H}\lambda(n+h) - \log(3N)\right)\Lambda_R^2(n+h_1)\cdots\Lambda_R^2(n+h_k), \tag{4.14}$$

ὅπου τὸ $R = o(N^{1/(2k)})$ θὰ εἶναι μία μικρὴ δύναμις τοῦ N ἡ ὁποία θὰ ἐπιλεγεῖ παρακάτω. Ἀπὸ τὴν Πρότασιν 4.2.1 ἔχουμε ὅτι

$$\log(3N)\cdot \sum_{n=N+1}^{2N} \Lambda_R^2(n+h_1)\cdots\Lambda_R^2(n+h_k) = \big(\mathfrak{S}(\{h_1,\ldots,h_k\})+o_k(1)\big)N\log(3N)(\log R)^k,$$

ἐνῷ γιὰ τοὺς ἄλλους προσθετέους τῆς (4.14), οἱ Goldston καὶ Yildirim διατυπώνουν καὶ ἀποδεικνύουν μίαν ἀκόμη πρότασιν:

Πρότασις 4.2.2. [15] *Ἔστω ὅτι γιὰ κάθε φυσικὸν N, ἔχουμε σύνολον $\mathcal{H} = \{h_1,\ldots,h_k\}$ μὴ ἀρνητικῶν ἀκεραίων, μαζὶ μὲ «πολλαπλότητες» $j_i \in \{1,2\}, 1 \le i \le k$, γιὰ τὰ h_i, καθὼς καὶ μίαν παράμετρον $R = o(N^{1/(4k)})$. Συμβολίζουμε μὲ r τὸ πλῆθος τῶν δεικτῶν $i \in \{1,\ldots,k\}$ γιὰ τοὺς ὁποίους $j_i = 2$. Ὑποθέτουμε ὅτι τὰ h_i ἀνήκουν σὲ κάποιο διάστημα $[0,H]$ μὲ $H \le R^{1/(4k)}$, καὶ θεωροῦμε ἐπιπλέον κάποιον ἀκέραιον $h_0 \in [0,H]$. Τότε, ἐφ' ὅσον τὸ N καὶ τὸ R τείνουν στὸ ἄπειρον, ἔχουμε τὴν ἐκτίμησιν*

$$\begin{aligned}\sum_{n\le N} &\Lambda_R^{j_1}(n+h_1)\cdots\Lambda_R^{j_k}(n+h_k)\lambda(n+h_0)\\ &= \begin{cases} \big(\mathfrak{S}(\mathcal{H}\cup\{h_0\})+o_k(1)\big)N(\log R)^r & \text{ἂν } h_0\notin\mathcal{H} \\ \big(\mathfrak{S}(\mathcal{H}\cup\{h_0\})+o_k(1)\big)N(\log R)^{r+1} & \text{ἂν } h_0\in\mathcal{H}\end{cases}.\end{aligned}$$

Ἕπεται ὅτι ἂν στὴν (4.14) ἐπιλέξουμε $R = N^{\frac{1}{4k}-\varepsilon}$ γιὰ κάποιο (αὐθαίρετα μικρόν) $\varepsilon > 0$, θὰ ἔχουμε ἀπὸ τὴν παραπάνω πρότασιν ὅτι

$$\begin{aligned}&\sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{0\le h\le H}\lambda(n+h)\right)\Lambda_R^2(n+h_1)\cdots\Lambda_R^2(n+h_k)\\ &= \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda(n+h_j)\right)\Lambda_R^2(n+h_1)\cdots\Lambda_R^2(n+h_k)\\ &\quad+\sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{\substack{0\le h\le H\\ h\ne h_j, 1\le j\le k}}\lambda(n+h)\right)\Lambda_R^2(n+h_1)\cdots\Lambda_R^2(n+h_k)\\ &= k\big(\mathfrak{S}(\{h_1,\ldots,h_k\})+o_k(1)\big)N(\log R)^{k+1}\\ &\quad+\sum_{\substack{0\le h\le H\\ h\ne h_j, 1\le j\le k}}\Big(\big(\mathfrak{S}(\{h,h_1,\ldots,h_k\})+o_k(1)\big)N(\log R)^k\Big)\end{aligned}$$

Πλέον, ἐκμεταλλευόμενοι ἔναν πολὺ χρήσιμον ὑπολογισμὸν τοῦ Patrick Gallagher [11] γιὰ τὴν ἰδιάζουσαν σειρὰν τῶν Hardy καὶ Littlewood, ὁ ὁποῖος μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι

$$\sum_{\substack{h_1,\ldots,h_k\in[0,H]\\ \text{διακεκριμένα}}} \mathfrak{S}(\{h_1,\ldots,h_k\}) \sim \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_k\in[0,H]\\ \text{διακεκριμένα}}} 1 \sim H^k$$

καθὼς τὸ H τείνει στὸ ἄπειρον, ἀρκεῖ νὰ ἀθροίσουμε τὴν (4.14) γιὰ ὅλα τὰ σύνολα $\{h_1,\ldots,h_k\}$ ἀπὸ k μὴ ἀρνητικοὺς ἀκεραίους $\leq H$, ὥστε νὰ βροῦμε τὰ κατάλληλα βάρη γιὰ τὴν (4.13). Δηλαδὴ

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{0\leq h\leq H}\lambda(n+h)-\log(3N)\right)\sum_{\substack{h_1,\ldots,h_k\in[0,H]\\ \text{διακεκριμένα}}}\Lambda_R^2(n+h_1)\cdots\Lambda_R^2(n+h_k)\\
=&\sum_{\substack{h_1,\ldots,h_k\in[0,H]\\ \text{διακεκριμένα}}}\Big(k\big(\mathfrak{S}(\{h_1,\ldots,h_k\})+o_k(1)\big)N(\log R)^{k+1}\Big)\\
&+\sum_{\substack{h_1,\ldots,h_k\in[0,H]\\ \text{διακεκριμένα}}}\sum_{\substack{0\leq h\leq H\\ h\neq h_j,1\leq j\leq k}}\Big(\big(\mathfrak{S}(\{h,h_1,\ldots,h_k\})+o_k(1)\big)N(\log R)^{k}\Big)\\
&-\sum_{\substack{h_1,\ldots,h_k\in[0,H]\\ \text{διακεκριμένα}}}\Big(\big(\mathfrak{S}(\{h_1,\ldots,h_k\})+o_k(1)\big)N\log(3N)(\log R)^{k}\Big)\\
=&\big(H^k+o_k(H^k)\big)kN(\log R)^{k+1}+\big(H^{k+1}+o_k(H^{k+1})\big)N(\log R)^k\\
&-\big(H^k+o_k(H^k)\big)N\log(3N)(\log R)^k\\
=&\big(k\log R+H-\log(3N)\big)\cdot\big(H^k+o_k(H^k)\big)N(\log R)^k,
\end{aligned}$$

καὶ μποροῦμε νὰ συμπεράνουμε ὅτι ἡ παραπάνω ἔκφρασις εἶναι θετικὴ γιὰ κάθε ἀρκετὰ μεγάλο N, ἀρκεῖ νὰ ἰσχύει

$$\begin{aligned}
k\log R+H-\log(3N)&=k\log\big(N^{\frac{1}{4k}-\varepsilon}\big)+H-\log(3N)>0\\
&\Leftrightarrow H>\left(\frac{3}{4}+\varepsilon'\right)\log N.
\end{aligned}$$

Ἂν λοιπὸν ἐπιλέξουμε τὴν παράμετρον $H\gtrapprox 3\log N/4$, τότε, ἐξαιτίας τῶν παραπάνω, θὰ ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνας φυσικὸς $n\in(N,2N]$ (γιὰ κάθε ἀρκετὰ μεγάλο N) μὲ τὴν ἰδιότητα στὸ διάστημα $[n,n+H]$ νὰ βρίσκονται τουλάχιστον δύο πρῶτοι $p_{m_1}<p_{m_2}$. Γιὰ αὐτοὺς τοὺς πρώτους θὰ ἰσχύει

$$\frac{p_{m_1+1}-p_{m_1}}{\log p_{m_1}}\leq\frac{p_{m_2}-p_{m_1}}{\log N}\leq\frac{H}{\log N}\leq\frac{3}{4}+\varepsilon'',$$

ὁπότε τελικῶς θὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} \leq \frac{3}{4}.$$

Μὲ τὸ παραπάνω ἐπιχείρημα οὐσιαστικά, ἀλλὰ θεωρῶντας πιὸ περίπλοκα βάρη ποὺ προέκυπταν ἀπὸ γραμμικοὺς συνδυασμοὺς τῶν συναρτήσεων $\Lambda_R(n+h_1)\cdots\Lambda_R(n+h_j), 1 \leq j \leq k$, οἱ Goldston καὶ Yildirim ἔδειξαν στὸ [15] ὅτι τὸ παραπάνω lim inf εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἢ ἴσον μὲ 1/4. Τελικῶς τὸ 2005, μαζὶ μὲ τὸν János Pintz [13], ἔλυσαν τὴν εἰκασίαν ἀποδεικνύοντας ὅτι

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} = 0.$$

Γιὰ αὐτό, ἀναγκάστηκαν νὰ ὁρίσουν ἀκόμη καλύτερες προσεγγίσεις τῆς συναρτήσεως von Mangoldt, ἢ μᾶλλον παραλλαγές της, οἱ ὁποῖες ἐντοπίζουν τὰ διανύσματα $(n+h_1,\dots,n+h_k)$ μὲ συντεταγμένες πρώτους μετρῶντας τοὺς διαφορετικοὺς ἀνὰ δύο, πρώτους διαιρέτες τοῦ πολυωνύμου $P_{\mathcal{H}}(n) := (n+h_1)\cdots(n+h_k)$ (οἱ ὁποῖοι θέλουμε νὰ εἶναι τὸ πολὺ k). Βλέπε ἐπίσης [12] γιὰ μίαν ἁπλουστευμένην ἀπόδειξιν τῆς εἰκασίας, χωρὶς τὰ ὑπόλοιπα κατὰ συνθήκην συμπεράσματα στὸ [13].

4.3 Οἱ προτάσεις τῶν Green καὶ Tao γιὰ τὴν Λ_R

Ἐπιστρέφοντας στὴν κατασκευὴν τοῦ ψευδοτυχαίου μέτρου γιὰ τοὺς πρώτους, ἂς δοῦμε πῶς χρησιμοποιοῦν οἱ Green καὶ Tao τὴν Λ_R τοῦ Ὁρισμοῦ (4.11) γιὰ νὰ ὁρίσουν τὸ μέτρον ν :

Ὁρισμός 4.3.1. Ἔστω παράμετρος $R_N := N^{k^{-1}2^{-k-4}}$, καί, ὅπως στὴν Πρότασιν 4.1.3, ἔστω $\epsilon_k := \frac{1}{2^k(k+4)!}$. Ὁρίζουμε τὴν οἰκογένειαν συναρτήσεων $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\nu_N(n) := \begin{cases} \frac{\phi(W_N)}{W_N \log R_N}\Lambda^2_{R_N}(W_N n+1) & \text{ὅταν } \epsilon_k N \leq n \leq 2\epsilon_k N \\ 1 & \text{ἀλλιῶς} \end{cases}$$

γιὰ κάθε $1 \leq n \leq N$, ὅπου ταυτίζουμε τὸ $[1,N]$ μὲ τὸ $\mathbb{Z}_N$ κατὰ προφανῆ τρόπον.

Χάριν ἁπλότητος, στὸ ἑξῆς δὲν θὰ γράφουμε τὴν ἐξάρτησι τῶν παραμέτρων W καὶ R ἀπὸ τὸ N, ἀλλὰ ἂς προσέξουμε ὅτι εἶναι ἰδιαιτέρως σημαντικὴ γιὰ τὶς ἀποδείξεις.

Λῆμμα 4.3.2. *Γιὰ κάθε $n \in \mathbb{Z}_N$, $\nu(n) \geq 0$. Ἐπίσης, ἐφ' ὅσον θεωρήσουμε ἀρκούντως μεγάλα N σὲ σχέσιν μὲ τὸ k, θὰ ἔχουμε $\nu(n) \geq k^{-1}2^{-k-5}\tilde{\lambda}(n)$ γιὰ κάθε $\epsilon_k N \leq n \leq 2\epsilon_k N$ ὅπως ζητεῖται στὴν Πρότασιν* 4.1.3.

Ἀπόδειξις. Τὸ ὅτι ἡ συνάρτησις ν τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1 εἶναι μὴ ἀρνητικὴ εἶναι προφανές. Ἐπίσης, ἐξηγήσαμε στὴν ὑποενότητα 4.2.1 ὅτι γιὰ κάθε πρῶτον ἀριθμὸν n μεγαλύτερον τῆς παραμέτρου R ἰσχύει $\Lambda_R(n) = \log R$. Ἑπομένως, ἂν θεωρήσουμε ἀρκετὰ μεγάλα N

ὥστε νὰ ἔχουμε $\epsilon_k N > R_N = N^{k^{-1}2^{-k-4}}$, τότε γιὰ κάθε φυσικὸν $n \in [\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]$, μὲ τὴν ἰδιότητα ὁ $Wn+1$ νὰ εἶναι πρῶτος, θὰ προκύψει ὅτι

$$\nu_N(n) = \frac{\phi(W)}{W \log R_N} \Lambda^2_{R_N}(Wn+1) = \frac{\phi(W)}{W} \log R_N = k^{-1} 2^{-k-4} \log N \frac{\phi(W)}{W}.$$

Ταυτοχρόνως θὰ ἰσχύει

$$\tilde{\lambda}_N(n) = \frac{\phi(W)}{W} \log(Wn+1) \leq \frac{\phi(W)}{W} \log(2\epsilon_k WN + 1) \leq \frac{\phi(W)}{W} \log(WN),$$

ὁπότε θὰ συμπεράνουμε τὸ ζητούμενον ἐφ' ὅσον ἐπιλέξουμε τὴν συνάρτησιν $w(N)$ νὰ μεγαλώνει ἀργὰ σὲ σχέσιν μὲ τὸ N : παραδείγματος χάριν, ἂν $w(N) = \log\log\log N$, τότε εἴδαμε ὅτι $W = \log^{O(1)}(\log N)$, καὶ ἄρα $\log(WN) = \log W + \log N \leq 2 \log N$ γιὰ τὰ μεγάλα N. $\square$

Γιὰ νὰ δείξουμε ἐπιπλέον ὅτι ἡ συνάρτησις ν τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1 εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον, χρειαζόμαστε ἐκτιμήσεις γιὰ τὴν $\Lambda^2_R(Wn+1)$ ὅπως στὴν Πρότασιν 4.2.1. Οἱ Green καὶ Tao διατυπώνουν μίαν πρότασιν γιὰ τὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν καὶ μίαν γιὰ τὴν συνθήκην συσχετισμοῦ:

Πρότασις 4.3.3. *Ἔστωσαν m, t θετικοὶ ἀκέραιοι. Γιὰ κάθε πρῶτον N μᾶς δίνονται m γραμμικὲς μορφὲς $\psi_i : \mathbb{Z}^t \to \mathbb{Z}$, $\psi_i(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^t L_{ij} x_j + b_i$, καὶ ἓν ὀρθογώνιον $B = \prod_{j=1}^t I_j \subset \mathbb{Z}^t$ ὥστε*

- *κάθε διάστημα I_j ἔχει μῆκος τουλάχιστον R^{10m},*
- *οἱ συντελεστὲς L_{ij} εἶναι ἀκέραιοι ἀπολύτως $\leq \sqrt{w(N)/2}$, κανένα διάνυσμα $(L_{ij})_{j=1}^t$ δὲν εἶναι ῥητὸν πολλαπλάσιον κάποιου ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα, καὶ κανένα δὲν εἶναι ταυτοτικὰ μηδέν,*
- *οἱ σταθεροὶ ὅροι b_i, τέλος, εἶναι ὁποιοιδήποτε ἀκέραιοι τέτοιοι ὥστε νὰ ἰσχύει*

$$\psi_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^t L_{ij} x_j + b_i > 0$$

  γιὰ κάθε $\boldsymbol{x} \in B$, γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, m$.

Θεωροῦμε τὶς παρηλλαγμένες γραμμικὲς μορφὲς $\theta_i := W\psi_i + 1$. Τότε, ἂν ἐπιλέξουμε τὴν συνάρτησιν $w(N)$ νὰ αὐξάνεται ἀπεριόριστα ἀλλὰ ἀρκετὰ ἀργὰ σὲ σχέσιν μὲ τὸ N, θὰ ἔχουμε

$$\mathbb{E}\left(\Lambda^2_R(\theta_1(\boldsymbol{x})) \cdots \Lambda^2_R(\theta_m(\boldsymbol{x})) | \boldsymbol{x} \in B\right) = (1 + o_{m,t}(1)) \left(\frac{W \log R}{\phi(W)}\right)^m. \tag{4.15}$$

Πρότασις 4.3.4. *Ἔστω $m \geq 1$ ἀκέραιος. Γιὰ κάθε πρῶτον N μᾶς δίνονται διάστημα $B \subset \mathbb{Z}$ μήκους τουλάχιστον R^{10m}, καὶ διαφορετικοὶ ἀνὰ δύο ἀκέραιοι $h_1, \ldots, h_m$ ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς $|h_i| \leq N^2$ καὶ $x + h_i > 0$ γιὰ κάθε $x \in B$ καὶ $1 \leq i \leq m$. Συμβολίζουμε μὲ $\Delta \equiv \Delta(N)$ τὸν ἀκέραιον*

$$\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq m} |h_i - h_j|.$$

Τότε, ἐφ' ὅσον καὶ πάλι ἐπιλέξουμε τὴν συνάρτησιν $w(N)$ νὰ αὐξάνεται ἀπεριόριστα ἀλλὰ ἀργὰ σὲ σχέσιν μὲ τὸ N, θὰ ὑπάρχει σταθερὰ $C_m > 0$, ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ m, ὥστε γιὰ ἀρκετὰ μεγάλα $N > N_0(m)$ νὰ ἰσχύει

$$\begin{aligned} \text{(4.16)} \quad & \mathbb{E}\left(\Lambda_R^2(W(x+h_1)+1) \cdots \Lambda_R^2(W(x+h_m)+1) | x \in B\right) \\ & \qquad \leq O_m(1) \left(\frac{W \log R}{\phi(W)}\right)^m \prod_{p|\Delta} (1 + \frac{C_m}{\sqrt{p}}) \end{aligned}$$

(ἐδῶ, ὅπως καὶ στὰ ἑπόμενα, μὲ τὸν δείκτην p θὰ ἐννοοῦμε πρώτους).

Σημείωσις. Ἡ τελευταία πρότασις εἶναι ἡ πιὸ κοντινὴ στὴν Πρότασιν 4.2.1 τῶν Goldston καὶ Yildirim. Βεβαίως, ἐπειδὴ στὶς ποσότητες μέσα στὰ ὁλοκληρώματα ἐμφανίζονται μόνον οἱ τιμὲς τῆς Λ_R στοὺς φυσικοὺς ποὺ εἶναι ἰσοϋπόλοιποι μὲ τὸ 1 (mod W), καὶ ἔχουμε ἐπιλέξει τὸ W νὰ αὐξάνεται ἀπεριόριστα (ἤ, ὅπως θὰ δοῦμε ὅταν τελικῶς τὸ σταθεροποιήσουμε, ἡ τιμή του νὰ εἶναι πολὺ μεγάλη), γι' αὐτὸ καὶ στὶς τελικές μας ἐκτιμήσεις δὲν ἐμφανίζεται ἡ ἰδιάζουσα σειρὰ τῶν Hardy καὶ Littlewood ἀλλὰ ὁ σαφῶς ἁπλούστερος ὅρος $(\phi(W)/W)^m$. Ἀπὸ τὴν ἄλλην, στὴν ἀπόδειξιν τῆς Προτάσεως 4.3.3 χρειάζεται ἕνα ἐπιπλέον ἐπιχείρημα δίπλα σὲ αὐτὰ τῶν Goldston καὶ Yildirim ὥστε νὰ χειριστοῦμε τὶς γραμμικὲς μορφὲς πολλῶν μεταβλητῶν. Πάντως, ὀφείλουμε νὰ σημειώσουμε ὅτι, ἂν κάποιος κατανοήσει τὰ ἐπιχειρήματα ποὺ ἀκολουθοῦν στὶς ἑπόμενες τρεῖς ὑποενότητες, θὰ μπορεῖ εὔκολα νὰ διαβάσει καὶ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως 4.2.1 στὸ [15].

4.3.1 Μετατρέποντας σειρὲς πάνω ἀπὸ τοὺς φυσικοὺς σὲ γινόμενα Euler

Ξεκινοῦμε μὲ τὴν περιγραφὴν τῆς ἀποδείξεως τῆς Προτάσεως 4.3.3. Ἂς ὑπενθυμίσουμε ὅτι γιὰ κάθε $1 \leq i \leq m$ μᾶς δίνεται μία γραμμικὴ μορφὴ $\psi_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^t L_{ij} x_j + b_i$ μὲ ἀκεραίους συντελεστὲς οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν τὴν $|L_{ij}| \leq \sqrt{w(N)/2}$, ὅπου $w(N)$ ἡ συνάρτησις τοῦ Ὁρισμοῦ 4.1.2. Τὰ b_i ἐπίσης ἀνήκουν στὸ $\mathbb{Z}$ καὶ εἶναι τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $(x_1, \ldots, x_t) \in B = \prod_{j=1}^t I_j$ νὰ ἰσχύει $\psi_i(\boldsymbol{x}) > 0$, ὅπου $B \subset \mathbb{Z}^t$ τὸ ὀρθογώνιον στὸ ὁποῖον θεωροῦμε τὶς γραμμικὲς μορφές, μὲ τὴν ἰδιότητα κάθε «πλευρά» του I_j νὰ ἔχει μῆκος $\geq R^{10m}$. Ἔχουμε ἐπιπλέον στὶς ὑποθέσεις μας ὅτι κανένα διάνυσμα συντελεστῶν $(L_{ij})_{j=1}^t$ δὲν εἶναι μηδὲν ἢ ῥητὸν πολλαπλάσιον κάποιου ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα διανύσματα.

Θέτουμε $\theta_i := W\psi_i + 1$ γιὰ κάθε i, καὶ ἐπιδιώκουμε νὰ δείξουμε τὴν ἐκτίμησιν

$$\mathbb{E}\left(\Lambda_R^2(\theta_1(\boldsymbol{x})) \cdots \Lambda_R^2(\theta_m(\boldsymbol{x})) | \boldsymbol{x} \in B\right) = (1 + o_{m,t}(1)) \left(\frac{W \log R}{\phi(W)}\right)^m.$$

Ἀπὸ τὸν Ὁρισμὸν (4.11), ἡ παραπάνω μέση τιμὴ γράφεται ὡς

$$\mathbb{E}\Bigg(\prod_{i=1}^{m}\sum_{\substack{d_i,d_i'\le R\\ d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}}\mu(d_i)\mu(d_i')\log\frac{R}{d_i}\log\frac{R}{d_i'}\;\Big|\;\boldsymbol{x}\in B\Bigg),$$

καὶ μποροῦμε, ἀλλάζοντας τὴν σειρὰν τῆς ὁλοκληρώσεως καὶ τῆς ἀθροίσεως, νὰ τὴν γράφουμε καὶ ὡς

$$\sum_{d_1,\dots,d_m,d_1',\dots,d_m'\le R}\left(\prod_{i=1}^{m}\mu(d_i)\mu(d_i')\log\frac{R}{d_i}\log\frac{R}{d_i'}\right)\cdot\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\;\Big|\;\boldsymbol{x}\in B\right). \tag{4.17}$$

Ἀφοῦ ἐμφανίζεται ἡ συνάρτησις Möbius, μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι ἀθροίζουμε πάνω ἀπὸ τὰ d_i, d_i' τὰ ὁποῖα εἶναι ἐλεύθερα τετραγώνων. Ἀρχικὸς στόχος μας εἶναι νὰ ἀντικαταστήσουμε τὸ τυχὸν ὀρθογώνιον B πάνω στὸ ὁποῖον ὁλοκληρώνουμε ἀπὸ πιὸ συγκεκριμένα πεδία ὁλοκληρώσεως (μποροῦμε νὰ ἐπιχειρήσουμε κάτι τέτοιο ἐπειδὴ ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς Λ_R δὲν φαίνεται νὰ ἔχει ἰδιαίτερην σημασίαν πόσο μεγάλους φυσικοὺς περιέχουν τὰ διαστήματα I_j, τὸ γινόμενον τῶν ὁποίων σχηματίζει τὸ B, μὲ ἄλλα λόγια $\Lambda_R(n_1) = \Lambda_R(n_2)$, ὅσο μεγαλύτερον καὶ νὰ εἶναι τὸ n_2 ἀπὸ τὸ n_1, ὅταν οἱ πρῶτοι διαιρέτες τοῦ n_1 ποὺ εἶναι $\le R$ εἶναι ἴδιοι μὲ τοὺς πρώτους διαιρέτες τοῦ n_2 ποὺ εἶναι $\le R$). Σταθεροποιοῦμε κάποια $d_1,\dots,d_m,d_1',\dots,d_m'$ καὶ θέτουμε $D := [d_1,\dots,d_m,d_1',\dots,d_m']$ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιόν τους· ἔτσι ἔχουμε ὅτι $D \le R^{2m}$ καὶ ἐπίσης ὅτι τὸ D εἶναι ἐλεύθερον τετραγώνων. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἡ ἔκφρασις $\prod_{i=1}^{m}\mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}$ εἶναι περιοδικὴ ὡς πρὸς καθεμίαν ἀπὸ τὶς συντεταγμένες τοῦ $\boldsymbol{x}$ μὲ κοινὴν περίοδον D, ἑπομένως, γιὰ ὁποιαδήποτε ὑποδιαστήματα I_j' τῶν I_j γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $|I_j'| = D$ γιὰ κάθε j, θὰ μπορούσαμε νὰ γράψουμε τὴν ἰσότητα

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\;\Big|\;\boldsymbol{x}\in\prod_{j=1}^{t}I_j'\right)=\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\;\Big|\;\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_D^t\right).$$

Ἐκμεταλλευόμενοι αὐτὴν τὴν παρατήρησιν, γράφουμε γιὰ κάθε j, $|I_j| = k_jD + r_j$ μὲ $0 \le r_j < D$ καὶ $k_j \ge R^{8m} - 1$ (δεδομένου ὅτι $|I_j| \ge R^{10m}, D \le R^{2m}$), ἔπειτα χωρίζουμε καθένα ἀπὸ τὰ διαστήματα I_j σὲ $k_j + 1$ διαδοχικὰ ὑποδιαστήματα $I_{j,l}$, $1 \le l \le k_j + 1$, μὲ τὰ πρῶτα k_j ἀπὸ αὐτὰ νὰ ἔχουν μῆκος D, ἐνῷ τὸ ἐναπομεῖναν μῆκος r_j (δηλαδὴ ἂν $r_j = 0$, θεωροῦμε μόνον k_j ἰσομήκη ὑποδιαστήματα). Προφανῶς τὸ ὀρθογώνιον B εἶναι ἡ ἕνωσις ὅλων τῶν πιθανῶν γινομένων $\prod_{j=1}^t I_{j,l_j}$, ἄρα

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})} \,\middle|\, \boldsymbol{x}\in B\right)\\
&=\frac{1}{\prod_{j=1}^t |I_j|}\cdot\sum_{\boldsymbol{x}\in B}\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}=\prod_{j=1}^t\frac{1}{k_jD+r_j}\cdot\sum_{\boldsymbol{x}\in B}\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\\
&\geq\prod_{j=1}^t\frac{1}{(k_j+1)D}\cdot\sum_{1\leq l_1\leq k_1}\cdots\sum_{1\leq l_t\leq k_t}\left(\sum_{\boldsymbol{x}\in\prod_{j=1}^t I_{j,l_j}}\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\right)\\
&=\prod_{j=1}^t\frac{1}{(k_j+1)D}\cdot\sum_{1\leq l_1\leq k_1}\cdots\sum_{1\leq l_t\leq k_t}\left(D^t\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\prod_{j=1}^t I_{j,l_j}\right)\right)\\
&=\prod_{j=1}^t\frac{1}{k_j+1}\cdot\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_D^t\right)\sum_{1\leq l_1\leq k_1}\cdots\sum_{1\leq l_t\leq k_t}1\\
&=\prod_{j=1}^t\frac{k_j}{k_j+1}\cdot\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_D^t\right)
\end{aligned}$$

καὶ ἡ τελευταία ἔκφρασις εἶναι ἴση μὲ

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_D^t\right)-O_t\Big(\frac{1}{R^{8m}}\Big)$$

ἀφοῦ γιὰ κάθε j, $k_j+1\geq R^{8m}$. Ἀναλόγως, ἐπεκτείνοντας τὰ I_j σὲ διαστήματα I_j' καθένα μὲ μῆκος ἀκριβῶς $(k_j+1)D$, καὶ μετὰ χωρίζοντας τὰ I_j' σὲ ἰσομήκη ὑποδιαστήματα I_{j,l_j}', $1\leq l_j\leq k_j+1$, βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in B\right)\\
&\leq\prod_{j=1}^t\frac{1}{k_jD}\cdot\sum_{1\leq l_1\leq k_1+1}\cdots\sum_{1\leq l_t\leq k_t+1}D^t\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\prod_{j=1}^t I_{j,l_j}'\right)\\
&=\prod_{j=1}^t\frac{k_j+1}{k_j}\cdot\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_D^t\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{d_i,d_i'|\theta_i(\boldsymbol{x})}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_D^t\right)+O_t\Big(\frac{1}{R^{8m}-1}\Big),
\end{aligned}$$

ἄρα τελικῶς (γιὰ τὰ τυχόντα $d_1, \ldots, d_m, d'_1, \ldots, d'_m$ ποὺ ἔχουμε σταθεροποιήσει) ἰσχύει

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{d_i, d'_i | \theta_i(\boldsymbol{x})} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in B\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{d_i, d'_i | \theta_i(\boldsymbol{x})} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_D^t\right) + O_t(R^{-8m}).$$

Ἐπιστρέφοντας στὴν ἔκφρασιν (4.17), βλέπουμε μὲ χονδροειδεῖς ὑπολογισμοὺς ὅτι εἶναι ἴση μὲ

$$\sum_{d_1, \ldots, d_m, d'_1, \ldots, d'_m \le R} \left(\prod_{i=1}^{m} \mu(d_i)\mu(d'_i) \log\frac{R}{d_i} \log\frac{R}{d'_i}\right) \cdot \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{d_i, d'_i | \theta_i(\boldsymbol{x})} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_D^t\right) + O_t\big(R^{-6m} \log^{2m} R\big),$$

συνεπῶς μποροῦμε στὸ ἑξῆς νὰ ἀγνοοῦμε τὸν ὅρον $O_t\big(R^{-6m} \log^{2m} R\big)$ ἀφοῦ τὸ R τείνει στὸ ἄπειρον, καὶ νὰ ἐπικεντρωθοῦμε στὸ νὰ δείξουμε ὅτι

$$\sum_{d_1, \ldots, d_m, d'_1, \ldots, d'_m \le R} \left(\prod_{i=1}^{m} \mu(d_i)\mu(d'_i) \log\frac{R}{d_i} \log\frac{R}{d'_i}\right) \cdot \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{d_i, d'_i | \theta_i(\boldsymbol{x})} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_D^t\right) = (1 + o_{m,t}(1)) \left(\frac{W \log R}{\phi(W)}\right)^m. \tag{4.18}$$

Πλέον ἡ ποσότης ποὺ ἀθροίζουμε εἶναι πολὺ συγκεκριμένη καί, ὅπως θὰ δοῦμε, μπορεῖ νὰ ἐκφραστεῖ μέσῳ πολλαπλασιαστικῶν συναρτήσεων τῶν d_i, d'_i, δηλαδὴ συναρτήσεων $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ μὲ τὴν ἰδιότητα $f(mn) = f(m)f(n)$ ὅταν τὰ m, n εἶναι σχετικῶς πρῶτα (μία τέτοια συνάρτησις εἶναι ἡ συνάρτησις Möbius μ). Ἤδη ἀπὸ τὸ Κινεζικὸν θεώρημα ὑπολοίπων καὶ ἐπειδὴ τὰ d_i, d'_i εἶναι ἐλεύθερα τετραγώνων, ἔχουμε τὴν ἰσότητα

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{d_i, d'_i | \theta_i(\boldsymbol{x})} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_D^t\right) = \prod_{p|D} \mathbb{E}\left(\prod_{i : p | d_i d'_i} \mathbf{1}_{p | \theta_i(\boldsymbol{x})} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^t\right). \tag{4.19}$$

Πράγματι, καὶ στὰ δύο μέλη διαιροῦμε μὲ τοὺς πληθαρίθμους τῶν πεδίων ὁλοκληρώσεως, ἄρα ἀφοῦ τὸ D εἶναι ἐλεύθερον τετραγώνων, ἰσχύει $D = \prod_{p|D} p$ καὶ $|\mathbb{Z}_D^t| = \prod_{p|D} |\mathbb{Z}_p^t|$. Ἀπὸ τὴν ἄλλην, ἀπὸ τὸ Κινεζικὸν θεώρημα ὑπολοίπων ξέρουμε ὅτι, ἂν $D = p_1 p_2 \cdots p_s$, τότε ἡ ἀπεικόνισις

$$x \bmod D \mapsto h(x) := (x \bmod p_1, x \bmod p_2, \ldots, x \bmod p_s)$$

ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_D$ στὸ $\mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_s}$ εἶναι 1-1 καὶ ἐπί. Συνεπῶς γιὰ κάθε $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{Z}_{p_1}^t, \ldots, \boldsymbol{x}_s \in \mathbb{Z}_{p_s}^t$ καὶ γιὰ κάθε $1 \le j \le t$, μποροῦμε νὰ βροῦμε μοναδικὰ $x_j \in \mathbb{Z}_D$ ὥστε νὰ ἰσχύει

$$h(x_j) = (x_{1,j} \bmod p_1, x_{2,j} \bmod p_2, \ldots, x_{s,j} \bmod p_s)$$

ὅπου $x_{l,j}$ ἡ j συντεταγμένη τοῦ διανύσματος $\boldsymbol{x}_l \in \mathbb{Z}_{p_l}^t$. Ὅμως τότε, ἂν $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_t)$ εἶναι τὸ ἀντίστοιχον διάνυσμα στὸ $\mathbb{Z}_D^t$, παρατηροῦμε ὅτι

$$\prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{d_i, d_i' | \theta_i(\boldsymbol{x})} = \prod_{l=1}^{s} \left(\prod_{i: p_l | d_i d_i'} \mathbf{1}_{p_l | \theta_i(\boldsymbol{x}_l)} \right),$$

ἄρα τελικῶς οἱ ἀριθμητὲς τῶν δύο μελῶν τῆς (4.19) *εἶναι ἴσοι:*

$$\sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_D^t} \prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{d_i, d_i' | \theta_i(\boldsymbol{x})} = \prod_{l=1}^{s} \left(\sum_{\boldsymbol{x}_l \in \mathbb{Z}_{p_l}^t} \prod_{i: p_l | d_i d_i'} \mathbf{1}_{p_l | \theta_i(\boldsymbol{x}_l)} \right).$$

Δεχόμαστε βεβαίως τὴν σύμβασιν ὅτι $\prod_{i:p|d_i d_i'} c_i = 1$ ὅταν δὲν ὑπάρχει κανένα i ὥστε τὸ p νὰ διαιρεῖ τὸ $d_i d_i'$ (ὅποιοι καὶ νὰ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ c_i), μποροῦμε ἑπομένως νὰ γράψουμε

$$\prod_{p|D} \mathbb{E} \left(\prod_{i:p|d_i d_i'} \mathbf{1}_{p|\theta_i(\boldsymbol{x})} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^t \right) = \prod_{p} \mathbb{E} \left(\prod_{i:p|d_i d_i'} \mathbf{1}_{p|\theta_i(\boldsymbol{x})} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^t \right),$$

ἀφοῦ ὅταν $p \nmid D$, ἡ ἀντίστοιχη μέση τιμὴ εἶναι ἀκριβῶς 1. Θέτουμε μάλιστα

$$X_{d_1, \ldots, d_m}(p) := \{1 \le i \le m : p | d_i\},$$

καὶ γιὰ κάθε ὑποσύνολον $X \subseteq \{1, \ldots, m\}$,

$$\omega_X(p) := \mathbb{E} \left(\prod_{i \in X} \mathbf{1}_{p|\theta_i(\boldsymbol{x})} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^t \right),$$

ὁπότε μὲ τὸν νέον συμβολισμὸν

$$\mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{d_i, d_i' | \theta_i(\boldsymbol{x})} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_D^t \right) = \prod_{p} \omega_{X_{d_1, \ldots, d_m}(p) \cup X_{d_1', \ldots, d_m'}(p)}(p),$$

ἐνῷ τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (4.18) γίνεται
(4.20)

$$\sum_{d_1, \ldots, d_m, d_1', \ldots, d_m' \in \mathbb{Z}^+} \left(\prod_{i=1}^{m} \mu(d_i) \mu(d_i') (\log \frac{R}{d_i})_+ (\log \frac{R}{d_i'})_+ \right) \prod_{p} \omega_{X_{d_1, \ldots, d_m}(p) \cup X_{d_1', \ldots, d_m'}(p)}(p).$$

Ἔτσι, ἕνα μέρος τῆς ποσότητος ποὺ θέλουμε νὰ ἀθροίσουμε ἔχει ἤδη γραφεῖ ὡς πολλαπλασιαστικὴ συνάρτησις τῶν d_i, d_i'. Γιὰ νὰ γράψουμε καὶ τοὺς λογαρίθμους ποὺ ἐμφανίζονται εἰσάγοντας πολλαπλασιαστικὲς συναρτήσεις τῶν d_i, d_i', καταφεύγουμε σὲ μίαν συνήθη τεχνικὴν τῆς ἀναλυτικῆς θεωρίας ἀριθμῶν ποὺ χρησιμοποιεῖ τὴν θεωρίαν τῶν μιγαδικῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων καὶ τὸ θεώρημα Fubini: θεωροῦμε τὴν καμπύλην Γ_R ποὺ δίνεται ἀπὸ τὴν παραμέτρησιν

$$\Gamma_R(t) := \frac{1}{\log R} + it, \ -\infty < t < +\infty \tag{4.21}$$

καὶ θυμόμαστε τὴν ταυτότητα

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{x^z}{z^2}dz = (\log x)_+ \tag{4.22}$$

ἡ ὁποία ἰσχύει γιὰ κάθε πραγματικὸν $x > 0$. (Ἡ ταυτότης μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ μὲ τὴν μέθοδο τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων· θὰ παραθέσουμε αὐτὴν τὴν ἀπόδειξιν στὴν ἑπομένην ὑποενότητα ἀφοῦ ὑπενθυμίσουμε κάποιες ἰδιότητες τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων ποὺ μᾶς χρειάζονται. Στὴν πραγματικότητα, ἡ ταυτότης ἰσχύει ἂν Γ_R εἶναι ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς καμπύλες μὲ παραμέτρησιν $a + it$, $-\infty < t < +\infty$, γιὰ $a > 0$. Ἑπομένως, πρὸς τὸ παρόν, ἡ ἐπιλογὴ τοῦ $\frac{1}{\log R}$ γιὰ τὸ πραγματικὸν μέρος τῆς Γ_R δὲν μπορεῖ νὰ δικαιολογηθεῖ, θὰ μᾶς διευκολύνει ὅμως ἀργότερα, ὅταν θὰ χρειαστεῖ νὰ ἐκτιμήσουμε τὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα ποὺ θὰ ἐμφανιστοῦν στὴν (4.20). Ἤδη παρατηροῦμε ὅτι τὸ R^z εἶναι φραγμένον στὴν Γ_R, ἐνῷ τὸ $1/z^2$ δὲν εἶναι πολὺ μεγάλο.) Χρησιμοποιῶντας αὐτὴν τὴν ταυτότητα, μποροῦμε νὰ γράψουμε τὴν (4.20) ὡς μίαν σειρὰν διαδοχικῶν ὁλοκληρωμάτων

$$(2\pi i)^{-2m}\int_{\Gamma_R}\cdots\int_{\Gamma_R} F(z,z')\prod_{j=1}^{m}\frac{R^{z_j+z_j'}}{z_j^2 z_j'^2}dz_j dz_j' \tag{4.23}$$

ὅπου ἐμφανίζονται $2m$ μιγαδικὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα πάνω στὴν καμπύλην Γ_R, ἕνα γιὰ καθεμίαν ἀπὸ τὶς μεταβλητὲς $z_1, \ldots, z_m, z_1', \ldots, z_m'$, καὶ ἔχουμε θέσει $z := (z_1 \ldots, z_m)$, $z' := (z_1', \ldots, z_m')$, καὶ

$$F(z,z') := \sum_{d_1,\ldots,d_m,d_1',\ldots,d_m' \in \mathbb{Z}^+}\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{\mu(d_j)\mu(d_j')}{d_j^{z_j} d_j'^{z_j'}}\right)\prod_p \omega_{X_{d_1,\ldots,d_m}(p)\cup X_{d_1',\ldots,d_m'}(p)}(p) \tag{4.24}$$

(χρησιμοποιοῦμε πλέον τὸ σύμβολον j στοὺς δεῖκτες ὥστε νὰ μὴν ὑπάρχει σύγχυσις μὲ τὴν μιγαδικὴν μονάδα). Ὅπως θὰ δοῦμε, ἡ ποσότης μέσα στὰ ὁλοκληρώματα εἶναι ἀπολύτως ὁλοκληρώσιμη, ἄρα ἐξαιτίας τοῦ θεωρήματος Fubini δὲν ἔχει σημασίαν ἡ σειρὰ τῶν ὁλοκληρωμάτων. Ἐπίσης, ἡ ποσότης ποὺ ἀθροίζουμε στὴν (4.24) εἶναι πολλαπλασιαστικὴ συνάρτησις τῶν d_j, d_j', ἄρα (τυπικῶς τουλάχιστον) μπορεῖ νὰ γραφεῖ ὡς ἕνα γινόμενον Euler, δηλαδὴ $F(z,z') = \prod_p E_p(z,z')$ ὅπου

$$E_p(z,z') := \sum_{X,X' \subseteq \{1,\ldots,m\}} \frac{(-1)^{|X|+|X'|}\omega_{X\cup X'}(p)}{p^{\sum_{j\in X} z_j + \sum_{j\in X'} z_j'}}. \tag{4.25}$$

Ἀπὸ τὸν τύπον τῶν $\omega_X(p)$ ἔχουμε ὅτι $\omega_\emptyset(p) = 1$ καὶ $\omega_X(p) \le 1$ γιὰ ὅλα τὰ ὑποσύνολα X, ἄρα $E_p(z,z') = 1 + O_\sigma(1/p^\sigma)$ ὅταν $\Re(z_j), \Re(z_j') > \sigma$ γιὰ κάποιον θετικὸν ἀριθμὸν σ.

Ἕπεται ὅτι ὄντως τὰ μερικὰ γινόμενα $\prod_{p\le n} E_p(z,z'), n \in \mathbb{N}$, συγκλίνουν στὴν $F(z,z')$ τουλάχιστον στὴν περιοχὴν $\{\Re(z_j), \Re(z_j') > 1\}$, μάλιστα τὸ ἀπειρογινόμενον $\prod_p E_p(z,z')$ συγκλίνει ἀπολύτως σὲ αὐτὴν τὴν περιοχήν.

Γιὰ νὰ συνεχίσουμε, χρειάζεται νὰ βροῦμε ἀκριβέστερες ἐκτιμήσεις γιὰ τὰ $\omega_X(p)$: θὰ χρησιμοποιήσουμε γι' αὐτὸ τὶς ὑποθέσεις μας γιὰ τὶς γραμμικὲς μορφὲς $\psi_1, \dots, \psi_m$.

Λῆμμα 4.3.5. *Ἂν $p \le w(N)$, τότε $\omega_X(p) = 0$ γιὰ κάθε μὴ κενὸν σύνολον X. Συνεπῶς $E_p = 1$ ὅταν $p \le w(N)$. Ἀντιθέτως, ἂν $p > w(N)$, τότε $\omega_X(p) = p^{-1}$ ὅταν $|X| = 1$, καὶ $\omega_X(p) \le p^{-2}$ ὅταν $|X| \ge 2$.*

Ἀπόδειξις. Δεδομένου ὅτι οἱ ἀπεικονίσεις $\theta_i : \mathbb{Z}_p^t \to \mathbb{Z}_p$ εἶναι ταυτοτικῶς 1 ὅταν $p \le w(N)$ (ἀφοῦ τότε $p|W \Rightarrow W\psi_i(\boldsymbol{x}) = 0 \pmod p$ γιὰ κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^t$), ἡ πρώτη πρότασις ἕπεται ἀμέσως.

Γιὰ τὴν περίπτωσιν $p > w(N)$ καὶ $|X| = 1$, παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀντίστοιχη ἀπεικόνισις $\theta_i : \mathbb{Z}_p^t \to \mathbb{Z}_p$ καλύπτει ὁμοιόμορφα τὸ $\mathbb{Z}_p$, δηλαδὴ εἶναι p^{t-1} πρὸς 1, ἀφοῦ τὸ διάνυσμα τῶν συντελεστῶν $(WL_{ij})_{j=1}^t$ εἶναι μὴ μηδενικὸν στὸ $\mathbb{Z}_p^t$. Γιὰ νὰ τὸ δοῦμε αὐτό, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἂν ὁ p διαιρεῖ τὴν j συντεταγμένην WL_{ij}, τότε θὰ διαιρεῖ τὸ L_{ij} (ἐπειδὴ $p > w(N) \Rightarrow p \nmid W$). Ὅμως σύμφωνα μὲ τὴν διατύπωσιν τῆς Προτάσεως 4.3.3, τὸ L_{ij} εἶναι ἀκέραιος ἀπολύτως $\le \sqrt{w(N)/2} \le w(N) < p$, ἄρα γιὰ νὰ διαιρεῖται ἀπὸ τὸ p, θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν, καὶ αὐτὸ ἐξ' ὑποθέσεως δὲν συμβαίνει γιὰ ὅλες τὶς συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $(L_{ij})_{j=1}^t$. Συμπεραίνουμε ὅτι

$$\omega_X(p) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\theta_j(\boldsymbol{x})=0 \pmod p} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^t) = \frac{1}{p^t} \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^t} \mathbf{1}_{\theta_j(\boldsymbol{x})=0 \pmod p} = \frac{p^{t-1}}{p^t}.$$

Ἂς δοῦμε τώρα τὴν περίπτωσιν ποὺ $p > w(N)$ καὶ $|X| = s \ge 2$: ἰσχυριζόμαστε ὅτι καμμία ἀπὸ τὶς s ὁμογενεῖς γραμμικὲς μορφὲς $W(\psi_i - b_i), i \in X$, δὲν εἶναι πολλαπλάσιον $\pmod p$ κάποιας ἀπὸ τὶς ὑπόλοιπες. Ἂν αὐτὸ δὲν ἴσχυε, θὰ ὑπῆρχαν $i, i' \in X, i \ne i'$, καὶ $\lambda \in \mathbb{Z}$ ὥστε νὰ ἔχουμε $L_{ij} \equiv \lambda L_{i'j} \pmod p$ γιὰ κάθε $1 \le j \le t$. Ἀπὸ τὴν προηγουμένην παράγραφον, τὰ διανύσματα $(L_{ij})_{j=1}^t, (L_{i'j})_{j=1}^t$ δὲν εἶναι μηδενικὰ στὸ $\mathbb{Z}_p^t$, ἄρα τὸ λ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι $0 \bmod p$. Αὐτὸ ὅμως σημαίνει ὅτι ἂν γιὰ κάποιο j ὁ p διαιρεῖ τὸν $L_{i'j}$, τότε θὰ διαιρεῖ καὶ τὸν L_{ij}, καὶ ἀντιστρόφως. Ὅπως εἴδαμε προηγουμένως, ἐπειδὴ $|L_{ij}|, |L_{i'j}| < p$ γιὰ κάθε j, αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὅτι ἂν ὁ ἀκέραιος $L_{i'j}$ εἶναι μηδέν, τότε καὶ ὁ L_{ij} εἶναι μηδέν, καὶ ἀντιστρόφως. Ὅμως τὰ διανύσματα ἀκεραίων $(L_{ij})_{j=1}^t, (L_{i'j})_{j=1}^t$ δὲν εἶναι τὸ ἕνα ῥητὸν πολλαπλάσιον τοῦ ἄλλου, ἄρα θὰ πρέπει νὰ ἔχουν τουλάχιστον δύο μὴ μηδενικὲς συντεταγμένες, δηλαδὴ νὰ ὑπάρχουν $1 \le j < j' \le t$ μὲ $L_{ij}L_{ij'}L_{i'j}L_{i'j'} \ne 0$, καὶ ταυτοχρόνως νὰ ἰσχύει $\frac{L_{ij}}{L_{ij'}} \ne \frac{L_{i'j}}{L_{i'j'}}$ στὸ $\mathbb{Q}$. Παρατηροῦμε καὶ πάλι ὅτι τότε ἰσχύει $L_{ij}L_{ij'}L_{i'j}L_{i'j'} \ne 0 \pmod p$, ἄρα μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$L_{ij}L_{i'j}^{-1} \equiv \lambda \equiv L_{ij'}L_{i'j'}^{-1} \pmod p \Rightarrow L_{ij}L_{i'j'} \equiv L_{ij'}L_{i'j} \pmod p \Rightarrow p | L_{ij}L_{i'j'} - L_{ij'}L_{i'j},$$

ἄτοπον ἐπειδὴ $0 < |L_{ij}L_{i'j'} - L_{ij'}L_{i'j}| \le |L_{ij}L_{i'j'}| + |L_{ij'}L_{i'j}| \le 2\big(\sqrt{w(N)/2}\big)^2$. Ἑπομένως ὁ ἰσχυρισμός μας ἀληθεύει.

Ἂς θεωρήσουμε τώρα δύο ὁποιουσδήποτε δεῖκτες $i_1, i_2 \in X, i_1 \neq i_2$. Τότε τὸ σύνολον τῶν $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^t$ γιὰ τὰ ὁποῖα $\theta_i(\boldsymbol{x}) := W\psi_i(\boldsymbol{x}) + 1 \equiv 0 \pmod p$ γιὰ κάθε $i \in X$ εἶναι προφανῶς ὑποσύνολον τῆς τομῆς τῶν συνόλων

$$\{W(\psi_{i_1}(\boldsymbol{x}) - b_{i_1}) \equiv -Wb_{i_1} - 1 \pmod p\}, \{W(\psi_{i_2}(\boldsymbol{x}) - b_{i_2}) \equiv -Wb_{i_2} - 1 \pmod p\}.$$

Ἀφοῦ ὅμως οἱ ὁμογενεῖς γραμμικὲς μορφὲς $W(\psi_{i_1} - b_{i_1}), W(\psi_{i_2} - b_{i_2})$ δὲν εἶναι ἡ μία πολλαπλάσιον τῆς ἄλλης, τὰ παραπάνω σύνολα δὲν μποροῦν νὰ ταυτίζονται, ἄρα ἡ τομή τους περιέχει ἀκριβῶς p^{t-2} στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_p^t$. Συνεπῶς $\omega_X(p) \leq p^{t-2}/p^t = p^{-2}$. □

Ἐξαιτίας τοῦ παραπάνω λήμματος καὶ τοῦ τύπου (4.25) γιὰ τὴν $E_p(z, z')$, μποροῦμε νὰ γράψουμε πιὸ ἀναλυτικὰ

$$E_p(z,z') = 1 - \mathbf{1}_{p>w(N)} \sum_{j=1}^{m} (p^{-1-z_j} + p^{-1-z'_j} - p^{-1-z_j-z'_j}) + \mathbf{1}_{p>w(N)} \sum_{\substack{X, X' \subseteq \{1,\dots,m\} \\ |X \cup X'| \geq 2}} \frac{O(1/p^2)}{p^{\sum_{j \in X} z_j + \sum_{j \in X'} z'_j}}, \tag{4.26}$$

ὅπου ὁ ἀριθμητὴς $O(1/p^2)$ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν μεταβλητῶν z, z'. Γιὰ νὰ ἐκτιμήσουν τὴν (4.23) οἱ Green καὶ Tao (ἀκολουθῶντας τὸ ἐπιχείρημα στὸ ἄρθρον [15] τῶν Goldston καὶ Yildirim), χρειάστηκε νὰ ἐπεκτείνουν τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῶν $E_p(z, z')$ καὶ τοῦ γινομένου τους $F(z, z')$. Γιὰ νὰ τὸ πετύχουν αὐτό, ἐκμεταλλεύτηκαν τὸ παραπάνω ἀνάπτυγμα τῆς $E_p(z, z')$ παραγοντοποιῶντας την ὡς ἑξῆς: $E_p = E_p^{(1)} E_p^{(2)} E_p^{(3)}$ ὅπου

(4.27)

$$E_p^{(1)}(z,z') := E_p(z,z') \prod_{j=1}^{m} \frac{(1 - \mathbf{1}_{p>w(N)} p^{-1-z_j-z'_j})}{(1 - \mathbf{1}_{p>w(N)} p^{-1-z_j})(1 - \mathbf{1}_{p>w(N)} p^{-1-z'_j})}$$

$$E_p^{(2)}(z,z') := \prod_{j=1}^{m} (1 - \mathbf{1}_{p\leq w(N)} p^{-1-z_j})^{-1} (1 - \mathbf{1}_{p\leq w(N)} p^{-1-z'_j})^{-1} (1 - \mathbf{1}_{p\leq w(N)} p^{-1-z_j-z'_j})$$

$$E_p^{(3)}(z,z') := \prod_{j=1}^{m} (1 - p^{-1-z_j})(1 - p^{-1-z'_j})(1 - p^{-1-z_j-z'_j})^{-1}.$$

Μποροῦμε τώρα νὰ γράψουμε $G_l := \prod_p E_p^{(l)}$ γιὰ $l = 1, 2, 3$, ὁπότε ἔχουμε, γιὰ ἀρκετὰ μεγάλα $\Re(z_j), \Re(z'_j)$ ὅπως καὶ πρίν, ὅτι $F = G_1 G_2 G_3$. Ἂν θυμηθοῦμε ὅμως τὴν ζ συνάρτησιν τοῦ Riemann μὲ τύπον $\zeta(s) := \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$ γιὰ $\Re(s) > 1$, τότε βλέπουμε ὅτι

$$G_3(z,z') = \prod_{j=1}^{m} \frac{\zeta(1 + z_j + z'_j)}{\zeta(1 + z_j)\zeta(1 + z'_j)} \tag{4.28}$$

γιὰ ὅλα τὰ z, z' μὲ $\Re(z_j), \Re(z'_j) > 0$, ἑπομένως ἡ G_3 μπορεῖ νὰ συνεχιστεῖ μερομορφικῶς σὲ ὅλον τὸ $\mathbb{C}^{2m}$. Ἐπιπλέον, τώρα μποροῦμε νὰ συνεχίσουμε ἀναλυτικῶς τοὺς ἄλλους δύο παράγοντες τῆς F καὶ λίγο ἀριστερὰ τῶν φανταστικῶν ἀξόνων, ὅπως ἀπαιτεῖ τὸ ἐπιχείρημα τῶν Goldston καὶ Yildirim, καὶ μάλιστα ἔτσι ὥστε νὰ ἐξακολουθοῦν νὰ εἶναι φραγμένοι.

Ὁρισμός 4.3.6. Γιὰ κάθε $\sigma > 0$, συμβολίζουμε μὲ $\mathcal{D}^m_\sigma \subseteq \mathbb{C}^{2m}$ τὸ καρτεσιανὸ γινόμενον λωρίδων

$$\mathcal{D}^m_\sigma := \{z_j, z'_j : -\sigma < \Re(z_j), \Re(z'_j) < 100, j = 1, \ldots, m\}.$$

Ἂν $G = G(z, z')$ εἶναι μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις $2m$ μιγαδικῶν μεταβλητῶν ποὺ ὁρίζεται στὸ $\mathcal{D}^m_\sigma$, ὁρίζουμε γιὰ κάθε φυσικὸν $k \geq 0$ τὴν νόρμα $C^k(\mathcal{D}^m_\sigma)$ τῆς G θέτοντας

$$\|G\|_{C^k(\mathcal{D}^m_\sigma)} := \sup_{\substack{a_1,\ldots,a_m,a'_1,\ldots,a'_m \in \mathbb{Z}^+ \\ \sum a_j + \sum a'_j \leq k}} \Big\| \Big(\frac{\partial}{\partial z_1}\Big)^{a_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial z_m}\Big)^{a_m} \Big(\frac{\partial}{\partial z'_1}\Big)^{a'_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial z'_m}\Big)^{a'_m} G \Big\|_{L^\infty(\mathcal{D}^m_\sigma)},$$

ὅταν τὸ supremum αὐτὸ ὑπάρχει, δηλαδὴ ὅταν οἱ παράγωγοι τάξεως τὸ πολὺ k τῆς G εἶναι φραγμένες στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}^m_\sigma$.

Λῆμμα 4.3.7. *Τὰ ἀπειρογινόμενα $\prod_p E_p^{(l)}$ γιὰ $l = 1, 2$ συγκλίνουν ἀπολύτως στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}^m_{1/(6m)}$. Συγκεκριμένα, οἱ G_1, G_2 μποροῦν νὰ συνεχιστοῦν ἀναλυτικῶς σὲ αὐτὴν τὴν περιοχήν. Ἐπιπλέον, ἔχουμε τὶς ἐκτιμήσεις*

$$\begin{aligned} \|G_1\|_{C^m(\mathcal{D}^m_{1/(6m)})} &\leq O_m(1) \\ \|G_2\|_{C^m(\mathcal{D}^m_{1/(6m)})} &\leq O_{m,w(N)}(1) \\ G_1(0,0) &= 1 + o_m(1) \\ G_2(0,0) &= (W/\phi(W))^m. \end{aligned}$$

Παρατήρησις. Ἡ ἐπιλογὴ $\sigma = 1/(6m)$ δὲν εἶναι ἡ καλύτερη δυνατή, δηλαδὴ οἱ G_1, G_2 θὰ μποροῦσαν νὰ συνεχιστοῦν καὶ σὲ μεγαλύτερην περιοχὴν τοῦ $\mathbb{C}^{2m}$, ἀλλὰ γιὰ τὸ ἐπιχείρημα τῶν Goldston καὶ Yildirim ἀρκεῖ ὁποιαδήποτε ἀρκετὰ μικρὴ ποσότης σ ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ m. Θὰ ἀποδείξουμε αὐτὸ τὸ λῆμμα στὴν ἑπομένην ὑποενότητα, ἀφοῦ ὑπενθυμίσουμε τὶς βασικὲς ἰδιότητες τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν. Δὲν εἶναι βεβαίως ἀπαραίτητον γιὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀποδείξεως νὰ γνωρίζουμε τὴν τάξιν τοῦ φράγματος $O_{m,w(N)}(1)$ γιὰ τὴν $\|G_2\|_{C^m(\mathcal{D}^m_{1/(6m)})}$, θὰ δοῦμε ὅμως ὅτι μποροῦμε νὰ πετύχουμε φράγμα τῆς μορφῆς $w(N)^{O_m(w(N))}$. (Οὕτως ἢ ἄλλως, σὲ σχεδὸν ὅλες τὶς περιπτώσεις μέχρι τώρα, ἰσχυριζόμαστε ὅτι ὑπάρχουν οἱ σταθερὲς ποὺ μᾶς χρειάζονται χωρὶς νὰ τὶς ὑπολογίζουμε ἀκριβῶς, παρότι, θεωρητικὰ τουλάχιστον, τὰ ἐπιχειρήματα τῶν Green καὶ Tao θὰ ἐπέτρεπαν τέτοιους ὑπολογισμούς: μία ἀπόπειρα ἀπὸ τοὺς ἰδίους νὰ ἐκτιμήσουν τὸ μέγεθος τῶν διαφόρων σταθερῶν καὶ τὸ πόσο αὐτὲς ἐπηρεάζουν τὸ τελικὸν συμπέρασμα, δηλαδὴ τὸ πόσο μεγάλους φυσικοὺς πρέπει νὰ θεωρήσουμε ὥστε νὰ βροῦμε μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον μήκους k ἀπὸ πρώτους, γίνεται στὸ [21].)

Ἔχοντας πλέον ἐκτιμήσεις γιὰ τὶς ποσότητες μέσα στὰ ὁλοκληρώματα (4.23), μᾶς ἀρκεῖ τὸ ἑπόμενον λῆμμα γιὰ μιγαδικὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα ποὺ διατυπώνουν καὶ ἀποδεικνύουν οἱ Goldston καὶ Yildirim στὸ [15], καὶ ἀναπαράγουν οἱ Green καὶ Tao στὸ ἄρθρον τους. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ λήμματος θὰ γίνει στὴν ὑποενότητα 4.3.3.

Λῆμμα 4.3.8. *Ἔστω R_0 ἕνας ἀρκετὰ μεγάλος θετικὸς πραγματικός. Ὑποθέτουμε ὅτι $G = G(z, z')$ εἶναι ἀναλυτικὴ συνάρτησις $2m$ μιγαδικῶν μεταβλητῶν ποὺ ὁρίζεται στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}_\sigma^m$ γιὰ κάποιο $\sigma > 0$, γιὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει*

$$\|G\|_{C^m(\mathcal{D}_\sigma^m)} = \exp(O_{m,\sigma}(\log^{1/3} R_0)). \tag{4.29}$$

Τότε

$$\begin{aligned}(4.30)\qquad &\frac{1}{(2\pi i)^{2m}} \int_{\Gamma_{R_0}} \cdots \int_{\Gamma_{R_0}} G(z, z') \prod_{j=1}^m \frac{\zeta(1 + z_j + z_j')}{\zeta(1 + z_j)\zeta(1 + z_j')} \frac{R_0^{z_j + z_j'}}{z_j^2 z_j'^2} dz_j dz_j' \\ &= G(0, \ldots, 0) \log^m R_0 + \sum_{j=1}^m O_{m,\sigma}\big(\|G\|_{C^j(\mathcal{D}_\sigma^m)} \log^{m-j} R_0\big) + O_{m,\sigma}\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big)\end{aligned}$$

γιὰ κάποιο $\delta = \delta(m, \sigma) > 0$.

Παρατήρησις. Ὅπως μπορεῖ νὰ μαντέψει κανείς, θὰ ἐφαρμόσουμε αὐτὸ τὸ λῆμμα μὲ τὴν παράμετρον $R \equiv R_N$ στὴν θέσιν τοῦ R_0, χρησιμοποιοῦμε ὅμως ἐδῶ τὸ σύμβολον R_0 γιὰ νὰ γίνει σαφὲς ὅτι τὸ λῆμμα διατυπώνεται γιὰ ἕναν σταθερὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν (καὶ ὄχι μίαν ἀκολουθίαν παραμέτρων). Βεβαίως, ἡ παραπάνω ἐκτίμησις γίνεται ἀκριβέστερη ὅσο πιὸ μεγάλο εἶναι τὸ R_0. Θὰ δοῦμε ὅτι πρέπει, ἀναλόγως ποιὰ εἶναι τὰ m καὶ σ, νὰ θεωρήσουμε κατάλληλον κάτω φράγμα γιὰ τὸ R_0, δηλαδὴ γιὰ νὰ ἰσχύει τὸ συμπέρασμα τοῦ λήμματος θὰ πρέπει, ἐκτὸς τῶν ὑπολοίπων ὑποθέσεων, νὰ ἰσχύει καὶ ἡ $R_0 \gg_{m,\sigma} 1$. Αὐτὸ ὅμως δὲν θὰ μᾶς ἐνοχλήσει ὅταν θὰ ἐπικαλεστοῦμε τὸ λῆμμα γιὰ νὰ ἐκτιμήσουμε τὴν (4.23), ἀφοῦ ἡ παράμετρος R_N τείνει στὸ ἄπειρον καθὼς τὸ N αὐξάνεται.

Ἂς προσέξουμε ὅτι ἡ σταθερὰ δ ποὺ ἐμφανίζεται στὸν ὅρον-σφάλμα $O_{m,\sigma}\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big)$ δὲν ἔχει καμμίαν σχέσιν μὲ τὸ σύμβολον δ ποὺ χρησιμοποιούσαμε ὡς κάτω φράγμα τῆς μέσης τιμῆς μίας συναρτήσεως $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$. Μέχρι καὶ τὴν ὑποενότητα 4.3.3 τὸ δ θὰ εἶναι ἁπλῶς μία σταθερὰ ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ m καὶ σ.

Πλέον, γιὰ νὰ ἐκτιμήσουμε τὴν (4.23) ἀρκεῖ, ἐφ' ὅσον ἡ ποσότης μέσα στὰ ὁλοκληρώματα εἶναι ἴση μὲ

$$F(z, z') \prod_{j=1}^m \frac{R^{z_j + z_j'}}{z_j^2 z_j'^2} = G_1(z, z') G_2(z, z') \prod_{j=1}^m \frac{\zeta(1 + z_j + z_j')}{\zeta(1 + z_j)\zeta(1 + z_j')} \frac{R^{z_j + z_j'}}{z_j^2 z_j'^2},$$

νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ τελευταῖον λῆμμα γιὰ $G := G_1 G_2$ καὶ $\sigma := 1/(6m)$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.3.7 καὶ τὸν κανόνα τοῦ Leibniz ἔχουμε ὅτι

$$\|G\|_{C^j(\mathcal{D}_{1/(6m)}^m)} \leq O_{j,m,w(N)}(1) \text{ γιὰ κάθε } 0 \leq j \leq m,$$

καὶ εἰδικῶς γιὰ $j = m$ μποροῦμε νὰ πετύχουμε τὴν (4.29) ἐπιλέγοντας τὸ $w(N)$ νὰ μεγαλώνει πολὺ ἀργὰ σὲ σχέσιν μὲ τὸ N. Ἐπίσης, ἀπὸ τὸ ἴδιον λῆμμα ἔχουμε $G(0,0) = (1+o_m(1))\big(\frac{W}{\phi(W)}\big)^m$. Καταλήγουμε ὅτι ἡ (4.23) εἶναι ἴση μὲ $(1+o_m(1))\big(\frac{W\log R}{\phi(W)}\big)^m$, ἀρκεῖ νὰ ἐπιλέξουμε καὶ πάλι τὸ $w(N)$ νὰ μεγαλώνει πολὺ ἀργὰ σὲ σχέσιν μὲ τὸ N (ἄρα καὶ σὲ σχέσιν μὲ τὸ R), ὥστε οἱ ὅροι τῆς μορφῆς $O_{m,\sigma}\big(\|G\|_{C^j(\mathcal{D}^m_{1/(6m)})}\log^{m-j}R\big), 1 \le j \le m$, νὰ εἶναι $o_m(\log^m R)$. Μὲ αὐτὸ ὁλοκληρώνεται ἡ ἀπόδειξις τῆς Προτάσεως 4.3.3. □

Θὰ περιγράψουμε τώρα τὴν ἀπόδειξιν τῆς Προτάσεως 4.3.4 : ἡ βασικὴ διαφορὰ μὲ τὰ προηγούμενα εἶναι ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μεταβλητῶν t εἶναι ἴσον μὲ 1, ἄρα κατ' οὐσίαν ἐμφανίζεται μόνον μία γραμμικὴ μορφή, ἡ $\psi(x_1) := x_1$, καὶ ἀλλάζει μόνον ὁ σταθερὸς ὅρος ποὺ προσθέτουμε. Ἕπεται βεβαίως ὅτι τὰ διανύσματα τῶν συντελεστῶν τῶν γραμμικῶν μορφῶν εἶναι τὸ ἕνα ῥητὸν πολλαπλάσιον τοῦ ἄλλου, συνεπῶς δὲν μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ Λῆμμα 4.3.5. Τὰ ἐπιχειρήματα ὅμως μέχρι αὐτὸ τὸ λῆμμα ἰσχύουν ἀκόμη, ἐπομένως μποροῦμε νὰ γράψουμε τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (4.16) ὡς μίαν ἔκφρασιν τῆς μορφῆς (4.23) σὺν ἕνα ἀποδεκτὸν σφάλμα. Ἡ συνάρτησις F μέσα στὰ ὁλοκληρώματα θὰ δίνεται πάλι ἀπὸ τὴν (4.24) καὶ οἱ E_p θὰ ὁρίζονται βάσει τῆς (4.25) μὲ μόνην διαφορὰν ὅτι τώρα ἡ ποσότης $\omega_X(p)$, ποὺ ὁρίζεται γιὰ κάθε πρῶτον p καὶ κάθε ὑποσύνολον X τοῦ $\{1,\dots,m\}$, θὰ εἶναι ἴση μὲ

$$\omega_X(p) := \mathbb{E}\left(\prod_{i\in X}\mathbf{1}_{p|W(x+h_i)+1}\,\big|\, x\in\mathbb{Z}_p\right).$$

Ὅπως καὶ πρίν, $\omega_\emptyset(p) = 1$ γιὰ κάθε p. Τὸ ἀνάλογον τοῦ Λήμματος 4.3.5 εἶναι τὸ ἑξῆς:

Λῆμμα 4.3.9. *Ἂν $p \le w(N)$, τότε $\omega_X(p) = 0$ γιὰ κάθε μὴ κενὸν σύνολον X. Συνεπῶς $E_p = 1$ ὅταν $p \le w(N)$. Ἀντιθέτως, ἂν $p > w(N)$, τότε $\omega_X(p) = p^{-1}$ ὅταν $|X| = 1$, καὶ $\omega_X(p) \le p^{-1}$ ὅταν $|X| \ge 2$. Ἐπιπλέον, στὴν περίπτωσιν ποὺ $|X| \ge 2$ καὶ $\omega_X(p) \ne 0$, τότε ἀναγκαστικῶς ὁ p διαιρεῖ τὸν ἀκέραιον $\Delta := \prod_{1\le i<j\le m}|h_i - h_j|$.*

Ἀπόδειξις. Ὅταν $p \le w(N)$, τότε $W(x+h_i)+1 \equiv 1 \pmod p$ καὶ τὸ ζητούμενον ἕπεται. Ἀπὸ τὴν ἄλλην, ὅταν $p > w(N)$ καὶ $|X| \ge 1$, τότε εἴτε $\omega_X(p) = 1/p$ στὴν περίπτωσιν ποὺ οἱ κλάσεις ὑπολοίπων $h_i \pmod p, i \in X$, εἶναι ὅλες ἴσες, εἴτε $\omega_X(p) = 0$ στὴν ἀντίθετην περίπτωσιν. Βεβαίως αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἂν γιὰ κάποιο ὑποσύνολον X μὲ $|X| \ge 2$ ἰσχύει $\omega_X(p) \ne 0$, θὰ ὑπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικοὶ δεῖκτες $i,j \in X$ γιὰ τοὺς ὁποίους οἱ ἀντίστοιχες κλάσεις $h_i \pmod p, h_j \pmod p$ ταυτίζονται, ἰσοδυνάμως $p|h_i - h_j$. □

Ἐξαιτίας αὐτοῦ τοῦ λήμματος, ἔχουμε τὸ ἀνάλογον τῆς (4.26) :

$$E_p(z,z') = 1 - \mathbf{1}_{p>w(N)}\sum_{j=1}^m\left(p^{-1-z_j} + p^{-1-z_j'} - p^{-1-z_j-z_j'}\right) + \mathbf{1}_{p>w(N),p|\Delta}\lambda_p(z,z')$$

ὅπου $\lambda_p(z,z')$ εἶναι μία ἔκφρασις τῆς μορφῆς

$$\lambda_p(z,z') := \sum_{\substack{X,X'\subseteq\{1,\dots,m\}\\ |X\cup X'|\geq 2}} \frac{O(1/p)}{p^{\sum_{j\in X} z_j + \sum_{j\in X'} z'_j}} \tag{4.31}$$

μὲ τὶς ποσότητες $O(1/p)$ νὰ μὴν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὶς τιμὲς τῶν z, z'. Μποροῦμε ἐπομένως, ὅπως πρίν, νὰ θεωρήσουμε παραγοντοποίησιν $E_p = E_p^{(0)}E_p^{(1)}E_p^{(2)}E_p^{(3)}$ ὅπου

(4.32)

$$\begin{aligned}
E_p^{(0)}(z,z') &= 1 + \mathbf{1}_{p>w(N),p|\Delta}\lambda_p(z,z')\\
E_p^{(1)}(z,z') &= \frac{E_p(z,z')}{E_p^{(0)}(z,z')}\prod_{j=1}^{m}\frac{(1-\mathbf{1}_{p>w(N)}p^{-1-z_j-z'_j})}{(1-\mathbf{1}_{p>w(N)}p^{-1-z_j})(1-\mathbf{1}_{p>w(N)}p^{-1-z'_j})}\\
E_p^{(2)}(z,z') &= \prod_{j=1}^{m}(1-\mathbf{1}_{p\leq w(N)}p^{-1-z_j})^{-1}(1-\mathbf{1}_{p\leq w(N)}p^{-1-z'_j})^{-1}(1-\mathbf{1}_{p\leq w(N)}p^{-1-z_j-z'_j})\\
E_p^{(3)}(z,z') &= \prod_{j=1}^{m}(1-p^{-1-z_j})(1-p^{-1-z'_j})(1-p^{-1-z_j-z'_j})^{-1}
\end{aligned}$$

μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ $E_p^{(0)}(z,z')$ δὲν μηδενίζεται, κάτι ποὺ μποροῦμε νὰ ἐξασφαλίσουμε στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}_\sigma^m$ ἂν θεωρήσουμε τὸ $w(N)$ ἀρκετὰ μεγάλο ὥστε γιὰ $p > w(N)$ νὰ ἰσχύει

$$\begin{aligned}
|\lambda_p(z,z')| &\leq \sum_{\substack{X,X'\subseteq\{1,\dots,m\}\\ |X\cup X'|\geq 2}} \frac{O(1/p)}{|p^{\sum_{j\in X} z_j + \sum_{j\in X'} z'_j}|}\\
&= \sum_{\substack{X,X'\subseteq\{1,\dots,m\}\\ |X\cup X'|\geq 2}} \frac{O(1/p)}{p^{\sum_{j\in X} \Re(z_j) + \sum_{j\in X'} \Re(z'_j)}} = O_m\big(p^{-1+\frac{2m}{6m}}\big) < 1.
\end{aligned}$$

Γράφουμε $G_l := \prod_p E_p^{(l)}$, ὁπότε $F = G_0G_1G_2G_3$ καὶ ἡ G_3 δίνεται πάλι ἀπὸ τὴν (4.28), ἐνῷ γιὰ τὶς G_0, G_1, G_2 ἔχουμε τὸ ἑξῆς ἀνάλογον τοῦ Λήμματος 4.3.7 :

Λῆμμα 4.3.10. *Ἔστω $0 < \sigma < 1/(6m)$. Τὰ ἀπειρογινόμενα $\prod_p E_p^{(l)}$ γιὰ $l = 0,1,2$ συγκλίνουν ἀπολύτως στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}_\sigma^m$. Μάλιστα οἱ G_0, G_1, G_2 μποροῦν νὰ συνεχιστοῦν* *ἀναλυτικῶς σὲ ὅλην τὴν περιοχὴν* $\mathcal{D}^m_{1/(6m)}$. *Ἐπιπλέον, ἔχουμε τὶς ἐκτιμήσεις*

$$\|G_0\|_{C^r(\mathcal{D}^m_\sigma)} \leq O_m\left(\frac{\log R}{\log\log R}\right)^r \prod_{p>w(N),p|\Delta}(1+O_m(p^{2m\sigma-1})) \text{ γιὰ } 0\leq r\leq m \tag{4.33}$$

(4.34)

$$\|G_0\|_{C^m(\mathcal{D}^m_{1/(6m)})} \leq \exp(O_m(\log^{1/3} R))$$
$$\|G_1\|_{C^m(\mathcal{D}^m_{1/(6m)})} \leq O_m(1)$$
$$\|G_2\|_{C^m(\mathcal{D}^m_{1/(6m)})} \leq O_{m,w(N)}(1)$$

$$G_0(0,0) = \prod_{p>w(N),p|\Delta}(1+O_m(p^{-1/2})) \tag{4.35}$$
$$G_1(0,0) = 1+o_m(1)$$
$$G_2(0,0) = (W/\phi(W))^m.$$

Πλέον, μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ Λῆμμα 4.3.8 μὲ $\sigma := 1/(6m)$ καὶ $G := G_0G_1G_2$. Ἀπὸ τὸν κανόνα τοῦ Leibniz ἔχουμε γιὰ κάθε $0\leq r\leq m$,

$$\|G\|_{C^r(\mathcal{D}^m_{1/(6m)})} \leq O_m(1)O_{m,w(N)}(1)\left(\frac{\log R}{\log\log R}\right)^r,$$

ἐνῷ, ἐπιλέγοντας πάλι κατάλληλα τὸ πόσο γρήγορα αὐξάνεται ἡ $w(N)$, πετυχαίνουμε καὶ τὸ φράγμα (4.29). Βλέπουμε ἑπομένως ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.3.8 ὅτι ἡ (4.23) εἶναι

$$\leq O_m\left(\frac{W}{\phi(W)}\right)^m \log^m R\prod_{p|\Delta}\big(1+O_m(p^{-1/2})\big) + O_{m,w(N)}\left(\frac{\log^m R}{\log\log R}\right) + O_m\big(e^{-\delta\sqrt{\log R}}\big).$$

Τὸ ζητούμενον τῆς Προτάσεως 4.3.4 ἕπεται τώρα ἐφ' ὅσον ἐπιλέξουμε τὸ $w(N)$ νὰ μεγαλώνει ἀρκετὰ ἀργὰ σὲ σχέσιν μὲ τὸ N (ἄρα καὶ σὲ σχέσιν μὲ τὸ R), ὥστε ὅλοι οἱ ὅροι ἐκτὸς τοῦ πρώτου στὴν παραπάνω ἔκφρασιν νὰ εἶναι $O_m(\log^m R)$. □

Σημείωσις. Θὰ πρέπει νὰ εἶναι σαφὲς ὅτι τὸ παραπάνω ἐπιχείρημα δὲν δίνει ἁπλῶς ἕνα ἄνω φράγμα γιὰ τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (4.16), ἀλλὰ μίαν ἀσυμπτωτικὴν ἐκτίμησιν, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσουμε ἀκριβέστερα τὴν τιμὴν $G_0(0,0)$. Αὐτὸ ἀκριβῶς κάνουν οἱ Goldston καὶ Yildirim στὸ [15] (θεωρῶντας βεβαίως τὴν περίπτωσιν $W=1$).

Γιὰ νὰ εἶναι πλήρεις οἱ ἀποδείξεις τῶν Προτάσεων 4.3.3, 4.3.4 χρειάζεται ἀκόμη νὰ ἀποδείξουμε τὰ Λήμματα 4.3.7, 4.3.10 μὲ τὶς ἐκτιμήσεις γιὰ τὶς συναρτήσεις G_j, καθὼς καὶ τὸ Λῆμμα 4.3.8. Αὐτὸ θὰ γίνει στὶς ἑπόμενες δύο ὑποενότητες.

4.3.2 Ἀναλυτικὲς συναρτήσεις, μιγαδικὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα καὶ ἡ ζ συνάρτησις τοῦ Riemann

Ἀναλυτικὲς συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν

Ἂς θυμηθοῦμε ὅτι μία συνάρτησις f μὲ τιμὲς στὸ $\mathbb{R}$ (ἢ τὸ $\mathbb{C}$), ὁρισμένη σὲ κάποιο ἀνοικτὸν ὑποσύνολον D τοῦ $\mathbb{R}^n$ (ἢ τοῦ $\mathbb{C}^n$), λέγεται ἀναλυτικὴ σὲ κάποιο σημεῖον $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της ἂν ὑπάρχει ἀνοικτὴ περιοχὴ $U \subset D$ τοῦ $\boldsymbol{x}$, καὶ γιὰ κάθε διάνυσμα $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ μὴ ἀρνητικῶν ἀκεραίων ὑπάρχουν συντελεστὲς $c_{a_1,\ldots,a_n}$ στὸ $\mathbb{R}$ (ἢ τὸ $\mathbb{C}$), ὥστε νὰ μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$f(\boldsymbol{y}) = \sum_{a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{Z}^+} c_{a_1,\ldots,a_n} (y_1 - x_1)^{a_1} \cdots (y_n - x_n)^{a_n}$$

γιὰ κάθε $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in U$. Ἡ f λέγεται ἀναλυτικὴ ἂν εἶναι ἀναλυτικὴ σὲ κάθε σημεῖον τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της. Στὴν περίπτωσιν τῶν μιγαδικῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων, αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ νὰ εἶναι ἡ f ὁλόμορφη σὲ καθεμίαν ἀπὸ τὶς μεταβλητές της, δηλαδὴ γιὰ κάθε σημεῖον $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, καὶ γιὰ κάθε $1 \leq j \leq n$, νὰ ὑπάρχει ἀνοικτὴ περιοχὴ $V \subset \mathbb{C}$ τῆς j συντεταγμένης z_j ὥστε ὁ περιορισμὸς

$$f : D \cap \{(z_1, \ldots, z_{j-1}, w, z_{j+1}, \ldots, z_n) : w \in V\} \to \mathbb{C}$$

νὰ εἶναι ὁλόμορφη συνάρτησις μὲ τὴν κλασσικὴν ἔννοιαν. Ἕπεται τώρα εὔκολα ὅτι τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλῖκον μιγαδικῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων (ἐκεῖ ποὺ ὁρίζονται) εἶναι μιγαδικὲς ἀναλυτικὲς συναρτήσεις, καὶ τὸ ἴδιον ἰσχύει γιὰ τὴν σύνθεσιν $g \circ f$ μίας ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $f : D \subset \mathbb{C}^n \to W \subset \mathbb{C}$ μὲ μίαν ὁλόμορφην $g : W \to \mathbb{C}$.

Εἶναι ἄμεσον πλέον ὅτι οἱ συναρτήσεις τῶν Λημμάτων $4.3.7, 4.3.10$ εἶναι ἀναλυτικὲς στὶς περιοχὲς στὶς ὁποῖες ὁρίζονται, καὶ ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι οἱ παράγωγοί τους τάξεως τὸ πολὺ m ἱκανοποιοῦν στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}^m_{1/(6m)}$ τὰ φράγματα ποὺ χρειαζόμαστε:

Ἀπόδειξις τοῦ Λήμματος 4.3.7. Στὸν ὁρισμὸν (4.27) τῆς $E_p^{(1)}(z, z')$ ἐμφανίζεται γιὰ $p > w(N)$ καὶ τὸ γινόμενον τῶν m παραγόντων

$$\prod_{j=1}^{m} \frac{(1 - p^{-1-z_j-z_j'})}{(1 - p^{-1-z_j})(1 - p^{-1-z_j'})},$$

καθένας ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἀναλύεται σὲ σειρὰν ὡς

$$\begin{aligned}
\left(1 - p^{-1-z_j-z_j'}\right) &\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n(1+z_j)}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n(1+z_j')}\right) \\
&= 1 + p^{-1-z_j} + p^{-1-z_j'} - p^{-1-z_j-z_j'} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^n} \left(\sum_{l=0}^{n} p^{-lz_j-(n-l)z_j'} - \sum_{l=0}^{n-1} p^{-(l+1)z_j-(n-l)z_j'} \right),
\end{aligned}$$

λόγῳ τῆς γνωστῆς ταυτότητος $1 + x + \cdots + x^n + \cdots = (1-x)^{-1}$ γιὰ $x \in \mathbb{C}, |x| < 1$, ἀρκεῖ νὰ ἰσχύει $\Re(z_j), \Re(z'_j) > -1$. Συμπεραίνουμε ὅτι

$$\begin{aligned}
(4.36)\qquad &\prod_{j=1}^{m} \frac{(1 - p^{-1-z_j-z'_j})}{(1 - p^{-1-z_j})(1 - p^{-1-z'_j})} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{m} (p^{-1-z_j} + p^{-1-z'_j} - p^{-1-z_j-z'_j}) \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{\substack{a_j \in \mathbb{Z}^+ \\ a_1+\cdots+a_m=n}} \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{l_j=0}^{a_j} p^{-l_j z_j - (a_j - l_j) z'_j} - \sum_{l_j=0}^{a_j-1} p^{-(l_j+1) z_j - (a_j - l_j) z'_j} \right) \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{m} (p^{-1-z_j} + p^{-1-z'_j} - p^{-1-z_j-z'_j}) + O(1) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^m p^{\frac{n+m}{6m}}}{p^n}
\end{aligned}$$

γιὰ $\Re(z_j), \Re(z'_j) > -1/(6m)$, ὅπου ἡ σταθερὰ ποὺ ὑπονοεῖται ἀπὸ τὸν συμβολισμὸν O δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ p, καὶ ὅπου, κατὰ σύμβασιν, γιὰ $a_j = 0$ συμβολίζουμε μὲ $\sum_{l_j=0}^{a_j-1}$ τὸ κενὸν ἄθροισμα. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σειρὰ μὲ τὴν ὁποίαν ἀθροίζουμε τοὺς ὅρους ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὸ γινόμενον δὲν ἔχει σημασίαν, ἀφοῦ, ὅπως μόλις εἴδαμε, στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}^m_{1/(6m)}$ αὐτοὶ εἶναι ἀπολύτως ἀθροίσιμοι. Συνδυάζοντας μὲ τὴν (4.26), λαμβάνουμε γιὰ $p > w(N)$ ὅτι

$$\begin{aligned}
E_p^{(1)}(z, z') &= 1 + \sum_{\substack{X, X' \subseteq \{1,\ldots,m\} \\ |X \cup X'| \geq 2}} \frac{O(1/p^2)}{p^{\sum_{j \in X} z_j + \sum_{j \in X'} z'_j}} + O(1) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^m p^{\frac{n+m}{6m}}}{p^n} \\
&\quad + \big(E_p(z, z') - 1\big) O(1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^m p^{\frac{n+m}{6m}}}{p^n} \\
&= 1 + \sum_{\substack{X, X' \subseteq \{1,\ldots,m\} \\ |X \cup X'| \geq 2}} \frac{O(1/p^2)}{p^{\sum_{j \in X} z_j + \sum_{j \in X'} z'_j}} + O(1) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^m p^{\frac{n+m}{6m}}}{p^n} \\
&\quad + O(1) \cdot \sum_{\substack{X, X' \subseteq \{1,\ldots,m\} \\ |X \cup X'| \geq 1}} \frac{O(1/p)}{p^{\sum_{j \in X} z_j + \sum_{j \in X'} z'_j}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^m p^{\frac{n+m}{6m}}}{p^n} \\
&= 1 + O_m\big(p^{-2+\frac{3m+2}{6m}}\big) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)^m p^{-n+\frac{n}{6m}} \\
&= 1 + O_m\big(p^{-2+\frac{3m+2}{6m}}\big),
\end{aligned}$$

καὶ ἀπὸ ἐδῶ δικαιολογεῖται ἡ ἀπόλυτη σύγκλισις τοῦ ἀπειρογινομένου $\prod_p E_p^{(1)}(z,z')$, καθὼς καὶ τὸ φράγμα γιὰ τὶς παραγώγους τάξεως τὸ πολὺ m τῆς G_1, ἀρκεῖ βεβαίως νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἡ παραγώγισις s φορὲς κάθε ὅρου τῆς μορφῆς

$$\frac{p^{-a_1z_1-\cdots-a_mz_m-a_1'z_1'-\cdots-a_m'z_m'}}{p^n},\quad 0\le a_j,a_j'\le n+2 \text{ γιὰ κάθε } j,$$
$$2\le n\le a_1+\cdots+a_m+a_1'+\cdots+a_m'\le n+3m,$$

ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν z_j λόγου χάριν, πολλαπλασιάζει αὐτὸν τὸν ὅρον μὲ $(-a_j\log p)^s$.

Ἡ ἐκτίμησις $G_1(0,0)=1+o_m(1)$ ἕπεται ἐπίσης ἀπὸ τὰ παραπάνω, ἀφοῦ γιὰ κάθε πρῶτον N,

$$G_{1,N}(0,0)=\prod_{p>w(N)}E_p^{(1)}(0,0)=\prod_{p>w(N)}\left(1+O_m(p^{-2+\frac{3m+2}{6m}})\right)\to 1$$

καθὼς τὸ $w(N)$ τείνει στὸ ἄπειρον (αὐτὸς εἶναι καὶ ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖον ζητοῦμε ἡ συνάρτησις $w(N)$ νὰ αὐξάνεται ἀπεριόριστα, ὥστε μέσῳ τοῦ Λήμματος 4.3.8 νὰ καταλήξουμε στὴν ἐκτίμησιν (4.15)).

Ἡ γραφὴ (4.36) ἰσχύει στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}^m_{1/(6m)}$ καὶ γιὰ τὴν $E_p^{(2)}(z,z')$, $p\le w(N)$, λόγῳ τοῦ ὁρισμοῦ (4.27). Συμπεραίνουμε σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὅτι

$$|E_p^{(2)}(z,z')|=1+O_m\left(p^{-1+\frac{2}{6m}}\right),$$

ἄρα μὲ χονδροειδεῖς ὑπολογισμοὺς βλέπουμε ὅτι

$$|G_2(z,z')|=\prod_{p\le w(N)}|E_p^{(2)}(z,z')|\le\exp\left(\sum_{p\le w(N)}O_m\left(p^{-1+\frac{2}{6m}}\right)\right)\le e^{O_m(w(N))}.$$

Παρόμοια φράγματα μποροῦμε νὰ πετύχουμε καὶ γιὰ τὶς ὑπόλοιπες παραγώγους τάξεως τὸ πολὺ m τῆς G_2 ἀπὸ τὸν κανόνα τοῦ Leibniz (ἀφοῦ ἡ G_2 εἶναι κατ' οὐσίαν γινόμενον τὸ πολὺ $w(N)$ παραγόντων). Ἐπίσης, μὲ ἀπευθείας ὑπολογισμὸν προκύπτει ὅτι $G_2(0,0)=(W/\phi(W))^m$ (ἀφοῦ $\prod_{p\le w(N)}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\phi(W)}{W}$). □

Ἀπόδειξις τοῦ Λήμματος 4.3.10. Οἱ ἐκτιμήσεις γιὰ τὶς G_1 καὶ G_2 αὐτοῦ τοῦ λήμματος δείχνονται ἀκριβῶς ὅπως στὴν ἀπόδειξιν τοῦ Λήμματος 4.3.7. Ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι οἱ ὅροι $\lambda_p(z,z')$ ποὺ ἐμφανίζονται καὶ στὸν ἀριθμητὴν καὶ στὸν παρονομαστὴν τῆς $E_p^{(1)}(z,z')$

(ὁρισμὸς (4.32)) γιὰ $p > w(N), p|\Delta$. Μποροῦμε ἑπομένως νὰ γράψουμε γιὰ αὐτὰ τὰ p,

$$\begin{aligned} E_p^{(1)}(z,z') &= \frac{E_p(z,z')}{E_p^{(0)}(z,z')} \prod_{j=1}^m \frac{(1-p^{-1-z_j-z'_j})}{(1-p^{-1-z_j})(1-p^{-1-z'_j})} \\ &= \frac{1}{1+\lambda_p(z,z')}\big(1+O_m(1)\cdot\sum_{n=2}^\infty \frac{(n+1)^m p^{\frac{n+3m}{6m}}}{p^n} + \lambda_p(z,z')\big) \\ &= 1 + \frac{O_m(1)}{1+\lambda_p(z,z')}\sum_{n=2}^\infty \frac{(n+1)^m p^{\frac{n+3m}{6m}}}{p^n}, \end{aligned}$$

ἀπ' ὅπου ἕπεται τὸ $C^m(\mathcal{D}^m_{1/(6m)})$ φράγμα γιὰ τὴν G_1.

Στρεφόμαστε τώρα στὶς ἐκτιμήσεις (4.33)−(4.35) γιὰ τὴν G_0. Σταθεροποιοῦμε ἀρχικῶς κάποιο $r \in \{0,1,\dots,m\}$ καὶ φράσσουμε τὶς παραγώγους τάξεως τὸ πολὺ r τῆς G_0 στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}^m_{1/(6m)}$. Ἂς παρατηρήσουμε ὅτι $G_0 = \prod_{p|\Delta} E_p^{(0)}$, μὲ τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ποὺ διαιροῦν τὸ Δ νὰ εἶναι ἀπὸ τὸ Θεώρημα Πρώτων Ἀριθμῶν τὸ πολὺ $O(\log\Delta/\log\log\Delta)$. Ὑπολογίζουμε ἐπίσης ὅτι

$$\Delta = \prod_{1\le i<j\le m} |h_i - h_j| \le (2N^2)^{\binom{m}{2}} \le R^{O_m(1)} \tag{4.37}$$

ἐξαιτίας τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραμέτρου $R_N := N^{k^{-1}2^{-k-4}}$ καὶ τῆς ὑποθέσεως $|h_i| \le N^2$ ποὺ κάνουμε στὴν Πρότασιν 4.3.4. Βλέπουμε ἑπομένως ὅτι τὸ γινόμενον Euler γιὰ τὴν G_0 ἔχει τὸ πολὺ $O_m(\frac{\log R}{\log\log R})$ παράγοντες. Ἄρα, παραγωγίζοντάς το r φορές, λαμβάνουμε ἀπὸ τὸν κανόνα τοῦ Leibniz ἕνα ἄθροισμα ἀπὸ $O_m((\log R/\log\log R)^r)$ ὅρους, καθένας ἀπὸ τοὺς ὁποίους γράφεται ὡς γινόμενον Euler $O_m(\log R/\log\log R)$ παραγόντων τῆς μορφῆς

$$\begin{gathered} (\frac{\partial}{\partial z_1})^{a_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial z_m})^{a_m}(\frac{\partial}{\partial z'_1})^{a'_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial z'_m})^{a'_m}(1+\lambda_p(z,z')), \\ a_1,\dots,a_m,a'_1,\dots,a'_m \in \mathbb{Z}^+,\ \sum_{j=1}^m (a_j+a'_j) \le r. \end{gathered}$$

Ὅμως στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}^m_\sigma$, κάθε τέτοιος παράγων φράσσεται ἀπὸ $1+O_m(p^{2m\sigma-1})$ ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν τύπον (4.31) τῆς $\lambda_p(z,z')$, καὶ μάλιστα οἱ μὴ μηδενικὲς παράγωγοι εἶναι ἀκόμη μικρότερες, ἀφοῦ ἐξαφανίζεται ὁ σταθερὸς ὅρος 1 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων ὅρων φράσσεται ἀπὸ $O_m(p^{2m\sigma-1}\log^r p)$. Ἔτσι ἕπεται ἡ (4.33), καὶ ἄρα στὴν μεγαλύτερην δυνατὴν περιοχὴν ποὺ ἐξετάζουμε ἰσχύει

$$\|G_0\|_{C^r(\mathcal{D}^m_{1/(6m)})} \le O_m\left(\frac{\log R}{\log\log R}\right)^r \prod_{p>w(N),p|\Delta}(1+O_m(p^{-2/3})) \text{ γιὰ } 0\le r\le m.$$

Ἐξαιτίας αὐτοῦ, γιὰ τὴν ἐκτίμησιν (4.34) ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι

$$\prod_{p>w(N),p|\Delta}(1+O_m(p^{-2/3}))\leq \exp(O_m(\log^{1/3}R)). \tag{4.38}$$

Μποροῦμε μάλιστα νὰ δείξουμε ὅτι

$$\sum_{p>w(N),p|\Delta} p^{-2/3}\leq O(\log^{1/3}\Delta),$$

τὸ ὁποῖον θὰ συνεπάγεται τὴν (4.38) ἐπειδὴ γιὰ κάθε p ἰσχύει $1+O_m(p^{-2/3})\leq \exp(p^{-2/3})$, ἐνῷ ἀπὸ τὴν (4.37) προκύπτει ὅτι $\log^{1/3}\Delta\leq O_m(\log^{1/3}R)$. Γιὰ τὸ ζητούμενον χρησιμοποιοῦμε πάλι ὅτι οἱ πρῶτοι ποὺ διαιροῦν τὸ Δ εἶναι τὸ πολὺ $O(\log\Delta/\log\log\Delta)$, ἄρα

$$\begin{aligned}\sum_{p>w(N),p|\Delta} p^{-2/3} &\leq \sum_{2\leq n\leq O(\log\Delta/\log\log\Delta)} n^{-2/3}\\ &\leq \int_1^{O(\log\Delta/\log\log\Delta)} x^{-2/3}dx\leq O(\log^{1/3}\Delta).\end{aligned}$$

Τέλος, ἡ ἐκτίμησις (4.35) ἰσχύει ἐπειδὴ $E_p^{(0)}(0,0)=1+O_m(1/p)$. $\square$

Ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα

Ἔστω ὅτι γ εἶναι μία κατὰ τμήματα C^1 καμπύλη στὸ $\mathbb{C}$ μὲ παραμέτρησιν $\gamma(t): I\to\mathbb{C}$, ὅπου I εἶναι ὑποδιάστημα τοῦ $\mathbb{R}$ (φραγμένον ἢ μή), καὶ ἔστω συνεχὴς συνάρτησις $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ μὲ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της D νὰ περιέχει τὴν γ, δηλαδὴ $D\supset\gamma[I]$. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς f πάνω στὴν γ, ποὺ συμβολίζεται μὲ $\int_\gamma f(z)dz$, εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἴσον μὲ τὸ ὁλοκλήρωμα Riemann

$$\int_I f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt,$$

ἐφ' ὅσον βεβαίως αὐτὸ τὸ ὁλοκλήρωμα ὑπάρχει (ὅταν τὸ διάστημα I εἶναι φραγμένον, ξέρουμε ὅτι ὑπάρχει σίγουρα, στὶς ἀποδείξεις μας ὅμως ἔχουν ἤδη προκύψει καὶ περιπτώσεις ποὺ $I=\mathbb{R}$). Θὰ γράφουμε $\int_\gamma |f(z)dz|$, δηλαδὴ μὲ τὴν μεταβλητὴν ὁλοκληρώσεως μέσα στὴν ἀπόλυτην τιμήν, ἐννοῶντας τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_I |f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)|dt$$

καὶ διακρίνοντάς το ἀπὸ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_\gamma |f(z)|dz := \int_I |f(\gamma(t))|\cdot\gamma'(t)dt$. Μὲ αὐτὸν τὸν συμβολισμὸν τώρα, ἰσχύει προφανῶς ἡ ἀνισότης

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big|\leq\int_\gamma |f(z)dz| \tag{4.39}$$

λόγῳ τῆς ἀντίστοιχης, βασικῆς ἀνισότητος γιὰ τὰ ὁλοκληρώματα Riemann.

Γιὰ νὰ ἀποδείξουμε τὴν (4.22), θὰ χρειαστεῖ νὰ θυμηθοῦμε τὸ πολὺ χρήσιμον θεώρημα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων. Ὑπενθυμίζουμε καταρχὰς ὅτι ἂν f εἶναι μία ὁλόμορφη συνάρτησις μὲ μεμονωμένην ἀνωμαλίαν σὲ κάποιο σημεῖον $a \in \mathbb{C}$, δηλαδὴ ἂν ὑπάρχει $r > 0$ ὥστε ἡ f νὰ εἶναι ὁλόμορφη σὲ περιοχὴν τοῦ συνόλου $\bar{D}(a,r) \setminus \{a\} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| \leq r\}$, τότε ἡ f θὰ ἔχει μίαν ἀναπαράστασιν τῆς μορφῆς

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

γιὰ z στὸ σύνολον $D(a,r)\setminus\{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$ (αὐτὴ ἡ ἀναπαράστασις λέγεται τὸ **ἀνάπτυγμα Laurent** τῆς f στὸν δακτύλιον $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$). Τὸ **ὁλοκληρωτικὸν ὑπόλοιπον** τῆς f στὸ σημεῖον a, τὸ ὁποῖον συμβολίζουμε μὲ $Res(f,a)$, εἶναι ὁ συντελεστὴς c_{-1} τοῦ παραπάνω ἀναπτύγματος. Βεβαίως, σὲ κάποιους ὑπολογισμοὺς μπορεῖ νὰ εἶναι πιὸ εὔκολον νὰ προσδιορίσουμε τὸ $Res(f,a)$ μέσῳ τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος τῆς f πάνω στὴν καμπύλην $C(a,r) \equiv \{|z-a| = r\} := \{a + re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$, ἀφοῦ ἰσχύει

$$Res(f,a) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} f(z)dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) re^{it} dt.$$

Διατυπώνουμε τώρα τὸ θεώρημα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων ποὺ μᾶς δίνει ἕναν τρόπον νὰ ὑπολογίζουμε ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα ὁλομόρφων συναρτήσεων μὲ μεμονωμένες ἀνωμαλίες:

Θεώρημα 6. *Ἔστω $D \subset \mathbb{C}$ ἕνα κυρτὸν (ἢ ἀστρόμορφον) ἀνοικτὸν σύνολον, καὶ ἔστω ὅτι ἔχουμε s διαφορετικὰ σημεῖα $a_1, \ldots, a_s$ στὸ D καὶ μίαν ὁλόμορφην συνάρτησιν $f : D \setminus \{a_1, \ldots, a_s\} \to \mathbb{C}$. Τότε γιὰ κάθε κλειστὴν καμπύλην γ ποὺ περιέχεται στὸ D καὶ δὲν περνᾶ ἀπὸ τὰ $a_1, \ldots, a_s$, ἰσχύει*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{s} Res(f, a_j)\, \delta_\gamma(a_j)$$

(ὅπου $\delta_\gamma(z)$ εἶναι ὁ δείκτης στροφῆς τῆς καμπύλης γ γύρω ἀπ' τὸ σημεῖον $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$).

Ἀπόδειξις τῆς (4.22). Θὰ δείξουμε τὴν ταυτότητα γενικά, συμβολίζοντας μὲ (a) τὴν καμπύλην μὲ παραμέτρησιν $a+it$, $-\infty < t < +\infty$, ὅπου a ὁποιοσδήποτε θετικὸς πραγματικός, καὶ ἀποδεικνύοντας ὅτι $\frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{x^z}{z^2} dz = (\log x)_+$ γιὰ κάθε $x > 0$. Ἀπὸ τὰ παραπάνω ἔχουμε

$$\int_{(a)} \frac{x^z}{z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} i \frac{x^{a+it}}{(a+it)^2} dt = \lim_{L \to \infty} \int_{-L}^{L} i e^{a \log x} \frac{e^{it \log x}}{(a+it)^2} dt,$$

ὅπου τὸ τελευταῖον ὁλοκλήρωμα μποροῦμε νὰ τὸ δοῦμε καὶ σὰν ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $g(z) := ie^{a \log x} \frac{e^{iz \log x}}{(a+iz)^2}$, $z \neq ai$, πάνω στὴν καμπύλην $[-L, L]$.

Ὑποθέτουμε ἀρχικῶς ὅτι $\log x \geq 0$, δηλαδὴ ὅτι $x \geq 1$, καὶ θεωροῦμε ἐπιπλέον τὴν καμπύλην-ἡμικύκλιον γ_L μὲ παραμέτρησιν $\gamma_L(t) := Le^{it}, 0 \leq t \leq \pi$, ὅπως καὶ τὴν ἕνωσιν $c_L := [-L, L] \cup \gamma_L$ ἡ ὁποία εἶναι κλειστὴ καμπύλη. Ἀπὸ τὸ θεώρημα ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων λαμβάνουμε ὅτι

$$\int_{[-L,L]} g(z)dz + \int_{\gamma_L} g(z)dz = \int_{c_L} g(z)dz = 2\pi i \cdot Res(g, ai)\, \delta_{c_L}(ai)$$

γιὰ κάθε $L \in (0, +\infty) \setminus \{a\}$, ἀφοῦ ἡ μοναδικὴ ἀνωμαλία τῆς g εἶναι στὸ σημεῖον ai ποὺ μηδενίζεται ὁ παρονομαστὴς $(a+iz)^2$. Ὁ δείκτης στροφῆς $\delta_{c_L}(ai)$ εἶναι 0 ὅταν τὸ σημεῖον ai δὲν περικλείεται ἀπὸ τὴν καμπύλην c_L, καὶ εἶναι 1 ἀλλιῶς, ἄρα γιὰ τὰ μεγάλα $L, L > a$, ἰσχύει

$$\int_{[-L,L]} g(z)dz = 2\pi i \cdot Res(g, ai) - \int_{\gamma_L} g(z)dz.$$

Ὅμως

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\gamma_L} g(z)dz \Big| &= \Big| \int_0^{\pi} g(Le^{it}) iLe^{it} dt \Big| \leq L \int_0^{\pi} |e^{a \log x}| \cdot \Big| \frac{e^{iLe^{it} \log x}}{(a + iLe^{it})^2} \Big| dt \\ &= Le^{a \log x} \int_0^{\pi} \frac{e^{-L \log x \sin t}}{L^2 |e^{it} - ai/L|^2} dt \leq L^{-1} e^{a \log x} \int_0^{\pi} \frac{1}{(1 - a/L)^2} dt \to 0 \end{aligned}$$

καθὼς τὸ L τείνει στὸ ἄπειρον, ἀφοῦ $e^{it} = \cos t + i \sin t$, καὶ συνεπῶς $|e^{iLe^{it} \log x}| = e^{-L \log x \sin t} \leq 1$ ἐπειδὴ $\log x \sin t \geq 0$ γιὰ $t \in [0, \pi]$. Ἄρα

$$\int_{(a)} \frac{x^z}{z^2} dz = \lim_{L \to \infty} \int_{-L}^{L} ie^{a \log x} \frac{e^{it \log x}}{(a + it)^2} dt = \lim_{L \to \infty} \int_{[-L,L]} g(z)dz = 2\pi i \cdot Res(g, ai),$$

καὶ μποροῦμε, ἀναπτύσσοντας τὴν συνάρτησιν $h(z) := e^{iz \log x}$ σὲ δυναμοσειρὰν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον ai, νὰ δοῦμε ὅτι $Res(g, ai) = \log x$. *Πράγματι, ἂν* $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - ai)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{(n)}(ai)}{n!} (z - ai)^n$, *τότε*

$$g(z) = ie^{a \log x} \frac{h(z)}{-(z - ai)^2} = -ie^{a \log x} \sum_{n=-2}^{+\infty} c_{n+2} (z - ai)^n$$

εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα Laurent τῆς g *γύρω ἀπ' τὸ σημεῖον* ai.

Στὴν περίπτωσιν ποὺ $\log x < 0$, θεωροῦμε ἀναλόγως τὶς καμπύλες-ἡμικύκλια γ_{-L} μὲ παραμετρήσεις $\gamma_{-L}(t) = Le^{-it}, 0 \leq t \leq \pi$, καὶ τὶς καμπύλες $c_{-L} := [-L, L] \cup \gamma_{-L}$. Ἔτσι ἔχουμε πάλι ὅτι

$$\Big| \int_{\gamma_{-L}} g(z)dz \Big| \leq Le^{a \log x} \int_0^{\pi} \frac{e^{-L \log x \sin(-t)}}{L^2 |e^{-it} - ai/L|^2} dt \to 0$$

καθὼς τὸ L τείνει στὸ ἄπειρον, ἀφοῦ $\frac{e^{-L\log x\sin(-t)}}{|e^{-it}-ai/L|^2} \le 1$ γιὰ $0 \le t \le \pi$, ἐνῷ ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων ἰσχύει

$$\int_{[-L,L]} g(z)dz + \int_{\gamma_{-L}} g(z)dz = \int_{c_{-L}} g(z)dz = 2\pi i \cdot Res(g, ai)\, \delta_{c_{-L}}(ai) = 0.$$

Ἄρα προκύπτει τὸ ζητούμενον. □

Ἂς δοῦμε τώρα πῶς χρησιμοποιεῖται τὸ θεώρημα ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων ὅταν θέλουμε νὰ ἐκτιμήσουμε ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα ὅπως στὸ Λῆμμα 4.3.8 : ἂς ποῦμε ὅτι ἔχουμε μίαν ὁλόμορφην (ἤ, ἰσοδύναμα, ἀναλυτικήν) συνάρτησιν f ἡ ὁποία ὁρίζεται σὲ κάποιο ἀνοικτὸν σύνολον $D \subset \mathbb{C}$, καὶ ὅτι αὐτὸ τὸ σύνολον περιέχει μίαν λωρίδα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, τῆς μορφῆς $\{\sigma_1 < \Re(z) < \sigma_2\}, -\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty$, ἐκτὸς ἀπὸ πεπερασμένα τὸ πλῆθος σημεῖά της. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ f φθίνει σχετικὰ γρήγορα στὴν λωρίδα αὐτὴν καθὼς κινούμαστε κατὰ μῆκος τῶν κατακορύφων γραμμῶν τοῦ ἐπιπέδου, δηλαδὴ ὅτι ἰσχύει $|f(z)| = o_{|\Im(z)|\to\infty}(1)$ (ἢ ἀλλιῶς, ὅτι ἔχουμε $|f(z)| \le h(|\Im(z)|)$ γιὰ κάποιαν πραγματικὴν συνάρτησιν $h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ μὲ $\lim_{r\to\infty} h(r) = 0$). Ἂς ποῦμε ἐπίσης ὅτι ἐξαιτίας αὐτοῦ ὁρίζεται τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς f πάνω σὲ μίαν (μὴ φραγμένην) καμπύλην γ_1 ποὺ περιέχεται στὴν λωρίδα καὶ δὲν περνᾶ ἀπ' τὰ σημεῖα στὰ ὁποῖα ἡ f παρουσιάζει ἀνωμαλίαν, δηλαδὴ ὅτι ἰσχύει $\int_{\gamma_1} |f(z)dz| < +\infty$. (Ἐν προκειμένῳ, μᾶς ἐνδιαφέρουν καμπύλες μὲ τὴν ἰδιότητα τὸ $|\Im(\gamma_1(t))|$ νὰ τείνει στὸ ἄπειρον καθὼς τὸ $|t|$ τείνει στὸ ἄπειρον, καὶ μάλιστα, γιὰ νὰ ἁπλουστεύσουμε τὰ πράγματα, θεωροῦμε καμπύλες μὲ παραμέτρησιν $\Re\gamma_1(t)+it, -\infty < t < +\infty$). Γιὰ νὰ ἐκτιμήσουμε τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{\gamma_1} f(z)dz$, στὴν περίπτωσιν ποὺ ὁ ὑπολογισμός του δὲν εἶναι ἄμεσος, μποροῦμε νὰ δοκιμάσουμε νὰ μετακινήσουμε τὴν καμπύλην ὁλοκληρώσεως.

Μετακινοῦμε λοιπὸν τὴν γ_1 σὲ μίαν καμπύλην γ_2 μὲ παρόμοιες ἰδιότητες: θέλουμε ἡ γ_2 νὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\Re\gamma_2(t) + it, -\infty < t < +\infty$, νὰ βρίσκεται μέσα στὴν λωρίδα $\{\sigma_1 < \Re(z) < \sigma_2\}$ καὶ νὰ μὴν περνᾶ ἀπ' τὰ σημεῖα στὰ ὁποῖα ἡ f παρουσιάζει ἀνωμαλίαν. Ἐπιπλέον ζητοῦμε ἡ γ_2 νὰ μὴν τέμνει τὴν γ_1 πουθενά. Παρατηροῦμε ἔπειτα τὰ ἑξῆς: ἂν ἰσχύει καὶ ἡ $\int_{\gamma_2} |f(z)dz| < +\infty$, τότε γιὰ κάθε $\varepsilon > 0$ μποροῦμε νὰ βροῦμε κάποιο ἀρκετὰ μεγάλο M μὲ τὴν ἰδιότητα

$$\Big|\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{[|\Im\gamma_1|\le M]} f(z)dz\Big|,\ \Big|\int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{[|\Im\gamma_2|\le M]} f(z)dz\Big| < \varepsilon,$$

ὅπου $[|\Im\gamma_1| \le M], [|\Im\gamma_2| \le M]$ εἶναι οἱ καμπύλες-περιορισμοὶ τῶν γ_1, γ_2 στὸ ὑποδιάστημα $[-M, M]$. Ἀπὸ τὶς ὑποθέσεις μας γιὰ τὴν f ἔχουμε ὅτι, ἂν I_τ εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ συνδέει τὰ σημεῖα $\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau)$, καὶ τὸ $|\tau|$ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο ὥστε αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα νὰ μὴν περνᾶ ἀπὸ τὶς μεμονωμένες ἀνωμαλίες τῆς f, τότε ὁρίζεται τὸ $\int_{I_\tau} f(z)dz$ καὶ

$$\int_{I_\tau} |f(z)dz| \le \sup_{z\in I_\tau} |f(z)| \cdot \text{μῆκος}(I_\tau) \le \sup_{\substack{\sigma_1<\Re(z)<\sigma_2 \\ \Im(z)=\tau}} |f(z)| \cdot (\sigma_2 - \sigma_1) \to 0$$

καθὼς τὸ $|\tau|$ τείνει στὸ ἄπειρον. Ἔπεται ἀπὸ τὰ παραπάνω ὅτι γιὰ μεγάλα M, ἡ διαφορὰ $\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$ εἶναι $\varepsilon-$κοντὰ στὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς f πάνω στὴν καμπύλην

$$c_M := [|\Im\gamma_1| \leq M] + I_M - [|\Im\gamma_2| \leq M] - I_{-M}$$

(ὅπου μὲ $-\gamma$ συμβολίζουμε τὴν καμπύλην μὲ τὴν ἀντίθετην φοράν), ἀφοῦ ἰσχύει

$$\int_{c_M} f(z)dz = \int_{[|\Im\gamma_1|\leq M]} f(z)dz + \int_{I_M} f(z)dz - \int_{[|\Im\gamma_2|\leq M]} f(z)dz - \int_{I_{-M}} f(z)dz.$$

Ὅμως ἡ c_M εἶναι κλειστὴ καὶ ἁπλὴ καμπύλη ἡ ὁποία περικλείει κάποιες ἀπὸ τὶς μεμονωμένες ἀνωμαλίες τῆς f στὴν λωρίδα $\{\sigma_1 < \Re(z) < \sigma_2\}$, ἂς ποῦμε τὰ σημεῖα $a_1, \ldots, a_s$, ἑπομένως ἀπὸ τὸ θεώρημα ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων,

$$\int_{c_M} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{s} Res(f, a_j)\, \delta_{c_M}(a_j) = \pm 2\pi i \sum_{j=1}^{s} Res(f, a_j),$$

ἀναλόγως ἂν ἡ καμπύλη γ_2 βρίσκεται ἀριστερὰ ἢ δεξιὰ τῆς γ_1 στὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον.

Συμπεραίνουμε τελικῶς ὅτι

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)dz &= \lim_{M\to\infty} \int_{[|\Im\gamma_1|\leq M]} f(z)dz \\
&= \lim_{M\to\infty} \left(\int_{c_M} f(z)dz - \int_{I_M} f(z)dz + \int_{[|\Im\gamma_2|\leq M]} f(z)dz + \int_{I_{-M}} f(z)dz \right) \\
&= \pm 2\pi i \sum_{j=1}^{s} Res(f, a_j) + \int_{\gamma_2} f(z)dz,
\end{aligned}$$

ὅπου, στὴν τελευταίαν ἰσότητα, $a_1, \ldots, a_s$ εἶναι ὅλες οἱ μεμονωμένες ἀνωμαλίες τῆς f οἱ ὁποῖες βρίσκονται ἀνάμεσα στὶς καμπύλες γ_1, γ_2, ἐνῷ τὸ πρόσημον μπροστὰ ἀπὸ τὰ ὁλοκληρωτικὰ ὑπόλοιπα εἶναι θετικὸν ἂν ἡ καμπύλη γ_2 βρίσκεται ἀριστερὰ τῆς γ_1, ἀρνητικὸν ἀλλιῶς. Προφανῶς, ἡ τεχνικὴ αὐτὴ μᾶς διευκολύνει νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ σὲ περιπτώσεις ποὺ ὁ ἀπευθείας ὑπολογισμός του εἶναι πιὸ δύσκολος ἀπὸ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ $\int_{\gamma_2} f(z)dz$ καὶ τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων $Res(f, a_j)$, καὶ εἶναι πιθανὸν αὐτὸ νὰ συμβαίνει ἂν ἐπιλέξουμε σωστὰ τὴν καμπύλην γ_2.

Γιὰ νὰ ἐξασφαλίσουν οἱ Goldston καὶ Yildirim ὅτι ἡ ποσότης ποὺ θέλουμε νὰ ὁλοκληρώσουμε στὴν (4.30) φθίνει ἀρκετὰ γρήγορα ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν τὴν παραπάνω τεχνικήν, κατέφυγαν στὸ παρακάτω λῆμμα τὸ ὁποῖον μελετᾶ τὴν συμπεριφορὰν τῆς συναρτήσεως ζ τοῦ Riemann σὲ μίαν περιοχὴν ἡ ὁποία δὲν περιέχει ῥίζες τῆς συναρτήσεως ἀλλὰ περιέχει τὸν μοναδικόν της πόλον. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ λήμματος δὲν εἶναι στοιχειώδης, ἀπαιτεῖ σοβαρὴν μελέτην τῆς ζ συναρτήσεως, καὶ γι' αὐτὸ ξεφεύγει ἀπὸ τοὺς στόχους αὐτῆς τῆς ἐργασίας.

Λῆμμα 4.3.11. *Μία ἀπὸ τὶς κλασσικὲς περιοχὲς τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ποὺ δὲν περιέχουν ῥίζες τῆς ζ συναρτήσεως εἶναι ἡ κλειστὴ περιοχὴ*

$$\mathcal{Z} := \left\{s \in \mathbb{C} : 10 \geq \Re s \geq 1 - \frac{\beta}{\log(|\Im s| + 2)}\right\},$$

ὅπου β εἶναι κάποια μικρὴ σταθερὰ $\in (0,1)$: μποροῦμε νὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἂν τὸ β εἶναι ἀρκετὰ μικρόν, ἡ ζ συνάρτησις δὲν μηδενίζεται καὶ εἶναι μερόμορφη στὴν $\mathcal{Z}$, μ' ἕναν ἁπλὸν πόλον στὸ 1 καὶ καμμίαν ἄλλην ἀνωμαλίαν. Ἐπιπλέον, ἰσχύουν τὰ φράγματα

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = O(\log(|\Im s| + 2)) \text{ καὶ } \frac{1}{\zeta(s)} = O(\log(|\Im s| + 2))$$

γιὰ κάθε $s \in \mathcal{Z}$.

Ἀπόδειξις. Παραπέμπουμε στὸ βιβλίον τοῦ Titchmarsh ([36], Κεφάλαιον 3). □

4.3.3 Ἀπόδειξις τοῦ λήμματος τῶν Goldston καὶ Yildirim

Θεωροῦμε $R_0 \geq 2, m \geq 1$ καὶ $\sigma > 0$ ὅπως στὴν διατύπωσιν τοῦ Λήμματος 4.3.8 (θὰ δοῦμε στὴν συνέχειαν πόσο μεγάλο πρέπει νὰ εἶναι τὸ R_0 σὲ σχέσιν μὲ τὰ m καὶ σ). Σταθεροποιοῦμε ἐπίσης κάποιο $\beta > 0$ ὥστε νὰ ἰσχύουν τὰ συμπεράσματα τοῦ Λήμματος 4.3.11. Μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ β εἶναι ἀρκετὰ μικρὸν ὥστε ἡ περιοχὴ $\mathcal{Z}$ ποὺ ὁρίζεται στὸ λῆμμα νὰ περιέχεται στὴν $\{1-\sigma < \Re(s) < 101\}$. Στὸ ἑξῆς, ὅλες οἱ σταθερὲς ποὺ θὰ προκύψουν θὰ μποροῦν νὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰ σ καὶ β χωρὶς αὐτὸ νὰ ἀναφέρεται.

Ἐκτὸς τῶν ὁλοκληρωμάτων πάνω στὴν καμπύλην Γ_{R_0} ποὺ ἐμφανίζονται στὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (4.30), θὰ χρειαστεῖ νὰ θεωρήσουμε καὶ ὁλοκληρώματα πάνω σὲ δύο ἀκόμη καμπύλες μέσα στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}_\sigma := \{s \in \mathbb{C} : -\sigma < \Re(s) < 100\}$, τὶς Γ_0 καὶ Γ_1 μὲ παραμετρήσεις

$$\begin{aligned} \Gamma_0(t) &:= -\frac{\beta}{\log(|t|+2)} + it, \quad -\infty < t < +\infty \\ \Gamma_1(t) &:= 1 + it, \quad -\infty < t < +\infty. \end{aligned} \tag{4.40}$$

(Μᾶς ἐνδιαφέρει οἱ καμπύλες νὰ περιέχονται στὴν $\mathcal{D}_\sigma$, ἐπειδὴ σύμφωνα μὲ τὸν Ὁρισμὸν 4.3.6 καὶ τὴν διατύπωσιν τοῦ Λήμματος 4.3.8, ἡ συνάρτησις G τοῦ λήμματος ὁρίζεται στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}_\sigma^m := \prod_{j=1}^{2m} \mathcal{D}_\sigma$.) Ἄς σημειώσουμε ὅτι ἡ Γ_0 εἶναι τὸ ἀριστερὸν σύνορον τῆς $\mathcal{Z} - 1$ (καὶ βρίσκεται ἑπομένως στὰ ἀριστερὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων), ἐνῷ οἱ Γ_{R_0}, Γ_1 εἶναι κατακόρυφες γραμμὲς στὰ δεξιὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων. Ἡ χρησιμότης τῆς καμπύλης Γ_1 ἔγκειται στὴν παρατήρησιν ὅτι ἡ $\zeta(1 + z + z')$ δὲν ἔχει πόλους ὅταν $z \in \mathcal{Z} - 1$ καὶ $z' \in \Gamma_1$. Δὲν θὰ ὑπολογίσουμε ὅμως κανένα ὁλοκλήρωμα πάνω στὴν Γ_1. Ἀντιθέτως, θὰ χρησιμοποιήσουμε τὰ ἑξῆς στοιχειώδη φράγματα:

Λῆμμα 4.3.12. *Ἔστω B μὴ ἀρνητικὴ σταθερά. Ἰσχύουν οἱ ἐκτιμήσεις*

$$\int_{\Gamma_0} \log^B(|z|+2)\Big|\frac{R_0^z dz}{z^2}\Big| \le O_B\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big), \tag{4.41}$$

$$\int_{\Gamma_{R_0}} \log^B(|z|+2)\Big|\frac{R_0^z dz}{z^2}\Big| \le O_B(\log R_0), \tag{4.42}$$

ἐφ' ὅσον τὸ R_0 εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο σὲ σχέσιν μὲ τὸ B. Ἐδῶ $\delta = \delta(B,\beta) > 0$ εἶναι μία σταθερὰ ἀνεξάρτητη τοῦ R_0.

Ἀπόδειξις. Γιὰ τὴν (4.41) γράφουμε

$$\int_{\Gamma_0} \log^B(|z|+2)\Big|\frac{R_0^z dz}{z^2}\Big| = \int_{-\infty}^{+\infty} \log^B(|\Gamma_0(t)|+2)R_0^{\Re(\Gamma_0(t))}|\Gamma_0(t)|^{-2}|\Gamma_0'(t)|dt.$$

Ἀπὸ τὸν τύπον (4.40) τῆς Γ_0 ἕπεται ὅτι $\Gamma_0'(t) = O(1)$ καὶ $|t|+\beta \ll |\Gamma_0(t)| \ll |t|$, ἄρα ἔχουμε γιὰ κάθε ἀρκετὰ μεγάλο $T \ge 2$,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0} \log^B(|z|+2)\Big|\frac{R_0^z dz}{z^2}\Big| &\le O_B(1)\int_0^{+\infty} R_0^{-\beta/(\log(t+2))}\frac{\log^B(t+2)}{(t+\beta)^2}dt \\ &\le O_B(1)\Big(\log^B T\int_0^T R_0^{-\beta/(\log(t+2))}dt + \int_T^{+\infty}\frac{\log^B t}{t^2}dt\Big) \\ &\le O_B(1)\Big(\log^B T\int_0^T R_0^{-\beta/\log T}dt + \big[-t^{-1}\log^B t\big]_T^{+\infty}\Big) \\ &= O_B(1)\big(T\log^B T\exp(-\beta\log R_0/\log T) + T^{-1}\log^B T\big). \end{aligned} \tag{4.43}$$

Γιὰ νὰ φράξουμε τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_T^{+\infty}\frac{\log^B t}{t^2}dt$ ὅταν $B>0$, χρησιμοποιοῦμε ὁλοκλήρωσιν κατὰ παράγοντες, δηλαδὴ γράφουμε

$$\int_T^{+\infty}\frac{\log^B t}{t^2}dt = \int_T^{+\infty}(-t^{-1})'\log^B t dt = \big[-t^{-1}\log^B t\big]_T^{+\infty} + \int_T^{+\infty}\frac{B\log^{B-1}t}{t^2}dt,$$

καὶ ἔπειτα παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κατάλληλα μεγάλα $t \ge T \gg_B 1$ ἰσχύει $B/\log t \le 1/2$, ἄρα $\frac{B\log^{B-1}t}{t^2} \le \frac{\log^B t}{2t^2}$ καὶ

$$\frac{1}{2}\int_T^{+\infty}\frac{\log^B t}{t^2}dt \le \int_T^{+\infty}\frac{\log^B t}{t^2}dt - \int_T^{+\infty}\frac{B\log^{B-1}t}{t^2}dt = \big[-t^{-1}\log^B t\big]_T^{+\infty}.$$

Ἐπιλέγοντας τώρα $T := \exp\big(\sqrt{\beta\log R_0/2}\big)$, ὥστε οἱ δύο προσθετέοι στὴν (4.43) νὰ εἶναι ἴσοι, βλέπουμε ὅτι τὸ ἄθροισμά τους φράσσεται ἀπὸ

$$(\beta\log R_0)^{B/2}\exp\big(-\sqrt{\beta\log R_0/2}\big) = O_B\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big).$$

Σημείωσις. Βλέπουμε ἀπὸ τὰ παραπάνω ὅτι τὸ R_0 πρέπει νὰ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο σὲ σχέσιν μὲ τὸ B ὥστε ὅταν ἐπιλέγουμε $T = \exp\bigl(\sqrt{\beta \log R_0/2}\bigr)$, τὸ T αὐτὸ νὰ εἶναι μεταξὺ τῶν ἐπιτρεπτῶν. Δεδομένου ὅτι στὰ ἑπόμενα λήμματα θὰ ἐπικαλεστοῦμε τὴν (4.41) μόνον γιὰ $B = 0$ ἢ $B = 2$, τὸ πόσο μεγάλο θὰ πρέπει νὰ εἶναι τὸ R_0 θὰ ἐξαρτᾶται τελικῶς ἀπὸ τὰ m, σ καὶ β, ἄρα ἀπὸ τὰ m καὶ σ.

Γιὰ τὴν (4.42), παρατηροῦμε ὅτι τὸ $|R_0^z|$ εἶναι σταθερὸν πάνω στὴν Γ_{R_0}, $|R_0^z| = e$, καὶ ὅτι $|t| + 1/\log R_0 \ll |\Gamma_{R_0}(t)| \ll |t|$, ἑπομένως

$$\int_{\Gamma_{R_0}} \log^B(|z|+2)\Bigl|\frac{R_0^z dz}{z^2}\Bigr| \le O_B(1)\int_0^{+\infty} \frac{\log^B(t+2)}{(t+1/\log R_0)^2}dt$$

$$\le O_B(1)\Bigl(\log^B\bigl(2+1/\log R_0\bigr)\int_0^{\frac{1}{\log R_0}} \frac{1}{(t+1/\log R_0)^2}dt + \int_{\frac{1}{\log R_0}}^{+\infty}\frac{\log^B(t+2)}{t^2}dt\Bigr)$$

$$\le O_B(1)\Bigl(\log^B\bigl(2+1/\log 2\bigr)\log R_0 + \int_{\frac{1}{\log R_0}}^{T_B}\frac{\log^B(t+2)}{t^2}dt + \int_{T_B}^{+\infty}\frac{\log^B t}{t^2}dt\Bigr), \tag{4.44}$$

ὅπου T_B εἶναι ὁ ἐλάχιστος πραγματικὸς ≥ 2 γιὰ τὸν ὁποῖον ἰσχύει $B/\log(T_B) \le 1/2$, καὶ κατὰ συνέπειαν, ὅπως εἴδαμε προηγουμένως, $\int_{T_B}^{+\infty}\frac{\log^B t}{t^2}dt \le 2T_B^{-1}\log^B(T_B)$. Ἕπεται ὅτι ἡ (4.44) εἶναι

$$\le O_B(1)\Bigl(\log^B\bigl(2+1/\log 2\bigr)\log R_0 + \log^B(T_B+2)\int_{\frac{1}{\log R_0}}^{T_B} t^{-2}dt + 2T_B^{-1}\log^B(T_B)\Bigr)$$

$$\le O_B(1)\bigl(\log^B\bigl(2+1/\log 2\bigr)\log R_0 + \log^B(T_B+2)\log R_0 + O_B(1)\bigr)$$

$$= O_B(\log R_0). \qquad \square$$

Τὸ ἑπόμενον λῆμμα εἶναι κατ' οὐσίαν ἡ περίπτωσις $m = 1$ τοῦ Λήμματος 4.3.8.

Λῆμμα 4.3.13. *Ἔστω $f(z,z')$ ἀναλυτικὴ συνάρτησις στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}_\sigma^1$. Ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει σταθερὰ $C > 0$ ὥστε νὰ ἰσχύει*

$$|f(z,z')| \le \exp(C\log^{1/3} R_0)$$

ὁμοιόμορφα σὲ αὐτὴν τὴν περιοχήν. Τότε τὸ ὁλοκλήρωμα

$$I := \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_{R_0}}\int_{\Gamma_{R_0}} f(z,z')\frac{\zeta(1+z+z')}{\zeta(1+z)\zeta(1+z')}\frac{R_0^{z+z'}}{z^2 z'^2}dz dz'$$

ἱκανοποιεῖ τὴν ἐκτίμησιν

$$I = f(0,0)\log R_0 + \frac{\partial f}{\partial z'}(0,0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} f(z,-z)\frac{dz}{\zeta(1+z)\zeta(1-z)z^4} + O(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}})$$

γιὰ κάποιαν $\delta = \delta(\beta) > 0$ ἀνεξάρτητην τοῦ R_0, ἐφ' ὅσον τὸ R_0 εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο σὲ σχέσιν μὲ τὸ β καὶ τὴν σταθερὰν C.

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμε καταρχὰς ὅτι, ἐξαιτίας τοῦ Λήμματος 4.3.11, ἡ ποσότης μέσα στὸ ὁλοκλήρωμα I φθίνει ἀρκετὰ γρήγορα στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}^1_\sigma$ καθὼς $|\Im(z)|, |\Im(z')| \to \infty$, ὥστε νὰ ἐπιτρέπεται νὰ ἀλλάξουμε τὴν σειρὰν τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων, ἢ νὰ μετακινήσουμε τὴν καμπύλην ὁλοκληρώσεως ὡς πρὸς καθεμίαν ἀπὸ τὶς μεταβλητὲς z, z' ἐνῷ κρατοῦμε σταθερὴν τὴν τιμὴν τῆς ἄλλης μεταβλητῆς. Τὸ μόνον ποὺ πρέπει νὰ προσέξουμε εἶναι ἂν ἀνάμεσα στὴν ἀρχικὴν καμπύλην Γ_{R_0} καὶ τὴν καμπύλην στὴν ὁποίαν μετακινούμαστε βρίσκεται κάποιος ἀπὸ τοὺς πόλους τὴς συναρτήσεως

$$h(z,z') := \frac{\zeta(1+z+z')}{\zeta(1+z)\zeta(1+z')}\frac{R_0^{z+z'}}{z^2z'^2}.$$

Συγκεκριμένα μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\int_{\Gamma_{R_0}}\int_{\Gamma_{R_0}} f(z,z')\frac{\zeta(1+z+z')}{\zeta(1+z)\zeta(1+z')}\frac{R_0^{z+z'}}{z^2z'^2}dzdz' \\ = \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_{R_0}} f(z,z')\frac{\zeta(1+z+z')}{\zeta(1+z)\zeta(1+z')}\frac{R_0^{z+z'}}{z^2z'^2}dzdz',$$

δηλαδὴ νὰ μετακινηθοῦμε ἀπὸ τὴν καμπύλην Γ_{R_0} ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν z' στὴν καμπύλην Γ_1, ἀφοῦ ἔτσι δὲν συναντοῦμε κανέναν ἀπὸ τοὺς πόλους τῆς ποσότητος ποὺ ὁλοκληρώνουμε.

Ἂς σταθεροποιήσουμε τώρα κάποιο $z_0' \in \Gamma_1$, καὶ ἂς θεωρήσουμε τὴν ποσότητα $f(z,z_0')\cdot h(z,z_0')$, ἡ ὁποία εἶναι μερόμορφη συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς $z \in \{-\sigma < \Re(s) < 100\}$. Θέλουμε νὰ μετακινήσουμε τὴν καμπύλην ὁλοκληρώσεως Γ_{R_0} ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν z στὴν καμπύλην Γ_0, καὶ κάνοντάς το αὐτὸ συναντοῦμε μόνον ἕναν ἁπλὸν πόλον τῆς συναρτήσεως $h(z,z_0')$ στὸ σημεῖον $z=0$ (αὐτὸς προκύπτει ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $1/z^2$ ἔχει διπλὸν πόλον στὸ $z=0$, ἐνῷ ἡ $1/\zeta(1+z)$ ἔχει ρίζαν πολλαπλότητος 1). Οἱ ὑπόλοιποι παράγοντες τῆς $h(z,z_0')$ δὲν ἔχουν ἀνωμαλίες στὴν περιοχὴν ποὺ ὁριοθετοῦν οἱ δύο καμπύλες, γιὰ παράδειγμα, ὅπως ἤδη ἔχουμε παρατηρήσει, ἡ συνάρτησις $\zeta(1+z+z')$ δὲν ἔχει πόλους ὅταν $z \in \mathcal{Z}-1$ καὶ $z' \in \Gamma_1$. Τὸ ὁλοκληρωτικὸν ὑπόλοιπον τῆς συναρτήσεως $(fh)(z,z_0')$ στὸ σημεῖον $z=0$ εἶναι ἴσον μὲ $f(0,z_0')\frac{R_0^{z_0'}}{z_0'^2}$, ἄρα, ὅπως ἐξηγήσαμε στὴν προηγουμένην ὑποενότητα, ἰσχύει $I = I_1 + I_2$ ὅπου

$$I_1 := \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1} 2\pi i\cdot Res\big((fh)(\cdot,z'),0\big)dz' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(0,z')\frac{R_0^{z'}}{z'^2}dz'$$
$$I_2 := \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_0} f(z,z')\frac{\zeta(1+z+z')}{\zeta(1+z)\zeta(1+z')}\frac{R_0^{z+z'}}{z^2z'^2}dzdz'.$$

Γιὰ νὰ ἐκτιμήσουμε τὸ ὁλοκλήρωμα I_1, μετακινοῦμε τὴν καμπύλην ὁλοκληρώσεως στὴν Γ_0. Πάλι συναντοῦμε ἀκριβῶς ἕναν πόλον τῆς συναρτήσεως $\frac{R_0^{z'}}{z'^2}$, ἕναν διπλὸν γιὰ $z'=0$. Τὸ ὁλοκληρωτικὸν ὑπόλοιπον ἐκεῖ εἶναι ἴσον μὲ $f(0,0)\log R_0 + \frac{\partial f}{\partial z'}(0,0)$, καὶ συνεπῶς

$$\begin{aligned} I_1 &= f(0,0)\log R_0 + \frac{\partial f}{\partial z'}(0,0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} f(0,z')\frac{R_0^{z'}}{z'^2}dz' \\ &= f(0,0)\log R_0 + \frac{\partial f}{\partial z'}(0,0) + O\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big), \end{aligned}$$

ὅπου ὁ τελευταῖος ὅρος προκύπτει ἐξαιτίας τοῦ φράγματος γιὰ τὴν f καὶ τῆς ἀνισότητος (4.41) (στὴν περίπτωσιν $B=0$). Πράγματι, ἔχουμε ὅτι

$$\Big|\int_{\Gamma_0} f(0,z')\frac{R_0^{z'}}{z'^2}dz'\Big| \le \sup_{z'\in\Gamma_0}|f(0,z')|\cdot\int_{\Gamma_0}\Big|\frac{R_0^{z'}}{z'^2}dz'\Big| \le \exp(C\log^{1/3}R_0)\cdot O\big(e^{-\delta'\sqrt{\log R_0}}\big)$$

ὅπου $\delta'>0$ σταθερὰ ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ β, ὁπότε μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε ὅτι τὸ R_0 εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο σὲ σχέσιν μὲ τὸ $\delta'(\beta)$ καὶ τὸ C ὥστε νὰ ἰσχύει

$$\exp(C\log^{1/3}R_0)\cdot O\big(e^{-\delta'\sqrt{\log R_0}}\big) \le O\big(e^{-\frac{\delta'}{2}\sqrt{\log R_0}}\big).$$

Γιὰ νὰ ἐκτιμήσουμε τὸ ὁλοκλήρωμα I_2, ἀλλάζουμε τὴν σειρὰν τῶν διαδοχικῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων καί, σταθεροποιῶντας τὴν μεταβλητὴν z, θεωροῦμε τὴν ποσότητα ποὺ ὁλοκληρώνουμε ὡς μερόμορφην συνάρτησιν τῆς μεταβλητῆς z'. Συγκεκριμένα γιὰ κάθε σταθεροποιημένον $z_0\in\Gamma_0$, παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z_0,z')\cdot h(z_0,z'), z'\in\{-\sigma<\Re(s)<100\}$, φθίνει ἀρκετὰ γρήγορα καθὼς $|\Im(z')|\to\infty$, ἄρα μποροῦμε νὰ μετακινήσουμε τὴν καμπύλην Γ_1 στὴν καμπύλην Γ_0. Κάνοντάς το αὐτό, συναντοῦμε δύο ἁπλοὺς πόλους τῆς συναρτήσεως $h(z_0,z')$, ἕναν στὸ σημεῖον $z'=-z_0$ καὶ ἕναν στὸ $z'=0$. Τὸ ὁλοκληρωτικὸν ὑπόλοιπον στὸν πρῶτον πόλον εἶναι ἴσον μὲ $f(z_0,-z_0)\big(\zeta(1+z_0)\zeta(1-z_0)z_0^4\big)^{-1}$, ὁπότε στὸν ὑπολογισμόν μας γιὰ τὸ I_2 θὰ μᾶς δώσει τὸν ὅρον

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} f(z,-z)\frac{dz}{\zeta(1+z)\zeta(1-z)z^4},$$

ὁ ὁποῖος εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς ὅρους στὴν ζητουμένην ἐκτίμησιν γιὰ τὸ I.

Μὲ ὅμοιον τρόπον, τὸ ὁλοκληρωτικὸν ὑπόλοιπον τῆς $(fh)(z_0,z')$ στὸ σημεῖον $z'=0$ θὰ μᾶς δώσει τὸν ὅρον

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} f(z,0)\frac{R_0^z}{z^2}dz.$$

Ἀκριβῶς ὅπως στοὺς ὑπολογισμοὺς γιὰ τὸ I_1, μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι αὐτὸς εἶναι $O\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big)$ γιὰ κάποιο δ ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ β καὶ γιὰ ἀρκετὰ μεγάλα R_0. Τὸ I_2 ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραπάνω ὅρων καὶ τοῦ ὅρου

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_0} f(z,z')\frac{\zeta(1+z+z')}{\zeta(1+z)\zeta(1+z')}\frac{R_0^{z+z'}}{z^2z'^2}dzdz'. \tag{4.45}$$

Γιὰ νὰ ἐκτιμήσουμε τὸν τελευταῖον ὅρον, παρατηροῦμε ὅτι ἀπὸ τὶς ὑποθέσεις μας $|f| \leq \exp(C\log^{1/3}R_0)$, ἐνῷ $\frac{\zeta(1+z+z')}{\zeta(1+z)\zeta(1+z')} = O(1)\log^2(|\Im(z)|+2)\log^2(|\Im(z')|+2)$ ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.3.11. Ἄρα, ἐφαρμόζοντας τὴν ἀνισότητα (4.41) διαδοχικὰ γιὰ τὶς μεταβλητὲς z καὶ z' (στὴν περίπτωσιν ποὺ $B = 2$), συμπεραίνουμε ὅτι

$$(4.45) = O\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big)$$

γιὰ κάποιο δ ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ β καὶ γιὰ ἀρκετὰ μεγάλα R_0.

Πλέον, ἔχουμε ἐξισώσει τὰ I_1, I_2 μὲ ποσότητες ποὺ διαφέρουν ἀπὸ αὐτὰ μόνον κατὰ ἕναν ὅρον-σφάλμα τῆς τάξεως $O\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big)$. Ἀθροίζοντας αὐτὲς τὶς ποσότητες, ἔχουμε τὴν ζητουμένην ἐκτίμησιν γιὰ τὸ I. □

Ἀπόδειξις τοῦ Λήμματος 4.3.8. Ἔστω $G = G(z, z')$ ἀναλυτικὴ συνάρτησις $2m$ μιγαδικῶν μεταβλητῶν ποὺ ὁρίζεται στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}_\sigma^m$ καὶ ἱκανοποιεῖ τὸ φράγμα (4.29). Θέλουμε νὰ ἐκτιμήσουμε τὰ διαδοχικὰ ὁλοκληρώματα

$$I(G,m) := \frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{\Gamma_{R_0}}\cdots\int_{\Gamma_{R_0}} G(z,z')\prod_{j=1}^{m}\frac{\zeta(1+z_j+z'_j)}{\zeta(1+z_j)\zeta(1+z'_j)}\frac{R_0^{z_j+z'_j}}{z_j^2 z_j'^2}dz_j dz'_j$$

δείχνοντας ὅτι

$$I(G,m) = G(0,\ldots,0)\log^m R_0 + \sum_{j=1}^{m} O\big(\|G\|_{C^j(\mathcal{D}_\sigma^m)}\log^{m-j}R_0\big) + O\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big)$$

(ὅλες οἱ σταθερὲς ποὺ ὑπονοοῦνται ἀπὸ τὸν συμβολισμὸν O θὰ ἐπιτρέπεται νὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰ m, σ καὶ β χωρὶς αὐτὸ νὰ ἀναφέρεται).

Ἡ ἀπόδειξις θὰ γίνει μὲ ἐπαγωγὴν στὸ m : ἡ περίπτωσις $m = 1$ εἶναι συνέπεια τοῦ προηγουμένου λήμματος, ἀρκεῖ νὰ ἐκτιμήσουμε τὸν ὅρον

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} G(z_1,-z_1)\frac{dz_1}{\zeta(1+z_1)\zeta(1-z_1)z_1^4}.$$

Ὅμως ἀπὸ τὶς ἐκτιμήσεις στὸ Λῆμμα 4.3.11 καὶ τὸν ὁρισμὸν (4.40) τῆς καμπύλης Γ_0, βλέπουμε ὅτι

$$\int_{\Gamma_0}\Big|\frac{dz_1}{\zeta(1+z_1)\zeta(1-z_1)z_1^4}\Big| = O(1), \tag{4.46}$$

καὶ ἔτσι ὁ παραπάνω ὅρος εἶναι $O(\sup_{(z,z')\in\mathcal{D}_\sigma^1}|G(z,z')|) = O(\|G\|_{C^1(\mathcal{D}_\sigma^1)})$.

Ἂς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἔχουμε δείξει τὸ ζητούμενον γιὰ κάποιο $m \geq 1$. Ἐφαρμόζοντας τὸ Λῆμμα 4.3.13 στὶς μεταβλητὲς z_{m+1}, z'_{m+1}, βρίσκουμε ὅτι τὸ $I(G, m+1)$ εἶναι ἴσον μὲ

$$\begin{aligned}
&\frac{\log R_0}{(2\pi i)^{2m}}\int_{\Gamma_{R_0}}\cdots\int_{\Gamma_{R_0}} G(z_1,\ldots,z_m,0,z_1',\ldots,z_m',0)\prod_{j=1}^{m}\frac{\zeta(1+z_j+z_j')}{\zeta(1+z_j)\zeta(1+z_j')}\frac{R_0^{z_j+z_j'}}{z_j^2 z_j'^2}dz_j dz_j'\\
&+\frac{1}{(2\pi i)^{2m}}\int_{\Gamma_{R_0}}\cdots\int_{\Gamma_{R_0}} H(z_1,\ldots,z_m,z_1',\ldots,z_m')\prod_{j=1}^{m}\frac{\zeta(1+z_j+z_j')}{\zeta(1+z_j)\zeta(1+z_j')}\frac{R_0^{z_j+z_j'}}{z_j^2 z_j'^2}dz_j dz_j'\\
&+O\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big)\\
=\,& I\big(G(z_1,\ldots,z_m,0,z_1',\ldots,z_m',0),m\big)\log R_0 + I(H,m) + O\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big),
\end{aligned}$$

ὅπου $\delta>0$ καὶ $H:\mathcal{D}_\sigma^m\to\mathbb{C}$ εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ συνάρτησις

$$\begin{aligned}
(4.47)\quad H(z_1,\ldots,z_m,z_1',\ldots,z_m') &:= \frac{\partial G}{\partial z_{m+1}'}(z_1,\ldots,z_m,0,z_1',\ldots,z_m',0)\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} G(z_1,\ldots,z_m,z_{m+1},z_1',\ldots,z_m',-z_{m+1})\frac{dz_{m+1}}{\zeta(1+z_{m+1})\zeta(1-z_{m+1})z_{m+1}^4}.
\end{aligned}$$

Ὁ ὅρος-σφάλμα $O\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big)$ προκύπτει ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον ὅρον στὸ Λῆμμα 4.3.13 καὶ $2m$ ἐφαρμογὲς τῆς ἀνισότητος (4.42). Πράγματι, γιὰ νὰ φράξουμε τὸ ὁλοκλήρωμα

$$(4.48)\qquad \frac{1}{(2\pi i)^{2m}}\int_{\Gamma_{R_0}}\cdots\int_{\Gamma_{R_0}} O\big(e^{-\delta_0\sqrt{\log R_0}}\big)\prod_{j=1}^{m}\frac{\zeta(1+z_j+z_j')}{\zeta(1+z_j)\zeta(1+z_j')}\frac{R_0^{z_j+z_j'}}{z_j^2 z_j'^2}dz_j dz_j'$$

ποὺ ἐμφανίζεται στὴν ἐκτίμησιν γιὰ τὸ $I(G,m+1)$ μετὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ Λήμματος 4.3.13 στὶς μεταβλητὲς z_{m+1},z_{m+1}', ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἀπὸ τὶς ἐκτιμήσεις στὸ Λῆμμα 4.3.11, γιὰ κάθε $1\le j\le m$ καὶ γιὰ κάθε $z_j,z_j'\in\Gamma_{R_0}$ ἰσχύει

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\zeta(1+z_j+z_j')}{\zeta(1+z_j)\zeta(1+z_j')}\Big|\\
&\le O(\log(|\Im(z_j)|+2))O(\log(|\Im(z_j')|+2))\left(\frac{1}{|z_j+z_j'|}+O(\log(|\Im(z_j+z_j')|+2))\right)\\
&\le O(\log(|z_j|+2))O(\log(|z_j'|+2))\big(\log R_0/2+O(\log(|z_j|+2)\log(|z_j'|+2))\big),
\end{aligned}$$

δεδομένου ὅτι $|z_j + z_j'| \geq |\Re(z_j + z_j')| = 2/\log R_0$. Ἑπομένως,

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_{R_0}}\int_{\Gamma_{R_0}} \frac{\zeta(1+z_j+z_j')}{\zeta(1+z_j)\zeta(1+z_j')}\frac{R_0^{z_j+z_j'}}{z_j^2 z_j'^2}dz_j dz_j'\Big| \\
&\leq \log R_0 \left(\int_{\Gamma_{R_0}} O(\log(|z_j|+2))\Big|\frac{R_0^{z_j}dz_j}{z_j^2}\Big|\right)\left(\int_{\Gamma_{R_0}} O(\log(|z_j'|+2))\Big|\frac{R_0^{z_j'}dz_j'}{z_j'^2}\Big|\right) \\
&\quad + \left(\int_{\Gamma_{R_0}} O(\log^2(|z_j|+2))\Big|\frac{R_0^{z_j}dz_j}{z_j^2}\Big|\right)\left(\int_{\Gamma_{R_0}} O(\log^2(|z_j'|+2))\Big|\frac{R_0^{z_j'}dz_j'}{z_j'^2}\Big|\right) \\
&= O(\log^3 R_0) + O(\log^2 R_0)
\end{aligned}$$

χρησιμοποιῶντας τὴν ἀνισότητα (4.42) στὶς περιπτώσεις $B = 1$ ἢ 2, καὶ τελικῶς

$$(4.48) = O\big(e^{-\delta_0\sqrt{\log R_0}}\big)O_m(\log^{3m} R_0) = O\big(e^{-\frac{\delta_0}{2}\sqrt{\log R_0}}\big)$$

γιὰ ἀρκετὰ μεγάλα R_0 σὲ σχέσιν μὲ τὸ m.

Μένει νὰ ἐκτιμήσουμε τὰ $I\big(G(z_1,\ldots,z_m,0,z_1',\ldots,z_m',0),m\big)$ καὶ $I(H,m)$: καὶ οἱ δύο συναρτήσεις εἶναι ἀναλυτικὲς $2m$ μεταβλητῶν στὴν περιοχὴν $\mathcal{D}_\sigma^m$. Συνδυάζοντας τὴν ἐκτίμησιν (4.46) μὲ τὸν ὁρισμὸν (4.47) τῆς H, βλέπουμε ὅτι

$$\|H\|_{C^j(\mathcal{D}_\sigma^m)} = O_m\big(\|G\|_{C^{j+1}(\mathcal{D}_\sigma^{m+1})}\big) \text{ γιὰ κάθε } 0 \leq j \leq m.$$

Ἄρα, ἐπικαλούμενοι τὴν ἐπαγωγικὴν ὑπόθεσιν, μποροῦμε νὰ καταλήξουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι $I(G,m+1) =$

$$\begin{aligned}
&G(0,\ldots,0)(\log R_0)^{m+1} + \sum_{j=1}^m O_m\big(\|G(\cdot,0,\cdot,0)\|_{C^j(\mathcal{D}_\sigma^m)}(\log R_0)^{m+1-j}\big) \\
&+H(0,\ldots,0)(\log R_0)^m + \sum_{j=1}^m O_m\big(\|H\|_{C^j(\mathcal{D}_\sigma^m)}(\log R_0)^{m-j}\big) + O\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big) \\
=\ &G(0,\ldots,0)(\log R_0)^{m+1} + \sum_{j=1}^m O_m\big(\|G\|_{C^j(\mathcal{D}_\sigma^{m+1})}(\log R_0)^{m+1-j}\big) \\
&+H(0,\ldots,0)(\log R_0)^m + \sum_{j=1}^m O_m\big(\|G\|_{C^{j+1}(\mathcal{D}_\sigma^{m+1})}(\log R_0)^{m-j}\big) + O\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big) \\
=\ &G(0,\ldots,0)(\log R_0)^{m+1} + \sum_{j=1}^{m+1} O_m\big(\|G\|_{C^j(\mathcal{D}_\sigma^{m+1})}(\log R_0)^{m+1-j}\big) + O\big(e^{-\delta\sqrt{\log R_0}}\big),
\end{aligned}$$

ποὺ εἶναι τὸ ζητούμενον. □

4.4 Οἱ συνθῆκες γραμμικῶν μορφῶν καὶ συσχετισμοῦ γιὰ τὸ ν

Ὅπως εἴπαμε στὴν Παρατήρησιν 1.1.5 μετὰ τὴν διατύπωσιν τῆς συνθήκης γραμμικῶν μορφῶν, τὸ ὅτι ἡ συνάρτησις $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἐκτίμησιν $\mathbb{E}(\nu) = 1 + o(1)$, δηλαδὴ τὸ ὅτι ἡ ν εἶναι μέτρον σύμφωνα μὲ τὸν Ὁρισμὸν 1.1.3 ποὺ ἔχουμε δώσει, εἶναι ἁπλῶς μία ὑποπερίπτωσις τῆς $(k\cdot 2^{k-1}, 3k-4, k)-$συνθήκης γραμμικῶν μορφῶν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ δείξουμε ὅτι ἱκανοποιεῖ ἡ ν. Πρῶτα ὅμως θὰ δοῦμε τὴν βασικὴν αὐτὴν ὑποπερίπτωσιν γιὰ νὰ καταλάβουμε πῶς θὰ χρησιμοποιηθεῖ ἡ Πρότασις 4.3.3.

Λῆμμα 4.4.1. *Ἡ συνάρτησις $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ τοῦ Ὁρισμοῦ* 4.3.1 *εἶναι μέτρον.*

Ἀπόδειξις. Πρέπει νὰ δείξουμε ὅτι $\mathbb{E}(\nu(x)|x \in \mathbb{Z}_N) = 1 + o(1)$. Λόγῳ τοῦ διπλοῦ ὁρισμοῦ γιὰ τὴν ν, χρειάζεται νὰ σπάσουμε τὸ ὁλοκλήρωμα στὰ δύο. Ἂν $B_N := \{n \in \mathbb{Z} : \epsilon_k N \leq n \leq 2\epsilon_k N\}$, τότε γιὰ ἀρκετὰ μεγάλα N σὲ σχέσιν μὲ τὸ k θὰ ἰσχύει $|B_N| \geq R^{10}$. Ἐφαρμόζουμε λοιπὸν τὴν Πρότασιν 4.3.3 γιὰ τὰ διαστήματα B_N, γιὰ $m = t = 1$ καὶ $\psi_1(x_1) = x_1$: λαμβάνουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\frac{\phi(W)}{W\log R}\Lambda_R^2(Wn+1)\,\middle|\,n \in B_N\right) = 1 + o(1).$$

Δηλαδή, ἐξαιτίας τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1, συμπεραίνουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\big(\nu(x)|x \in [\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]\big) = 1 + o(1).$$

Προφανῶς, πάλι ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς ν,

$$\mathbb{E}\big(\nu(x)|x \in \mathbb{Z}_N \setminus [\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]\big) = 1.$$

Ἄρα

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\nu(x)|x \in \mathbb{Z}_N) &= \frac{|[\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]|}{N}\mathbb{E}\big(\nu(x)|x \in [\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]\big)\\ &\quad + \frac{N - |[\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]|}{N}\mathbb{E}\big(\nu(x)|x \in \mathbb{Z}_N \setminus [\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]\big)\\ &= 1 + o(1).\end{aligned}$$

□

Βλέπουμε ἑπομένως, σὲ αὐτὴν τὴν πολὺ ἁπλὴν ἐφαρμογὴν τῆς Προτάσεως 4.3.3, ὅτι γιὰ νὰ τὴν ἐπικαλεστοῦμε ὥστε νὰ δείξουμε τὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν γιὰ τὴν συνάρτησιν ν, θὰ χρειάζεται σὲ κάθε περίπτωσιν νὰ διαιρέσουμε τὸ πεδίον ὁλοκληρώσεως $\mathbb{Z}_N^m$ σὲ μικρὰ ὀρθογώνια στὰ ὁποῖα οἱ τιμὲς τῆς ν θὰ δίνονται ἀπὸ ἕναν τύπον, προσέχοντας ὅμως ὁ ὄγκος τῶν ὀρθογωνίων νὰ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλος σὲ σχέσιν μὲ τὴν παράμετρον R. Αὐτὸ ἀκριβῶς ἐπιχειροῦμε στὴν ἑπομένην ἀπόδειξιν:

Πρότασις 4.4.2. *Τὸ μέτρον ν τοῦ Ὁρισμοῦ* 4.3.1 *ἱκανοποιεῖ τὴν $(k\cdot 2^{k-1}, 3k-4, k)-$συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἔχουμε m γραμμικὲς μορφὲς $\psi_i(x) := \sum_{j=1}^t L_{ij}x_j + b_i$ ὅπως στὸν ὁρισμὸν τῆς ἀντιστοίχου συνθήκης, δηλαδὴ ἔχουμε $m \le k \cdot 2^{k-1}, t \le 3k-4$, οἱ L_{ij} εἶναι ῥητοὶ ἀριθμοὶ μὲ ἀριθμητὲς καὶ παρονομαστὲς ἀπολύτως $\le k$, τὰ b_i τυχόντες ἀκέραιοι, ἐνῷ κανένα ἀπὸ τὰ διανύσματα $(L_{ij})_{j=1}^t$ δὲν εἶναι μηδὲν ἢ ῥητὸν πολλαπλάσιον κάποιου ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα. Θέλουμε νὰ δείξουμε ὅτι

$$\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t) = 1 + o(1)$$

μὲ τὸ σφάλμα νὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὶς παραμέτρους m, t καὶ k, δηλαδὴ κατ' οὐσίαν ἀπὸ τὸ k ἀφοῦ $m \le k \cdot 2^{k-1}, t \le 3k-4$. Γιὰ τὴν ποσότητα μέσα στὴν μέσην τιμήν, ἑρμηνεύουμε φυσικὰ τὰ L_{ij} καὶ b_i ὡς στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_N$ θεωρῶντας πρώτους $N > k$. Παρατηροῦμε ὅμως τότε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία $\boldsymbol{x} \mapsto k!\boldsymbol{x} \equiv (k!x_1, \ldots, k!x_t)$, ἀπὸ τὸ $\mathbb{Z}_N^t$ στὸν ἑαυτόν του, εἶναι 1-1 καὶ ἐπί, ἄρα

$$\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t) = \mathbb{E}(\nu(\psi_1(k!\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(k!\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t)$$

ὅπου $\psi_i(k!\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^t L'_{ij}x_j + b_i$ μὲ τὰ $L'_{ij} = k!L_{ij}$ νὰ εἶναι ἀκέραιοι ἀπολύτως $\le (k+1)!$. Μποροῦμε ἑπομένως νὰ ὑποθέσουμε ἐξαρχῆς ὅτι οἱ συντελεστὲς L_{ij} τῶν γραμμικῶν μορφῶν μας εἶναι ἀκέραιοι μὲ $|L_{ij}| \le (k+1)!$, καὶ ἔπειτα, ἀφοῦ ἡ συνάρτησις $w(N)$ ποὺ ὁρίσαμε τείνει στὸ ἄπειρον, νὰ ὑποθέσουμε, θεωρῶντας ἀρκετὰ μεγάλα N σὲ σχέσιν μὲ τὸ k, ὅτι ἰσχύει $(k+1)! < \sqrt{w(N)/2}$, ὥστε νὰ μποροῦμε νὰ ἐπικαλεστοῦμε τὴν Πρότασιν 4.3.3 ἔτσι ὅπως διετυπώθη.

Ὅπως εἴπαμε, χρειάζεται, προτοῦ ἐφαρμόσουμε τὴν Πρότασιν 4.3.3, νὰ «κόψουμε» τὸ πεδίον ὁλοκληρώσεως σὲ κατάλληλα μικρὰ ὀρθογώνια. Πρὸς τοῦτο, θὰ θεωρήσουμε ἕναν φυσικὸν $Q \equiv Q(N) < N$ καὶ θὰ διαιρέσουμε τὸ $\mathbb{Z}_N^t$ σὲ Q^t ὀρθογώνια σχεδὸν ἴσου ὄγκου θέτοντας

$$B_{u_1,\ldots,u_t} := \big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t : x_j \in \big[\lfloor u_jN/Q\rfloor, \lfloor(u_j+1)N/Q\rfloor\big), j = 1, \ldots, t\big\}$$

γιὰ κάθε $(u_1, \ldots, u_t) \in \mathbb{Z}_Q^t$. Ὅπως θὰ δοῦμε, θὰ χρειαστεῖ τὸ Q νὰ εἶναι πρῶτος, καὶ ἐπιπλέον ἡ συνάρτησις $Q(N)$ νὰ τείνει στὸ ἄπειρον ὅταν τὸ N τείνει στὸ ἄπειρον, ἀλλὰ κάπως ἀργά: ἐπειδὴ τὸ ἄνω φράγμα $Q(N) \le \sqrt{N}$ θὰ μᾶς εἶναι ἀρκετόν, μποροῦμε νὰ ἐπιλέξουμε τὸ Q νὰ εἶναι ὁ μέγιστος πρῶτος $\le \sqrt{N}$. Γιὰ καθένα ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια $B_{u_1,\ldots,u_t}$ ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^t \big[\big((u_j+1)N/Q - 1\big) - u_jN/Q\big] = (N/Q-1)^t \le |B_{u_1,\ldots,u_t}| \\ \le \prod_{j=1}^t \big[(u_j+1)N/Q - \big(u_jN/Q - 1\big)\big] = (N/Q+1)^t.\end{aligned}$$

Ἄρα, ἀφοῦ $Q(N) \leq \sqrt{N}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x}\in B_{u_1,\ldots,u_t}\big)|u_1,\ldots,u_t\in\mathbb{Z}_Q\big)\\
&\qquad\qquad = \frac{1}{Q^t}\sum_{u_1,\ldots,u_t\in\mathbb{Z}_Q}\sum_{\boldsymbol{x}\in B_{u_1,\ldots,u_t}}\frac{\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))}{|B_{u_1,\ldots,u_t}|}\\
&\qquad\qquad \geq \frac{1}{Q^t(N/Q+1)^t}\sum_{u_1,\ldots,u_t\in\mathbb{Z}_Q}\sum_{\boldsymbol{x}\in B_{u_1,\ldots,u_t}}\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))\\
&\qquad\qquad \geq \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{N}}}\right)^t\frac{1}{N^t}\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_N^t}\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))\\
&\qquad\qquad = (1-o_t(1))\mathbb{E}\big(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))\mid\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_N^t\big),
\end{aligned}$$

καὶ ἀναλόγως

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x}\in B_{u_1,\ldots,u_t}\big)|u_1,\ldots,u_t\in\mathbb{Z}_Q\big)\\
&\qquad\qquad\qquad \leq (1+o_t(1))\mathbb{E}\big(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))\mid\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_N^t\big).
\end{aligned}$$

Συνεπῶς, ἐπιχειροῦμε νὰ ἐκτιμήσουμε γιὰ καθένα διάνυσμα $(u_1,\ldots,u_t)\in\mathbb{Z}_Q^t$ τὴν ποσότητα $\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x}\in B_{u_1,\ldots,u_t})$.

Ἕνα τέτοιο διάνυσμα θὰ καλεῖται *καλὸν* ὅταν ἔχουμε γιὰ κάθε $1\leq i\leq m$, τὸ σύνολον $\psi_i(B_{u_1,\ldots,u_t})$, ἐφ' ὅσον τὸ δοῦμε σὰν ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{Z}_N$, νὰ περιέχεται ὁλόκληρον στὸ διάστημα $[\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]$ ἢ νὰ εἶναι τελείως ξένον πρὸς αὐτό. Θέλουμε δηλαδὴ γιὰ κάθε i τὴν ἑξῆς διχοτομίαν: εἴτε γιὰ κάθε $\boldsymbol{x}\in B_{u_1,\ldots,u_t}$ νὰ ὑπάρχει ἀκέραιος $l\equiv l(\boldsymbol{x})$ ὥστε

$$\epsilon_k N \leq \psi_i(\boldsymbol{x}) + lN = \sum_{j=1}^{t} L_{ij}x_j + b_i + lN \leq 2\epsilon_k N,$$

εἴτε ἡ παραπάνω διπλὴ ἀνισότης νὰ μὴν ἰσχύει γιὰ κανένα $\boldsymbol{x}\in B_{u_1,\ldots,u_t}$ καὶ $l\in\mathbb{Z}$.

Μία σημαντικὴ παρατήρησις εἶναι ἡ ἑξῆς: ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια $B_{u_1,\ldots,u_t}$ εἶναι γινόμενα ἀρκετὰ μικρῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ $\mathbb{Z}_N$ (δεδομένου ὅτι ἔχουμε θέσει Q νὰ εἶναι ὁ μέγιστος πρῶτος $\leq\sqrt{N}$, ἑπομένως $Q\geq\sqrt{N}/2$ ἀπὸ τὸ θεώρημα Bertrand-Chebyshev), καὶ ἐπίσης ἐπειδὴ οἱ συντελεστὲς L_{ij} εἶναι ὁμοιόμορφα φραγμένοι ὡς πρὸς N, προκύπτει ὅτι ὁ ἀκέραιος $l(\boldsymbol{x})$ γιὰ τὸν ὁποῖον ἰσχύει ἡ παραπάνω διπλὴ ἀνισότης γιὰ κάποιο $\boldsymbol{x}\in B_{u_1,\ldots,u_t}$ εἶναι κοινὸς γιὰ ὅλα τὰ $\boldsymbol{x}'\in B_{u_1,\ldots,u_t}$. Μάλιστα αὐτὸ ἀληθεύει γιὰ ὅλα τὰ ὀρθογώνια, ὄχι ἁπλῶς γιὰ αὐτὰ ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ «καλὰ» διανύσματα: ἐννοοῦμε δηλαδὴ ὅτι ἂν γιὰ κάποιο διάνυσμα $(u_1,\ldots,u_t)$ μποροῦμε νὰ βροῦμε $\boldsymbol{x}\in B_{u_1,\ldots,u_t}$, $1\leq i\leq m$ καὶ ἀκέραιον $l\in\mathbb{Z}$ ὥστε νὰ ἰσχύει

$$\epsilon_k N \leq \psi_i(\boldsymbol{x}) + lN = \sum_{j=1}^{t} L_{ij}x_j + b_i + lN \leq 2\epsilon_k N,$$

τότε γιὰ κάθε $\boldsymbol{x}' \in B_{u_1,\dots,u_t}$ *θὰ ἰσχύει*

$$1 \le \psi_i(\boldsymbol{x}') + lN = \sum_{j=1}^{t} L_{ij}x'_j + b_i + lN \le N$$

μὲ τὸν ἴδιον ἀκέραιον l, *ἐφ' ὅσον θεωρήσουμε ἀρκετὰ μεγάλα* N *σὲ σχέσιν μὲ τὸ* k *καὶ τὸ* t. *Εἶναι δυνατὸν ἑπομένως, καὶ θὰ χρειαστεῖ ὅπως θὰ δοῦμε, νὰ σκεφτόμαστε τὸ* lN *σὰν μέρος τοῦ σταθεροῦ ὅρου τῆς γραμμικῆς μορφῆς* ψ_i *ὅταν ἐξετάζουμε τὸν περιορισμόν της στὸ συγκεκριμένον ὀρθογώνιον* $B_{u_1,\dots,u_t}$.

Πλέον, μποροῦμε νὰ ἐπικαλεστοῦμε τὴν Πρότασιν 4.3.3 ὥστε νὰ ἐκτιμήσουμε τὶς ποσότητες $\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x} \in B_{u_1,\dots,u_t})$ γιὰ τὰ διάφορα διανύσματα $\in \mathbb{Z}_Q^t$: ὅταν τὸ διάνυσμα εἶναι καλόν, ἀντικαθιστοῦμε κάθε παράγοντα $\nu(\psi_i(\boldsymbol{x}))$ εἴτε ἀπὸ τὴν σταθερὴν συνάρτησιν 1 εἴτε ἀπὸ $\frac{\phi(W)}{W\log R}\Lambda_R^2(\theta_i(\boldsymbol{x}))$ ὅπου $\theta_i(\boldsymbol{x}) := W(\psi_i(\boldsymbol{x}) + lN) + 1$ γιὰ κάθε $\boldsymbol{x} \in B_{u_1,\dots,u_t}$ (ὅπως εἴπαμε, lN εἶναι τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ N ποὺ πρέπει νὰ προσθέσουμε σὲ κάθε ἀκέραιον $\psi_i(\boldsymbol{x})$ γιὰ $\boldsymbol{x} \in B_{u_1,\dots,u_t}$ ὥστε νὰ βροῦμε τὸν ἰσοϋπόλοιπον $\pmod N$ ἀκέραιον $\in [\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]$). Ἐπειδὴ τὸ $B_{u_1,\dots,u_t}$ εἶναι γινόμενον διαστημάτων μὲ μῆκος N/Q ποὺ ξεπερνᾶ τὸ R^{10m} ἐξαιτίας τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1 καὶ τοῦ ἄνω φράγματος γιὰ τὸ m, ἱκανοποιοῦνται ὅλες οἱ ὑποθέσεις τῆς Προτάσεως 4.3.3 καὶ ἄρα ἕπεται τὸ συμπέρασμα:

$$\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x} \in B_{u_1,\dots,u_t}) = 1 + o_{m,t}(1).$$

Ὅταν τὸ διάνυσμα $(u_1,\dots,u_t)$ δὲν εἶναι καλόν, γράφουμε τοὺς παράγοντες $\nu(\psi_i(\boldsymbol{x}))$ ὅπως καὶ προηγουμένως ἂν τὸ $\psi_i(B_{u_1,\dots,u_t})$ περιέχεται ὁλόκληρον $\pmod N$ στὸ διάστημα $[\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]$ ἢ εἶναι ξένον πρὸς αὐτό, ἐνῷ γιὰ τὰ ὑπόλοιπα i φράσσουμε ἀπὸ πάνω τὸν παράγοντα $\nu(\psi_i(\boldsymbol{x}))$ μὲ τὴν ποσότητα $1 + \frac{\phi(W)}{W\log R}\Lambda_R^2\big(W(\psi_i(\boldsymbol{x}) + lN) + 1\big)$ (ὅπου lN καὶ πάλι τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ N ποὺ πρέπει νὰ προσθέσουμε στὴν τιμὴν $\psi_i(\boldsymbol{x})$ τοῦ $\boldsymbol{x} \in B_{u_1,\dots,u_t}$ ὥστε νὰ βροῦμε τὸν ἰσοϋπόλοιπον $\pmod N$ ἀκέραιον $\in [1, N]$). Ἀναπτύσσοντας τὸ γινόμενον ποὺ σχηματίζεται ἔτσι, ἔχουμε νὰ ἐκτιμήσουμε τὸ πολὺ 2^m μέσες τιμὲς τῆς μορφῆς ποὺ περιγράφεται στὴν Πρότασιν 4.3.3. Προκύπτει ὅτι

$$\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x} \in B_{u_1,\dots,u_t}) \le 2^m(1 + o_{m,t}(1)) = O_{m,t}(1)$$

στὴν περίπτωσιν ποὺ τὸ $(u_1,\dots,u_t)$ δὲν εἶναι καλόν.

Γιὰ νὰ τελειώσουμε, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μὴ καλῶν διανυσμάτων $\in \mathbb{Z}_Q^t$ εἶναι τὸ πολὺ $O_{m,t}(Q^{t-1})$. Τότε ἀπὸ τὰ παραπάνω θὰ ἰσχύει

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))\mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t)\\
&= (1 + o_t(1))\frac{1}{Q^t}\sum_{u_1,\dots,u_t \in \mathbb{Z}_Q^t} \mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x} \in B_{u_1,\dots,u_t})\\
&= (1 + o_t(1))\frac{1}{Q^t}\big[\big(Q^t - O_{m,t}(Q^{t-1})\big)\big(1 + o_{m,t}(1)\big) + O_{m,t}(Q^{t-1})\big]\\
&= (1 + o_t(1))\big[\big(1 - O_{m,t}(1/Q)\big)\big(1 + o_{m,t}(1)\big) + O_{m,t}(1/Q)\big],
\end{aligned}$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἀκριβῶς $1 + o_{m,t}(1)$ ἐφ' ὅσον ἡ $Q(N) \to \infty$.

Ἄς δοῦμε τὶ πρέπει νὰ συμβαίνει ὥστε τὸ $(u_1, \ldots, u_t)$ νὰ μὴν εἶναι καλόν: θὰ πρέπει νὰ ὑπάρχουν $1 \le i \le m$ καὶ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in B_{u_1,\ldots,u_t}$ ὥστε τὸ $\psi_i(\boldsymbol{x})$ νὰ βρίσκεται ἐντὸς τοῦ διαστήματος $[\epsilon_k N, 2\epsilon_k N] \bmod N$, ἐνῷ τὸ $\psi_i(\boldsymbol{x}')$ ὄχι. Δηλαδή, ὅπως ἔχουμε πεῖ, θὰ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἀκέραιον l ὥστε νὰ ἰσχύει εἴτε ἡ

$$1 \le \psi_i(\boldsymbol{x}') + lN < \epsilon_k N \le \psi_i(\boldsymbol{x}) + lN \le 2\epsilon_k N$$

εἴτε ἡ

$$\epsilon_k N \le \psi_i(\boldsymbol{x}) + lN \le 2\epsilon_k N < \psi_i(\boldsymbol{x}') + lN \le N.$$

Ὅμως ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ $B_{u_1,\ldots,u_t}$, καὶ ἐπειδὴ τὰ L_{ij} εἶναι ὁμοιόμορφα φραγμένα ὡς πρὸς N, ἔχουμε ὅτι

$$\psi_i(\boldsymbol{x}), \psi_i(\boldsymbol{x}') = \sum_{j=1}^{t} L_{ij} \lfloor u_j N/Q \rfloor + b_i + O_t(N/Q),$$

κατὰ συνέπειαν ἰσχύει

$$\alpha \epsilon_k N = \sum_{j=1}^{t} L_{ij} \lfloor u_j N/Q \rfloor + b_i + lN + O_t(N/Q)$$

εἴτε γιὰ $\alpha = 1$ εἴτε γιὰ $\alpha = 2$. Ἀφοῦ προφανῶς ἰσχύει $\lfloor u_j N/Q \rfloor = u_j N/Q + O(1)$, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσουμε μὲ N/Q (χρησιμοποιῶντας καὶ πάλι ὅτι τὰ L_{ij} εἶναι ὁμοιόμορφα φραγμένα, $|L_{ij}| \le (k+1)!$ γιὰ κάθε i, j), γιὰ νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$\sum_{j=1}^{t} L_{ij} u_j = \alpha \epsilon_k Q - b_i Q/N - lQ + O_t(1)$$

(δηλαδὴ ὅτι $\sum_{j=1}^{t} L_{ij} u_j = \alpha \epsilon_k Q - b_i Q/N + O_t(1) \bmod Q$). Ἐπειδὴ ὅμως τὸ διάνυσμα τῶν συντελεστῶν $(L_{ij})_{j=1}^{t}$ εἶναι μὴ μηδενικὸν στὸ $\mathbb{Z}_Q^t$, τὶς $O_t(1)$ ἐξισώσεις αὐτὲς (στὸ $\mathbb{Z}_Q$) μποροῦν νὰ τὶς ἱκανοποιοῦν τὸ πολὺ $O_t(Q^{t-1})$ διανύσματα $(u_1, \ldots, u_t)$. Ἑπομένως, ἀφήνοντας καὶ τὰ α, i νὰ μεταβάλλονται, συμπεραίνουμε ὅτι τὰ μὴ «καλὰ» διανύσματα εἶναι τὸ πολὺ $2m\,O_t(Q^{t-1}) = O_{m,t}(Q^{t-1})$ ὅπως ζητούσαμε. $\square$

Στρεφόμαστε τώρα στὴν συνθήκην συσχετισμοῦ:

Λῆμμα 4.4.3. *Ἔστωσαν φυσικὸς $m \ge 1$ καὶ C_m θετικὴ σταθερά (ποὺ μπορεῖ νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ m). Ὑπάρχει συνάρτησις $\sigma = \sigma_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, μὲ $\sigma(n) \ge 1$ γιὰ κάθε $n \ne 0$, ὥστε γιὰ κάθε ἐπιλογὴν $h_1, \ldots, h_m$ διαφορετικῶν ἀνὰ δύο ἀκεραίων νὰ ἔχουμε*

$$\prod_{p|\Delta} \Big(1 + \frac{C_m}{\sqrt{p}}\Big) \le \sum_{1 \le i < j \le m} \sigma(h_i - h_j)$$

(ὅπου Δ εἶναι ἡ ποσότης ποὺ ὁρίστηκε στὴν Πρότασιν 4.3.4), *καὶ ἐπιπλέον νὰ ἰσχύει* $\mathbb{E}(\sigma^q(n)|0<|n|\leq N)=O_{m,q}(1)$ *γιὰ ὅλα τὰ* $q\in(0,+\infty)$.

Παρατήρησις. Ἐδῶ δὲν μιλᾶμε γιὰ οἰκογένειαν συναρτήσεων, ἀλλὰ γιὰ μίαν συνάρτησιν μὲ τὴν κλασσικὴν ἔννοιαν, μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ὅλους τοὺς ἀκεραίους (στὴν πραγματικότητα, ἡ τιμή της στὸ 0 δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει σὲ αὐτὸ τὸ λῆμμα). Ἀργότερα, ὅταν θὰ χρειαστεῖ νὰ ὁρίσουμε τὶς συναρτήσεις βάρους ποὺ ἀναφέρονται στὴν συνθήκην συσχετισμοῦ, καθεμίαν μὲ πεδίον ὁρισμοῦ κάποιο $\mathbb{Z}_N$, θὰ χρησιμοποιήσουμε τὰ ἀρχικὰ τμήματα αὐτῆς τῆς σ.

Ἀπόδειξις. Μελετῶντας τὶς συναρτήσεις $g_a(x):=(1+x)^a-(1+ax)$, $x\in[0,+\infty)$, γιὰ ὅλα τὰ $a>1$, μποροῦμε νὰ δοῦμε ὅτι εἶναι γνησίως αὔξουσες. Συνεπῶς γιὰ κάθε πρῶτον p ἰσχύει ἡ ἀνισότης

$$1+\frac{C_m}{\sqrt{p}}<\left(1+p^{-1/2}\right)^{C_m+1}.$$

Ὅμως κάθε πρῶτος ποὺ διαιρεῖ τὴν ποσότητα $\Delta:=\prod_{1\leq i<j\leq m}|h_i-h_j|$ πρέπει νὰ διαιρεῖ κάποιαν ἀπὸ τὶς διαφορὲς h_i-h_j, ἄρα

$$\prod_{p|\Delta}\left(1+\frac{C_m}{\sqrt{p}}\right)\leq\prod_{1\leq i<j\leq m}\prod_{p|h_i-h_j}\left(1+\frac{C_m}{\sqrt{p}}\right)\leq\prod_{1\leq i<j\leq m}\Big(\prod_{p|h_i-h_j}\left(1+p^{-1/2}\right)\Big)^{C_m+1}.$$

Ἐπιπλέον, ἀπὸ τὴν ἀνισότητα ἀριθμητικοῦ-γεωμετρικοῦ μέσου ἔχουμε

$$\begin{aligned}\prod_{1\leq i<j\leq m}\Big(\prod_{p|h_i-h_j}\left(1+p^{-1/2}\right)\Big)^{C_m+1}&=\prod_{1\leq i<j\leq m}\Big(\prod_{p|h_i-h_j}\left(1+p^{-1/2}\right)^{\binom{m}{2}(C_m+1)}\Big)^{\frac{1}{\binom{m}{2}}}\\&\leq\sum_{1\leq i<j\leq m}\frac{1}{\binom{m}{2}}\Big(\prod_{p|h_i-h_j}\left(1+p^{-1/2}\right)^{\binom{m}{2}(C_m+1)}\Big),\end{aligned}$$

ἑπομένως μποροῦμε νὰ θέσουμε γιὰ κάθε $n\neq 0$,

$$\sigma_m(n):=\frac{1}{\binom{m}{2}}\prod_{p|n}\left(1+p^{-1/2}\right)^{\binom{m}{2}(C_m+1)}.$$

Γιὰ νὰ ὁλοκληρώσουμε τὴν ἀπόδειξιν, πρέπει νὰ δείξουμε ὅτι

$$\mathbb{E}\Big(\prod_{p|n}\left(1+p^{-1/2}\right)^{O_m(q)}\Big|\,0<|n|\leq N\Big)=O_{m,q}(1)$$

γιὰ κάθε $q\in(0,+\infty)$. Ὅμως, ἀφοῦ ἡ ἀνισότης

$$\left(1+p^{-1/2}\right)^{O_m(q)}\leq 1+p^{-1/4}$$

ἰσχύει γιὰ ὅλους ἐκτὸς ἀπὸ τὸ πολὺ $O_{m,q}(1)$ πρώτους, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\mathbb{E}\Big(\prod_{p|n}(1+p^{-1/2})^{O_m(q)}\,|\,0<|n|\leq N\Big)\leq O_{m,q}(1)\mathbb{E}\Big(\prod_{p|n}(1+p^{-1/4})\,\,|\,0<|n|\leq N\Big).$$

Ἀναπτύσσοντας γιὰ κάποιον ἀκέραιον n τὸ γινόμενον $\prod_{p|n}(1+p^{-1/4})$, βλέπουμε ὅτι ἀθροίζουμε τοὺς ἀντιστρόφους τῶν τετάρτων ῥιζῶν ἐκείνων τῶν διαιρετῶν τοῦ n οἱ ὁποίοι εἶναι γινόμενα διακεκριμένων πρώτων, ἄρα προφανῶς ἰσχύει $\prod_{p|n}(1+p^{-1/4})\leq\sum_{d|n,d\geq 1}d^{-1/4}$. Ἕπεται τελικῶς ὅτι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\prod_{p|n}(1+p^{-1/2})^{O_m(q)}\,|\,0<|n|\leq N\Big)&\leq O_{m,q}(1)\frac{1}{2N}\sum_{1\leq|n|\leq N}\sum_{d|n,d\geq 1}d^{-1/4}\\ &=O_{m,q}(1)\frac{1}{2N}\sum_{d=1}^{N}\sum_{\substack{d|n\\1\leq|n|\leq N}}d^{-1/4}\leq O_{m,q}(1)\frac{1}{2N}\sum_{d=1}^{N}\frac{2N}{d}d^{-1/4},\end{aligned}$$

τὸ ὁποῖον φράσσεται ὅπως θέλουμε ἀπὸ $O_{m,q}(1)\sum_{d=1}^{\infty}d^{-5/4}$. □

Πλέον, χρησιμοποιῶντας τὴν Πρότασιν 4.3.4 καὶ τὸ Λῆμμα 4.4.3, μποροῦμε νὰ φράξουμε τὴν ποσότητα $\mathbb{E}(\nu(x+h_1)\cdots\nu(x+h_m)|x\in\mathbb{Z}_N)$, ὅταν τὰ h_i εἶναι διακεκριμένα στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_N$, ἀπὸ τὶς τιμὲς κατάλληλης συναρτήσεως βάρους ὅπως ζητεῖται στὴν συνθήκην συσχετισμοῦ. Τί γίνεται ὅμως ὅταν τουλάχιστον δύο ἀπὸ τὰ h_i εἶναι ἴσα; Τότε στὸ ἄθροισμα $\sum_{1\leq i<j\leq m}\tau(h_i-h_j)$ θὰ ἐμφανιστεῖ καὶ ἡ τιμὴ $\tau(0)$ τῆς συναρτήσεως βάρους, ἡ ὁποία στὶς ἄλλες περιπτώσεις δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει. Θὰ μπορούσαμε ἑπομένως νὰ ἐπικαλεστοῦμε τὸ προφανὲς φράγμα

$$\mathbb{E}(\nu(x+h_1)\cdots\nu(x+h_m)|x\in\mathbb{Z}_N)\leq\|\nu\|_{L^\infty}^m$$

καὶ νὰ θέσουμε $\tau_m(0):=\|\nu\|_{L^\infty}^m$, ἀρκεῖ αὐτὸ νὰ μὴν χαλάσει τὶς ἐκτιμήσεις $\mathbb{E}(\tau_m^q)=O_{m,q}(1)$ ποὺ θέλουμε γιὰ τὶς ῥοπὲς τῆς συναρτήσεως βάρους.

Μὲ χονδροειδεῖς ὑπολογισμοὺς βλέπουμε ὅτι, ἐξαιτίας τῶν Ὁρισμῶν 4.3.1 καὶ (4.11), γιὰ κάθε $x\in\mathbb{Z}_N$,

$$\begin{aligned}\nu(x)&\leq\max\big\{1,\frac{\phi(W)}{W\log R}\Lambda_R^2(Wn+1)\big\}\leq\left(\sum_{\substack{d|Wn+1\\d\leq R}}\log(R/d)\right)^2\\ &\leq\log^2 R\bigg(\sum_{d|Wn+1}1\bigg)^2\leq\log^2 N\cdot d^2(Wn+1),\end{aligned}$$

ὅπου τὸ n εἶναι ὁ μοναδικὸς ἀντιπρόσωπος $\in\{1,\ldots,N\}$ τῆς κλάσεως $x\in\mathbb{Z}_N$, καὶ $d(n)$ εἶναι ἡ συνάρτησις ποὺ μετρᾶ τοὺς διαιρέτες τοῦ n. Πρὸς αὐτὴν τὴν κατεύθυνσιν ἑπομένως, θὰ μπορούσαμε νὰ ἀναζητήσουμε μίαν «καλὴν» ἐκτίμησιν τῆς ποσότητος $\max\{d(Wn+1) : 1 \leq n \leq N\}$. Καὶ ὄντως τέτοια ὑπάρχει: τὸ 1906 ὁ Σουηδὸς μαθηματικὸς Severin Wigert ἔδειξε, χρησιμοποιῶντας τὸ Θεώρημα Πρώτων Ἀριθμῶν, ὅτι γιὰ κάθε φυσικὸν n,

$$d(n) \leq n^{(\log 2+o(1))/\log\log n},$$

ἐνῷ τὸ 1914 ὁ Ramanujan παρετήρησε ὅτι μᾶς ἀρκοῦν στοιχειώδεις μέθοδοι γιὰ τὴν ἐκτίμησιν $d(n) = \exp\big(O\big(\frac{\log n}{\log\log n}\big)\big)$. Ἂς δοῦμε μίαν ἀπόδειξιν αὐτῆς:

Ἄνω φράγμα γιὰ τὴν συνάρτησιν $d(n)$. Θεωροῦμε ὁποιονδήποτε φυσικὸν $n \geq 2$ καὶ ὁποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, καὶ δείχνουμε ὅτι ὑπάρχει σταθερὰ $C_\varepsilon > 0$ (ποὺ ἐξαρτᾶται μὲ ὑπολογίσιμον τρόπον ἀπὸ τὸ ε) ὥστε νὰ ἰσχύει $d(n)/n^\varepsilon \leq C_\varepsilon$. Ἂν στὴν παραγοντοποίησίν του ὡς πρὸς πρώτους ἔχουμε $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$, μὲ τὰ p_i διαφορετικὰ ἀνὰ δύο, τὰ $a_i \geq 1$, τότε θέλουμε ἀκριβῶς νὰ δείξουμε ὅτι

$$\frac{d(n)}{n^\varepsilon} := \frac{(1+a_1)\cdots(1+a_s)}{p_1^{\varepsilon a_1}\cdots p_s^{\varepsilon a_s}} = \prod_{i=1}^{s} \frac{1+a_i}{p_i^{\varepsilon a_i}} \leq C_\varepsilon.$$

Γράφοντας $p_i^{\varepsilon a_i} = \exp(\varepsilon a_i \log p_i)$, βλέπουμε ὅτι ὅταν ἰσχύει $\varepsilon \log p_i \geq 1 \Leftrightarrow p_i \geq e^{1/\varepsilon}$, τότε

$$\exp(\varepsilon a_i \log p_i) \geq \exp(a_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_i^j}{j!} \geq 1 + a_i,$$

συνεπῶς ὅσοι πρῶτοι $\geq e^{1/\varepsilon}$ καὶ νὰ ἐμφανίζονται στὴν παραγοντοποίησιν τοῦ n, οἱ ἀντίστοιχοι παράγοντες $\frac{1+a_i}{p_i^{\varepsilon a_i}}$ δὲν αὐξάνουν τὸ πηλῖκον $d(n)/n^\varepsilon$. Ἔχουμε ἑπομένως νὰ φράξουμε τὸ

$$\prod_{\substack{1\leq i\leq s\\ p_i<e^{1/\varepsilon}}} \frac{1+a_i}{p_i^{\varepsilon a_i}}.$$

Γράφουμε πάλι $p_i^{\varepsilon a_i} = \exp(\varepsilon a_i \log p_i) \geq \varepsilon a_i \log p_i$, καὶ ἔχουμε ὅτι

$$\frac{1+a_i}{p_i^{\varepsilon a_i}} \leq \frac{2}{\varepsilon \log p_i},$$

ἄρα

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{1\leq i\leq s\\ p_i<e^{1/\varepsilon}}} \frac{1+a_i}{p_i^{\varepsilon a_i}} &\leq \prod_{p<e^{1/\varepsilon}} \frac{2}{\varepsilon\log p} \leq \left(\frac{2}{\varepsilon \log 2}\right)^{e^{1/\varepsilon}} \\ &= \exp\left(\log\left(\frac{2}{\varepsilon\log 2}\right)\exp(1/\varepsilon)\right) \leq \exp(\exp(C_0/\varepsilon))\end{aligned}$$

γιὰ μίαν σταθερὰν C_0 ἀνεξάρτητην τοῦ ε (κάποιο ἀρκετὰ μεγάλο ἄνω φράγμα τῆς συναρτήσεως $g(x) := \frac{\log(2x/\log 2)}{e^x}, x \in [0, +\infty)$).

Ἂν τώρα σταθεροποιήσουμε κάποιον φυσικὸν $n > 2$ καὶ θέσουμε $\varepsilon := C_0'/\log\log n$ γιὰ κάποιαν κατάλληλην σταθεράν, μεγαλύτερην τῆς C_0, τότε ἐξαιτίας τῶν παραπάνω θὰ προκύψει

$$d(n) \leq n^{\varepsilon}\exp(\exp(C_0/\varepsilon)) = \exp\left(C_0' \log n/\log\log n\right)\exp\Big(\exp\big(\tfrac{C_0}{C_0'}\log\log n\big)\Big)$$

μὲ τὴν τελευταίαν ἔκφρασιν νὰ εἶναι $\leq \exp\left(2C_0' \log n/\log\log n\right)$, ἀρκεῖ νὰ ἐπιλέξουμε τὴν C_0' ὥστε νὰ ἰσχύει

$$\log C_0' + \log\log n - \log\log\log n \geq \frac{C_0}{C_0'}\log\log n$$

γιὰ κάθε $n \geq 3$. □

Ἐπικαλούμενοι τὸ Θεώρημα Πρώτων Ἀριθμῶν, θὰ μπορούσαμε νὰ δείξουμε καὶ ὅτι ἡ παραπάνω ἐκτίμησις εἶναι ἡ καλύτερη δυνατή (ὅταν δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει ποιὰ ἀκριβῶς εἶναι ἡ σταθερὰ ποὺ ὑπονοεῖται ἀπὸ τὸν συμβολισμὸν O).

Συγκεντρώνουμε τώρα τὰ παραπάνω σὲ ἕνα τελικὸν συμπέρασμα γιὰ τὸ μέτρον ν :

Πρότασις 4.4.4. *Τὸ μέτρον ν τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1 ἱκανοποιεῖ τὴν $2^{k-1}-$συνθήκην συσχετισμοῦ.*

Ἀπόδειξις. Ψάχνουμε νὰ βροῦμε οἰκογένειαν συναρτήσεων $\tau_N : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ ὥστε γιὰ κάθε ἐπιλογὴν m στοιχείων $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{Z}_N$, μὲ $1 < m \leq 2^{k-1}$, νὰ ἔχουμε

$$\mathbb{E}(\nu_N(x+h_1)\cdots\nu_N(x+h_m) \mid x \in \mathbb{Z}_N) \leq \sum_{1\leq i<j\leq m} \tau_N(h_i - h_j),$$

καὶ ἐπιπλέον νὰ ἰσχύει $\mathbb{E}(\tau_N^q) = O_q(1)$ γιὰ κάθε $1 \leq q < \infty$.

Ἐξετάζουμε πρῶτα τὴν πιὸ δύσκολην περίπτωσιν, ποὺ τὰ $h_1, \ldots, h_m$ εἶναι διακεκριμένα στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_N$. Ἐφ' ὅσον ὁ ὁρισμὸς τοῦ ν εἶναι δίκλαδος, χρειάζεται καὶ πάλι νὰ «κόψουμε» τὸ $\mathbb{Z}_N$ σὲ μικρὰ ὑποδιαστήματα. Ὅμως, ἐπειδὴ ἐδῶ ζητοῦμε ἁπλῶς ἕνα ἄνω φράγμα καὶ ὄχι μίαν ἐκτίμησιν, ἐνῷ καὶ οἱ γραμμικὲς μορφὲς εἶναι οἱ ἁπλούστερες δυνατές, $x \mapsto x + h_i$, εἶναι δυνατὸν τὸ πλῆθος τῶν ὑποδιαστημάτων νὰ εἶναι σταθερὸν καὶ τὸ μῆκος τους πολλαπλάσιον τοῦ N : γιὰ κάθε $1 \leq s \leq 2/\epsilon_k$ ὁρίζουμε

$$B_s := \big[\lfloor (s-1)\epsilon_k N/2\rfloor, \lfloor s\epsilon_k N/2\rfloor\big).$$

Τότε

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\nu(x+h_1)\cdots\nu(x+h_m)\mid x\in\mathbb{Z}_N)\\
=&\frac{1}{N}\sum_{1\le s\le 2/\epsilon_k}\sum_{x\in B_s}\nu(x+h_1)\cdots\nu(x+h_m)\\
\le&\frac{\frac{\epsilon_k}{2}N+1}{N}\sum_{1\le s\le 2/\epsilon_k}\mathbb{E}(\nu(x+h_1)\cdots\nu(x+h_m)\mid x\in B_s)\\
=&\frac{2}{\epsilon_k}(\frac{\epsilon_k}{2}+\frac{1}{N})\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\nu(x+h_1)\cdots\nu(x+h_m)\mid x\in B_s)\big|\, 1\le s\le 2/\epsilon_k\big),
\end{aligned}$$

καὶ ἀρκεῖ νὰ φράξουμε τὶς ποσότητες $\mathbb{E}(\nu(x+h_1)\cdots\nu(x+h_m)\mid x\in B_s)$.

Γιὰ σταθερὸν s, γράφουμε ἀναλυτικῶς κάθε παράγοντα $\nu(x+h_i)$ σύμφωνα μὲ τὸν Ὁρισμὸν 4.3.1 : παρατηροῦμε ἀρχικῶς, ὅπως καὶ στὴν Πρότασιν 4.3.3, ὅτι ἂν γιὰ κάποιο $x\in B_s$ ὑπάρχει ἀκέραιος l ὥστε τὸ $x+h_i+lN$ νὰ εἶναι μεταξὺ τῶν $\epsilon_k N$ καὶ $2\epsilon_k N$, τότε γιὰ κάθε $x'\in B_s$ καὶ γιὰ τὸν ἴδιον ἀκέραιον l θὰ ἰσχύει $x'+h_i+lN\in\{1,\ldots,N\}$. Μποροῦμε ἑπομένως, ὅταν τὸ B_s+h_i περιέχεται ὁλόκληρον στὸ διάστημα $[\epsilon_k N, 2\epsilon_k N] \bmod N$, νὰ ἀντικαταστήσουμε τὶς τιμὲς $\nu(x+h_i)$ ἀπὸ $\frac{\phi(W)}{W\log R}\Lambda_R^2\big(W(x+h_i+l_iN)+1\big)$, ἐνῷ ὅταν δὲν περιέχεται ὁλόκληρον ἀλλὰ ἔχει μὴ κενὴν τομὴν μὲ τὸ $[\epsilon_k N, 2\epsilon_k N] \bmod N$, νὰ φράξουμε ἀπὸ πάνω τὶς τιμὲς $\nu(x+h_i)$ ἀπὸ $1+\frac{\phi(W)}{W\log R}\Lambda_R^2\big(W(x+h_i+l_iN)+1\big)$ (οἱ παράγοντες ποὺ ἀπομένουν θὰ εἶναι ταυτοτικὰ 1 στὸ B_s). Ἀναπτύσσοντας τὸ γινόμενον ποὺ σχηματίζεται ἔτσι, θὰ ἔχουμε νὰ ἐκτιμήσουμε τὸ πολὺ 2^m μέσες τιμὲς τῆς μορφῆς

$$\left(\frac{\phi(W)}{W\log R}\right)^t\mathbb{E}\left(\Lambda_R^2\big(W(x+h_1'+l_1'N)+1\big)\cdots\Lambda_R^2\big(W(x+h_t'+l_t'N)+1\big)\mid x\in B_s\right)$$

ὅπου τὰ $h_1',\ldots,h_t'\in\{0,1,\ldots,N-1\}$ εἶναι t ἀπὸ τοὺς ἀρχικοὺς ἀκεραίους $h_1,\ldots,h_m$, καὶ γιὰ κάθε i, $l_i'N$ εἶναι τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ N τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται ὥστε νὰ ἔχουμε $x+h_i'+l_i'N\in\{1,\ldots,N\}$ γιὰ κάθε $x\in B_s$ (ἐδῶ βλέπουμε τὸ B_s σὰν διάστημα φυσικῶν, $B_s\subset\{0,1,\ldots,N-1\}$, καὶ τὰ h_i' εἶναι κατ' οὐσίαν οἱ ἀντιπρόσωποι τῶν ἀντιστοίχων κλάσεων τοῦ $\mathbb{Z}_N$ στὸ $\{0,1,\ldots,N-1\}$, ἄρα γιὰ κάθε i, $l_i'=0$ ἢ $l_i'=-1$). Ἀφοῦ ἐπιπλέον τὸ μῆκος τοῦ B_s εἶναι $\frac{\epsilon_k}{2}N\ge R^{10\cdot 2^{k-1}}\ge R^{10m}$ γιὰ τοὺς μεγάλους, σὲ σχέσιν μὲ τὸ k, πρώτους N, ἱκανοποιοῦνται ὅλες οἱ ὑποθέσεις τῆς Προτάσεως 4.3.4 καὶ ἄρα ἕπεται τὸ συμπέρασμά της: κάθε τέτοια μέση τιμὴ εἶναι $\le O_t(1)\prod_{p|\Delta}\big(1+\frac{C_t}{\sqrt{p}}\big)$ ὅπου

$$\Delta\equiv\Delta(h_1',\ldots,h_t')=\prod_{1\le i<j\le t}|(h_i'+l_i'N)-(h_j'+l_j'N)|.$$

Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.4.3 μποροῦμε νὰ βροῦμε γιὰ κάθε $t\le m$, συνάρτησιν $\sigma_t:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^+$ ὥστε νὰ ἰσχύει

$$O_t(1)\prod_{p|\Delta(h_1',\ldots,h_t')}\big(1+\frac{C_t}{\sqrt{p}}\big)\le\sum_{1\le i<j\le t}\sigma_t\big((h_i'+l_i'N)-(h_j'+l_j'N)\big).$$

Ἐπιπλέον, οἱ $\sigma_t, 1 < t \le m$, θὰ ἱκανοποιοῦν τὶς

$$\mathbb{E}(\sigma_t^q(n) \mid 0 < |n| \le N) = O_{t,q}(1) \text{ γιὰ κάθε } q \ge 1.$$

Κατὰ συνέπειαν, ἂν θέσουμε $\sigma := \max_{1<t\le 2^{k-1}} \sigma_t$, θὰ ἔχουμε προφανῶς ὅτι

$$\mathbb{E}(\sigma_t^q(n) \mid 0 < |n| \le N) = O_{k,q}(1) \text{ γιὰ κάθε } q \ge 1,$$

ὅπως ἐπίσης καὶ ὅτι

$$\mathbb{E}(\nu(x+h_1)\cdots\nu(x+h_m) \mid x \in B_s) \le 2^m \sum_{1\le i<j\le m_s} \sigma\big((h'_i + l'_i N) - (h'_j + l'_j N)\big)$$

μὲ τὰ $h'_1, \ldots, h'_{m_s}$ νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἐκεῖνα τὰ h_i γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει

$$(B_s + h_i) \cap [\epsilon_k N, 2\epsilon_k N] \pmod N \neq \emptyset.$$

Ἂς δοῦμε τὶ σημαίνει αὐτὸ γιὰ τὶς διαφορὲς $(h'_i+l'_iN)-(h'_j+l'_jN)$: ἂν ὑπάρχουν $x, y \in B_s$ ὥστε νὰ ἰσχύει

$$\epsilon_k N \le x + h'_i + l'_i N, y + h'_j + l'_j N \le 2\epsilon_k N,$$

τότε ἀπὸ τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα θὰ ἔχουμε

$$|(h'_i+l'_iN)-(h'_j+l'_jN)| \le |(x+h'_i+l'_iN)-(y+h'_j+l'_jN)|+|x-y| \le \epsilon_k N+|B_s| \le \frac{3}{2}\epsilon_k N.$$

Παρατηροῦμε ἑπομένως ὅτι γιὰ κάθε πρῶτον N χρησιμοποιοῦμε **μόνον τὶς ἀρχικὲς τιμὲς** τῆς συναρτήσεως σ ὥστε νὰ φράξουμε τὸ ὁλοκλήρωμα $\mathbb{E}(\nu_N(x+h_1)\cdots\nu_N(x+h_m)|x \in B_s)$ πάνω στὸ ὑποδιάστημα B_s τοῦ $\mathbb{Z}_N$, χρησιμοποιοῦμε δηλαδὴ τὶς τιμὲς τῆς σ στοὺς ἀκεραίους n μὲ $0 < |n| \le \frac{3}{2}\epsilon_k N \le (N-1)/2$, ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες, ὅπως καὶ ἡ τιμή της στὸ 0, δὲν ἐμφανίζονται καθόλου στὸ ἄνω φράγμα.

Εἶναι προφανὲς πλέον πῶς ὁρίζονται οἱ $\tau_N : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ γιὰ κάθε πρῶτον: ταυτίζουμε τὸ $\mathbb{Z}_N$ μὲ τὸ σύνολον $\{-(N-1)/2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (N-1)/2\}$ κατὰ προφανῆ τρόπον, καὶ θέτουμε γιὰ κάθε n μὲ $0 < |n| \le (N-1)/2$,

$$\tau_N(n) := (1 + 2/\epsilon_k)2^{2^{k-1}}\sigma(n).$$

Ἔπειτα παρατηροῦμε ὅτι, ἐξαιτίας ὅλων τῶν προηγουμένων,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\nu_N(x+h_1)\cdots\nu_N(x+h_m) \mid x \in \mathbb{Z}_N)\\
&\le (1+2/\epsilon_k)\mathbb{E}(\mathbb{E}(\nu_N(x+h_1)\cdots\nu_N(x+h_m) \mid x \in B_s)| \; 1 \le s \le 2/\epsilon_k)\\
&\le (1+2/\epsilon_k)\mathbb{E}\Big(2^m \sum_{1\le i<j\le m_s} \sigma\big((h'_i+l'_iN)-(h'_j+l'_jN)\big) \;\Big|\; 1 \le s \le 2/\epsilon_k\Big)\\
&\le \mathbb{E}\Big(\sum_{1\le i<j\le m_s} \tau_N(h'_i - h'_j) \;\Big|\; 1 \le s \le 2/\epsilon_k\Big)\\
&\le \sum_{1\le i<j\le m} \tau_N(h_i - h_j).
\end{aligned}$$

Γιὰ νὰ καλύψουμε καὶ τὴν περίπτωσιν ποὺ τὰ $h_1,\ldots,h_m$ δὲν εἶναι διακεκριμένα, θέτουμε $\tau_N(0) := \exp\bigl(2^{k-1}C\frac{\log N}{\log\log N}\bigr)$ γιὰ μίαν ἀρκετὰ μεγάλην σταθεράν, ἀνεξάρτητην πάντως τοῦ N, ἔτσι ὥστε νὰ ἀληθεύουν οἱ διαδοχικὲς ἀνισότητες

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\nu_N(x+h_1)\cdots\nu_N(x+h_m)\mid x\in\mathbb{Z}_N)\\ &\le \|\nu_N\|_{L^\infty}^m \le \log^{2m}N\bigl(\max\{d(Wn+1): 1\le n\le N\}\bigr)^{2m}\\ &\le \exp\bigl(Cm\frac{\log N}{\log\log N}\bigr)\le \tau_N(0)\le \sum_{1\le i<j\le m}\tau_N(h_i-h_j).\end{aligned}$$

Τελικῶς, ὑπολογίζουμε γιὰ κάθε $1\le q<\infty$ ὅτι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tau_N^q) &= \frac{\tau_N^q(0)}{N}+\frac{N-1}{N}\mathbb{E}(\tau_N^q(x)\mid x\in\mathbb{Z}_N\setminus\{0\})\\ &= \exp\bigl(2^{k-1}Cq\frac{\log N}{\log\log N}-\log N\bigr)+\frac{N-1}{N}\mathbb{E}\bigl(\sigma^q(n)\mid 0<|n|\le (N-1)/2\bigr)\\ &= o_q(1)+O_q(1),\end{aligned}$$

ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ οἰκογένεια τῶν συναρτήσεων τ_N εἶναι ἡ ζητουμένη. □

Ἡ ἀπόδειξις τῆς Προτάσεως 4.1.3 ἕπεται τώρα ἀμέσως ἀπὸ τὰ Λήμματα 4.3.2, 4.4.1, καὶ τὶς Προτάσεις 4.4.2 καὶ 4.4.4, ἂν θυμηθοῦμε τὸν Ὁρισμὸν 1.1.7 τοῦ $k-$ψευδοτυχαίου μέτρου ποὺ ἔχουμε δώσει.

4.5 Ἀπόδειξις τῶν Θεωρημάτων 1 καὶ 2 – Ἐφαρμογές

Ἀνακεφαλαιώνοντας μποροῦμε νὰ ποῦμε τὰ ἑξῆς: γιὰ νὰ ἀποδείξουν οἱ Green καὶ Tao ὅτι οἱ πρῶτοι περιέχουν αὐθαίρετα μεγάλες ἀριθμητικὲς προόδους, ἀναγκάστηκαν νὰ γενικεύσουν τὸ θεώρημα Szemerédi (ἔτσι ὅπως αὐτὸ διατυπώνεται γιὰ συναρτήσεις στὸ $\mathbb{Z}_N$ μὲ L^∞ νόρμα τὸ πολὺ 1, Θεώρημα 1.1.1) διατυπώνοντας μίαν ἐκδοχήν του γιὰ συναρτήσεις ποὺ φράσσονται κατὰ σημεῖον ἀπὸ ψευδοτυχαῖα μέτρα:

Θεώρημα 1.1.10. *Ἔστωσαν $k\ge 3$ φυσικὸς καὶ $0<\delta\le 1$ πραγματικός. Ἔστω ἐπίσης $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον $\nu:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}^+$. Γιὰ κάθε $f:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{R}$ γιὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει*

$$0\le f(x)\le \nu(x)\ \textit{γιὰ κάθε}\ x\in\mathbb{Z}_N$$

καὶ

$$\int_{\mathbb{Z}_N} f\ge\delta,$$

ἔχουμε

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1}T^{jr}f(x)|x,r\in\mathbb{Z}_N\right)\ge c(k,\delta)-o_{k,\delta}(1) \tag{4.49}$$

ὅπου $c(k,\delta) > 0$ *εἶναι ἡ σταθερὰ ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ θεώρημα* 1.1.1.

Ὅπως εἴδαμε μάλιστα (καὶ ὅπως μπορεῖ νὰ μαντέψει κάποιος καὶ ἀπὸ τὴν σταθερὰν $c(k,\delta)$ στὴν (4.49), ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἴδια μὲ αὐτὴν τοῦ Θεωρήματος 1.1.1), ἡ στρατηγικὴ γιὰ νὰ ἀποδείξουν τὸ Θεώρημα 1.1.10 ἦταν νὰ ἀναγάγουν τὸ πρόβλημα σὲ κάποιο ἰσοδύναμον τὸ ὁποῖον θὰ λυνόταν μὲ μίαν ἁπλὴν ἐπίκλησιν τοῦ Θεωρήματος 1.1.1. Πράγματι, τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν ἐπιχειρημάτων τους στὸ Κεφάλαιον 3 ἀποσκοπεῖ στὸ νὰ διασπάσουμε τὴν συνάρτησιν f τῆς διατυπώσεως σὲ μίαν συνάρτησιν f_U ποὺ δὲν θὰ συμβάλλει πολὺ σὲ ὁλοκληρώματα ὅπως αὐτὸ στὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (4.49), καὶ σὲ μίαν φραγμένην συνάρτησιν $f_{U^\perp}$ γιὰ τὴν ὁποίαν τὸ θεώρημα Szemerédi θὰ ἰσχύει αὐτομάτως (αὐτὴ εἶναι ἡ λεγομένη *ἀρχὴ μεταφορᾶς* στὸ ἄρθρον τῶν Green καὶ Tao). Ἐπίσης, ὅπως εἴδαμε, τὰ σφάλματα στὴν (4.49) ὀφείλονται κατὰ βάσιν στὰ σφάλματα τῆς συνθήκης γραμμικῶν μορφῶν ποὺ ἱκανοποιεῖ τὸ $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον ν, καὶ τὰ ὁποῖα συσσωρεύονται ἐξαιτίας τῶν διαδοχικῶν φορῶν ποὺ ἀναγκαζόμαστε στὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Κεφαλαίου 3 νὰ ἐπικαλεστοῦμε αὐτὴν τὴν συνθήκην. (Βεβαίως, στὰ τελικὰ σφάλματα συμβάλλουν καὶ οἱ ῥοπὲς τῆς συναρτήσεως βάρους στὴν συνθήκην συσχετισμοῦ.)

Ἂν ξανακοιτάξουμε ὅμως τώρα τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος 1.1.10 ποὺ δώσαμε στὴν ἑνότητα 1.5, διαπιστώνουμε ὅτι θὰ μπορούσαμε νὰ πετύχουμε μίαν ἀνισότητα τῆς μορφῆς

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f(x) | x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq \frac{c(k,\delta)}{2} \tag{4.50}$$

ἀκόμη καὶ ἂν ζητούσαμε ἀσθενέστερα συμπέρασματα ἀπὸ τὰ δύο βασικὰ θεωρήματα, τὸ γενικευμένον θεώρημα von Neumann 1.5.1 καὶ τὸ γενικευμένον Koopman-von Neumann θεώρημα διασπάσεως: παραδείγματος χάριν, θὰ μᾶς ἀρκοῦσε ἡ σ-ἄλγεβρα $\mathcal{B}$ καὶ τὸ σύνολον Ω στὸ Θεώρημα Διασπάσεως 1.5.2 νὰ ἱκανοποιοῦν τὶς ἀσθενέστερες σχέσεις

$$\mathbb{E}(\nu \mathbf{1}_\Omega) \leq \varepsilon, \tag{4.51}$$

$$\|(1-\mathbf{1}_\Omega)\mathbb{E}(\nu - 1|\mathcal{B})\|_{L^\infty} \leq \varepsilon, \tag{4.52}$$

$$\|(1-\mathbf{1}_\Omega)(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}))\|_{U^{k-1}} \leq \varepsilon^{1/2^k} \tag{4.53}$$

γιὰ κάθε ἀρκετὰ μεγάλο $N > N_0(\varepsilon)$, καὶ γιὰ μίαν ἀρκετὰ μικρὴν ποσότητα $\varepsilon > 0$ ποὺ θὰ ἐπιλέξουμε οὐσιαστικὰ βάσει τῶν παραμέτρων k καὶ δ τοῦ Θεωρήματος 1.1.10. Ἔτσι, θέτοντας $f_{U^\perp} := (1-\mathbf{1}_\Omega)\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ θὰ εἴχαμε (γιὰ ὁποιονδήποτε πρῶτον $N > N_0(\varepsilon)$) ὅτι

$$\int_{\mathbb{Z}_N} f_{U^\perp} \geq \int_{\mathbb{Z}_N} f - \int_{\mathbb{Z}_N} \nu \mathbf{1}_\Omega \geq \delta - \varepsilon$$
$$\text{καὶ } 0 \leq f_{U^\perp}(x) \leq \big((1-\mathbf{1}_\Omega)\mathbb{E}(\nu|\mathcal{B})\big)(x) \leq 1+\varepsilon \text{ γιὰ κάθε } x \in \mathbb{Z}_N.$$

Σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, θὰ μπορούσαμε καὶ πάλι νὰ ἐπικαλεστοῦμε τὸ θεώρημα Szemerédi (Θεώρημα 1.1.1), καὶ νὰ συμπεράνουμε γιὰ τὴν $f_{U^\perp}$ ὅτι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} f_{U^\perp}(x) | x, r \in \mathbb{Z}_N\right) \geq c(k,\delta) - \varepsilon' \tag{4.54}$$

γιὰ κάποιο ἀρκετὰ μικρὸν ε' (ποὺ ἐξαρτᾶται μὲ τρόπον ὑπολογίσιμον ἀπὸ τὴν ποσότητα ε ποὺ ἔχουμε θεωρήσει βάσει τῶν παραμέτρων k καὶ δ), γιὰ κάθε πρῶτον $N > N_0(\varepsilon)$.

Θὰ μᾶς ἀρκοῦσε ἐπίσης γιὰ τὴν ἄλλην συνιστῶσα τῆς $(1-\mathbf{1}_\Omega)f$, τὴν $f_U := (1-\mathbf{1}_\Omega)(f-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}))$, γιὰ τὴν ὁποίαν βάσει τῆς (4.52) ἔχουμε τὰ κατὰ σημεῖον φράγματα

$$|f_U(x)| \leq \nu(x) + 1 + \varepsilon \text{ γιὰ κάθε } x \in \mathbb{Z}_N,$$

νὰ ἰσχύουν ἀνισότητες τοῦ τύπου

$$\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=0}^{k-1} T^{jr} g_j(x) | x, r \in \mathbb{Z}_N\right)\right| \leq 2^{k-1}\|f_U\|_{U^{k-1}} + \varepsilon'' \leq 2^{k-1}\varepsilon^{1/2^k} + \varepsilon'' \tag{4.55}$$

(γιὰ κάποιο $\varepsilon'' > 0$ ποὺ ἐπίσης ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ποσότητα ε) ὅποτε καθεμία ἀπὸ τὶς g_j εἶναι ἴση εἴτε μὲ τὴν f_U εἴτε μὲ τὴν $f_{U^\perp}$ (ἄρα φράσσεται ἀπολύτως, ὅπως εἴδαμε, ἀπὸ $\nu+1+\varepsilon$), καὶ ἐφ' ὅσον τουλάχιστον μία ἀπὸ τὶς g_j εἶναι ἴση μὲ τὴν f_U. Βλέπουμε ἐπομένως ὅτι ὅποιαν τιμὴν καὶ νὰ λάβουν οἱ παράμετροι k καὶ δ (ὅσο μεγάλος καὶ νὰ εἶναι ὁ φυσικὸς k καὶ ὅσο μικρὸν τὸ δ), μποροῦμε νὰ ἐπιλέξουμε κατάλληλα τὴν ποσότητα ε ὥστε ἐφ' ὅσον ἰσχύουν οἱ (4.51) – (4.53), νὰ συμπεράνουμε μέσῳ τῶν (4.54) καὶ (4.55) ὅτι ἰσχύει καὶ ἡ (4.50).

Μὲ τὸ ἴδιον σκεπτικόν, ἀρκεῖ νὰ ξανακοιτάξουμε τὶς ἀποδείξεις τῶν ἐπιχειρημάτων στὸ Κεφάλαιον 3 γιὰ νὰ συνειδητοποιήσουμε ὅτι θὰ μπορούσαμε νὰ δείξουμε τὶς σχέσεις (4.51) – (4.53), καθὼς καὶ ἀνισότητες τῆς μορφῆς (4.55) ἀκόμη καὶ ἂν τὸ μέτρον ν δὲν ἦταν $k-$ψευδοτυχαῖον, δηλαδὴ ἀκόμη καὶ ἂν δὲν ἱκανοποιοῦσε τὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν, ἀλλὰ ἁπλῶς προσεγγίσεις τῆς μορφῆς

$$|\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t) - 1| \leq c_\nu(\varepsilon, k, \delta) \equiv c_\nu(k, \delta)$$

γιὰ μίαν ἀρκετὰ μικρὴν σταθερὰν σὲ σχέσιν μὲ τὰ ε, k καὶ δ (ὅπου τὰ m, t καὶ οἱ γραμμικὲς μορφὲς ψ_i εἶναι ὅπως στὴν διατύπωσιν τῆς $(k\cdot 2^{k-1}, 3k-4, k)-$συνθήκης γραμμικῶν μορφῶν). Ἐξαιτίας ὅμως αὐτῆς ἀκριβῶς τῆς παρατηρήσεως, γίνεται πλέον σαφὲς ὅτι στὸν Ὁρισμὸν 4.3.1 τοῦ μέτρου ν ποὺ κατεσκευάσαμε γιὰ τοὺς πρώτους μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε τὴν παράμετρον W σταθερήν (σταθεροποιῶντας δηλαδὴ τὴν συνάρτησιν $w(N) \equiv w$ μέσῳ τῆς ὁποίας ὁρίζεται ἡ παράμετρος), καὶ τότε, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὶς ἀποδείξεις τῶν Προτάσεων 4.3.3, 4.4.2, θὰ ἰσχύει

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t) - 1| &\leq (1+o(1))\big(G_1(0,0)-1\big)\\ &\leq O(1)\left(\prod_{p>w} E_p^{(1)}(0,0) - 1\right)\\ &= O_w(1),\end{aligned}$$

(ὑπενθυμίζουμε ὅτι οἱ $E_p^{(1)}(z,z')$ δίνονται ἀπὸ τὸν τύπον (4.27)). Ἂς σημειώσουμε ὅτι τὰ σφάλματα στὴν πρώτην ἀνισότητα προκύπτουν ἀπὸ τὶς ἄλλες ὑποθέσεις στὸν ὁρισμὸν τοῦ μέτρου ν (παραδείγματος χάριν τὸ ὅτι ἡ παράμετρος R τείνει στὸ ἄπειρον), ἢ ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τοῦ πεδίου ὁλοκληρώσεως $\mathbb{Z}_N^t$ σὲ μικρά, ὄχι ἀκριβῶς ἴσου ὄγκου, ὀρθογώνια στὴν Πρότασιν 4.4.2, τὴν ὁποίαν χρειαζόμαστε γιὰ νὰ δείξουμε τὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν, καὶ τὴν ὁποίαν μποροῦμε νὰ κάνουμε ἀνεξαρτήτως τοῦ ἂν ἡ παράμετρος W εἶναι σταθερὴ ἢ ὄχι.

Γενικότερα, ἡ παραπάνω παρατήρησις μᾶς ἐπιτρέπει νὰ βελτιώσουμε λίγο ἀκόμη τὸ θεώρημα Szemerédi γιὰ γενικές, ὄχι ἀπαραιτήτως φραγμένες ἀπὸ 1, συναρτήσεις:

Παρατήρησις 4.5.1. Θὰ συμβολίζουμε μὲ $c_\nu(k,\delta)$ ὁποιανδήποτε σταθερὰν μᾶς ἀρκεῖ γιὰ νὰ πετύχουμε ἀνισότητες ὅπως ἡ (4.50) ὁποτεδήποτε ἐφαρμόζουμε τὸ γενικευμένον θεώρημα Szemerédi μὲ τὶς παραμέτρους k καὶ δ, καθὼς καὶ τὴν ἀσθενέστερην ὑπόθεσιν ὅτι ἡ συνάρτησις $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ (τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμε ὡς «$L^\infty-$φράγμα» στὴν θέσιν τῆς σταθερῆς συναρτήσεως 1) ἱκανοποιεῖ προσεγγίσεις τῆς μορφῆς

$$|\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_N^t)-1|\le c_\nu(k,\delta) \tag{4.56}$$

(μὲ τὸ $m\le k\cdot 2^{k-1}$, τὸ $t\le 3k-4$, καὶ τὶς γραμμικὲς μορφὲς ψ_i ὅπως στὴν διατύπωσιν τῆς $(k\cdot 2^{k-1},3k-4,k)-$συνθήκης γραμμικῶν μορφῶν). Βεβαίως, ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ συνάρτησις ν ἱκανοποιεῖ τὴν $2^{k-1}-$συνθήκην συσχετισμοῦ (ἀκριβῶς ὅπως διατυπώνεται στὸν Ὁρισμὸν 1.1.6) συνεχίζει νὰ εἶναι ἀπαραίτητη. Μάλιστα γίνεται σαφές, ἂν δοῦμε προσεκτικὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Λήμματος 3.2.4 (ποὺ εἶναι τὸ μοναδικὸν σημεῖον ὅπου χρησιμοποιεῖται ἡ συνθήκη συσχετισμοῦ), καθὼς καὶ τὶς μετέπειτα ἐφαρμογὲς τοῦ λήμματος στὰ ἐπιχειρήματα τῆς ἑνότητος 3.2, ὅτι τὸ πόσο μεγάλες εἶναι οἱ ῥοπὲς τῆς συναρτήσεως βάρους τῆς συνθήκης θὰ ἐπηρεάζει τὸ πόσο μικρὴν πρέπει νὰ θεωρήσουμε τὴν σταθερὰν $c_\nu(k,\delta)$ (ἢ ἀκόμη καὶ τὸ ἂν ὑπάρχει τέτοια σταθερά). Μὲ ἄλλα λόγια, ὑποθέτοντας ὅτι ἔχουμε συγκεκριμένες παραμέτρους k καὶ δ, καὶ ὅτι γνωρίζουμε τὶς ῥοπὲς τῆς συναρτήσεως βάρους γιὰ τὸ μέτρον ν, θὰ μποροῦμε ἔπειτα νὰ βροῦμε τὴν σταθερὰν $c_\nu(k,\delta)$ ἡ ὁποία θὰ μᾶς ἐξασφαλίζει τὸ ἑξῆς: ὅτι μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ Θεώρημα 1.1.10, καὶ νὰ ἔχουμε ὡς συμπέρασμα τὴν ἀνισότητα (4.50), ἐφ' ὅσον ἡ συνάρτησις ν ἱκανοποιεῖ τὶς ἀνισότητες (4.56).

Ἐξειδικεύοντας τὰ παραπάνω στὸ μέτρον ν τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1, παρατηροῦμε ἀρχικῶς ὅτι οἱ ῥοπὲς τῆς συναρτήσεως βάρους στὴν συνθήκην συσχετισμοῦ φράσσονται ἀπὸ σταθερὲς ποὺ εἶναι ἀνεξάρτητες τοῦ πόσο μεγάλη εἶναι ἡ παράμετρος W, ὅπως μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ἀπὸ τὶς ἀποδείξεις τῶν Προτάσεων 4.3.4 καὶ 4.4.4. Ἄρα σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, κάθε φορὰν ποὺ θὰ μᾶς δίνονται παράμετροι k καὶ δ, θὰ μποροῦμε νὰ βροῦμε σταθερὰν $c_\nu(k,\delta)$ ὅπως παραπάνω, καὶ αὐτὴ ἡ σταθερὰ οὐσιαστικὰ θὰ ἀντιστοιχεῖ σὲ συγκεκριμένην τιμὴν τῆς παραμέτρου W. Μὲ ἄλλα λόγια, κάθε φορὰν ποὺ θὰ μᾶς δίνονται τὰ k καὶ δ, θὰ μποροῦμε νὰ σταθεροποιήσουμε τὴν παράμετρον W σὲ κάποιαν συγκεκριμένην τιμὴν (ποὺ θὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰ k καὶ δ), ὥστε τὸ Θεώρημα 1.1.10 νὰ συνεχίζει νὰ ἰσχύει γιὰ τὶς παραμέτρους k καὶ δ καὶ τὸ μέτρον ν τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1 ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν συγκεκριμένην τιμὴν τῆς W.

Βασιζόμενοι σὲ αὐτὴν τὴν πολὺ σημαντικὴν παρατήρησιν γιὰ τὸ Θεώρημα 1.1.10, καὶ στὸ τί συνεπάγεται γιὰ τὸ μέτρον ν τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1, μποροῦμε πλέον νὰ ἀποδείξουμε τὰ Θεωρήματα 1 καὶ 2 τῆς Εἰσαγωγῆς:

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 1. Μὲ τοὺς συμβολισμοὺς τῆς προηγουμένης παρατηρήσεως, βρίσκουμε τὴν σταθερὰν $c_\nu(k, k^{-1}2^{-k-5}\epsilon_k)$ γιὰ τὸ μέτρον ν τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1, καθὼς καὶ τὴν τιμὴν τῆς παραμέτρου W ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ αὐτήν. Ἔπειτα ἐπαναλαμβάνουμε τὴν ἀπόδειξιν ποὺ δώσαμε στὴν ἑνότητα 4.1 (προσαρμόζοντας βεβαίως τὶς σταθερὲς ἀφοῦ τώρα τὸ συμπέρασμα τοῦ γενικευμένου θεωρήματος Szemerédi εἶναι ἡ ἀνισότης (4.50), καὶ ὄχι ἡ (4.49)). Φτάνουμε ἔτσι στὸ συμπέρασμα ὅτι ὑπάρχει σταθερὰ $\gamma_0(k)$ (ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ k) ὥστε γιὰ ὅλους τοὺς ἀρκετὰ μεγάλους πρώτους N νὰ ἰσχύει

$$\mathrm{app}(WN,k) \geq \gamma_0(k)\frac{N^2}{\log^k(WN)} = \frac{\gamma_0(k)}{W^2}\frac{(WN)^2}{\log^k(WN)}, \tag{4.57}$$

ὅπου τώρα βεβαίως καὶ ἡ $\gamma_0(k)/W^2$ εἶναι σταθερά.

Ἡ ἀπόδειξις πλέον ὁλοκληρώνεται σὲ δύο πολὺ ἁπλὰ βήματα:

1. Ἀπὸ τὸ θεώρημα Bertrand-Chebyshev, γιὰ κάθε φυσικὸν $M \geq 2$ ὑπάρχει πρῶτος ἀριθμὸς N ποὺ βρίσκεται μεταξὺ τῶν M καὶ $\lfloor \frac{M}{2} \rfloor$. Τότε, προφανῶς ἰσχύουν οἱ διαδοχικὲς ἀνισότητες

$$\begin{aligned}\mathrm{app}(WM,k) \geq \mathrm{app}(WN,k) &\geq \frac{\gamma_0(k)}{W^2}\frac{(WN)^2}{\log^k(WN)}\\ &\geq \frac{\gamma_0(k)}{W^2}\frac{(WM/2)^2}{\log^k(WM/2)} \geq \frac{\gamma_0(k)}{4W^2}\frac{(WM)^2}{\log^k(WM)},\end{aligned}$$

ἀρκεῖ ὁ πρῶτος N, ἄρα καὶ ὁ φυσικὸς M, νὰ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλοι σὲ σχέσιν μὲ τὸ k, ὥστε νὰ ἰσχύει ἡ (4.57).

2. Μὲ παρόμοιον τρόπον, γιὰ κάθε φυσικὸν n ὁ ὁποῖος εἶναι ἀρκετὰ μεγάλος, γράφουμε $n = Wm + r$ ὅπου $0 \leq r < W$, καὶ ἔχουμε διαδοχικὰ

$$\begin{aligned}\mathrm{app}(n,k) \geq \mathrm{app}(Wm,k) &\geq \frac{\gamma_0(k)}{4W^2}\frac{(Wm)^2}{\log^k(Wm)}\\ &\geq O(1)\frac{\gamma_0(k)}{4W^2}\frac{(W(m+1))^2}{\log^k(W(m+1))} \geq O(1)\frac{\gamma_0(k)}{4W^2}\frac{n^2}{\log^k n}.\end{aligned}$$

□

Ἦταν βεβαίως γνωστὸν ἀπὸ τὶς ἐργασίες τῶν van der Corput [37] καὶ Chowla [7] ὅτι μποροῦμε νὰ δώσουμε ἕναν ἀσυμπτωτικὸν τύπον, καὶ ὄχι ἁπλῶς ἕνα κάτω φράγμα, γιὰ τὸν ἀριθμὸν $\mathrm{app}(n,3)$ χρησιμοποιῶντας τὴν μέθοδον τῶν Hardy καὶ Littlewood μαζὶ μὲ τὶς βελτιώσεις ποὺ εἰσήγαγε σὲ αὐτὴν ὁ Vinogradov γιὰ νὰ ἀποδείξει τὸ δικόν του θεώρημα.

Συγκεκριμένα, ὅπως εἴπαμε καὶ στὴν ὑποενότητα 4.2.1, οἱ van der Corput καὶ Chowla ἔδειξαν ὅτι

$$\mathrm{app}(n,3) = (1+o(1))\frac{\gamma'(3)}{4}\frac{n^2}{\log^3 n} = (1+o(1))\frac{1}{2}\prod_{p\geq 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{n^2}{\log^3 n}$$

ὅπου $\gamma'(k)$ εἶναι οἱ σταθερὲς ποὺ δίνει ἡ μέθοδος τῶν Hardy καὶ Littlewood στὴν περίπτωσιν τῶν ἀριθμητικῶν προόδων στοὺς πρώτους (τύπος (4.10)).

Τὸ 2006 οἱ Green καὶ Tao ἀπέδειξαν, ὡς ὑποπερίπτωσιν τοῦ βασικοῦ ἀποτελέσματος τοῦ ἄρθρου [23], ἕναν ἀσυμπτωτικὸν τύπον καὶ γιὰ τὸν ἀριθμὸν $\mathrm{app}(n,4)$, ἔδειξαν δηλαδὴ ὅτι ἰσχύει

$$\mathrm{app}(n,4) = (1+o(1))\frac{\gamma'(4)}{6}\frac{n^2}{\log^4 n} = (1+o(1))\frac{3}{4}\prod_{p\geq 5}\left(1-\frac{3p-1}{(p-1)^3}\right)\frac{n^2}{\log^4 n}$$

(στὸ [23] μάλιστα χρησιμοποιοῦνται πολλὰ ἀπὸ τὰ ἐργαλεῖα ποὺ περιγράφουμε ἐδῶ, ὅπως τὰ ψευδοτυχαῖα μέτρα ἢ οἱ παραλλαγὲς τῆς συναρτήσεως von Mangoldt καὶ οἱ ἐκτιμήσεις τῶν Goldston καὶ Yildirim). Τελικῶς, τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 2010, ἀνεκοίνωσαν μαζὶ μὲ τὴν Tamar Ziegler ὅτι ἔχουν ἀποδείξει καί τὶς δύο βασικὲς οἰκογένειες εἰκασιῶν ποὺ διατυπώνουν στὸ [23]. Ὡς πόρισμα αὐτῶν προκύπτει πλέον ὅτι γιὰ κάθε φυσικὸν $k\geq 3$,

$$\mathrm{app}(n,k) = (1+o(1))\frac{\gamma'(k)}{2(k-1)}\frac{n^2}{\log^k n}.$$

Ἂς δοῦμε τώρα πῶς ἀποδεικνύεται τὸ Θεώρημα 2. Χρειαζόμαστε ἀκόμη μίαν βασικὴν παρατήρησιν γιὰ τὰ μέτρα ποὺ μᾶς δίνει ὁ Ὁρισμὸς 4.3.1 γιὰ τὶς διάφορες τιμὲς τῆς παραμέτρου W.

Παρατήρησις 4.5.2. Ἂς θυμηθοῦμε ὅτι κατ' ἐπιλογήν μας τὸ μέτρον ν τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1 ἀναθέτει σὲ κάθε $n\in[\epsilon_k N, 2\epsilon_k N]$ τὴν τιμὴν $\frac{\phi(W_N)}{W_N\log R_N}\Lambda^2_{R_N}(W_N n+1)$, καὶ ὅτι γιὰ αὐτὸν τὸν λόγον χρειάζεται στὶς Προτάσεις 4.3.3, 4.3.4 νὰ ἐκτιμήσουμε διάφορες μέσες τιμὲς ποσοτήτων τῆς μορφῆς

$$\Lambda^2_{R_N}\big(W_N\psi_1(\boldsymbol{x})+1\big)\cdots\Lambda^2_{R_N}\big(W_N\psi_m(\boldsymbol{x})+1\big),\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^t$$
$$\Lambda^2_{R_N}\big(W_N(x+h_1)+1\big)\cdots\Lambda^2_{R_N}\big(W_N(x+h_m)+1\big),\ x\in\mathbb{Z},$$

δηλαδὴ μέσες τιμὲς στὶς ὁποῖες ἐμφανίζονται μόνον οἱ τιμὲς τῆς συναρτήσεως Λ_R στοὺς φυσικοὺς ποὺ εἶναι ἰσοϋπόλοιποι μὲ τὸ 1 (mod W). Κοιτῶντας ὅμως πάλι τὶς ἀποδείξεις τῶν Προτάσεων 4.3.3, 4.3.4, συνειδητοποιοῦμε ὅτι δὲν μᾶς ἔχει χρησιμεύσει πουθενὰ τὸ ὅτι ἐμφανίζονται μόνον αὐτὲς οἱ τιμὲς τῆς συναρτήσεως Λ_R πάρα μόνον ἐπειδὴ τὸ 1 εἶναι σχετικῶς πρῶτον μὲ τὸν W. Θὰ μπορούσαμε ἑπομένως, γιὰ κάθε πρῶτον N, νὰ ἔχουμε θεωρήσει ἕναν ὁποιονδήποτε φυσικὸν b_N μὲ $1 \leq b_N \leq W_N, (b_N, W_N) = 1$, καὶ ἐπαναλαμβάνοντας τὶς ἀποδείξεις γιὰ τὶς μέσες τιμὲς

$$\mathbb{E}\left(\Lambda_{R_N}^2\left(W_N\psi_1(\boldsymbol{x}) + b_N\right)\cdots\Lambda_{R_N}^2\left(W_N\psi_m(\boldsymbol{x}) + b_N\right) | \,\boldsymbol{x} \in B_N\right),\ B_N \subset \mathbb{Z}^t,$$
$$\mathbb{E}\left(\Lambda_{R_N}^2\left(W_N(x + h_1) + b_N\right)\cdots\Lambda_{R_N}^2\left(W_N(x + h_m) + b_N\right) | \,x \in B'_N\right),\ B'_N \subset \mathbb{Z}$$

(ὅπου τὰ m, t, οἱ γραμμικὲς μορφὲς ψ_i, οἱ ἀκέραιοι $h_1, \ldots, h_m$, καὶ τὰ ὀρθογώνια B_N, B'_N εἶναι ἀκριβῶς ὅπως στὴν διατύπωσιν τῶν προτάσεων), νὰ λάβουμε τελικῶς τὶς ἴδιες ἐκτιμήσεις μὲ ἀνάλογα σφάλματα (τὰ ὁποῖα, ὅπως εἴδαμε, φθίνουν στὸ 0 μὲ ῥυθμὸν ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰ m καὶ t), καὶ μὲ τὶς ἴδιες σταθερές.

Εἶναι πολὺ εὔκολον πλέον νὰ δοῦμε ὅτι μποροῦμε νὰ ἐπαναλάβουμε μὲ ἀνάλογον τρόπον τὶς ἀποδείξεις τῶν Προτάσεων 4.4.2, 4.4.4 ὥστε νὰ δείξουμε ὅτι καὶ ἡ συνάρτησις $\nu_{\boldsymbol{b}} : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$, ποὺ ὁρίζεται θέτοντας

$$\nu_{N,\boldsymbol{b}}(n) := \begin{cases} \frac{\phi(W_N)}{W_N \log R_N}\Lambda_{R_N}^2(W_N n + b_N) & \text{ὅταν } \epsilon_k N \leq n \leq 2\epsilon_k N \\ 1 & \text{ἀλλιῶς} \end{cases}$$

(ὅπου $\boldsymbol{b} := (b_N)_{N \text{ πρῶτος}}$ ὁποιαδήποτε ἐπιλογὴ φυσικῶν μὲ $1 \leq b_N \leq W_N, (b_N, W_N) = 1$) εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον, μὲ τὰ ἴδια μάλιστα σφάλματα στὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν καὶ τὰ ἴδια ἄνω φράγματα γιὰ τὶς ῥοπὲς τῆς συναρτήσεως βάρους στὴν συνθήκην συσχετισμοῦ. Αὐτὸ τὸ τελευταῖον βεβαίως σημαίνει ὅτι, γιὰ τὸ μέτρον $\nu_{\boldsymbol{b}}$, ἡ σταθερὰ $c_{\nu_{\boldsymbol{b}}}(k, \delta)$ ποὺ ὁρίσαμε στὴν Παρατήρησιν 4.5.1 θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντίστοιχην σταθερὰν $c_\nu(k, \delta)$ γιὰ τὸ μέτρον ν τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1, ὅποιες καὶ ἂν εἶναι οἱ παράμετροι k καὶ δ, καὶ φυσικὰ τὸ ἴδιον θὰ ἰσχύει γιὰ τὴν τιμὴν στὴν ὁποίαν πρέπει νὰ σταθεροποιήσουμε τὴν παράμετρον W ὥστε νὰ πετύχουμε τὴν ἐν λόγῳ σταθεράν.

Λιγότερο ἄμεσον εἶναι νὰ δείξουμε ὅτι καὶ ἡ συνάρτησις $\nu'_{\boldsymbol{b}}$ ποὺ ὁρίζεται θέτοντας

$$\nu'_{N,\boldsymbol{b}}(n) := \begin{cases} \frac{\phi(W_N)}{W_N \log R_N}\Lambda_{R_N}^2(W_N n + b_N) & \text{ὅταν } 1 \leq n \leq \epsilon_k N \\ 1 & \text{ἀλλιῶς} \end{cases} \tag{4.58}$$

εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον (μὲ ἀνάλογα σφάλματα στὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν). Τὸ πρόβλημα βεβαίως ἐμφανίζεται ὅταν πᾶμε νὰ ἀποδείξουμε τὶς ἀντίστοιχες τῶν Προτάσεων 4.4.2 καὶ 4.4.4 καὶ κόβουμε τὸ πεδίον ὁλοκληρώσεως σὲ μικρὰ ὀρθογώνια: ἂς θυμηθοῦμε ὅτι γιὰ τὰ μὴ «καλὰ» ὀρθογώνια $B_{u_1,\ldots,u_t}$, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τοῦ «καλοῦ» ποὺ δώσαμε, θὰ ὑπάρχει γραμμικὴ μορφὴ $\psi_i, 1 \leq i \leq m$, καὶ διανύσματα $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B_{u_1,\ldots,u_t}$ ὥστε νὰ ἰσχύουν γιὰ κάποιον ἀκέραιον $l_i \in \mathbb{Z}$ τὰ ἑξῆς:

$$\begin{aligned} 1 \leq \psi_i(\boldsymbol{x}) + l_i N \leq \epsilon_k N \text{ καὶ εἴτε } & N - \epsilon_k N < \psi_i(\boldsymbol{y}) + l_i N \leq 0 \\ \text{εἴτε } & \epsilon_k N < \psi_i(\boldsymbol{y}) + l_i N \leq 2\epsilon_k N. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Ὅμως, ἡ τακτικὴ γιὰ τὰ μὴ καλὰ ὀρθογώνια $B_{u_1,\ldots,u_t}$ εἶναι νὰ φράξουμε ἀπὸ πάνω τὴν ποσότητα $\nu'_{\boldsymbol{b}}(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu'_{\boldsymbol{b}}(\psi_m(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{x} \in B_{u_1,\ldots,u_t}$, ἀπὸ τὴν ποσότητα

$$\prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{\phi(W)}{W \log R}\Lambda_R^2\big(W(\psi_i(\boldsymbol{x}) + l_i N) + b_N\big)\right),$$

καὶ ἔπειτα νὰ ὑπολογίσουμε βάσει τῆς Προτάσεως 4.3.3 τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς τελευταίας στὸ ὀρθογώνιον $B_{u_1,\ldots,u_t}$ ὥστε νὰ δώσουμε ἕνα ἄνω φράγμα καὶ γιὰ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\mathbb{E}(\nu'_{\boldsymbol{b}}(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu'_{\boldsymbol{b}}(\psi_m(\boldsymbol{x}))\,|\,\boldsymbol{x}\in B_{u_1,\ldots,u_t}).$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἂν γιὰ κάποιον δείκτην i ἰσχύει ἡ πρώτη γραμμὴ τῆς (4.59), θὰ χρειάζεται νὰ ἔχουμε ορίσει τὴν Λ_R καὶ γιὰ ἀρνητικοὺς ἀκεραίους. Αὐτὸ ὅμως μπορεῖ νὰ γίνει πολὺ ἁπλὰ θέτοντας, ἀκριβῶς ὅπως στὸν Ὁρισμὸν 4.11,

$$\Lambda_R(n) := \sum_{\substack{d|n\\1\le d\le R}} \mu(d)\log(R/d)$$

γιὰ κάθε $n\in\mathbb{Z}$ (προφανῶς δὲν ὑπάρχει πρόβλημα νὰ ὁρίσουμε μέσῳ αὐτοῦ τοῦ τύπου καὶ τὴν τιμὴν στὸ 0: $\Lambda_R(0)=\sum_{1\le d\le R}\mu(d)\log(R/d)$). Δὲν εἶναι δύσκολον νὰ ἐλέγξουμε ὅτι οἱ ἀποδείξεις τῶν Προτάσεων 4.3.3, 4.3.4 μποροῦν τώρα νὰ γίνουν καὶ χωρὶς τὶς ὑποθέσεις

$$\begin{aligned}&\psi_i(\boldsymbol{x})>0 \text{ γιὰ κάθε } \boldsymbol{x}\in B\subset\mathbb{Z}^t,\ \text{γιὰ κάθε } 1\le i\le m,\\ \text{ἤ}\ \ &x+h_i>0 \text{ γιὰ κάθε } x\in B\subset\mathbb{Z},\ \text{γιὰ κάθε ἀκέραιον } h_i,\end{aligned}$$

καὶ ὅτι μᾶς δίνουν τὶς ἴδιες ἀκριβῶς ἐκτιμήσεις. Ἔτσι, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ συνάρτησις $\nu'_{\boldsymbol{b}}$, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸν τύπον (4.58), εἶναι $k-$ψευδοτυχαῖον μέτρον γιὰ κάθε ἐπιλογὴν $\boldsymbol{b}:=(b_N)_{N\text{ πρῶτος}}$ φυσικῶν μὲ $1\le b_N\le W_N, (b_N,W_N)=1$, ὅπως καὶ ὅτι τὰ σφάλματα στὴν συνθήκην γραμμικῶν μορφῶν καὶ τὰ ἄνω φράγματα γιὰ τὶς ῥοπὲς τῆς συναρτήσεως βάρους στὴν συνθήκην συσχετισμοῦ εἶναι τὰ ἴδια μὲ αὐτὰ ποὺ ἔχουμε γιὰ τὸ μέτρον ν τοῦ Ὁρισμοῦ 4.3.1.

Πλέον, τὸ Θεώρημα 2 προκύπτει ἀρκετὰ εὔκολα:

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 2. Ἔστω A ὑποσύνολον τῶν πρώτων γιὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει

$$\limsup_{n\to\infty}\pi(n)^{-1}|A\cap[1,n]|>0.$$

Ὅπως εἴπαμε στὴν Εἰσαγωγήν, αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει πραγματικὸς $\delta>0$ καὶ μία ἀκολουθία φυσικῶν $n_1<n_2<\cdots<n_j<\cdots$, ὥστε γιὰ κάθε j νὰ ἰσχύει $|A\cap[1,n_j]|\ge\delta\pi(n_j)$. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι γιὰ ἀρκετὰ μεγάλα j θὰ ἰσχύει ἐπίσης, ἀπὸ τὸν ἀσυμπτωτικὸν τύπον ποὺ μᾶς δίνει τὸ Θεώρημα Πρώτων Ἀριθμῶν γιὰ τὸν ἀριθμὸν $\pi(n)$, ὅτι $\sqrt{n_j}<\frac{\delta}{2}\pi(n_j)$, δηλαδὴ τὰ περισσότερα στοιχεῖα τῆς τομῆς $A\cap[1,n_j]$ θὰ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ $\sqrt{n_j}$, ἄρα θὰ ἔχουμε ὅτι

$$\sum_{n\in A\cap[\sqrt{n_j},n_j]}\log n>\frac{\delta}{2}\pi(n_j)\log(\sqrt{n_j})\ge\delta n_j/4.$$

Ἐξαιτίας τοῦ τελευταίου, ἂν γιὰ κάποιον φυσικὸν $k\ge 3$ θέλουμε νὰ δείξουμε ὅτι τὸ A περιέχει ἄπειρες ἀριθμητικὲς προόδους μήκους k, θὰ μᾶς ἀρκεῖ νὰ σταθεροποιήσουμε τὴν παράμετρον W στὸν Ὁρισμὸν 4.3.1 τοῦ μέτρου ν ἔτσι ὥστε νὰ πετυχαίνουμε προσεγγίσεις τῆς μορφῆς

$$|\mathbb{E}(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x}))\cdots\nu(\psi_m(\boldsymbol{x}))|\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_N^t)-1|\leq c_\nu(k,k^{-1}2^{-k-8}\epsilon_k\delta).$$

Πράγματι, γιὰ νὰ τὸ δοῦμε αὐτό, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι γιὰ κάθε ἀρκετὰ μεγάλο j, καὶ γιὰ κάποιαν ἀπὸ τὶς ἰσοϋπόλοιπες κλάσεις ὑπολοίπων $b_j \pmod W$ θὰ ἰσχύει

$$\sum_{m<n_j/W}\mathbf{1}_{A\cap[\sqrt{n_j},n_j]}(Wm+b_j)\cdot\log(Wm+b_j)=\max_{b:(b,W)=1}\sum_{m<n_j/W}\mathbf{1}_{A\cap[\sqrt{n_j},n_j]}(Wm+b)\cdot\log(Wm+b) \tag{4.60}$$

ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ περιστερεῶνος (χωρὶς ἀναγκαστικὰ αὐτὸ τὸ b_j νὰ εἶναι ἴσον μὲ 1), ἄρα θὰ ἔχουμε γιὰ τὴν συνάρτησιν $\tilde{\lambda}_{n_j}:[1,\lfloor\frac{n_j}{W}\rfloor]\to\mathbb{R}^+$ ποὺ ὁρίζεται θέτοντας

$$\tilde{\lambda}_{n_j}(m):=\begin{cases}\frac{\phi(W)}{W}\log(Wm+b_j) & \text{ἂν } Wm+b_j\in A\cap[\sqrt{n_j},n_j]\\ 0 & \text{ἀλλιῶς}\end{cases},$$

ὅτι $\mathbb{E}(\tilde{\lambda}_{n_j}(m):1\leq m\leq\lfloor\frac{n_j}{W}\rfloor)\geq\delta/4$. Χρησιμοποιῶντας ἔπειτα τὸ θεώρημα Bertrand-Chebyshev, θὰ μποροῦμε νὰ βροῦμε πρῶτον ἀριθμὸν N_j μεταξὺ τῶν $\lfloor\frac{n_j}{W}\rfloor/\epsilon_k$ καὶ $2\lfloor\frac{n_j}{W}\rfloor/\epsilon_k$, ὥστε ἐπεκτείνοντας τὴν $\tilde{\lambda}_{n_j}$ μὲ τὸν ἁπλούστερον δυνατὸν τρόπον στὸ $[1,N_j]$, θέτοντας δηλαδὴ

$$\tilde{\lambda}_{N_j}(m):=\begin{cases}\tilde{\lambda}_{n_j}(m) & \text{ἂν } m\leq\lfloor\frac{n_j}{W}\rfloor\\ 0 & \text{ἀλλιῶς}\end{cases},$$

νὰ ἔχουμε $\mathbb{E}(\tilde{\lambda}_{N_j}(m):1\leq m\leq N_j)\geq\epsilon_k\delta/8=2^{-3}\epsilon_k\delta$.

Πλέον ὅμως, μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε καὶ τὸ μέτρον $\nu'_{\boldsymbol{b}}:\mathbb{Z}_{N_j}\to\mathbb{R}^+$, ὅπου $\boldsymbol{b}:=(b_j)_{j=1}^\infty$ εἶναι οἱ φυσικοὶ ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν (4.60) γιὰ κάθε j, θέτοντας

$$\nu'_{N_j,\boldsymbol{b}}(n):=\begin{cases}\frac{\phi(W)}{W\log R_{N_j}}\Lambda^2_{R_{N_j}}(Wn+b_j) & \text{ὅταν } 1\leq n\leq\epsilon_k N_j\\ 1 & \text{ἀλλιῶς}\end{cases},$$

τὸ ὁποῖον φράσσει κατὰ σημεῖον τὴν $k^{-1}2^{-k-5}\tilde{\lambda}_{N_j}$ γιὰ ἀρκετὰ μεγάλα N_j σὲ σχέσιν μὲ τὸ k, καὶ ταυτοχρόνως ἱκανοποιεῖ τὶς ἐκτιμήσεις ποὺ χρειαζόμαστε σύμφωνα μὲ τὴν Παρατήρησιν 4.5.1 γιὰ νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ γενικευμένον θεώρημα Szemerédi. Ἐπιπλέον, ἐπειδὴ ἡ $\tilde{\lambda}_{N_j}$ μηδενίζεται ἔξω ἀπὸ τὸ ὑποδιάστημα $[1,\epsilon_k N_j]$ τοῦ $\mathbb{Z}_{N_j}$, οἱ ἀριθμητικὲς πρόοδοι μήκους k ποὺ θὰ βροῦμε στὸν φορέα της θὰ ἀντιστοιχοῦν σὲ γνήσιες ἀριθμητικὲς προόδους στὸ $\mathbb{Z}$, καὶ ἄρα σὲ γνήσιες ἀριθμητικὲς προόδους μέσα στὴν τομὴν $A\cap[\sqrt{n_j},n_j]$. □

Χρησιμοποιῶντας τὸ Θεώρημα 2 μποροῦμε, γιὰ παράδειγμα, νὰ συμπεράνουμε ὅτι ὑπάρχουν αὐθαίρετα μεγάλες ἀριθμητικὲς πρόοδοι στὸ σύνολον τῶν πρώτων $p\equiv 1 \pmod 4$.

Ὅμως, ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Fermat γιὰ ἀθροίσματα δύο τετραγώνων (ἡ πρώτη ἀπόδειξις τοῦ ὁποίου δόθηκε ἀπὸ τὸν Euler) γνωρίζουμε ὅτι γιὰ κάθε περιττὸν πρῶτον p ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία

$$p \equiv 1 \pmod 4) \Leftrightarrow p = x^2 + y^2 \text{ γιὰ κάποια } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Ἑπομένως, ἂν συμβολίσουμε μὲ S τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ποὺ γράφονται ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, λαμβάνουμε ὡς πόρισμα τοῦ Θεωρήματος 2 ὅτι τὸ σύνολον S περιέχει ἄπειρες ἀριθμητικὲς προόδους μήκους k γιὰ κάθε k. Αὐτὸ παρέμενε ἀναπάντητον μέχρι τὸ 2004, ἂν καὶ γιὰ τὰ μικρὰ k γνωρίζαμε περισσότερα ἀπ' ὅ,τι γιὰ τὶς ἀντίστοιχες προόδους μὲ πρώτους (βλέπε ἀποτελέσματα προγενέστερα τοῦ [1] στὴν Εἰσαγωγήν): δὲν εἶναι δύσκολον, λόγου χάριν, νὰ πειστοῦμε ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρες ἀριθμητικὲς πρόοδοι μήκους 4 στὸ S ἀφοῦ, ὅπως παρετήρησε ὁ Heath-Brown [26], γιὰ κάθε φυσικὸν n οἱ ἀριθμοὶ $(n-1)^2+(n-8)^2$, $(n-7)^2+(n+4)^2$, $(n+7)^2+(n-4)^2$ καὶ $(n+1)^2+(n+8)^2$ σχηματίζουν μίαν τέτοιαν πρόοδον. (Μάλιστα, ὁ Heath-Brown εἶχε δώσει καὶ ἕναν ἀσυμπτωτικὸν τύπον γιὰ τὸ πλῆθος τῶν προόδων μήκους 4 στὸ S τῶν ὁποίων ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι μικρότεροι κάποιου φυσικοῦ N, ἢ σωστότερα γιὰ τὸ πλῆθος τῶν διαφορετικῶν ἀναπαραστάσεων τέτοιων προόδων, δεδομένου ὅτι ἐν γένει κάποιος φυσικὸς n γράφεται μὲ παραπάνω ἀπὸ ἕναν τρόπους ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων.)

Γιὰ τὸ τέλος, ἂς παρατηρήσουμε ὅτι ἡ ἀρχὴ μεταφορᾶς ποὺ χρησιμοποίησαν οἱ Green καὶ Tao γιὰ τὶς ἀριθμητικὲς προόδους στοὺς πρώτους θὰ μποροῦσε, μὲ κατάλληλες προσαρμογές, νὰ ἐφαρμοστεῖ καὶ σὲ ἄλλα ἀποτελέσματα τῆς προσθετικῆς συνδυαστικῆς ἢ τῆς ἀναλυτικῆς θεωρίας ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς συμπέρασμά τους ὅτι κάποιο «σχῆμα» (ὅπως μία ἀριθμητικὴ πρόοδος) ἐμφανίζεται ἄπειρες φορὲς σὲ ὑποσύνολα τῶν φυσικῶν μὲ θετικὴν πυκνότητα, μὲ σκοπὸν βεβαίως νὰ πετύχουμε ἀντίστοιχα ἀποτελέσματα γιὰ πρώτους ἀριθμούς. Αὐτὸ ἀκριβῶς κατάφεραν νὰ κάνουν ὁ Tao μαζὶ μὲ τὴν Tamar Ziegler τὸ 2006 [35], ὅταν ἀπέδειξαν μίαν ἐκδοχὴν τοῦ πολυωνυμικοῦ θεωρήματος Szemerédi τῶν Bergelson καὶ Leibman [5] γιὰ τοὺς πρώτους: τὸ συμπέρασμα σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν εἶναι ὅτι ἂν ἔχουμε k πολυώνυμα $F_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μὲ $F_i(0) = 0$ γιὰ κάθε $1 \leq i \leq k$, τότε θὰ ὑπάρχουν ἄπειροι φυσικοὶ a, d γιὰ τοὺς ὁποίους τὸ διάνυσμα

$$(a + F_1(d), \ldots, a + F_k(d))$$

θὰ ἔχει σὲ ὅλες τὶς συντεταγμένες του πρώτους (φυσικά, ἡ ἐπιλογὴ $F_i(n) := (i-1)n$ μᾶς δίνει πάλι ἀριθμητικὲς προόδους μήκους k στοὺς πρώτους). Χωρὶς νὰ μᾶς προκαλεῖ ἔκπληξιν, ἡ ἀπόδειξίς τους προέκυψε μὲ κατάλληλες προσαρμογὲς τῶν βημάτων στὸ ἄρθρον τῶν Green καὶ Tao, ἀπαιτοῦσε ὅμως ἀρκετὰ ἐπιχειρήματα νὰ διατυπωθοῦν πιὸ προσεκτικά, καὶ ὁδήγησε ἔτσι καὶ στὴν καλύτερην κατανόησιν τῶν μεθόδων τῶν Green καὶ Tao (βλέπε παραδείγματος χάριν [18] ἢ [28] γιὰ μίαν ἁπλουστευμένην ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος Διασπάσεως τῶν Green καὶ Tao ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖ τὸ θεώρημα Hahn-Banach).

Βιβλιογραφία

[1] B. J. Green and T. C. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Annals of Math. 167 (2008), 481-547.

[2] T. C. Tao, *A quantitative ergodic theory proof of Szemerédi's theorem*, Electronic J. Combinatorics 13 (2006), 49 pp.

[3] A. Balog, *Linear equations in primes*, Mathematika 39 (1992), 367-378.

[4] ———, *Six primes and an almost prime in four linear equations*, Can. J. Math. 50 (1998), 465-486.

[5] V. Bergelson and A. Leibman, *Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemerédi's theorems*, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 725-753.

[6] J. Bourgain, *On triples in arithmetic progression*, GAFA 9 (1999), 968-984.

[7] S. Chowla, *There exists an infinity of* $3-$*combinations of primes in A. P.*, Proc. Lahore Philos. Soc. 6 (1944), 15-16.

[8] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, third edition, Grad. Texts in Math. 74, Springer-Verlag, New York, 2000.

[9] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math. 31 (1977), 204-256.

[10] H. Furstenberg, Y. Katznelson, and D. Ornstein, *The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982), 527-552.

[11] P. X. Gallagher, *On the distribution of primes in short intervals*, Mathematika 23 (1976), 4-9.

[12] D. A. Goldston, Y. Motohashi, J. Pintz and C. Y. Yildirim, *Small gaps between primes exist*, Proc. Japan Acad. 82A (2006) 61-65.

[13] D. A. Goldston, J. Pintz and C. Y. Yildirim, *Primes in tuples, I*, Annals of Math. 170 (2009), 819-862.

[14] D. A. Goldston and C. Y. Yildirim, *Higher correlations of divisor sums related to primes, I: Triple correlations*, Integers 3 (2003), 66pp.

[15] ———, *Higher correlations of divisor sums related to primes, III: Small gaps between primes*, Proc. London Math. Soc. 95 (2007), 653-686.

[16] W. T. Gowers, *A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four*, GAFA 8 (1998), 529-551.

[17] ———, *A new proof of Szemerédi's theorem*, GAFA 11 (2001), 465-588.

[18] ———, *Decompositions, approximate structure, transference, and the Hanh-Banach theorem*, Bull. London Math. Soc. 42 (2010), 573-606.

[19] B. J. Green, *Roth's theorem in the primes*, Annals of Math. 161 (2005), 1609-1636.

[20] ———, *Long arithmetic progressions of primes*, Clay Math. Proc. 7 (2007), 149-167.

[21] B. J. Green and T. C. Tao, *A bound for progressions of length k in the primes*, preprint.

[22] ———, *An inverse theorem for the Gowers $U^3(G)$ norm*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 51 (2008), 73-153.

[23] ———, *Linear equations in primes*, Annals of Math., πρὸς δημοσίευσιν.

[24] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of «Partitio numerorum», III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. 44 (1923), 1-70.

[25] D. R. Heath-Brown, *Three primes and an almost prime in arithmetic progression*, J. London Math. Soc. (2) 23 (1981), 396-414.

[26] ———, *Linear relations amongst sums of two squares*, in *Number Theory and Algebraic Geometry* (to Peter Swinnerton-Dyer on his 75th birthday), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 303, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2003.

[27] B. Kra, *The Green-Tao theorem on arithmetic progressions in the primes: an ergodic point of view*, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (2006), 3-23.

[28] O. Reingold, L. Trevisan, M. Tulsiani and S. Vadhan, *Dense subsets of pseudo-random sets*, Electronic Colloquium on Computational Complexity, Proceedings of 49th IEEE FOCS, 2008.

[29] K. F. Roth, *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc. 28 (1953), 104-109.

[30] S. Shelah, *Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 683-697.

[31] K. Soundararajan, *Small gaps between prime numbers: the work of Goldston-Pintz-Yildirim*, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (2007), 1-18.

[32] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 20 (1969), 89-104.

[33] ———, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. 27 (1975), 199-245.

[34] T. C. Tao and V. Vu, *Additive combinatorics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 105, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[35] T. C. Tao and T. Ziegler, *The primes contain arbitrarily long polynomial progressions*, Acta Math. 201 (2008), 213-305.

[36] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, second edition, Oxford University Press, New York, 1986.

[37] J. G. van der Corput, *Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten*, Math. Ann. 116 (1939), 1-50.

[38] B. L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw. Arch. Wisk. 15 (1927), 212-216.

[39] P. Varnavides, *On certain sets of positive density*, J. London Math. Soc. 34 (1959), 358-360.

[40] T. Χατζηαφράτης, *Προσεγγίσεις καὶ ἀναπαραστάσεις συναρτήσεων*, Ἐκδόσεις Συμμετρία, Ἀθῆναι 2001.