

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

1) Για τον προσδιορισμό της σκληρότητας αλουμινίου έγιναν 16 μετρήσεις και προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα:
12.4, 11.4, 11.7, 12.3, 13.0, 10.9, 11.8, 13.5, 13.1, 11.8, 12.1, 11.7, 10.6, 12.2, 12.8
Να βρεθεί 0.95 Δ.Ε. για τον μέσο μ .

Λύση:

Πρόκειται για Δ.Ε. της μέσης τιμής μ με άγνωστη διασπορά σ .
Από τα δεδομένα προκύπτει:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 12.08, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 0.61, n = 16.$$

Από τους πίνακες της κατανομής t έχουμε ότι $t_{15,0.025} = 2.131$.

Το ζητούμενο λοιπόν Δ.Ε. με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\bar{X} - t_{15,0.025} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{15,0.025} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \Rightarrow 11.66 < \mu < 12.53.$$

2) Μετρήσεις του δείκτη διάθλασης 25 τεμαχίων διαφανούς υάλου έδωσαν τυπική απόκλιση 0.012. Να βρεθεί 0.90 Δ.Ε. για την διασπορά σ^2 του δείκτη διάθλασης.

Λύση:

Πρόκειται για Δ.Ε. της διασποράς σ^2 με άγνωστο μέσο μ .

Από την εκφώνηση έχουμε: $S = 0.012$ και $n = 25$, ενώ από τους πίνακες της X^2 κατανομής προκύπτει ότι $X_{24,0.05}^2 = 36.42$ και $X_{24,0.95}^2 = 13.84$.

Το ζητούμενο Δ.Ε. τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\frac{(n-1)S^2}{X_{24,0.05}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{X_{24,0.95}^2} \Rightarrow 0.010 < \sigma^2 < 0.016.$$

3) Πόσο πρέπει να είναι το μέγεθος ενός τυχαίου δείγματος από Κανονικό πληθυσμό αν απαιτείται $|\bar{X} - \mu| < c$ με βαθμό εμπιστοσύνης γ . Να θεωρηθεί η διασπορά γνωστή.

Λύση:

$$P(|\bar{X}-\mu| < c) = \gamma \Rightarrow P(-c < \bar{X}-\mu < c) = \gamma \Rightarrow P\left(-\frac{c}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{c}{\sigma/\sqrt{n}} < Z < \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \gamma = 1 - \alpha \Rightarrow \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{c}\right)^2.$$

4) Δυο μηχανές κόβουν σιδηρές ράβδους. Δύο τυχαία δείγματα $n_1 = 41$, $n_2 = 31$ από παραγωγές των έδωσαν αντίστοιχα $\bar{X}_1 = 64\text{cm}$, $S_1 = 0.9\text{cm}$ και $\bar{X}_2 = 60\text{cm}$, $S_2 = 0.7\text{cm}$. Να κατασκευαστεί ένα 0.95 Δ.Ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ των μέσων μηκών των σιδηρών ράβδων.

Λύση:

Πρόκειται για Δ.Ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ με άγνωστες διασπορές. Επίσης ουδεμία πληροφορία έχουμε για ισότητα των διασπορών οπότε μπορούμε να τις θεωρήσουμε άνισες.

Το ζητούμενο Δ.Ε. τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{v,\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{v,\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, \text{ με}$$

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} \text{ και } \alpha = 0.05.$$

5) Δυο μηχανές κατασκευάζουν πυκνωτές. Από τ.δ. μεγέθους $n_1 = 16$, $n_2 = 13$ από τις δύο μηχανές αντίστοιχα προέκυψαν: $\bar{X}_1 = 52\mu\text{F}$, $S_1 = 4\mu\text{F}$ και $\bar{X}_2 = 48\mu\text{F}$, $S_2 = 6\mu\text{F}$. Να δοθούν :

α) Ένα 0.98 Δ.Ε. του λόγου $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

β) Ένα 0.95 Δ.Ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$.

Λύση:

α) Το ζητούμενο Δ.Ε. τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2}}.$$

Από τους πίνακες της κατανομής F έχουμε ότι $F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2} = F_{15, 12, 0.01} = 4.01$, ενώ

$$\frac{1}{F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2}} = F_{n_2-1, n_1-1, \alpha/2} = F_{12, 15, 0.01} = 3.67 \text{ και έτσι προκύπτει ότι:}$$

$$0.11 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1.63.$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω Δ.Ε. περιέχει την τιμή 1 οπότε μπορούμε να δεχτούμε ισότητα των διασπορών.

β) Πρόκειται για Δ.Ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ με άγνωστες, αλλά λόγω του α) ίσες διασπορές. Με την βοήθεια των πινάκων έχουμε:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{v, \alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{v, \alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},$$

$$\text{με } S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{v}, \quad v = n_1 + n_2 - 2 \text{ και } \alpha = 0.05.$$

6) Δέκα άτομα παρακολούθησαν πρόγραμμα βελτίωσης και ικανότητας απομνημόνευσης. Με ειδικό τεστ προσδιορίστηκε για κάθε άτομο ο βαθμός απομνημόνευσης πριν και μετά το πρόγραμμα. Τα αποτελέσματα δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

Πριν	62	56	74	87	82	68	76	65	73	81
Μετά	68	63	79	91	86	74	83	72	78	86

Να κατασκευαστεί ένα 0.80 Δ.Ε. της διαφοράς των μέσων βαθμών απομνημόνευσης πριν και μετά το πρόγραμμα.

Λύση:

Πρόκειται για Δ.Ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ συσχετισμένων πληθυσμών (τα ίδια άτομα πριν και μετά). Ο πίνακας παίρνει την μορφή:

Μετά	68	63	79	91	86	74	83	72	78	86
Πριν	62	56	74	87	82	68	76	65	73	81
Διαφορές D_i	6	7	5	4	4	6	7	7	5	5

Εύκολα υπολογίζουμε την μέση διαφορά $\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i = 5.6$ και την διασπορά των

$$\text{διαφορών } S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2 = 1.17, \text{ όπου } n = 10.$$

Το ζητούμενο Δ.Ε. τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\bar{D} - t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}} < \mu_{\text{μετά}} - \mu_{\text{πριν}} < \bar{D} + t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}, \text{ με } \alpha = 0.20$$

Από τους πίνακες της κατανομής t έχουμε ότι $t_{9, 0.10} = 1.383$, οπότε $5.12 < \mu_{\text{μετά}} - \mu_{\text{πριν}} < 6.08$. Παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο Δ.Ε. δεν περιλαμβάνει την τιμή 0, οπότε

μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το πρόγραμμα πράγματι βελτιώνει την ικανότητα απομνημόνευσης των ατόμων.

7) Τα παρακάτω δεδομένα αποτελούν πωλήσεις (σε δισεκ. Δολάρια) ημιαγωγών ανά τρίμηνο από τις αρχές του 1985 έως τα μέσα του 1986.

		ΙΑΠΩΝΙΑ	ΗΠΑ
1985	1 ^ο τρίμηνο	1881	2282
	2 ^ο τρίμηνο	1888	2066
	3 ^ο τρίμηνο	1853	1893
	4 ^ο τρίμηνο	1976	1850
1986	1 ^ο τρίμηνο	2229	1946
	2 ^ο τρίμηνο	2631	2205

Να κατασκευαστεί 0.90 Δ.Ε. της διαφοράς των μέσων τριμηνιαίων πωλήσεων.

Λύση:

Όπως και στην προηγούμενη άσκηση έτσι και εδώ πρόκειται για Δ.Ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ συσχετισμένων πληθυσμών. Ο πίνακας παίρνει την μορφή:

		ΙΑΠΩΝΙΑ	ΗΠΑ	Διαφορές D_i
1985	1 ^ο τρίμηνο	1881	2282	-401
	2 ^ο τρίμηνο	1888	2066	-178
	3 ^ο τρίμηνο	1853	1893	-40
	4 ^ο τρίμηνο	1976	1850	126
1986	1 ^ο τρίμηνο	2229	1946	283
	2 ^ο τρίμηνο	2631	2205	426

Εύκολα υπολογίζουμε την μέση διαφορά $\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i = 36$ και την διασπορά των

διαφορών $S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2 = 304.55$, όπου $n = 6$.

Το ζητούμενο Δ.Ε. τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\bar{D} - t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}} < \mu_{\text{ΙΑΠΩΝΙΑ}} - \mu_{\text{ΗΠΑ}} < \bar{D} + t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}, \text{ με } \alpha=0.10.$$

8) Σε τυχαίο δείγμα 50 αντικειμένων βρέθηκαν 5 ελαττωματικά.

α) Να κατασκευαστεί ένα 0.95 Δ.Ε. του ποσοστού p των ελαττωματικών.

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέγεθος του δείγματος ώστε με πιθανότητα 0.95 το απόλυτο σφάλμα εκτίμησης $|\hat{p} - p|$ να είναι μικρότερο του 0.01;

Λύση:

α) Από την εκφώνηση προκύπτει ότι: $\hat{p} = \frac{5}{50} = 0.10$. Το ζητούμενο Δ.Ε. του

ποσοστού p των ελαττωματικών τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \text{ με } \alpha=0.05 \text{ και } n=50.$$

Με την βοήθεια του πίνακα της κανονικής κατανομής προκύπτει ότι $z_{\alpha/2}=1.96$, οπότε έχουμε $0.02 < p < 0.18$.

β)

$$P(|\hat{p}-p| < 0.01) = 0.95 \Rightarrow P(-0.01 < \hat{p}-p < 0.01) = 0.95 \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{-0.01}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} < \frac{0.01}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\right) = 0.95 \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{-0.01}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} < Z < \frac{0.01}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{0.01}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} = z_{0.05/2} = 1.96 \Rightarrow n = 3456.$$

9) Δύο παραγωγικές διαδικασίες έδωσαν 12 και 20 ελαττωματικά αντικείμενα σε τυχαία δείγματα 300 και 400 αντικειμένων αντίστοιχα. Να κατασκευαστεί ένα 0.95 Δ.Ε. της διαφοράς p_1-p_2 .

Λύση:

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι: $\hat{p}_1 = \frac{12}{300} = 0.04$ και $\hat{p}_2 = \frac{20}{400} = 0.05$. Το

ζητούμενο Δ.Ε. της διαφοράς p_1-p_2 με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} < p_1 - p_2 < \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}},$$

με $\alpha=0.05$ και $n_1=300, n_2=400$.