Σημείωση

Οι σημειώσεις αυτές περιλαμβάνουν λύσεις ασκήσεων Πιθανοτήτων και Στατιστικής και συγκροτήθηκαν εν όψει των αναγκών των σπουδαστών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών στο μαθήματα 'Πιθανότητες – Στατιστική' του 4^{ου} εξαμήνου από τον διδάσκοντα Δ. Φουσκάκη. Τις λύσεις και τη διατύπωση επιμελήθηκε ο ίδιος και βαρύνεται εξ' ολοκλήρου για τυχόν λάθη ή παραλείψεις. Οι περισσότερες Ασκήσεις προέρχονται από το διδακτικό εγχειρίδιο 'Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική' των Γ. Κοκολάκη - Ι. Σπηλιώτη, Αθήνα 1999, στο οποίο βρίσκετε και η πλήρης εκφώνησή τους σύμφωνα με την αρίθμηση τους. Ασκήσεις εκτός βιβλίου συνοδεύονται από την εκφώνηση τους.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω το μεταπτυχιακό σπουδαστή Δ. Λεπίπα ο οποίος έδωσε στις σημειώσεις ηλεκτρονική μορφή, καθώς επίσης και για τις πολλές και εύστοχες παρατηρήσεις του.

Απρίλιος 2006

Δημήτρης Φουσκάκης
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1.1 σελ.41)

Αν $A_1, A_2, ..., A_n$ ενδεχόμενα, να αποδειχτεί ότι $n + P[A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n] \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} P[A_i]$,

$n = 1, 2, ...$.

Λύση :

Με επαγωγή ως προς το n.

Για $n = 2$ έχουμε :

$$2 + P[A_1 \cap A_2] \geq 1 + P[A_1] + P[A_2] \Rightarrow$$
$$P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2] \leq 1 \Rightarrow P[A_1 \cup A_2] \leq 1$$

το οποίο ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $n = m$, δηλαδή :

$$m + P[A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m] \geq 1 + \sum_{i=1}^{m} P[A_i]$$

Τότε για $n = m + 1$ έχουμε :

$$m + 1 + P[\bigcap_{i=1}^{m+1} A_i] = m + 1 + P[(\bigcap_{i=1}^{m} A_i) \cap A_{m+1}] =$$
$$= (m-1) + 2 + P[(\bigcap_{i=1}^{m} A_i) \cap A_{m+1}] \geq (m-1) + 1 + P[\bigcap_{i=1}^{m} A_i] + P[A_{m+1}] \geq 1 + \sum_{i=1}^{m+1} P[A_i].$$

1.3 σελ.42)

Αν $P[A]=a$, $P[B]=b$, $P[A\cap B]=c$, να βρεθεί η $P[(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)]$.

Λύση :

$$P[(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)]=P[(A\cap B^c)]+P[(A^c\cap B)]-P[A\cap B^c\cap A^c\cap B]=$$
$$=P[A\setminus A\cap B]+P[B\setminus A\cap B]-0=P[A]-P[A\cap B]+P[B]-P[A\cap B]=a+b-2c.$$

1.4 σελ.42)

Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ισχύει $P[A^cB]-P[A^c]P[B]=P[AB^c]-P[A]P[B^c]$.

Λύση :

$$P[A^cB]-P[A^c]P[B]=P[B]-P[AB]-(1-P[A])P[B]=P[B]-P[AB]-P[B]+P[A]P[B]=$$
$$=P[A]P[B]-P[AB]=P[A](1-P[B^c])-(P[A]-P[AB^c])=P[A]-P[A]P[B^c]-P[A]+P[AB^c]=$$
$$=P[AB^c]-P[A]P[B^c].$$

1.7 σελ.42)

Σε μία αίθουσα βρίσκονται k άτομα. Ποια η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον δύο με την ίδια ημέρα γενεθλίων;

Λύση :

Έστω $E=\{$τουλάχιστον 2 εκ των k με την ίδια μέρα γενεθλίων$\}$, τότε $P[E]=1-P[E^c]$, όπου $E^c=\{k$ άτομα με διαφορετική ημέρα γενεθλίων$\}$.

$$P[E^c]=\frac{365}{365}\frac{364}{365}\cdots\frac{365-k+1}{365}=\frac{(365)_k}{365^k}$$, με $(n)_k=n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

1.9 σελ.42)

Έστω ότι έχουμε n δοχεία αριθμημένα από το 1 έως το n και n σφαίρες αριθμημένες επίσης από το 1 έως το n. Οι σφαίρες τοποθετούνται τυχαία στα δοχεία ανα μία. Εάν μία σφαίρα και το δοχείο της έχουν τον ίδιο αριθμό, λέμε ότι έχουμε μία συνάντηση.

α) Ποια η πιθανότητα το δοχείο k και η σφαίρα k να συναντηθούν;

β) Ποια η πιθανότητα l συγκεκριμένα δοχεία να συναντηθούν με τις αντίστοιχες σφαίρες;

γ) Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον l $(l = 0,1,...,n)$ συναντήσεων;

Λύση :

α) $A =$ ''Συνάντηση k σφαίρας με k δοχείο'', $P[A] = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

β) $B =$ ''Συνάντηση l συγκεκριμένων δοχείων με l σφαίρες '', $P[B] = \frac{(n-l)!}{n!}$.

γ) $\Gamma =$ ''Τουλάχιστον l συναντήσεις'', $P[\Gamma] = \frac{\binom{n}{l}(n-l)!}{n!} = \frac{1}{l!}$.

1.12 σελ.43)

Από ομάδα πέντε ανδρών και τεσσάρων γυναικών πρόκειται να σχηματιστεί επιτροπή με τρία μέλη. Να υπολογιστούν :

α) Ο αριθμός των διαφορετικών επιτροπών που μπορούν να σχηματιστούν.

β) Ο αριθμός των επιτροπών με ένα τουλάχιστον μέλος άνδρα και ένα τουλάχιστον μέλος γυναίκα.

Λύση :

α) Αριθμός διαφορετικών επιτροπών : $\binom{9}{3} = 84$.

β) Αριθμός επιτροπών με ένα τουλάχιστον μέλος άνδρα και ένα τουλάχιστον μέλος γυναίκα, δηλαδή επιτροπές της μορφής :

$$(2\text{Α},1\Gamma) \text{ ή } (1\text{Α},2\Gamma).$$

Άρα έχουμε $\binom{5}{2}\binom{4}{1}+\binom{5}{1}\binom{4}{2}=40+30=70$ διαφορετικές επιτροπές.

1.13 σελ.43)

Τα ποσοστά επιτυχίας σε δύο τεστ A και B φαίνονται παρακάτω. Για το τεστ A: 60%, για το B: 50% και για A και B: 35%. Να βρεθούν τα ποσοστά επιτυχίας :

α) Σε ένα τουλάχιστον από τα δύο.

β) Σε κανένα από τα δύο.

γ) Σε ένα ακριβώς από τα δύο.

Λύση :

α) $P[A\cup B]=P[A]+P[B]-P[A\cap B]=75\%$.

β) $P[A^c\cap B^c]=P[(A\cup B)^c]=1-P[A\cup B]=25\%$.

γ) $P[(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)]=P[A]+P[B]-2P[A\cap B]=40\%$ (δες άσκηση 1.3 σελ.42).

1.14 σελ.43)

Σε 100 κομμάτια ενός προϊόντος γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 8 ελαττωματικά. Εκλέγουμε τυχαία 5 από αυτά. Ποια η πιθανότητα να υπάρχουν :

α) 3 ακριβώς μη ελαττωματικά;

β) 3 τουλάχιστον μη ελαττωματικά;

Λύση :

Έστω $X=$ ‘‘Ο αριθμός των μη ελαττωματικών στο δείγμα’’.

α) $P[X=3]=\dfrac{\binom{92}{3}\binom{8}{2}}{\binom{100}{5}}=0.047$.

β)

$$P[X \geq 3] = P[X=3]+P[X=4]+P[X=5] = \frac{\binom{92}{3}\binom{8}{2}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{92}{4}\binom{8}{1}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{92}{5}\binom{8}{0}}{\binom{100}{5}} = 0.9968$$

1.15 σελ.44)

Αν A, B ξένα μεταξύ τους με $P[A]=\frac{1}{3}$, $P[B]=\frac{1}{2}$ να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P[A \mid A \cup B]$, $P[B \mid A \cup B]$.

Λύση :

$$P[A \mid A \cup B] = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P[A \cup B]} = \frac{P[A]}{P[A]+P[B]-P[A \cap B]} = \frac{P[A]}{P[A]+P[B]} = \frac{2}{5}.$$

$$P[B \mid A \cup B] = \frac{P[B \cap (A \cup B)]}{P[A \cup B]} = \frac{P[B]}{P[A]+P[B]-P[A \cap B]} = \frac{P[B]}{P[A]+P[B]} = \frac{3}{5}.$$

1.17 σελ.44)

Να δειχθεί ότι $P[B \mid A] \geq 1 - \frac{P[B^c]}{P[A]}$, όταν $P[A] > 0$.

Λύση :

$$P[B \mid A] = \frac{P[B \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A]-P[A \cap B^c]}{P[A]} \geq \frac{P[A]-P[B^c]}{P[A]} = 1 - \frac{P[B^c]}{P[A]}.$$

1.18 σελ.44)

Δείξτε ότι για κάθε ζεύγος ενδεχομένων A, B με $P[B^c] > 0$ ισχύει $P[A \mid B^c] = \frac{P[A]-P[AB]}{1-P[B]}$.

Λύση :

$$P[A \mid B^c] = \frac{P[AB^c]}{P[B^c]} = \frac{P[A \setminus AB]}{1-P[B]} = \frac{P[A]-P[AB]}{1-P[B]}.$$

1.20 σελ.44)

Μία μηχανή λειτουργεί εφόσον και τα τρία εξαρτήματά της A, B, C λειτουργούν κανονικά. Εάν η πιθανότητα να παρουσιαστεί βλάβη στο διάστημα ενός χρόνου στο εξάρτημα A είναι 0.05 στο B 0.1 και στο C 0.08 ποια η πιθανότητα η μηχανή να σταματήσει να λειτουργεί πριν το τέλος του χρόνου;

Λύση :

$$\begin{aligned}&P[A\cup B\cup C]+P[A^c\cap B^c\cap C^c]=1\Rightarrow P[A\cup B\cup C]=\\&=1-P[A^c\cap B^c\cap C^c]=1-(1-P[A])(1-P[B])(1-P[C])=\\&=1-0.95\cdot 0.9\cdot 0.92=1-0.7866=0.2134.\end{aligned}$$

1.21 σελ.44)

Τεχνική εταιρεία υποβάλλει προσφορές για τρία έργα A, B και Γ. Οι πιθανότητες να τις ανατεθούν τα έργα είναι αντίστοιχα $P[\mathrm{A}]=0.2$, $P[\mathrm{B}]=0.3$, $P[\Gamma]=0.25$ και τα ενδεχόμενα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα. Ποια η πιθανότητα να τς ανατεθεί ένα τουλάχιστον έργο;

Λύση :

$$P[\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma]=1-P[\mathrm{A}^c\mathrm{B}^c\Gamma^c]=1-P[\mathrm{A}^c]P[\mathrm{B}^c]P[\Gamma^c]=0.58.$$

1.23 σελ.45)

Τέσσερα μηχανήματα A, B, Γ και Δ λειτουργούν ανεξάρτητα. Τα επίπεδα λειτουργίας τους είναι αντίστοιχα 60%, 50%, 70% και 80%.

α) Ποια η πιθανότητα σε δοσμένη στιγμή όλες οι μηχανές να λειτουργούν;

β) Ποια η πιθανότητα να μη λειτουργεί καμία μηχανή;

Λύση :

α) $P[\text{ΑΒΓΔ}] = P[\text{Α}]P[\text{Β}]P[\text{Γ}]P[\text{Δ}] = 0.168$.

β) $P[\text{Α}^c\text{Β}^c\text{Γ}^c\text{Δ}^c] = (1-P[\text{Α}])(1-P[\text{Β}])(1-P[\text{Γ}])(1-P[\text{Δ}]) = 0.4\cdot 0.5\cdot 0.3\cdot 0.2 = 0.012$.

1.25 σελ.45)

Η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό ένα ανταλλακτικό είναι 0.10.

α) Ποια η πιθανότητα δύο ανταλλακτικά εκλεγμένα τυχαία να είναι ελαττωματικά;

β) Ποια η πιθανότητα μεταξύ 5 ανταλλακτικών το ένα τουλάχιστον να είναι καλό;

γ) Με πόσα ανταλλακτικά θα πρέπει να εφοδιαστεί κανείς ώστε με πιθανότητα μεγαλύτερη του 0.99 να βρει τουλάχιστον ένα καλό;

Λύση :

α) $P[E_1E_2] = P[E_1]P[E_2] = 0.01$.

β)

$P[\text{μεταξύ 5 ανταλλακτικών τουλάχιστον 1 καλό}] = 1 - P[\text{και τα 5 ελαττωματικά}] =$
$= 1 - 0.1^5 = 0.99999.$

γ)

$P[\text{1 τουλάχιστον καλό στα } n] = 1 - 0.1^n > 0.99 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0.1^n > 0.01 \Rightarrow n\ln 0.1 < \ln 0.01 \Rightarrow n > \frac{\ln 0.01}{\ln 0.1} = \frac{-4.6}{-2.3} = 2.$$

Άρα $n = 2$.

1.26 σελ.45)

Ηλεκτρικές συσκευές συσκευάζονται σε πακέτα των N. Η πιθανότητα να υπάρχουν k ελαττωματικές συσκευές μεταξύ των N είναι p_k ($k = 0,\ldots,N$). Εξάγονται από το κουτί n συσκευές και ελέγχονται αν είναι ελαττωματικές ή όχι. Δεδομένου ότι διαπιστώθηκε ότι υπάρχουν r ελαττωματικές συσκευές μεταξύ των N που ελέχθησαν, ποια η πιθανότητα ο πραγματικός αριθμός των ελαττωματικών συσκευών στο πακέτο να είναι : **(α)** ακριβώς r, **(β)** μεγαλύτερος του r.

Λύση :

$X =$ αριθμός ελαττωματικών συσκευών σε πακέτο των N.

$p_k = P(X = k)$, $k = 0,...,N$.

$Y =$ αριθμός ελαττωματικών συσκευών μεταξύ n ελεγχθέντων.

α)

$$P(X = r / Y = r) = \frac{P(\{X = r\} \cap \{Y = r\})}{P(Y = r)} = \frac{P(X = r)P(Y = r / X = r)}{\sum_{k=0}^{N} P(Y = r / X = k)P(X = k)} =$$

$$= \frac{p_r \binom{r}{r}\binom{N-r}{n-r} / \binom{N}{n}}{\sum_{k=r}^{N} p_k \binom{k}{r}\binom{N-k}{k-r} / \binom{N}{n}} = \frac{p_r \binom{N-r}{n-r}}{\sum_{k=r}^{N} p_k \binom{k}{r}\binom{N-k}{k-r}}.$$

β) $P(X > r / Y = r) = 1 - P(X = r / Y = r)$.

1.27 σελ.45)

Η προμήθεια δομικών υλικών για μία κατασκευή γίνεται από τρεις εταιρείες Α, Β και Γ. Η εταιρεία Α προμηθεύει το 40% των δομικών υλικών, η Β το 35% και η Γ το 25%. Σε ποσοστά 2%, 3% και 5% τα δομικά υλικά που προέρχονται από τις εταιρείες Α, Β και Γ αντίστοιχα, δεν είναι καλής ποιότητας. Ποια η πιθανότητα τυχόν δομικό υλικό να μην είναι καλής ποιότητας;

Λύση :

Α = ‘‘το ανταλλακτικό προέρχεται από την εταιρεία Α’’.

Β = ‘‘το ανταλλακτικό προέρχεται από την εταιρεία Β’’.

Γ = ‘‘το ανταλλακτικό προέρχεται από την εταιρεία Γ’’.

Ε = ‘‘το ανταλλακτικό δεν είναι καλής ποιότητας’’.

$$P[\mathrm{E}] = P[\mathrm{E} \mid \mathrm{A}]P[\mathrm{A}] + P[\mathrm{E} \mid \mathrm{B}]P[\mathrm{B}] + P[\mathrm{E} \mid \Gamma]P[\Gamma] =$$
$$= 0.02 \cdot 0.4 + 0.03 \cdot 0.35 + 0.05 \cdot 0.25 = 0.031.$$

1.28 σελ.46)

(συνέχεια της προηγούμενης). Ποια η πιθανότητα τυχόν δομικό υλικό να προέρχεται από την εταιρεία Α, δεδομένου ότι δεν είναι καλής ποιότητας;

Λύση :

$$P[\mathrm{A} \mid \mathrm{E}] = \frac{P[\mathrm{E} \mid \mathrm{A}]P[\mathrm{A}]}{P[\mathrm{E}]} = \frac{0.008}{0.031} = 0.26 .$$

1.32 σελ.47)

Σε κάλπη A υπάρχουν τρεις λευκές και τρεις μαύρες σφαίρες και σε κάλπη B υπάρχουν έξι λευκές και οκτώ μαύρες σφαίρες. Εξάγονται δύο σφαίρες από την A και τοποθετούνται στην B. Ακολούθως από την B εξάγεται μία σφαίρα. Ποια η πιθανότητα να είναι λευκή;

Λύση :

$A_1 =$ ''Δυό λευκές στην 1^{η} εκλογή''.

$A_2 =$ ''Μία λευκή και μία μαύρη στην 1^{η} εκλογή''.

$A_3 =$ ''Δυό μαύρες στην 1^{η} εκλογή'' .

$\Lambda =$ ''Λευκή στην 2^{η} εκλογή''.

$$P[\Lambda] = P[\Lambda \mid A_1]P[A_1] + P[\Lambda \mid A_2]P[A_2] + P[\Lambda \mid A_3]P[A_3] =$$

$$= \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{8}{16} + \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{7}{16} + \frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{6}{16} = 0.4375.$$

1.33 σελ.47)

Ένα σύστημα αποτελείται από έξι εξαρτήματα συνδεδεμένα όπως στο παρακάτω σχήμα. Στο σχήμα επίσης δίνονται οι πιθανότητες λειτουργίας των εξαρτημάτων για ένα τουλάχιστον έτος. Ποιά η πιθανότητα το σύστημα να λειτουργήσει ένα χρόνο;

Λύση :

Έχουμε, $\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix} \quad E_4 \quad \begin{matrix} E_5 \\ E_6 \end{matrix}$, με $P[E_1]=0.85$, $P[E_2]=0.85$, $P[E_3]=0.85$, $P[E_4]=0.95$, $P[E_5]=P[E_6]=0.9$.

$$P[E]=P[(E_1\cup E_2\cup E_3)\cap E_4\cap(E_5\cup E_6)]=P[(E_1\cup E_2\cup E_3)]\cdot P[E_4]\cdot P[(E_5\cup E_6)]=$$
$$=(1-P[E_1^c\cap E_2^c\cap E_3^c])\cdot P[E_4]\cdot(1-P[E_5^c\cap E_6^c])=(1-0.15^3)\cdot 0.95\cdot(1-0.1^2)=0.9373.$$

1.34 σελ.47)

Η πιθανότητα ύπαρξης ενός μετάλλου A σε ένα μετάλλευμα είναι 0.4, ενώ ενός άλλου μετάλλου B είναι 0.55. Γενικά είναι γνωστό ότι $P[B\mid A]=0.80$.

α) Να βρεθεί η πιθανότητα ύπαρξης ενός τουλάχιστον από τα A και B.

β) Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε κανένα από τα A,B να μην υπάρχει στο μετάλλευμα.

Λύση :

α) $P[A\cup B]=P[A]+P[B]-P[A\cap B]=P[A]+P[B]-P[A]P[B\mid A]=0.63$.

β) $P[A^c\cap B^c]=P[(A\cup B)^c]=1-P[A\cup B]=0.37$.

1.35 σελ.47)

Ένα ανταλλακτικό από μία μηχανή τοποθετείται εξ ανάγκης σε άλλη μηχανή με πιθανότητα λειτουργίας $\dfrac{4}{5}$ αν η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση A και πιθανότητα λειτουργίας $\frac{2}{5}$ αν η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση B. Αν $P[A]=\frac{3}{4}$, $P[B]=\frac{1}{4}$.

α) Να βρεθεί η πιθανότητα λειτουργίας της μηχανής.

β) Αν διαθέτουμε τέσσερα τέτοια ανταλλακτικά ποια η πιθανότητα ώστε ένα τουλάχιστον από αυτά να καταστήσει δυνατή την λειτουργία της μηχανής;

Λύση :

Έστω Λ το ενδεχόμενο λειτουργίας της μηχανής

A το ενδεχόμενο η μηχανή να βρίσκεται στην κατάσταση A.

B το ενδεχόμενο η μηχανή να βρίσκεται στην κατάσταση B.

Από την εκφώνηση $P[\Lambda \mid A]=\frac{4}{5}$, $P[\Lambda \mid B]=\frac{2}{5}$, $P[A]=\frac{3}{4}$, $P[B]=\frac{1}{4}$.

α) $P[\Lambda]=P[\Lambda \mid A]P[A]+P[\Lambda \mid B]P[B]=0.7$.

β) Έστω Y ο αριθμός ανταλλακτικών στα 4 που καθιστούν δυνατή τη λειτουργία της μηχανής. Y είναι τ.μ. με τιμές 0, 1, 2, 3, 4 και κατανομή $b(n=4, p=0.7)$. Ζητείται η πιθανότητα :

$$P[Y \geq 1]=1-P[Y<1]=1-P[Y=0]=1-\binom{4}{0} p^{0}(1-p)^{4-0}.$$

1.36 σελ.48)

Μία κάλπη περιέχει 4 λευκές και 5 μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε μία σφαίρα και αν είναι λευκή την ξαναβάζουμε με άλλες τρεις λευκές ενώ αν είναι μαύρη την ξαναβάζουμε με άλλες δύο μαύρες.

α) Ποια η πιθανότητα ώστε να είναι λευκή με την δεύτερη λήψη;

β) Ποια η πιθανότητα να είναι λευκή με την τρίτη λήψη;

γ) Αν η τρίτη λήψη βγάλει λευκή σφαίρα ποια η πιθανότητα ώστε η πρώτη να ήταν λευκή;

Λύση :

Έστω τα ενδεχόμενα

Λ_i : ‘‘Λευκή σφαίρα στην i λήψη’’, $P[\Lambda_1]=\frac{4}{9}$.

M_i : ‘‘Μαύρη σφαίρα στην i λήψη’’, $P[\mathrm{M}_1]=\frac{5}{9}$.

α)

$$P[\Lambda_2]=P[\Lambda_2\mid\Lambda_1]\cdot P[\Lambda_1]+P[\Lambda_2\mid \mathrm{M}_1]\cdot P[\mathrm{M}_1]=$$
$$=\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{11}\cdot\frac{5}{9}=0.462.$$

β) $P[\Lambda_3]=P[\Lambda_3|\Lambda_1\cap\Lambda_2]\cdot P[\Lambda_1\cap\Lambda_2]+P[\Lambda_3|\Lambda_1\cap \mathrm{M}_2]\cdot P[\Lambda_1\cap \mathrm{M}_2]+$
$+P[\Lambda_3|\mathrm{M}_1\cap\Lambda_2]\cdot P[\mathrm{M}_1\cap\Lambda_2]+P[\Lambda_3|\mathrm{M}_1\cap \mathrm{M}_2]\cdot P[\mathrm{M}_1\cap \mathrm{M}_2].$

$$P[\Lambda_1\cap\Lambda_2]=P[\Lambda_2\mid\Lambda_1]P[\Lambda_1]=\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{9}=\frac{28}{108}.$$

$$P[\Lambda_1\cap \mathrm{M}_2]=P[\mathrm{M}_2\mid\Lambda_1]P[\Lambda_1]=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{9}=\frac{20}{108}.$$

$$P[\mathrm{M}_1\cap\Lambda_2]=P[\Lambda_2\mid \mathrm{M}_1]P[\mathrm{M}_1]=\frac{4}{11}\cdot\frac{5}{9}=\frac{20}{99}.$$

$$P[\mathrm{M}_1\cap \mathrm{M}_2]=P[\mathrm{M}_2\mid \mathrm{M}_1]P[\mathrm{M}_1]=\frac{7}{11}\cdot\frac{5}{9}=\frac{35}{99}.$$

Επίσης,

$$P[\Lambda_3\mid\Lambda_1\cap\Lambda_2]=\frac{10}{15},\ P[\Lambda_3\mid\Lambda_1\cap \mathrm{M}_2]=\frac{7}{14},\ P[\Lambda_3\mid \mathrm{M}_1\cap\Lambda_2]=\frac{7}{14},$$

$$P[\Lambda_3\mid \mathrm{M}_1\cap\Lambda_2]=\frac{7}{14},P[\Lambda_3\mid \mathrm{M}_1\cap \mathrm{M}_2]=\frac{9}{13}.$$

Άρα $P[\Lambda_3]=0.473$.

γ)

$$P[\Lambda_1|\Lambda_3]=\frac{P[\Lambda_1\cap\Lambda_3]}{P[\Lambda_3]}=\frac{P[\Lambda_1\cap\Lambda_2\cap\Lambda_3]+P[\Lambda_1\cap \mathrm{M}_2\cap\Lambda_3]}{P[\Lambda_3]}=$$
$$=\frac{P[(\Lambda_1\cap\Lambda_2)\cap\Lambda_3]+P[(\Lambda_1\cap \mathrm{M}_2)\cap\Lambda_3]}{P[\Lambda_3]}=$$
$$=\frac{P[\Lambda_3|(\Lambda_1\cap\Lambda_2)]\cdot P[(\Lambda_1\cap\Lambda_2)]+P[\Lambda_3|(\Lambda_1\cap \mathrm{M}_2)]\cdot P[(\Lambda_1\cap \mathrm{M}_2)]}{P[\Lambda_3]}=$$
$$=\frac{0.66\cdot0.26+0.5\cdot0.18}{0.473}=\frac{0.1716+0.09}{0.473}=0.553.$$

2.1 σελ.85)

Έστω $F(x)=\dfrac{1}{1+e^{-(\alpha x+\beta)}}$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η F είναι συνάρτηση κατανομής απολύτως συνεχής. Βρείτε την σ.π.π. f και δείξτε ότι $f=\alpha F\cdot(1-F)$.

Λύση :

$$x_1<x_2\Rightarrow-\alpha x_1>-\alpha x_2\Rightarrow-\alpha x_1-\beta>-\alpha x_2-\beta\Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{(-\alpha x_1-\beta)}>e^{(-\alpha x_2-\beta)}\Rightarrow\frac{1}{1+e^{(-\alpha x_1-\beta)}}<\frac{1}{1+e^{(-\alpha x_2-\beta)}}\Rightarrow F(x_1)<F(x_2).$$

Άρα F μη φθίνουσα.

● $F(-\infty)=0$ και $F(+\infty)=1$.

● Από τα παραπάνω έπεται ότι $0\le F(x)\le 1$.

● Η F είναι δεξιά συνεχής.

Συνεπώς η F είναι συνάρτηση κατανομής απολύτως συνεχής.

Επίσης, $\dfrac{dF(x)}{dx}=\dfrac{\alpha e^{-\alpha x-\beta}}{(1+e^{-\alpha x-\beta})^2}=\alpha\cdot F(x)\cdot(1-F(x))$.

2.2 σελ.85)

Κάλπη A περιέχει 5 λευκές και 4 μαύρες σφαίρες ενώ κάλπη B περιέχει 3 λευκές και 6 μαύρες. Παίρνουμε μία σφαίρα από την A και χωρίς να δούμε το χρώμα της την τοποθετούμε στην B. Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μία σφαίρα από την B και την τοποθετούμε στην A. Έστω X ο αριθμός των λευκών σφαιρών στην A κάλπη μετά την παραπάνω διαδικασία. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τ.μ. X.

Λύση :

Αν X ο αριθμός λευκών σφαιρών στην A τότε $X=4,5,6$.

Η σ.μ.π. είναι οι πιθανότητες $P[X=4]$, $P[X=5]$, $P[X=6]$.

Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα

$\Lambda_A\Lambda_B$: το ενδεχόμενο λευκή από την A στη B και λευκή από τη B στην A.

$\Lambda_A\mathrm{M}_B$: το ενδεχόμενο λευκή από την A στη B και μαύρη από τη B στην A.

$\mathrm{M}_A\Lambda_B$: το ενδεχόμενο μαύρη από την A στη B και λευκή από τη B στην A.

$\mathrm{M}_A\mathrm{M}_B$: το ενδεχόμενο μαύρη από την A στη B και μαύρη από τη B στην A.

Τότε :

$$P[\Lambda_A\Lambda_B] = P[\Lambda_B \mid \Lambda_A]P[\Lambda_A] = \frac{4}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{20}{90}.$$

$$P[\Lambda_A\mathrm{M}_B] = P[\mathrm{M}_B \mid \Lambda_A]P[\Lambda_A] = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{30}{90}.$$

$$P[\mathrm{M}_A\Lambda_B] = P[\Lambda_B \mid \mathrm{M}_A]P[\mathrm{M}_A] = \frac{3}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{12}{90}.$$

$$P[\mathrm{M}_A\mathrm{M}_B] = P[\mathrm{M}_B \mid \mathrm{M}_A]P[\mathrm{M}_A] = \frac{7}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{28}{90}.$$

Τελικά έχουμε,

$$P[X=4] = P[\Lambda_A\mathrm{M}_B] = \frac{30}{90}.$$

$$P[X=5] = P[\Lambda_A\Lambda_B \cup \mathrm{M}_A\mathrm{M}_B] = P[\Lambda_A\Lambda_B] + P[\mathrm{M}_A\mathrm{M}_B] = \frac{48}{90}.$$

$$P[X=6] = P[\mathrm{M}_A\Lambda_B] = \frac{12}{90}.$$

2.3 σελ.85)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$, $x \in \mathbb{N}$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{N}^c$. Δείξτε ότι η f αποτελεί σ.μ.π. Προσδιορίστε την συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. (Κατανομή Zipf).

Λύση :

Αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει τις ιδιότητες που αναφέρονται στην σελίδα 57.

$$P[X=k] \equiv p_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},\ k \in \mathbb{N}.$$

- $p_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$.

Άρα η f είναι σ.μ.π. Όσον αφορά στην συνάρτηση κατανομής έχουμε :

$$F_X(k) = P[X \leq k] = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{k+1} & , \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad k \in \mathbb{N}^c \end{cases}.$$

2.4 σελ.85)

Η τ.μ. X έχει ως σύνολο τιμών της το $\mathbb{N}$. Εάν $P[X \geq k+2 \mid X \geq k+1] = \dfrac{k+1}{k+2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να προσδιορίσετε την κατανομή της X.

Λύση :

$$P[X \geq k+2 \mid X \geq k+1] = \frac{k+1}{k+2},\ k = 0,1,2,... \Rightarrow$$

$$P[X \geq k+1 \mid X \geq k] = \frac{k}{k+1},\ k = 1,2,...$$

Αλλά, $P[X \geq k+1 \mid X \geq k] = \dfrac{P[(X \geq k+1) \cap (X \geq k)]}{P[X \geq k]} = \dfrac{P[X \geq k+1]}{P[X \geq k]} = \dfrac{Q_{k+1}}{Q_k}$, όπου $Q_k = P[X \geq k]$, με $Q_1 = 1$.

Οπότε
$$\frac{Q_{k+1}}{Q_k} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow Q_{k+1} = \frac{k}{k+1} \cdot Q_k = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot Q_{k-1} = ... =$$
$$= \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-2}{k-1} ... \frac{1}{2} \cdot Q_1 = \frac{1}{k+1}.$$

Άρα,
$$Q_{k+1} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow P[X \geq k+1] = \frac{1}{k+1} \Rightarrow P[X < k+1] = 1 - \frac{1}{k+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P[X \leq k] = 1 - \frac{1}{k},\ k = 1,2,...$$

2.5 σελ.85)

Δείξτε ότι η $F(x) = 1 - \exp\{-\alpha x^{\beta}\}$, $\alpha, \beta, x > 0$, αποτελεί συνάρτηση κατανομής (Κατανομή Weibull).

Λύση :

● Μη φθίνουσα

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow -\alpha x_1^{\beta} > -\alpha x_2^{\beta} \Rightarrow \exp\{-\alpha x_1^{\beta}\} > \exp\{-\alpha x_2^{\beta}\} \Rightarrow F(x_1) > F(x_2).$$

● Δεξιά συνεχής : Είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

$$\frac{dF}{dx} = \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x\beta} > 0, \ \forall x > 0.$$

● $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim 0 = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 - \lim_{x\to+\infty} \exp(-\alpha e^{\beta}) = 1 - 0 = 1$.

2.7 σελ.86)

Έστω ότι ένα σύστημα τίθεται σε λειτουργία κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η διάρκεια ζωής T του συστήματος είναι τ.μ. με συνάρτηση κατανομής την $F(t)$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$. Έστω η στοιχειώδης πιθανότητα $P[t < T \le t + dt \mid T > t] = \beta(t)dt$. Δείξτε ότι :

α) Αν $\beta(t) = \alpha t$, $\alpha > 0$ τότε η $f(t) = \alpha t \exp\{-\frac{1}{2}\alpha t^2\}$, $t > 0$ (Κατανομή Rayleigh).

β) Αν $\beta(t) = \alpha$, $\alpha > 0$ τότε η $f(t) = \alpha \exp\{-\frac{1}{2}\alpha t\}$, $t > 0$ (Εκθετική κατανομή).

γ) Αν για δύο συστήματα έχουμε $\beta_2(t) = k \cdot \beta_1(t)$, $k > 0$ τότε $P[T_2 > t] = \{P[T_1 > t]\}^k$.

Λύση :

$$P[t < T \le t + dt \mid T > t] = \beta(t)dt \Rightarrow \beta(t) = \lim_{dt\to0} \frac{P[t < T \le t + dt \mid T > t]}{dt} =$$
$$= \lim_{dt\to0} \frac{P[\{t < T \le t + dt\} \cap \{T > t\}]}{P[T > t]dt} = \frac{1}{P[T > t]} \cdot \lim_{dt\to0} \frac{P[t < T < t + dt]}{dt} =$$
$$= \frac{1}{P[T > t]} \cdot \lim_{dt\to0} \frac{F[t + dt] - F[t]}{dt} = \frac{f(t)}{P[T > t]} \Rightarrow \beta(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Έστω $R(t) = 1 - F(t) \Rightarrow -\frac{dR(t)}{dt} = f(t)$, οπότε

$$\beta(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = -\frac{d}{dt}\log(R(t)) \Rightarrow \int_0^t \beta(l)dl = -\log R(t) + \log R(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(t) = \exp\{-\int_0^t \beta(l)dl\}.$$

α) $f(t) = \beta(t)\cdot R(t) = \beta(t)\cdot \exp\{-\int_0^t \beta(l)dl\} = \alpha \cdot e^{\alpha t}$.

β) $f(t) = \beta(t)\cdot R(t) = \beta(t)\cdot \exp\{-\int_0^t \beta(l)dl\} = \alpha t \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha t^2}$.

γ) $\beta_2(t) = k\cdot \beta_1(t) \Rightarrow R_2(t) = \exp\{-\int_0^t \beta_2(l)dl\} = \exp\{-k\int_0^t \beta_1(l)dl\} = \{R_1(t)\}^k$.

2.8 σελ.86)

Ένα ανταλλακτικό είναι δυνατόν να προέρχεται από την παραγωγή της βιομηχανίας A ή της B με την ίδια πιθανότητα. Αν προέρχεται από την παραγωγή της A τότε η πιθανότητα λειτουργίας για το πολύ χρόνο t είναι $1-\exp\{-\alpha t\}$, αν όμως προέρχεται από την παραγωγή της B η αντίστοιχη πιθανότητα είναι $1-\exp\{-\beta t\}$. Προσδιορίστε

α) Την κατανομή του χρόνου ζωής του ανταλλακτικού.

β) Ποια η πιθανότητα να προέρχεται από την βιομηχανία B δεδομένου ότι η διάρκεια ζωής ήταν μεγαλύτερη του t_1 και μικρότερη του t_2 ($t_1 < t_2$).

Λύση :

$P[A] = P[B] = \frac{1}{2}$, όπου A: ''το ανταλλακτικό προέρχεται από το εργοστάσιο A'' και B το αντίστοιχο ενδεχόμενο για το εργοστάσιο B.

Αν Τ ο χρόνος ζωής του ανταλλακτικού τότε από εκφώνηση

$P[T \le t \mid A] = 1 - e^{-\alpha t}$, $\quad P[T \le t \mid B] = 1 - e^{-\beta t}$ για $t > 0$ και μηδέν αλλού.

Η σ.κ. του χρόνου ζωής του ανταλλακτικού είναι:

α)

$$F_T(t) = P[T \le t] = P[T \le t \mid A]\cdot P[A] + P[T \le t \mid B]\cdot P[B] = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}) & , \quad t > 0 \\ 0 \quad , \quad t \le 0 \end{cases}.$$

β)

$$P[B \mid t_1 \le T \le t_2] = \frac{P[B \cap t_1 \le T \le t_2]}{P[t_1 \le T \le t_2]} = \frac{P[t_1 \le T \le t_2 \mid B] \cdot P[B]}{P[t_1 \le T \le t_2]} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot (e^{-\beta t_1} + e^{-\beta t_2})}{\frac{1}{2} \cdot (e^{-\alpha t_1} + e^{-\beta t_1} - e^{-a t_2} - e^{-\beta t_2})} = \frac{1}{1 + \dfrac{e^{-\alpha t_1} - e^{-a t_2}}{e^{-\beta t_1} - e^{-\beta t_2}}}.$$

2.9 σελ.86)

Να προσδιοριστούν οι σταθερές κανονικοποίησης c των σ.π.π.

α) $f(x) = c \cdot \sqrt{x}$, $x \in (0,1)$.

β) $f(x) = c \cdot x \cdot (1-x)$, $x \in (0,1)$.

Λύση :

α) Πρέπει

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \Rightarrow c^{-1} = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 = \frac{1}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{3}{2}.$$

β) Ομοίως,

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{c} \Rightarrow \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = 6.$$

2.10 σελ. 86)

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P[\frac{1}{4} < X \le \frac{3}{4}]$ όταν η σ.π.π. της τ.μ. X είναι $f(x) = c \cdot x \cdot (1-x)$, $x \in (0,1)$.

Λύση :

$$P[\frac{1}{4} < X \le \frac{3}{4}] = \int_{1/4}^{3/4} 6x(1-x)dx = 6 \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right\} \Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{9}{32}.$$

2.12 σελ.87)

Αν ένα ανταλλακτικό παράγεται από την μονάδα παραγωγής A τότε η διάρκεια ζωής του ξεπερνά τις 200 ώρες, ενώ αν προέρχεται από την μονάδα παραγωγής B η διάρκεια ζωής του είναι τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x)=\frac{1}{300}e^{-\frac{1}{300}x},\ x>0 .$$

Στο σύνολο των χρησιμοποιούμενων εξαρτημάτων παρατηρήθηκε ότι το ποσοστό που υπερβαίνει τις 200 ώρες είναι 90%. Να ευρεθεί το ποσοστό των εξαρτημάτων που προέρχεται από τη μονάδα A.

Λύση :

Έστω T η διάρκεια ζωής του ανταλλακτικού

Τότε $P[T>200\,|\,A]=1$ ενώ

$$P[T>200\,|\,B]=P[X>200]=\int_{200}^{+\infty}f(x)dx=(-e^{-\frac{1}{300}x})\Big|_{200}^{+\infty}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

Τώρα $P[T>200]=P[T>200\,|\,A]\cdot P[A]+P[T>200\,|\,B]\cdot P[B]$.

Όμως $P[T>200]=0.9$, $P[B]=1-P[A]$ και συνεπώς

$$0.9=1\cdot P[A]+e^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-P[A])\Rightarrow 0.9=P[A]-e^{-\frac{2}{3}}\cdot P[A]+e^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow P[A]=\frac{0.9-e^{-\frac{2}{3}}}{1-e^{-\frac{2}{3}}}.$$

2.14 σελ.87)

Οι τ.μ. X,Y έχουν από κοινού σ.π.π. $f(x,y)=\frac{1}{y}$, $0<x<y$, $0<y<1$.

α) Να προσδιοριστεί η περιθώρια σ.π.π. της τ.μ. X.

β) Να προσδιοριστεί η δεσμευμένη σ.π.π. της τ.μ. Y για δοσμένη τιμή της τ.μ. X.

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P[X+Y>\frac{1}{2}]$.

Λύση :

α) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_x^1 \frac{1}{y} dy = \ln|y|\Big|_x^1 = -\ln x$, $0 < x < 1$.

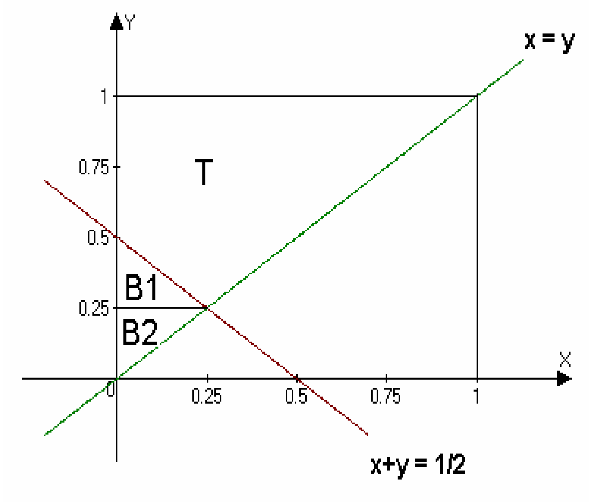
β) $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = -\frac{1}{y \cdot \ln x}$, $0 < x < 1$ και $x < y < 1$.

γ) $P[X+Y > \frac{1}{2}] = 1 - P[X+Y \le \frac{1}{2}]$, αλλά

$$P[X+Y \le \frac{1}{2}] = \iint_{B_2} \frac{1}{y} dxdy + \iint_{B_1} \frac{1}{y} dxdy = \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^y \frac{1}{y} dxdy + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}-y} \frac{1}{y} dxdy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \{ \frac{x}{y} \Big|_{x=0}^{y} \} dy + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \{ \frac{x}{y} \Big|_{x=0}^{\frac{1}{2}-y} \} dy = \int_0^{\frac{1}{4}} 1 dy + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1-2y}{2y} dy = y\Big|_0^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y} dy - y\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln y \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 = 0.3466.$$



2.15 σελ.87)

Οι τ.μ. X, Y είναι διακριτές με από κοινού σ.μ.π. που δίνεται από τον πίνακα σελ. 87. Να προσδιοριστούν οι περιθώριες και οι δεσμευμένες σ.μ.π.

Λύση :

Αθροίζοντας τις γραμμές έχουμε,

$$P[X=k]=\begin{cases}\frac{5}{12} & , \quad k=-1\\ \frac{2}{12} & , \quad k=0\\ \frac{5}{12} & , \quad k=1\end{cases}.$$

ενώ αθροίζοντας τις στήλες παίρνουμε

$$P[Y=l]=\begin{cases}\frac{1}{3} & , \quad l=-1\\ \frac{1}{3} & , \quad l=0\\ \frac{1}{3} & , \quad l=1\end{cases}.$$

$$P[X=k\,|\,Y=-1]=\frac{P[X=k\cap Y=-1]}{P[Y=-1]}=\begin{cases}\frac{0}{1/3} & , \quad k=-1\\ \frac{1/12}{1/3} & , \quad k=0\\ \frac{3/12}{1/3} & , \quad k=1\end{cases}=\begin{cases}0 & , \quad k=-1\\ \frac{1}{4} & , \quad k=0\\ \frac{3}{4} & , \quad k=1\end{cases}.$$

ομοίως τα υπόλοιπα.

2.16 σελ.87)

Η από κοινού κατανομή των τ.μ. X,Y είναι $f(x,y)=c(x^2+y^2)$, ($0<x<1,\ 0<y<1$). Να προσδιοριστούν :

α) Η σταθερά κανονικοποίησης c.

β) Η πιθανότητα $P[0<X\le\frac{1}{2}\ ,\ 0<Y\le\frac{1}{2}]$.

γ) Η πιθανότητα $P[X+Y>1]$.

δ) Η πιθανότητα $P[0<X\le\frac{1}{2}]$.

Λύση :

α)

$$\int_0^1\int_0^1 c(x^2+y^2)dxdy = 1 \Rightarrow c[\int_0^1 (\frac{x^3}{3}+y^2x)\Big|_0^1 dy] = 1 \Rightarrow$$

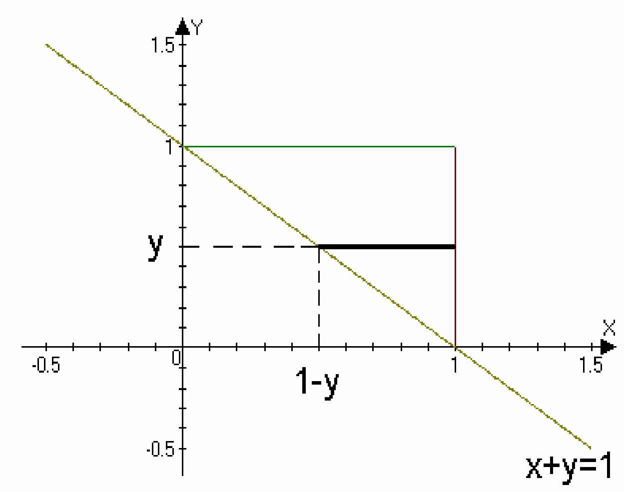
$$\Rightarrow c\int_0^1(\frac{1}{3}+y^2)dy = c(\frac{y}{3}+\frac{y^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{2c}{3}=1\Rightarrow c=\frac{3}{2}.$$

β)

$$P[0<X\le\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<Y\le 1] = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2)dydx = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(x^2y+\frac{y^3}{3})\Big|_{\frac{1}{2}}^1 dx =$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{x^2}{2}+\frac{7}{24})dx = \frac{3}{2}(\frac{x^3}{6}+\frac{7x}{24})\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}.$$

γ)



Συνεπώς έχουμε, $P[X+Y>1]=\int_0^1\int_{1-y}^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2)dxdy=\frac{3}{4}$.

δ)

$$P[0<X\le\frac{1}{2}] = P[0<X\le\frac{1}{2}, -\infty<Y<+\infty] = \int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}(x^2+y^2)dxdy =$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1(\frac{1}{24}+\frac{y^2}{2})dy = \frac{3}{4}\int_0^1(\frac{1}{12}+y^2)dy = \frac{3}{4}(\frac{1}{12}+\frac{1}{3}) = \frac{5}{16}.$$

2.17 σελ.88)

Το ζεύγος των τ.μ. (X,Y) ακολουθεί διμεταβλητή εκθετική κατανομή $f(x,y)=\alpha\beta e^{-\alpha x-\beta y}$, $x>0,\ y>0$, με $\alpha,\beta>0$. Να προσδιοριστούν :

α) Η πιθανότητα $P[X>1\,|\,Y=2]$.

β) Η δεσμευμένη σ.π.π. της τ.μ. X για δοσμένη τιμή της τ.μ. Y.

Λύση :

α) $P[X>1\,|\,Y=2]=\int_1^{+\infty} f_{X|Y}(x\,|\,y)dx$, για $y=2$.

Έχουμε ,

$f_Y(y)=\int_0^{+\infty} f(x,y)dx=\beta e^{-\beta y}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=\beta e^{-\beta y}\,(-e^{-\alpha x})\Big|_0^{\infty}=\beta e^{-\beta y}(0+1)=\beta e^{-\beta y}$.

Άρα $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\alpha e^{-\alpha x}$.

Οπότε $P[X>1\,|\,Y=2]=\int_1^{+\infty} f_{X|Y}(x\,|\,y)dx=(-e^{-\alpha x})\Big|_1^{\infty}=e^{-\alpha}$.

β) $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\alpha e^{-\alpha x}$, από ερώτημα (α).

2.18 σελ. 88)

Η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X,Y είναι $f(x,y)=c$, $0<x<y<1$.

α) Είναι οι τ.μ. X,Y ανεξάρτητες;

β) Να προσδιοριστεί η πιθανότητα $P[X>\frac{1}{4}\,|\,Y=\frac{1}{2}]$.

Λύση :

α) Οι τ.μ. X,Y δεν είναι ανεξάρτητες αφού $X<Y$ με μη μηδενική πιθανότητα.

β) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} cdx=\int_0^{y} cdx=cy$, $y\in(0,1)$.

Όμως, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} cdx=\int_0^1 f_Y(y)dy=\dfrac{c}{2}y^2\Big|_0^1=1\Rightarrow c=2$. Άρα $f_Y(y)=2y$, $y\in(0,1)$.

Τότε $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{1}{y}$, $0<x<y$,$\forall y\in(0,1)$. Οπότε,

$P[X>\frac{1}{4}\,|\,Y=y]=\int_{\frac{1}{4}}^{y} f_Y(y)dx=\int_{\frac{1}{4}}^{y}\frac{1}{y}dx=\frac{1}{y}(y-\frac{1}{4})=1-\frac{1}{4y}$.

2.19 σελ.88)

Η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X,Y είναι $f(x,y)=cx(1+3y^2)$, $0<x<2,\ 0<y<1$.
Να προσδιοριστούν :

α) Οι περιθώριες f_X, f_Y.

β) Οι δεσμευμένες $f_{X|Y}$, $f_{Y|X}$.

Λύση :

α) Πρώτα θα υπολογιστεί η σταθερά c.

$$c\int_0^2\int_0^1 x(1+3y^2)dydx=1\Rightarrow c\int_0^2 xdx\int_0^1(1+3y^2)dy=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2\cdot\left.(y+y^3)\right|_0^1=1\Rightarrow c=\frac{1}{4}.$$

Άρα, $f_X(x)=\int_0^1 f(x,y)dy=cx\int_0^1(1+3y^2)dy=2cx=\dfrac{x}{2}$ και

$$f_Y(y)=\int_0^2 f(x,y)dx=c(1+3y^2)\int_0^2 xdx=\frac{1}{2}(1+3y^2).$$

β) $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{cx(1+3y^2)}{2c(1+3y^2)}=\dfrac{x}{2}=f_X(x)$ και

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{cx(1+3y^2)}{2cx}=\frac{(1+3y^2)}{2}=f_Y(y).$$

2.21 σελ. 88)

Έστω X,Y τ.μ. με από κοινού σ.π.π. $f(x,y)=\exp\{-x-\rho xy-y\}$, όταν $x>0,\ y>0$, όπου $\rho\geq 0$. Δείξτε ότι οι τ.μ. X,Y είναι ανεξάρτητες όταν και μόνον όταν $\rho=0$.

Λύση :

Θα βρούμε πρώτα τις περιθώριες κατανομές f_X, f_Y. Για $x>0$ έχουμε

$$f_X(x)=\int_0^{+\infty} e^{-x-\rho xy-y}dy=e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-y(\rho x+1)}dy=e^{-x}\left(-\frac{1}{\rho x+1}e^{-y(\rho x+1)}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{e^{-x}}{1+\rho x}.$$

Ομοίως έχουμε ότι $f_Y(y)=\dfrac{e^{-y}}{1+\rho y}$, για $y>0$.

Δηλαδή,

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{1+\rho x} & ,\quad x>0\\ 0\ , & x\le 0\end{cases}\ ,\ f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-y}}{1+\rho y} & ,\quad y>0\\ 0\ , & y\le 0\end{cases}.$$

Έστω ότι $\rho=0$ τότε $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, $\forall x,y>0$ άρα οι τ.μ. X,Y είναι ανεξάρτητες.

Αντίστροφα αν οι τ.μ. X,Y είναι ανεξάρτητες τότε ισχύει $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, $\forall x,y$.

Συνεπώς θα έχουμε

$$e^{-x-\rho xy-y}=\frac{e^{-x}}{1+\rho x}\cdot\frac{e^{-y}}{1+\rho y}\Rightarrow e^{-\rho xy}=\frac{1}{(1+\rho x)(1+\rho y)},\ \forall x,y>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} e^{-\rho xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{1}{(1+\rho x)(1+\rho y)}\Rightarrow e^0=\frac{1}{1+\rho}\Rightarrow \rho=0.$$

2.22 σελ. 88)

Στις ασκήσεις 2.16 και 2.19 εξετάστε αν οι τ.μ. X,Y είναι ανεξάρτητες.

Λύση :

Στην 2.16 είναι εξαρτημένες, ενώ στην 2.19 είναι ανεξάρτητες.

2.23 σελ.88)

Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή Poisson παραμέτρων λ_1,λ_2 αντίστοιχα. Δείξτε ότι η δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. X_1 δοθείσης της τιμής $X_1+X_2=n$ είναι η διωνυμική $P[X_1=k\,|\,X_1+X_2=n]=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, $k=0,1,...,n$, με $p=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, $q=1-p$.

Λύση :

$X_i \sim P(\lambda_i),\ i=1,2 \Rightarrow Y = X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

$$P[X_1 = k \mid Y = n] = \frac{P[X_1 = k, Y = n]}{P[Y = n]} = \frac{P[X_1 = k, X_2 = n-k]}{P[Y = n]} = \frac{P[X_1 = k]\cdot P[X_2 = n-k]}{P[Y = n]} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} \sim b(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}).$$

2.25 σελ.89)

Έστω X,Y τ.μ. με από κοινού σ.π.π. $f(x,y)=\begin{cases} c(x+y) & ,\quad 0\le x\le y\le 1 \\ 0 & ,\quad \text{διαφορετικά}\end{cases}$. Να προσδιοριστεί η σταθερά c και η περιθώρια κατανομή της τ.μ. X . Είναι οι τ.μ. X,Y ανεξάρτητες;

Λύση :

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^y c(x+y)dxdy = c\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_0^y dy =$$

$$= c\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right)dy = \frac{3c}{2}\int_0^1 y^2dy = \frac{3cy^3}{2\cdot 3}\Bigg|_0^1 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2.$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_x^1 c(x+y)dy = c\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x}^1 =$$

$$= c(x+\frac{1}{2}) - c(x^2+\frac{x^2}{2}) = c\frac{1+2x-3x^2}{2} = 1+2x-3x^2.$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^y c(x+y)dy = c\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_{x=0}^y =$$

$$= c\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right) = \frac{3cy^2}{2} = 3y^2.$$

Είναι προφανές ότι $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$, άρα οι τ.μ. X,Y δεν είναι ανεξάρτητες.

2.25 σελ.89)

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με συνάρτηση κατανομής F. Προσδιορίστε :

α) Την κατανομή της τ.μ. $Y = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

β) Την κατανομή της τ.μ. $Z = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

γ) Την από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών Y, Z.

δ) Την δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. Z όταν $Y = y$.

Λύση :

α)

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = 1 - P[Y > y] = 1 - P[\min\{X_1, X_2, ..., X_n\} > y] = 1 - P[\bigcap\nolimits_{i=1}^{n}\{X_i > y\}] =$$

$$= 1 - \prod\nolimits_{i=1}^{n} P[X_i > y] = 1 - \prod\nolimits_{i=1}^{n}(1 - P[X_i \le y]) = 1 - \{1 - F_{X_i}(y)\}^n$$

και $f_Y(y) = n \cdot (1 - F_{X_i}(y))^{n-1} \cdot f_{X_i}(y)$.

β)

$$F_Z(z) = P[Z \le z] = P[\max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \le z] = P[\bigcap\nolimits_{i=1}^{n}\{X_i \le z\}] = \prod\nolimits_{i=1}^{n} P[X_i \le z] = \{F_{X_i}(z)\}^n$$

και $f_Z(z) = n \cdot \{F_{X_i}(z)\}^{n-1} \cdot f_{X_i}(z)$.

γ) Για δύο σύνολα A, B ισχύει ότι $A \cap B^c = A \setminus A \cap B$. Έστω $A = \{Z \le z\}$ και $B = \{Y > y\}$ τότε έχουμε,

$$F_{YZ}(y,z) = P[Y \le y, Z \le z] = P[Z \le z] - P[Y > y, Z \le z] =$$
$$= F_Z(z) - P[\min\{X_1, X_2, ..., X_n\} > y, \max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \le z] =$$
$$= F_Z(z) - P[\bigcap_{i=1}^{n}\{y < X_i \le z\}] = F_Z(z) - \prod_{i=1}^{n} P[y < X_i \le z] = F_Z(z) - \{P[y < X_i \le z]\}^n =$$
$$= F_Z(z) - \{F_{X_i}(z) - F_{X_i}(y)]\}^n = \{F_{X_i}(z)\}^n - \{F_{X_i}(z) - F_{X_i}(y)]\}^n.$$

και $\dfrac{\partial}{\partial z} F_{YZ}(y,z) = n \cdot \{F_{X_i}(z)\}^{n-1} \cdot f_{X_i}(z) - n \cdot \{F_{X_i}(z) - F_{X_i}(y)]\}^{n-1} \cdot f_{X_i}(z)$,

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial}{\partial z} F_{YZ}(y,z)] = n \cdot (n-1) \cdot \{F_{X_i}(z) - F_{X_i}(y)]\}^{n-2} \cdot f_{X_i}(z) \cdot f_{X_i}(y).$$

δ)

$$f_{Z|Y=y}(z\,|\,y)=\frac{f_{YZ}(y,z)}{f_Y(y)}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\{F_{X_i}(z)-F_{X_i}(y)]\}^{n-2}\cdot f_{X_i}(z)\cdot f_{X_i}(y)}{n\cdot\{1-F_{X_i}(y)\}^{n-1}\cdot f_{X_i}(y)}=$$

$$=\frac{(n-1)\cdot\{F_{X_i}(z)-F_{X_i}(y)]\}^{n-2}\cdot f_{X_i}(z)}{\{1-F_{X_i}(y)\}^{n-1}}.$$

2.28 σελ.89)

Οι διάρκειες ζωής X,Y (σε ώρες) δύο εξαρτημάτων μιας μηχανής είναι τ.μ. με από κοινού σ.π.π. $f(x,y)=\exp\{-(x+y)\}$ με $x>0, y>0$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ώστε η διάρκεια ζωής της μηχανής να είναι μεταξύ μίας και δύο ωρών όταν τα εξαρτήματα έχουν συνδεθεί :

α) Σε σειρά.

β) Παράλληλα.

Λύση :

Έχει δειχθεί στην άσκηση 2.21 ότι οι τ.μ. X,Y είναι ανεξάρτητες και μάλιστα έχουμε ότι $f_X(x)=e^{-x}$, $F_X(x)=1-e^{-x}$ και $f_Y(x)=e^{-y}$, $F_Y(x)=1-e^{-y}$.

α) Όταν τα εξαρτήματα είναι «εν σειρά» τότε η διάρκεια ζωής του συστήματος είναι η μικρότερη των διαρκειών ζωής των δύο εξαρτημάτων. Συνεπώς ζητείται η κατανομή της τ.μ. $T=\min\{X,Y\}$. Από την άσκηση 2.25 έχουμε ότι,

$$f_T(t)=2\cdot[1-(1-e^{-t})]\cdot e^{-t}=2\cdot e^{-2t}\sim \text{Εκθ}(2).$$

Άρα $P[1<T<2]=F_T(2)-F_T(1)=e^{-2}-e^{-1}$.

β) Όταν τα εξαρτήματα είναι «παράλληλα» συνδεδεμένα τότε η διάρκεια ζωής του συστήματος είναι η μεγαλύτερη των διαρκειών ζωής των δύο εξαρτημάτων. Συνεπώς ζητείται η κατανομή της τ.μ. $T=\max\{X,Y\}$. Από την άσκηση 2.25 έχουμε ότι, $f_T(t)=2\cdot(1-e^{-t})\cdot e^{-t}$ και $F_T(t)=[1-e^{-t}]^2$ και στην συνέχεια υπολογίζουμε την πιθανότητα $P[1<T<2]$.

2.31 σελ.90)

Έστω X,Y τ.μ. των οποίων η από κοινού κατανομή ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες :

α) Για κάθε $y>0$, η δεσμευμένη κατανομή της X δοθέντος ότι $Y=y$, είναι Poisson με παράμετρο y.

β) Η περιθώρια κατανομή της Y είναι Γάμμα κατανομή με παραμέτρους α και n. Δείξτε ότι η περιθώρια κατανομή της τ.μ. X είναι η αρνητική διωνυμική με παραμέτρους n και $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$.

Λύση :

Έχουμε ότι $P[X=k\,|\,Y=y]=e^{-y}\cdot\dfrac{y^k}{k!}$, $y>0$ και $P[Y=y]\sim Gamma(\alpha,n)$.

$$P[X=k]=$$

$$=\int_0^{+\infty}P[X=k\,|\,Y=y]\cdot f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}e^{-y}\cdot\frac{y^k}{k!}\cdot\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)}\cdot y^{n-1}\cdot e^{-\alpha y}dy=\frac{\alpha^n}{k!\cdot\Gamma(n)}\cdot\int_0^{+\infty}y^{k+n-1}\cdot e^{-(\alpha+1)y}dy=$$

$$\frac{\alpha^n}{k!\cdot\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(k+n)}{(\alpha+1)^{k+n}}=\frac{\Gamma(k+n)}{k!\cdot\Gamma(n)}\cdot\{\frac{\alpha}{\alpha+1}\}^n\cdot\{\frac{1}{\alpha+1}\}^k\sim NB(n,\frac{\alpha}{\alpha+1}).$$

3.2 σελ.118)

Λάστιχα αυτοκινήτου, ορισμένου τύπου, έχουν ελαττωματικό εσωτερικό τοίχωμα με συχνότητα 1 στα 1000. Ποια η πιθανότητα σε 500 νέα αυτοκίνητα που φέρουν λάστιχα αυτού του τύπου να μην έχει κανένα τους ελαττωματικό λάστιχο;

Λύση :

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X: ''αριθμός ελαττωματικών λάστιχων''. Είναι προφανές ότι $X\sim b(n=500,p=0.001)$. Άρα,

$$P[X=0]=\binom{500}{0}\cdot 0.001^0\cdot 0.999^{500}=0.606.$$

3.3 σελ.119)

Αν η διάρκεια T (σε min) υπεραστικής συνδιάλεξης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha=\dfrac{1}{3}$, ποιες οι πιθανότητες ώστε η διάρκεια μιας συνδιάλεξης :

α) Να διαρκέσει λιγότερο από 3 min.

β) Να διαρκέσει τουλάχιστον t min δεδομένου ότι έχει υπερβεί ήδη τα t_0 min. Τί συμπεράσματα βγάζετε σχετικά με την κατανομή της υπολειπόμενης διάρκειας $\gamma=T-t_0$;

Λύση :

Έχουμε ότι $T \sim$ Εκθ$(\frac{1}{3})$.

α) $P[T<3]=1-e^{-3\frac{1}{3}}=1-e^{-1}$.

β) Για $t>t_0$ έχουμε, $P[T>t \mid T>t_0]=\dfrac{P[T>t]}{P[T>t_0]}=\dfrac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha t_0}}=e^{-\alpha(t-t_0)}$ ενώ για $t \leq t_0$

$P[T>t \mid T>t_0]=1$.

Θέτω $Y=T-t_0$ τότε,

$$\begin{aligned}&P[Y>y]=P[T-t_0>y \mid T>t_0]=P[T>y+t_0 \mid T>t_0]=e^{-\alpha y} \Rightarrow\\&\Rightarrow P[Y \leq y]=1-e^{-\alpha y} \sim \text{Εκθ}(\alpha).\end{aligned}$$

3.5 σελ.119)

Εταιρεία πριν κάνει παραλαβή ενός προϊόντος που έρχεται συσκευασμένο σε κιβώτια των 50 εξάγει τυχαία 5 αντικείμενα από κάθε κιβώτιο και ελέγχει την ποιότητά τους. Ένα κιβώτιο γίνεται αποδεκτό εφόσον κατά τον έλεγχο δεν προκύψουν περισσότερα από ένα ελαττωματικά αντικείμενα. Αν το ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων στο στάδιο της παραγωγής είναι 10%, ποιό το ποσοστό των κιβωτίων που δεν γίνονται αποδεκτά;

Λύση :

<u>α' τρόπος</u>

X : ''αριθμός ελαττωματικών αντικειμένων στο δείγμα''.

$X \sim b(n=5, p=0.10)$,

$$P[X \leq 1]=P[X=0]+P[X=1]=\binom{5}{0}\cdot 0.1^0 \cdot 0.9^5+\binom{5}{1}\cdot 0.1^1 \cdot 0.9^4=0.9185.$$

<u>β' τρόπος</u>

Y : ''αριθμός ελαττωματικών αντικειμένων στο κιβώτιο''

$Y \sim b(N = 50, p = 0.10)$ και $P[X = k \mid Y = l] = \dfrac{\binom{l}{k} \cdot \binom{N-l}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Οπότε,

$$P[X = k] = \sum_{l=k}^{N} P[X = k, Y = l] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

3.7 σελ.119)

Υποθέστε ότι 5% των φορολογικών δηλώσεων έχουν αριθμητικό λάθος. Ποια η πιθανότητα μεταξύ 2000 φορολογικών δηλώσεων να υπάρξουν περισσότερες από 12 δηλώσεις με αριθμητικό λάθος;

Λύση :

X : ''αριθμός φορολογικών δηλώσεων με αριθμητικό λάθος''.

$X \sim b(n = 2000, p = 0.005) \simeq P(\lambda = np = 10)$,

$P[X > 12] = P[X \geq 13] = 0.2084$.

Ακόμα μπορούμε να προσεγγίσουμε την διωνυμική με κανονική, όπου $\mu = np = 10$ και $\sigma^2 = np(1-p) = 9.95$. Άρα,

$$P[X > 12] = P[X \geq 13] = 1 - P[X < 13] = 1 - P[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{13-\mu-0.5}{\sigma}] =$$

$$= 1 - P[Z < \frac{2.5}{\sqrt{9.95}}] = 1 - \Phi(0.79) = 0.21.$$

3.8 σελ.120)

Η εσωτερική διάμετρος κυλίνδρου μηχανής είναι τυχαία μεταβλητή X (cm) με κανονική κατανομή $N(10, 9 \cdot 10^{-4})$. Να υπολογιστεί το ποσοστό των κυλίνδρων με εσωτερική διάμετρο :

α) Μικρότερη από 9.950 cm.

β) Μεταξύ 9.950 και 10.060 cm.

Λύση :

α)

$$P[X \le 9.950] = P[\frac{X-10}{\sqrt{9\cdot 10^{-4}}} \le \frac{9.950-10}{\sqrt{9\cdot 10^{-4}}}] = P[Z \le \frac{-0.05}{3\cdot 10^{-2}}] =$$

$$= P[Z \le -\frac{5}{3}] = \Phi[-1.666] = 1-\Phi[1.666] = 0.05.$$

β)

$$P[9.950 < X < 10.060] = P[\frac{9.950-10}{\sqrt{9\cdot 10^{-4}}} < \frac{X-10}{\sqrt{9\cdot 10^{-4}}} < \frac{10.060-10}{\sqrt{9\cdot 10^{-4}}}] =$$

$$P[\frac{9.950-10}{\sqrt{9\cdot 10^{-4}}} < Z < \frac{10.060-10}{\sqrt{9\cdot 10^{-4}}}] = P[Z < \frac{10.060-10}{\sqrt{9\cdot 10^{-4}}}] - P[Z < \frac{9.950-10}{\sqrt{9\cdot 10^{-4}}}] =$$

$$= \Phi[2] - (1-\Phi[1.666]) = 0.92979.$$

3.9 σελ.120)

Η αντοχή εφελκυσμού (σε tn/cm^2) μεταλλικού εξαρτήματος ακολουθεί κατανομή Weibull με $\alpha = 0.25$ και $\beta = 2$. Από προδιαγραφές επιβάλλεται η αντοχή του εφελκυσμού να είναι μεγαλύτερη από $0.6tn$. Τί ποσοστό εξαρτημάτων δεν θα ικανοποιεί τις προδιαγραφές;

Λύση :

$X \sim W(\alpha = 0.25, \beta = 2)$, με σ.π.π. $f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}$, $x > 0$ και *συνάρτηση αξιοπιστίας* $P[X > x] = R[x] = e^{-\alpha x^{\beta}}$.

Άρα $P[X > 0.6] = R[0.6] = e^{-\alpha(0.6)^{\beta}} = 0.9139$.

3.10 σελ.120)

Σε μία πόλη η ημερήσια ζήτηση νερού σε $lt \times 10^6$ ακολουθεί κατανομή Γάμμα με $\alpha = 3$ και $p = 4$. Εάν η ημερήσια παροχή δεν μπορεί να υπερβεί τα $5 \times 10^6 lt$, ποια η πιθανότητα να μην επαρκέσει η παροχή τυχούσα μέρα;

Λύση :

$X \sim G(\alpha = 3, \rho = 4)$, με σ.π.π. $f(x) = \dfrac{\alpha^\rho}{\Gamma(\rho)} x^{\rho-1} e^{-\alpha x} \equiv G(x \mid \alpha, \rho)$, όπου $\Gamma(\rho) = \int_0^\infty x^{\rho-1} e^{-x} dx$. Ισχύουν οι σχέσεις : $\Gamma(\rho) = (\rho-1)\Gamma(\rho-1)$, $\Gamma(n+1) = n!$ για $n = 0,1,...$ και $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

$$R[x \mid \alpha, \rho] \equiv P[X > x] = \int_x^\infty \frac{\alpha^\rho}{\Gamma(\rho)} s^{\rho-1} e^{-\alpha s} ds = -\frac{\alpha^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} \int_x^\infty s^{\rho-1} d e^{-\alpha s}$$

$$= -\frac{\alpha^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} s^{\rho-1} e^{-\alpha s} \Big|_x^\infty + \frac{\alpha^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} (\rho-1) \int_x^\infty s^{\rho-2} e^{-\alpha s} ds = \frac{\alpha^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} x^{\rho-1} e^{-\alpha x} + \int_x^\infty \frac{\alpha^{\rho-1}}{\Gamma(\rho-1)} s^{(\rho-1)-1} e^{-\alpha s} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R[x \mid \alpha, \rho] = \frac{\alpha^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} x^{\rho-1} e^{-\alpha x} + R[x \mid \alpha, \rho-1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R[x \mid \alpha, \rho] = \frac{\alpha^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} x^{\rho-1} e^{-\alpha x} + \frac{\alpha^{\rho-2}}{\Gamma(\rho-1)} x^{\rho-2} e^{-\alpha x} + ... + R[x \mid \alpha, 1].$$

Για $x = 5, \alpha = 3, \rho = 4$ έχουμε

$$R[x \mid \alpha, \rho] = \frac{3^3}{3!} 5^3 e^{-3\cdot 5} + \frac{3^2}{2!} 5^2 e^{-3\cdot 5} + \frac{3^1}{1!} 5^1 e^{-3\cdot 5} + e^{-3\cdot 5} = 0.002.$$

3.11σελ.120)

Το ποσοστό μικροϋπολογιστών ορισμένου τύπου που χρειάζονται επισκευή μέσα στον πρώτο χρόνο λειτουργίας τους είναι τ.μ. X με σ.π.π. την Βήτα, $f(x) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$, $0 < x < 1$, $\alpha, \beta > 0$. Εάν για τον εν λόγω τύπου μικροϋπολογιστή είναι $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, ποια η πιθανότητα να χρειαστούν επισκευή μέσα στον πρώτο χρόνο λειτουργίας τους σε ποσοστό μεγαλύτερο του 20%;

Λύση :

$X \sim Beta(\alpha = 1, \beta = 5)$,

$$P[X > 0.20] = 1 - P[X \le 0.20] = 1 - \int_0^{0.2} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(1)\Gamma(5)} x^0 (1-x)^4 dx =$$

$$= 5\int_0^{0.2} (1-x)^4 dx = -5\frac{(1-x)^5}{5}\Bigg|_0^{0.2} = 1 - 0.8^5 = 0.67232.$$

3.12 σελ. 120)

Η διάρκεια ζωής X σε έτη, ενός λέβητα κεντρικής θέρμανσης είναι $N(10,2)$. Ο κατασκευαστής αντικαθιστά τον λέβητα εάν παρουσιάσει βλάβη σε διάστημα μικρότερου του χρόνου εγγύησης. Για πόσα χρόνια μπορεί να δίνει εγγύηση έτσι ώστε το ποσοστό των λεβήτων που θα αντικαθιστά να είναι μικρότερο από 2%;

Λύση :

$X \sim N(10,2)$ και έστω t ο ζητούμενος χρόνος εγγύησης. Τότε πρέπει,

$$P[X < t] \le 0.2 \Rightarrow P[\frac{X-10}{\sqrt{2}} < \frac{t-10}{\sqrt{2}}] \le 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[Z < \frac{t-10}{\sqrt{2}}] \le 0.2 \Rightarrow \Phi[\frac{t-10}{\sqrt{2}}] \le 0.2.$$

Από τους πίνακες τιμών της κανονικής κατανομής ψάχνουμε να βρούμε α τέτοιο ώστε $\Phi[\alpha] = 0.2 \Leftrightarrow \Phi[-\alpha] = 0.98$,

τελικά έχουμε $-\alpha = 2.05 \Rightarrow \dfrac{t-10}{\sqrt{2}} = 2.05 \Rightarrow t = 7.1$.

3.13 σελ.120)

Ο αριθμός X των ατελειών σε υαλοπίνακες των $20m^2$ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 0.2$ ατέλειες/m^2. Ηλεκτρονική συσκευή καταγράφει τις ατέλειες με πιθανότητα αναγνώρισης $p = 0.9$. Να προσδιοριστεί :

α) Η κατανομή του αριθμού Y των καταγραφόμενων ατελειών

β) Η πιθανότητα $P[X > 3 \mid Y = 2]$.

Λύση :

Έστω X : ‘‘πραγματικός αριθμός ατελειών’’, $X \sim P(\lambda = 0.2)$

α) Έστω Y: ''αριθμός καταγραφόμενων ατελειών''.

Από θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε $P[Y=m]=\sum_{k=0}^{\infty} P[X=k]\cdot P[Y=m \mid X=k]$,

όμως για $k<m$ $P[Y=m \mid X=k]=0$, δηλαδή είναι αδύνατον να καταγραφούν περισσότερες ατέλειες από αυτές που υπάρχουν. Άρα,

$P[Y=m]=\sum_{k=m}^{\infty} P[X=k]\cdot P[Y=m \mid X=k]$ και $P[Y=m \mid X=k] \sim b(n=k, p=0.9)$

δηλαδή $P[Y=m \mid X=k]=\binom{k}{m}\cdot p^m \cdot (1-p)^{k-m}$. Αντικαθιστούμε και λαμβάνουμε

$$P[Y=m]=\sum_{k=m}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\binom{k}{m}\cdot p^m\cdot(1-p)^{k-m}=e^{-\lambda}\cdot p^m\cdot\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{k!}{(k-m)!m!}\cdot(1-p)^{k-m}=$$

$$=e^{-\lambda}\cdot p^m\cdot\frac{1}{m!}\cdot\lambda^m\cdot\sum_{k=m}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{k-m}}{(k-m)!}=e^{-\lambda}(\lambda p)^m\frac{1}{m!}e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^m}{m!}.$$

β)

$$P[X>3 \mid Y=2]=1-P[X\le 3 \mid Y=2]=1-P[2\le X\le 3 \mid Y=2]=$$
$$=1-P[(X=2)\cup(X=3) \mid Y=2]=1-P[X=2 \mid Y=2]-P[X=3 \mid Y=2]=$$
$$=1-\frac{P[X=2,Y=2]}{P[Y=2]}-\frac{P[X=3,Y=2]}{P[Y=2]}=$$
$$=1-\frac{P[Y=2 \mid X=2]\cdot P[X=2]}{P[Y=2]}-\frac{P[Y=2 \mid X=3]\cdot P[X=3]}{P[Y=2]}.$$

3.15 σελ.121)

Το χαρακτηριστικό X ενός προϊόντος ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(5, 0.25\cdot 10^{-2})$. Το προϊόν θεωρείται κατάλληλο όταν $5-10^{-1}<X<5+10^{-1}$.

α) Ποιό το ποσοστό των κατάλληλων στο σύνολο της παραγωγής;

β) Ποιά η πιθανότητα ώστε μεταξύ 4 κομματιών εκλεγμένων στην τύχη, να υπάρχουν 3 τουλάχιστον κατάλληλα;

Λύση :

α)

$$P[5-10^{-1} < X < 5+10^{-1}] = P[4.9 < X < 5.1] = P[\frac{4.9-5}{0.05} < \frac{X-5}{0.05} < \frac{5.1-5}{0.05}] =$$
$$= P[-2 < Z < 2] = 2 \cdot P[0 < Z < 2] = 2 \cdot (0.97725 - \frac{1}{2}) = 0.9545.$$

β) Έστω Y: ‘‘αριθμός κατάλληλων προϊόντων’’, τότε $Y \sim b(n=4, p=0.9545)$. Συνεπώς,

$$P[Y \geq 3] = P[Y=3] + P[Y=4] = \binom{4}{3} 0.9545^3 (1-0.9545)^1 + \binom{4}{4} 0.9545^4 (1-0.9545)^0 = 0.20.$$

4.1 σελ. 141)

Έστω τ.μ. X. Αν $E\{(X-a)^m\} < \infty$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $E(X^m) < \infty$.

Λύση :

Είναι γνωστό ότι $(x-a)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k a^k x^{m-k}$, συνεπώς

$$E\{(X-a)^m\} = E\{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k a^k X^{m-k}\} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k a^k E(X^{m-k}).$$

4.2 σελ. 142)

Έστω X συνεχής τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή. Αν η σ.π.π. f είναι συνάρτηση συμμετρική περί το $c \in \mathbb{R}$ (δηλαδή $f(c+x) = f(c-x), \forall x \in \mathbb{R}$) δείξτε ότι $E(X) = c$.

Λύση :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-c+c) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-c) f(x) dx + c \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-c) f(x) dx + c \cdot 1 \overset{y=x-c}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y+c) dy + c$$

Εξετάζουμε την συνάρτηση $g(y) = y \cdot f(y+c)$, $y \in \mathbb{R}$ και παρατηρούμε ότι $g(-y) = (-y) \cdot f(-y+c) = -y \cdot f(y+c) = -g(y)$, άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy = 0$. Συνεπώς $E(X) = c$.

4.4 σελ. 142)

Έστω X τ.μ. Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Αν $E(X^2) = 12$ να βρεθεί το λ.

Λύση :

$X \sim P(\lambda)$, $\quad P[X = k] = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}$, $\quad k = 0,1,2,\ldots$, $\quad E(X) = \lambda$ και $V(X) = \lambda$.

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow \lambda = 12 - \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ ή $\lambda = -4$.

Άρα $\lambda = 3$.

4.5 σελ. 142)

Αν η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ να βρείτε την $E(Y)$ και $V(Y)$ με $Y = e^X$.

Λύση :

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με σ.π.π. $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$ έχουμε,

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{\frac{x-\mu}{\sigma}=\omega}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma\omega+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega =$$

$$= e^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{\omega^2 - 2\omega\sigma}{2})} d\omega = e^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{\omega^2 - 2\sigma\omega + \sigma^2 - \sigma^2}{2})} d\omega =$$

$$= e^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega-\sigma)^2}{2}} e^{\frac{\sigma^2}{2}} d\omega = \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega-\sigma)^2}{2}} d\omega =$$

$$= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \cdot 1 = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.$$

γιατί η συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ είναι η σ.π.π. της $Z \sim N(0,1)$. Για την διασπορά υπολογίζουμε πρώτα την $E(Y^2)=E(e^{2x})$ με ανάλογο τρόπο και κατόπιν χρησιμοποιούμε τον τύπο $V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$.

4.6 σελ. 142)

Έστω X τ.μ. με σ.μ.π. $P[X=k]=(\frac{1}{2})^k$, $k=1,2,\ldots$. Υπολογίστε τις $E[X]$, $E[X(X-1)]$, $V[X]$.

Λύση :

Πρόκειται για γεωμετρική κατανομή με $p=\frac{1}{2}$. $X \sim Geo(p=\frac{1}{2})$ και $P[X=k]=p(1-p)^{k-1}$. Από θεωρία (σελ.124) είναι γνωστό ότι $E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}$. Άρα στην περίπτωσή μας $E[X]=2$.

Θεωρούμε επίσης γνωστό ότι $\sum_{k=1}^{\infty}w^k=\frac{w}{1-w}$, $|w|<1$ το οποίο συνεπάγεται με την σειρά του ότι $\sum_{k=2}^{\infty}w^k=\frac{w^2}{1-w}$.

$$E[X(X-1)]=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)p(1-p)^{k-1}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)p(1-p)^{k-1}=$$

$$=p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)(1-p)^{k-2}=p(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^2(1-p)^k}{dp^2}=$$

$$=p(1-p)\frac{d^2}{dp^2}[\sum_{k=2}^{\infty}(1-p)^k]=p(1-p)\frac{d^2}{dp^2}\{\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)}\}=$$

$$=p(1-p)\frac{d^2}{dp^2}\{\frac{(1-p)^2}{p}\}=p(1-p)\frac{d}{dp}[\frac{-2(1-p)p-(1-p)^2}{p^2}]=$$

$$=-p(1-p)\frac{d}{dp}[\frac{1-p^2}{p^2}]=\frac{-p(1-p)(-2pp^2-2p(1-p)^2)}{p^4}=\frac{2(1-p)}{p^2}.$$

Άρα $E[X(X-1)]=4$.

Τέλος έχουμε $V[X]=E[X^2]-E[X]^2$ και $E[X^2]=E[X(X-1)]+E[X]$. Από τις δύο αυτές σχέσεις παίρνουμε $V[X]=\frac{2(1-p)}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$, δηλαδή $V[X]=2$.

4.7 σελ. 142)

Δείξτε ότι για κάθε $c \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα $V(X) \le E\{(X-c)^2\}$.

Λύση :

$$E\{(X-c)^2\} = E\{(X-c+\mu-\mu)^2\} = E\{(X-\mu)^2 + 2(X-\mu)(\mu-c) + (\mu-c)^2\} =$$
$$= E[(X-\mu)^2] + 2E[(\mu-c)(X-\mu)] + E[(\mu-c)^2] = V[X] + 2(\mu-c)E[(X-\mu)] + (\mu-c)^2 =$$
$$= V[X] + (\mu-c)^2.$$

όπου $E[(X-\mu)] = 0$ και $(\mu-c)^2 \geq 0$.

4.8 σελ. 142)
Έστω η διακριτή τ.μ. X η οποία λαμβάνει τις τιμές -1, 0, 1 με πιθανότητες p, q, r αντίστοιχα. Να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. X και της τ.μ. $|X|$.

Λύση :

Όσον αφορά την τ.μ. X έχουμε $E[X] = (-1)\cdot p + 0\cdot q + 1\cdot r = r - p$, $E[X^2] = (-1)^2 \cdot p + 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot r = p + r$ και $V[X] = (p+r) - (r-p)^2$.

Η τ.μ. $Y = |X|$ λαμβάνει τις τιμές 0,1 με πιθανότητες q, $p+r$ αντίστοιχα. Συνεπώς έχουμε $E[Y] = p + r$, $E[Y^2] = p + r$ και $V[Y] = p + r - (p+r)^2$.

Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διασπορά της τ.μ. $|X|$ με τον ορισμό ως εξής :

$E[|X|] = |-1|p + |0|q + |1|r = p + r$, $E[|X|^2] = |-1|^2 p + |0|^2 q + |1|^2 r = p + r$ και $V[Y] = p + r - (p+r)^2$.

4.10 σελ. 142)
Προϊόν συσκευάζεται σε πακέτα των 500 gr. Το βάρος X (σε gr) του περιεχομένου ενός πακέτου είναι τ.μ. με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{400}(x-480) & , \quad 480 < x \leq 500 \\ \dfrac{1}{400}(520-x) & , \quad 500 < x \leq 520 \end{cases}.$$

Να προσδιοριστεί η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. X. Ο κατασκευαστής πωλεί το πακέτο στην τιμή των 200 δρχ. με την υποχρέωση να επιστρέψει τα χρήματα όταν $X < 485$. Δεδομένου ότι το κόστος παραγωγής Y ενός πακέτου εξαρτάται από το βάρος X σύμφωνα με την σχέση $Y = 0.10\cdot X + 70$, να προσδιοριστεί το αναμενόμενο ανα πακέτο κέρδος του κατασκευαστή.

Λύση :

Παρατηρούμε ότι

$$f(500+x) = \frac{1}{400}[520-(500+x)] = \frac{1}{400}(20-x) = \frac{1}{400}[(500-x)-480] = f(500-x)$$

Άρα σύμφωνα με την άσκηση 4.2 σελ. 142 έπεται ότι $E[X] = 500$.

$$E[X^2] = \int_{480}^{500} \frac{x^2}{400}(x-480)dx + \int_{500}^{520} \frac{x^2}{400}(520-x)dx = \ldots = 9.825\cdot 10^5.$$

$V[X]=E[X^2]-E[X]^2=...=300$.

Για να προσδιορίσουμε το αναμενόμενο ανα πακέτο κέρδος του κατασκευαστή θεωρώ μία καινούρια τ.μ. την Z, η οποία εκφράζει το κέρδος του κατασκευαστή ανα πακέτο.

$$Z=\begin{cases}200-(0.10\cdot X+70) & , \quad X\geq 485\\ -(0.10\cdot X+70) & , \quad X<485\end{cases}.$$

$E[Z]=\int_{480}^{485}(-0.10\cdot X-70)f(x)dx+\int_{485}^{520}(200-0.10\cdot X-70)f(x)dx=$

$=\int_{480}^{485}(200-0.10\cdot X-70)f(x)dx+\int_{485}^{520}(200-0.10\cdot X-70)f(x)dx-200\int_{480}^{485}f(x)dx=$

$=\int_{480}^{520}(130-0.10\cdot X)f(x)dx-200P[480<X\leq 485]=130\cdot 1-0.10\cdot E[X]-200\cdot\frac{25}{800}=$

$=130-0.50-\frac{50}{80}=73.75.$

$P[480<X\leq 485]=\frac{1}{400}\int_{480}^{485}(x-480)dx=\frac{1}{400}\int_{480}^{485}xdx-\frac{480}{400}\int_{480}^{485}dx=$

$=\frac{1}{400}\frac{x^2}{2}\bigg|_{480}^{485}-\frac{480}{400}x\Big|_{480}^{485}=...=\frac{25}{800}.$

4.11 σελ. 143)

Η θερμοκρασία απόσταξης μίας χημικής ουσίας είναι τ.μ. T με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[160^\circ, 280^\circ]$. Αν $T\leq 200^\circ$ το προϊόν της απόσταξης πουλιέται προς β δρχ. το λίτρο ενώ αν $T>200^\circ$ προς γ δρχ. το λίτρο. Αν το κόστος παραγωγής ενός λίτρου του παραπάνω προϊόντος είναι α δρχ. να βρεθεί το αναμενόμενο κέρδος ανα λίτρο.

Λύση :

$T\sim U(160,280)$. Ορίζω την παρακάτω τ.μ.

$X=$κέρδος ανα λίτρο , τότε $X=\begin{cases}\beta-\alpha & , \quad T\leq 200^\circ\\ \gamma-\alpha & , \quad T>200^\circ\end{cases}$ και υπολογίζω τις πιθανότητες

$P[160^\circ<T\leq 200^\circ]=\frac{4}{12}$, $P[200^\circ<T\leq 280^\circ]=\frac{8}{12}$, οπότε το αναμενόμενο κέρδος ανα λίτρο είναι $E[X]=(\beta-\alpha)\cdot\frac{4}{12}+(\gamma-\alpha)\cdot\frac{8}{12}$.

4.14 σελ. 143)

Τα χαρακτηριστικά X, Y μιας κατασκευής είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $N(25,0.3)$ και $N(37,0.36)$ αντίστοιχα. Η κατασκευή θεωρείται παραδεκτή όταν πληρούνται οι προδιαγραφές :

Α: $25-0.6<X<25+0.6$ και Β : $37-0.8<Y<37+0.8$

Το κόστος της κατασκευής είναι 5000 δρχ. και προσαυξάνεται κατά 1200 δρχ. όταν ικανοποιείται μία ακριβώς από τις Α, Β και κατά 2000 δρχ. όταν ουδεμία από τις Α, Β ικανοποιείται, προκειμένου να διορθωθεί και να γίνει παραδεκτή. Να ευρεθεί το μέσο κόστος της κατασκευής.

Λύση :

$X \sim N(25, 0.3)$, $Y \sim N(37, 0.36)$ και $A = \{24.4 < X < 25.6\}$, $B = \{36.2 < Y < 37.8\}$
Υπολογίζουμε τις πιθανότητες να πραγματοποιηθούν τα ενδεχόμενα A, B.

$P[A] = P[24.4 < X < 25.6] = P[\frac{24.4-25}{\sqrt{0.3}} < \frac{X-25}{\sqrt{0.3}} < \frac{25.6-25}{\sqrt{0.3}}] =$

$= P[-1.1 < Z < 1.1] = 0.72866.$

Ομοίως $P[B] = 0.38878$.

Ορίζω μία καινούργια τ.μ. την $R =$ κόστος κατασκευής τότε,

$$R = \begin{cases} 5000 & , \quad A \cap B \\ 6200 & , \quad A^c B \cup AB^c \\ 7000 & , \quad A^c \cap B^c \end{cases}$$

$E[R] = 5000 \cdot P[AB] + 6200 \cdot P[A^c B \cup AB^c] + 7000 \cdot P[A^c B^c] =$

$= 5000 \cdot 0.28329 + 6200 \cdot 0.55116 + 7000 \cdot 0.16585 = 5994.592.$

Τέλος σημειώνουμε ότι τα ενδεχόμενα $A^c B$, AB^c είναι ξένα μεταξύ τους.

4.19 σελ. 144)

Έστω X τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Έστω επίσης $y = g(x)$ αναλυτική συνάρτηση του x. Αναπτύσσοντας κατά Taylor την g στο σημείο μ δείξτε ότι $E[Y] \cong g(\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2 g''(\mu)$ και $V[Y] \cong \{g'(\mu)\}^2 \sigma^2$.

Λύση :

$$Y = g(x) \cong g(\mu) + (x-\mu)g'(\mu) + \frac{1}{2}(x-\mu)^2 g''(\mu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[Y] = E[g(\mu) + (x-\mu)g'(\mu) + \frac{1}{2}(x-\mu)^2 g''(\mu)] =$$

$$= E[g(\mu)] + E[(x-\mu)g'(\mu)] + E[\frac{1}{2}(x-\mu)^2 g''(\mu)] =$$

$$= g(\mu) + g'(\mu)E[(x-\mu)] + \frac{1}{2}g''(\mu)E[(x-\mu)^2] = g(\mu) + \frac{1}{2}g''(\mu)\sigma^2.$$

$Y \cong g(\mu) + (x-\mu)g'(\mu) \Rightarrow$

$\Rightarrow V[Y] = V[g(\mu)] + V[(x-\mu)g'(\mu)] = \{g'(\mu)\}^2 V[(x-\mu)] = \{g'(\mu)\}^2 V[x].$

Θυμίζουμε ότι $V[aX+b] = a^2 V[X]$ και ότι $V[c] = 0$.

4.25 σελ. 145)

Αν (X,Y) ακολουθεί κατανομή $N(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)$ να δειχθεί ότι η $Cov(X,Y)=0$ συνεπάγεται την ανεξαρτησία των τ.μ. X , Y .

Λύση :

$(X,Y)\sim N(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)$, $\underset{\sim}{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_x\\ \mu_y\end{pmatrix}$, $\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & \sigma_{xy}\\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2\end{pmatrix}$, όπου $\sigma_{xy}=Cov(X,Y)=\rho\sigma_x\sigma_y$.

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}-2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\}]\overset{\rho=0}{=}$$

$$\overset{\rho=0}{=}\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp[-\frac{1}{2}\{\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\}]=f_X\cdot f_Y.$$

4.27 σελ. 145)

Να προσδιοριστεί η συνδιακύμανση των τ.μ. X , Y στην άσκηση 2.15 σελ. 87.

Λύση :

$$E[X]=(-1)\cdot\frac{5}{12}+0\cdot\frac{2}{12}+1\cdot\frac{5}{12}=0,\ E[Y]=(-1)\cdot\frac{4}{12}+0\cdot\frac{4}{12}+1\cdot\frac{4}{12}=0\ .$$

$$E[XY]=(-1)\cdot(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 0\cdot\frac{2}{12}+(-1)\cdot 1\cdot\frac{3}{12}+0\cdot(-1)\cdot\frac{1}{12}+0\cdot 0\cdot 0+$$
$$+0\cdot 1\cdot\frac{1}{12}+1\cdot(-1)\cdot\frac{3}{12}+1\cdot 0\cdot\frac{2}{12}+1\cdot 1\cdot 0=-\frac{1}{2}.$$

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=-\frac{1}{2}.$$

4.28 σελ. 145)

Η από κοινού σ.π.π. δύο τ.μ. X, Y είναι $f(x,y)=k\{(x+y)-(x^2+y^2)\}$, ($0<x<1, 0<y<1$). Δείξτε ότι οι τ.μ. X, Y είναι ασυσχέτιστες αλλά όχι ανεξάρτητες.

Λύση :

Πρώτα βρίσκουμε τις περιθώριες κατανομές.

$$f_X(x)=\int_0^1 f(x,y)dy = k\int_0^1\{(x+y)-(x^2+y^2)\}dy = k\int_0^1 (x-x^2+y-y^2)dy =$$
$$= k\,\{(x-x^2)y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\}\Big|_0^1 = k(\frac{1}{6}+x-x^2).$$

Ομοίως έχουμε $f_Y(y)=k(\frac{1}{6}+y-y^2)$ και παρατηρούμε ότι $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$, συνεπώς οι τ.μ. X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Στην συνέχεια θα προσδιορίσουμε την σταθερά k.

$$1=k\int_0^1\int_0^1\{(x+y)-(x^2+y^2)\}dydx = k\int_0^1(\frac{1}{6}+x-x^2)dx \Rightarrow k=3.$$

Άρα $f(x,y)=3\{(x+y)-(x^2+y^2)\}$, $0<x<1, 0<y<1$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$.

$E[X]=\int_0^1 x\cdot f_X(x)dx = 3\int_0^1(\frac{x}{6}+x^2-x^3)dx = 3\{\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ και ομοίως έχουμε ότι $E[Y]=\frac{1}{2}$. Επιπλέον,

$$E[XY]=\int_0^1\int_0^1 xyf(x,y)dydx = 3\int_0^1\int_0^1 xy(x+y-x^2-y^2)dydx =$$
$$=3\int_0^1\int_0^1(x^2y+xy^2-x^3y-xy^3)dydx = 3\int_0^1\{x^2\frac{y^2}{2}+x\frac{y^3}{3}-x^3\frac{y^2}{2}-x\frac{y^4}{4}\}\Big|_0^1 dx =$$
$$=3\int_0^1\{\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{2}-\frac{x}{4}\}dx = 3\int_0^1\{\frac{x^2}{2}+\frac{x}{12}-\frac{x^3}{2}\}dx = 3\{\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{24}-\frac{x^4}{8}\}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Συνεπώς $Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0$, δηλαδή οι τ.μ. X, Y είναι ασυσχέτιστες.

4.29 σελ. 145)

Οι τ.μ. X, Y έχουν από κοινού σ.π.π. $f(x,y)=8xy$, $(0\le x\le 1, 0\le y\le x)$. Προσδιορίστε την καμπύλη παλινδρόμησης $g(x)=E[Y\,|\,x]$.

Λύση :

Γνωρίζουμε ότι $f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$.

Έχουμε,

$$f_X(x)=\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^x 8xydy=8x\int_0^x ydy=8x\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^x=4x^3.$$

Άρα $f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{8xy}{4x^3}=\dfrac{2y}{x^2}$, $0\le y\le x$.

$$E[Y\,|\,x]=\int_0^x yf_{Y|X}(y\,|\,x)dy=\int_0^x \frac{2y^2}{x^2}dy=\frac{2}{x^2}\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^x=\frac{2x}{3},\ 0\le x\le 1.$$

4.30 σελ. 146)

Η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X, Y είναι $f(x,y)=4xy$, ($0<x<1, 0<y<1$). Να βρεθεί η μέση τιμή των τ.μ. $U=X^2+Y^2$, $V=XY$, $W=\sqrt{X^2+Y^2}$.

Λύση :

$$E[X^2+Y^2]=\int_0^1\int_0^1(x^2+y^2)4xydydx=4\int_0^1\int_0^1(x^3y+xy^3)dydx=$$

$$=4\int_0^1\left.\left(x^3\frac{y^2}{2}+x\frac{y^4}{4}\right)\right|_0^1 dx=4\int_0^1\left(\frac{x^3}{2}+\frac{x}{4}\right)dx=1.$$

$$E[XY]=\int_0^1\int_0^1 xy4xydydx=4\int_0^1\int_0^1 x^2y^2dydx=4\int_0^1 x^2\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 dx=$$

$$=4\int_0^1\frac{x^2}{3}dx=\frac{4}{3}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{4}{9}.$$

$$E[\sqrt{X^2+Y^2}]=4\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^2+y^2}\,xydydx=2\int_0^1\{\int_0^1 x\sqrt{x^2+y^2}\,dy^2\}dx=$$
$$=2\int_0^1\{\int_0^1 x\sqrt{x^2+y^2}\,d(x^2+y^2)\}dx=$$
$$\left(\text{θέτω } x^2+y^2=w \text{ τότε για } y=0\Rightarrow w=x^2 \text{ και για } y=1\Rightarrow w=1+x^2\right)$$
$$=2\int_0^1\{x\int_{x^2}^{1+x^2} w^{\frac{1}{2}}dw\}dx=2\int_0^1\{x\left.\frac{w^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{x^2}^{1+x^2}\}dx=\frac{4}{3}\int_0^1 x\{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(x^2)^{\frac{3}{2}}\}dx=$$
$$=\frac{4}{3}\int_0^1 x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dx-\frac{4}{3}\int_0^1 x^4dx=$$
$$\left(\text{θέτω } 1+x^2=w \text{ τότε } x=\sqrt{w-1} \text{ και } dx=\frac{dw}{2\sqrt{w-1}}\right)$$
$$=\frac{4}{3}\int_1^2\sqrt{w-1}\,w^{\frac{3}{2}}\frac{dw}{2\sqrt{w-1}}-\left.\frac{4}{3}\frac{x^5}{5}\right|_0^1=\frac{2}{3}\int_1^2 w^{\frac{3}{2}}dw-\frac{4}{15}=\left.\frac{2}{3}\frac{w^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_1^2-\frac{4}{15}=$$
$$=\frac{4}{15}(2\sqrt{2}-1)-\frac{4}{15}=\frac{4}{15}(2\sqrt{2}-1-1)=\frac{8}{15}(\sqrt{2}-1).$$

4.33 σελ. 146)

Οι τ.μ. X, Y, Z είναι ανεξάρτητες με Εκθετική κατανομή παραμέτρου a. Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης των τ.μ. $U=X+Y$ και $V=Y+Z$.

Λύση :

Έχουμε ότι,

$$Cov(U,V)=Cov(X+Y,Y+Z)=Cov(X,Y+Z)+Cov(Y,Y+Z)=$$
$$=Cov(Y+Z,X)+Cov(Y+Z,Y)=Cov(Y,X)+Cov(Z,X)+Cov(Y,Y)+Cov(Z,Y)=$$
$$\left(\text{γνωρίζουμε ότι αν δύο τ.μ. είναι ανεξάρτητες τότε είναι και ασυσχέτιστες}\right)$$
$$=Cov(Y,Y)=V[Y]=\frac{1}{a^2}$$

Ακόμα έχουμε ότι $V[U]=V[X+Y]=V[X]+V[Y]=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{2}{a^2}$ και $V[V]=V[Y+Z]=\frac{2}{a^2}$.

Οπότε $\rho(U,V)=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{V[U]}\cdot\sqrt{V[V]}}=\frac{1}{2}$.

4.34 σελ. 146)

Οι τ.μ. X, Y έχουν μέσες τιμές μηδέν, διασπορές σ_X^2, σ_Y^2 αντίστοιχα και συνδιακύμανση σ_{XY}. Να υπολογιστεί η διασπορά $V[X\cdot\cos\phi+Y\cdot\sin\phi]$ και ακολούθως να προσδιοριστεί η γωνία ϕ για την οποία η διασπορά γίνεται ελάχιστη.

Λύση :

$$
\begin{aligned}
&V[X\cdot\cos\phi+Y\cdot\sin\phi]=V[\cos\phi\cdot X]+V[\sin\phi\cdot Y]+2Cov(\cos\phi\cdot X,\sin\phi\cdot Y)=\\
&=\cos^2\phi\cdot V[X]+\sin^2\phi\cdot V[Y]+2\cos\phi\cdot\sin\phi\cdot Cov(X,Y)=\\
&=\cos^2\phi\cdot\sigma_{\mathrm{X}}^2+\sin^2\phi\cdot\sigma_{\mathrm{Y}}^2+2\cos\phi\cdot\sin\phi\cdot\sigma_{\mathrm{XY}}=L(\phi).
\end{aligned}
$$

Θα βρούμε σε ποιό σημείο μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης L κι έπειτα θα εξετάσουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στο σημείο αυτό.

$$
\begin{aligned}
&L'(\phi)=(\cos^2\phi\cdot\sigma_{\mathrm{X}}^2+\sin^2\phi\cdot\sigma_{\mathrm{Y}}^2+2\cos\phi\cdot\sin\phi\cdot\sigma_{\mathrm{XY}})'=\\
&=-2\sigma_{\mathrm{X}}^2\cos\phi\sin\phi+2\sigma_{\mathrm{Y}}^2\sin\phi\cos\phi-2\sigma_{\mathrm{XY}}\sin^2\phi+2\cos^2\phi\cdot\sigma_{\mathrm{XY}}=\\
&=2(\sigma_{\mathrm{Y}}^2-\sigma_{\mathrm{X}}^2)\cos\phi\sin\phi+2\sigma_{\mathrm{XY}}(\cos^2\phi-\sin^2\phi)=0\Rightarrow\\
&\Rightarrow-(\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_{\mathrm{Y}}^2)\sin2\phi+2\sigma_{\mathrm{XY}}\cos2\phi=0\Rightarrow\tan2\phi=\frac{2\sigma_{\mathrm{XY}}}{(\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_{\mathrm{Y}}^2)}\Rightarrow\\
&\Rightarrow\phi=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\sigma_{\mathrm{XY}}}{\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&L''(\phi)=2\sigma_{\mathrm{X}}^2\sin^2\phi-2\sigma_{\mathrm{X}}^2\cos^2\phi-4\sigma_{XY}\sin\phi\cos\phi-\\
&-4\sigma_{XY}\sin\phi\cos\phi-2\sigma_Y^2\sin^2\phi+2\sigma_Y^2\cos^2\phi=\\
&=2\sigma_{\mathrm{X}}^2(\sin^2\phi-\cos^2\phi)-8\sigma_{XY}\sin\phi\cos\phi+2\sigma_Y^2(\cos^2\phi-\sin^2\phi)=\\
&=-2\sigma_{\mathrm{X}}^2(\cos^2\phi-\sin^2\phi)-4\sigma_{XY}\sin2\phi+2\sigma_Y^2(\cos^2\phi-\sin^2\phi)=\\
&=2(\cos^2\phi-\sin^2\phi)(\sigma_Y^2-\sigma_{\mathrm{X}}^2)-4\sigma_{XY}\sin2\phi=\\
&=2\cos2\phi(\sigma_Y^2-\sigma_{\mathrm{X}}^2)-4\sigma_{XY}\sin2\phi=-2\cos2\phi(\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_Y^2)-4\sigma_{XY}\sin2\phi=\\
&=-2\{\cos2\phi(\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_Y^2)+2\sigma_{XY}\sin2\phi\}<0\Rightarrow\tan2\phi>-\frac{(\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_Y^2)}{2\sigma_{XY}}.
\end{aligned}
$$

4.34 σελ. 146)

Οι τ.μ. X_i $(i=1,2,...)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Να προσδιοριστεί ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ $Z=\sum_{i=1}^{m}X_i$ και $W=\sum_{i=m-k}^{m+n}X_i$, ($k\le m$).

Λύση :

Ας είναι $V[X_i]=\sigma^2$ για $i=1,2,...$ τότε $V[Z]=V[\sum_{i=1}^{m} X_i] \overset{X_i \text{ ανεξάρτητες}}{=} \sum_{i=1}^{m} V[X_i]=m\cdot\sigma^2$

και $V[W]=V[\sum_{i=m-k}^{m+n} X_i] \overset{X_i \text{ ανεξάρτητες}}{=} \sum_{i=m-k}^{m+n} V[X_i]=\{(m+n)-(m-k)\}\cdot\sigma^2=(n+k)\cdot\sigma^2$

$$Cov(Z,W)=Cov(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{i=m-k}^{m+n} X_i)=Cov(\sum_{i=m-k}^{m} X_i, \sum_{i=m-k}^{m} X_i)=$$
$$=V[\sum_{i=m-k}^{m} X_i]=\{m-(m-k)\}\cdot\sigma^2=k\cdot\sigma^2.$$

Άρα $\rho(Z,W)=\dfrac{k}{\sqrt{m(n+k)}}$.

4.36 σελ. 147)

Να προσδιοριστεί ο συντελεστής συσχέτισης των τ.μ. $Z=aX+bY$ και $W=aX-bY$, όπου X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.

Λύση :

$$Cov(Z,W)=Cov(aX+bY,aX-bY)=Cov(aX,aX-bY)+Cov(bY,aX-bY)=$$
$$=Cov(aX,aX)+Cov(aX,-bY)+Cov(bY,aX)+Cov(bY,-bY)=$$
$$=a^2Cov(X,X)-b^2Cov(Y,Y)=a^2V[X]-b^2V[Y]=(a^2-b^2)\sigma^2.$$

$V[Z]=V[aX+bY]=a^2V[X]+b^2V[Y]=(a^2+b^2)\sigma^2$,

$V[W]=V[aX-bY]=a^2V[X]+b^2V[Y]=(a^2+b^2)\sigma^2$.

Συνεπώς $\rho(Z,W)=\dfrac{(a^2-b^2)\sigma^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^2\sigma^4}}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

5.1 σελ. 164)

Δείξτε ότι αν η τ.μ. X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ τότε η $Y=-\ln X$ ακολουθεί την εκθετική με παράμετρο 1.

Λύση :

$X \sim U(0,1) \Rightarrow f_X(x) = 1,\ \ 0 < x < 1$ και 0 αλλού. Η συνάρτηση $g:(0,1) \to \mathbb{R}^+$ με αλγεβρικό τύπο $g(x) = -\ln x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$, $g'(x) = -\frac{1}{x}$, άρα και αμφιμονοσήμαντη.

Έχουμε $g(x) \equiv y = -\ln x \Rightarrow g^{-1}(y) \equiv x = e^{-y}$, $y > 0$. Η παράγωγος της g^{-1} υπάρχει $\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = -e^{-y}$ και είναι συνεχής. Άρα

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = e^{-y} \Rightarrow Y \sim \text{Εκθ}(1).$$

5.2 σελ. 164)

Έστω η τ.μ. X με συνάρτηση κατανομής πιθανότητας την F. Δείξτε ότι η κατανομή της τ.μ. $Y = F(X)$ είναι η ομοιόμορφη στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση :

$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[F(X) \le y] \overset{F \text{ μη φθίνουσα}}{=} P[X \le F^{-1}(y)] = F_X(F^{-1}(y)) = y$. Έχουμε $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = 1$, $y \in (0,1)$.

5.4 σελ. 164)

Φορτίο q coulombs βρίσκεται στη θέση (X,Y,Z), όπου X,Y,Z ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $N(0,1)$. Να προσδιοριστεί η σ.π.π. του δυναμικού V στην αρχή των αξόνων, όπου $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$.

Λύση :

Από το πόρισμα της σελ. 163 έχουμε ότι η τ.μ. $U = X^2 + Y^2 + Z^2$ ακολουθεί την κατανομή $X^2(3)$. Επιπλέον, θυμίζουμε ότι η κατανομή $X^2(\nu)$ προκύπτει από την Γάμμα κατανομή για $a = \frac{1}{2}$, $p = \frac{\nu}{2}$.

Συνεπώς έχουμε :

$$U = X^2 + Y^2 + Z^2 \sim X^2(3) \equiv G(\frac{1}{2},\frac{3}{2}) \quad \text{και} \quad f_U(u) = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})} \cdot u^{\frac{3}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u}{2}}, \quad u > 0 .$$

Θεωρούμε την τ.μ. $V = c \cdot U^{-\frac{1}{2}}$, $c = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ και βρίσκουμε την κατανομή της.

$$g(u) \equiv v = c \cdot u^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g^{-1}(v) \equiv u = \frac{c^2}{v^2} \text{ και } \frac{d}{dv} g^{-1}(v) = -\frac{2c^2}{v^3} .$$

Άρα

$$f_V(v) = f_U(g^{-1}(v)) \cdot \left| \frac{d}{dv} g^{-1}(v) \right| = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \{\frac{c^2}{v^2}\}^{\frac{3}{2}-1} \cdot e^{-\frac{c^2}{2v^2}} \cdot \frac{2c^2}{v^3} =$$

$$= \frac{2}{2^{\frac{3}{2}} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})} \cdot c^{3-2+2} \cdot e^{-\frac{c^2}{2v^2}} \cdot v^{-3+2-3} = \frac{c^3}{2^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})} \cdot v^{-4} \cdot e^{-\frac{c^2}{2v^2}} \sim cX^{-1}(\nu = 3).$$

Τέλος αναφέρουμε ότι αν $X \sim cX^{-1}(\nu)$ τότε $f_X(x) = \dfrac{c^\nu}{2^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot x^{-(\nu+1)} \cdot e^{-\frac{c^2}{2x^2}}$.

5.5 σελ. 164)

Έστω X τ.μ. ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Δείξτε ότι η τ.μ. $Y = \tan X$ ακολουθεί κατανομή Cauchy.

Λύση :

$$X \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & , \quad x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ 0 & , \quad \text{αλλού} \end{cases} .$$

$g(x) \equiv y = \tan x \Leftrightarrow g^{-1}(y) \equiv x = \arctan y$, $y \in \mathbb{R}$ και $\dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$, συνεπώς έχουμε $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1+y^2} = \dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$, $y \in \mathbb{R}$.

5.7 σελ. 164)

Έστω τ.μ. X με σ.π.π. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-2} e^{-\frac{1}{2}x^{-2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η τ.μ. $Y = \dfrac{1}{X}$ ακολουθεί κατανομή $N(0,1)$.

Λύση :

Έχουμε ότι $g(x) \equiv y = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow g^{-1}(y) \equiv x = \dfrac{1}{y}$, $y \in \mathbb{R}$ και $\dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) = -\dfrac{1}{y^2}$. Συνεπώς

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} \left| -\frac{1}{y^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \Leftrightarrow Y \sim N(0,1).$$

5.11 σελ. 165)

Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή Γάμμα παραμέτρων (a,p) και (b,p) αντίστοιχα. Αν $R = \dfrac{X}{X+Y}$, $S = X + Y$ δείξτε ότι οι τ.μ. R, S είναι ανεξάρτητες και ότι η R ακολουθεί κατανομή Βήτα με παραμέτρους (a,b).

Λύση :

Έχουμε $X \sim G(a,p) \Leftrightarrow f_X(x) = \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}$, $x > 0$ και $Y \sim G(b,p) \Leftrightarrow f_Y(y) = \dfrac{a^q}{\Gamma(p)} y^{q-1} e^{-ay}$, $y > 0$. Αφού οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. έχουμε $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \dfrac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} y^{q-1} e^{-a(x+y)}$, $x, y > 0$.

Θα βρούμε την από κοινού σ.π.π. του ζεύγους (R,S). Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $r=\dfrac{x}{x+y}$, $s=x+y$ ο οποίος αντιστρέφεται στον $x=rs$, $y=s-rs$, $s>0$, $0<r<1$ και ο οποίος έχει Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} s & r \\ -s & 1-r \end{vmatrix} = s(1-r)+sr = s-sr+sr = s .$$

Συνεπώς έχουμε $f_{RS}(r,s)=\dfrac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1}s^{p-1}s^{q-1}(1-r)^{q-1}e^{-as}s$, $s>0$, $0<r<1$ ή $f_{RS}(r,s)=\dfrac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1}(1-r)^{q-1}s^{p+q-1}e^{-as}$, $s>0$, $0<r<1$. Αφού όμως η από κοινού σ.π.π. του ζεύγους (R,S) γράφεται σαν μία συνάρτηση του r επί μία συνάρτηση του s, οι τ.μ. R, S είναι ανεξάρτητες.

Όσον αφορά στην κατανομή της R έχουμε :

$$f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{RS}(r,s)ds=\int_0^{\infty}\frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1}(1-r)^{q-1}s^{p+q-1}e^{-as}ds=$$

$$=\frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1}(1-r)^{q-1}\int_0^{\infty}s^{p+q-1}e^{-as}ds \overset{as=t}{=} \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1}(1-r)^{q-1}\frac{1}{a^{p+q}}\int_0^{\infty}t^{p+q-1}e^{-t}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1}(1-r)^{q-1},\ 0<r<1.$$

Θυμίζουμε ότι $X\sim B(p,q) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1},\ 0<x<1$.

5.15 σελ. 166)

Οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (a,b). Ποια η κατανομή

α) της τ.μ. $Z=X+Y$;

β) της τ.μ. $W=X-Y$;

Λύση :

$X,Y\sim U(a,b)$ ανεξάρτητες δηλαδή, $f_X(x)=f_Y(y)=\dfrac{1}{b-a}$ και $f_{XY}(x,y)=\dfrac{1}{(b-a)^2}$, με $a<x,y<b$.

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix}, \quad J = -\frac{1}{2}$$ η Ιακωβιανή ορίζουσα του αντίστροφου μετασχηματισμού. $f_{ZW}(z,w) = f_{XY}(x(z,w), y(z,w)) \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(b-a)^2}$.

α) $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{ZW}(z,w)dw = \begin{cases} \int_{2a-z}^{z-2a} \frac{1}{2(b-a)^2} dw = \frac{z-2a}{(b-a)^2} & , \ 2a < z \le a+b \\ \int_{z-2b}^{2b-z} \frac{1}{2(b-a)^2} dw = \frac{2b-z}{(b-a)^2} & , \ a+b \le z < 2b \end{cases}.$$

β) $$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{ZW}(z,w)dz = \begin{cases} \int_{w+2a}^{2b-w} \frac{1}{2(b-a)^2} dz = \frac{b-a-w}{(b-a)^2} & , \ 0 < w \le b-a \\ \int_{2a-w}^{w+2b} \frac{1}{2(b-a)^2} dz = \frac{w+b-a}{(b-a)^2} & , \ a-b \le z < 0 \end{cases}.$$

5.16 σελ. 166)

Δύο ηλεκτρικές αντιστάσεις R_1, R_2 κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα (800,1000) και (1300,1500) αντίστοιχα. Ποια η κατανομή της ολικής αντίστασης $R = R_1 + R_2$.

Λύση :

Έχουμε $R_1 \sim U(800,1000) \Leftrightarrow f_{R_1}(r_1) = \frac{1}{200}$, $R_2 \sim U(1300,1500) \Leftrightarrow f_{R_2}(r_2) = \frac{1}{200}$

οπότε θέτοντας $X = R_1$ και $Y = R_2$ και $R = Z$, W αναγόμαστε στην περίπτωση που εξετάστηκε στην τελευταία άσκηση.

Συγκεκριμένα έχουμε $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{200^2}$, $x = \frac{1}{2}(z+w)$, $x = \frac{1}{2}(z-w)$ και $f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{2 \cdot 200^2}$.

$x = 800 \Rightarrow z + w = 1600 \Rightarrow w = 1600 - z$, $x = 1000 \Rightarrow z + w = 2000 \Rightarrow w = 2000 - z$.

$y = 1300 \Rightarrow z - w = 2600 \Rightarrow w = z - 2600$, $y = 1500 \Rightarrow z - w = 3000 \Rightarrow w = z - 3000$.

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_{1600-z}^{z-2600}\frac{1}{2\cdot 200^2}dw=\frac{z-2100}{200^2} & , \quad 2100<z<2300\\ \int_{z-3000}^{2000-z}\frac{1}{2\cdot 200^2}dw=\frac{2500-z}{200^2} & , \quad 2300<z<2500\end{cases}.$$

5.17 σελ. 166)

Αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με εκθετική κατανομή παραμέτρου a, ποια η από κοινού κατανομή των τ.μ. $Z=X+Y$, $W=\frac{X}{Y}$; Ποια η περιθώρια της τ.μ. W;

Λύση :

Οι τ.μ. X, Y ακολουθούν εκθετική κατανομή παραμέτρου a και αφού είναι ανεξάρτητες το ζεύγος (X,Y) έχει από κοινού κατανομή $f_{XY}(x,y)=a^2e^{-(x+y)}$, $x,y>0$. Στην συνέχεια θα βρούμε την από κοινού κατανομή του ζεύγους (Z,W), όπου $Z=X+Y$, $W=\frac{X}{Y}$.

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$J: z=x+y,\ w=\frac{x}{y} \Leftrightarrow J^{-1}: x=\frac{zw}{w+1},\ y=\frac{z}{w+1}$. Η Ιακωβιανή ορίζουσα του J^{-1} είναι $\begin{vmatrix}\frac{w}{w+1} & \frac{z}{(w+1)^2}\\ \frac{1}{w+1} & -\frac{z}{(w+1)^2}\end{vmatrix}=-\frac{z}{(w+1)^2}$. Άρα η σ.π.π. του ζεύγους (Z,W) είναι

$$f_{ZW}(z,w)=f_{XY}(x=\frac{zw}{w+1},y=\frac{z}{w+1})\left|-\frac{z}{(w+1)^2}\right|=a^2e^{-az}\frac{z}{(w+1)^2},\ z,w>0.$$

Συνεπώς η περιθώρια κατανομή της τ.μ. W είναι

$$f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{ZW}(z,w)dz=\int_0^{\infty}a^2e^{-az}\frac{z}{(w+1)^2}dz=\frac{a^2}{(w+1)^2}\int_0^{\infty}e^{-az}zdz=\frac{a^2}{(w+1)^2}\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{1}{(w+1)^2},$$

για $w>0$.

Παρατηρήσεις :

1. • $X^2(\nu)$: X^2 κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας (β.ε.).

• $X^{-2}(\nu)$: Αντίστροφη X^2 κατανομή με ν β.ε.

$$X \sim X^{-2}(\nu) \overset{ορ.}{\Leftrightarrow} Y = X^{-1} \sim X^2(\nu).$$

2. • $X(\nu)$: X κατανομή με ν β.ε..

$$X \sim X(\nu) \overset{ορ.}{\Leftrightarrow} Y = X^2 \sim X^2(\nu).$$

• $X^{-1}(\nu)$: Αντίστροφη X κατανομή με ν β.ε.

$$X \sim X^{-1}(\nu) \overset{ορ.}{\Leftrightarrow} Y = X^{-1} \sim X(\nu).$$

3. Για $c > 0$:

• $X \sim cX^2(\nu) \overset{ορ.}{\Leftrightarrow} \dfrac{X}{c} \sim X^2(\nu)$.

• $X \sim cX^{-2}(\nu) \overset{ορ.}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{cX} \sim X^2(\nu)$.

• $X \sim cX(\nu) \overset{ορ.}{\Leftrightarrow} \dfrac{X^2}{c^2} \sim X^2(\nu)$ ή $\dfrac{X}{c} \sim X(\nu)$.

• $X \sim cX^{-1}(\nu) \overset{ορ.}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{cX} \sim X(\nu)$ ή $\dfrac{1}{c^2X^2} \sim X^2(\nu)$.

4. Εύρεση σ.π.π. και κατανομών.

A) $cX^2(\nu)$ κατανομή .

Έστω $X \sim X^2(\nu) \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ και $Y = cX$, $c > 0$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $g(x) \equiv y = cx$, τότε έχουμε $g^{-1}(y) \equiv x = \dfrac{y}{c}$ και $\dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) = \dfrac{1}{c}$.

Συνεπώς $f_Y(y) = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} (\dfrac{y}{c})^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{y}{2c}} \dfrac{1}{c} \Rightarrow f_Y(y) = \dfrac{1}{(2c)^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} y^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{y}{2c}}$, $y > 0$ η σ.π.π. της $cX^2(\nu)$. Τέλος, $F_Y(y) = P[Y \le y] = P[\dfrac{Y}{c} \le \dfrac{y}{c}] = \int_0^c X^2(s \mid \nu) ds$,

όπου $X^2(s \mid \nu)$ είναι η σ.π.π. της $X^2(\nu)$ στο σημείο s.

Β) $X(\nu)$: X κατανομή.

$X \sim X^2(\nu) \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ και $Y = \sqrt{X}$, θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$g(x) \equiv y = \sqrt{x}$, $x > 0$ τότε έχουμε $g^{-1}(y) \equiv x = y^2$, $y > 0$ και

$\dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) = 2y$. Συνεπώς $f_Y(y) = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} (y^2)^{\nu-1} e^{-\frac{y^2}{2}}$, $y > 0$ η σ.π.π. της $X(\nu)$.

Γ) $X^{-2}(\nu)$: Αντίστροφη X^2 κατανομή.

$X \sim X^2(\nu) \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ και $Y = \dfrac{1}{X}$, θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$g(x) \equiv y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ τότε έχουμε $g^{-1}(y) \equiv x = \dfrac{1}{y}$, $y > 0$ και $\dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) = -\dfrac{1}{y^2}$.

Συνεπώς

$f_Y(y) = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} y^{1-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{1}{2y}} \dfrac{1}{y^2} \Rightarrow f_Y(y) = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} y^{-(\frac{\nu}{2}+1)} e^{-\frac{1}{2y}}$, $y > 0$ η σ.π.π. της

$X^{-2}(\nu)$.

Δ) $cX^{-2}(\nu)$ κατανομή.

$X \sim X^{-2}(\nu) \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{-(\frac{\nu}{2}+1)} e^{-\frac{1}{2x}}$ και $Y = cX$, θεωρούμε τον

μετασχηματισμό $g(x) \equiv y = cx$, $x > 0$ τότε έχουμε $g^{-1}(y) \equiv x = \dfrac{y}{c}$, $y > 0$ και

$\dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) = \dfrac{1}{c}$. Συνεπώς η σ.π.π. της $cX^{-2}(\nu)$ για $c > 0$ είναι :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} (\frac{y}{c})^{-(\frac{\nu}{2}+1)} e^{-\frac{1}{2\frac{y}{c}}} \frac{1}{c} \Rightarrow f_Y(y) = \frac{c^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} y^{-(\frac{\nu}{2}+1)} e^{-\frac{c}{2y}}.$$

Ε) $X^{-1}(\nu)$: Αντίστροφη X κατανομή.

$X \sim X^2(\nu) \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ και $Y = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$, θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$g(x) \equiv y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ τότε έχουμε $g^{-1}(y) \equiv x = \dfrac{1}{y^2}$, $y > 0$ και $\dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) = -2y^3$.

Συνεπώς η σ.π.π. της $X^{-1}(\nu)$ είναι:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \{\frac{1}{y^2}\}^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2y^2}} \frac{2}{y^3} \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1}\Gamma(\frac{\nu}{2})} y^{-(\nu+1)} e^{-\frac{1}{2y^2}}.$$

ΣΤ) $cX^{-1}(\nu)$ κατανομή.

$X \sim X^{-1}(\nu) \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{-(\nu+1)} e^{-\frac{1}{2x^2}}$ και $Y = cX$, θεωρούμε τον μετασχηματισμό $g(x) \equiv y = cx$, $x > 0$ τότε έχουμε $g^{-1}(y) \equiv x = \dfrac{y}{c}$, $y > 0$ και $\dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) = \dfrac{1}{c}$. Συνεπώς η σ.π.π. της $cX^{-1}(\nu)$ για $c > 0$ είναι :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1}\Gamma(\frac{\nu}{2})} (\frac{y}{c})^{-(\nu+1)} e^{-\frac{1}{2(\frac{y}{c})^2}} \frac{1}{c} \Rightarrow f_Y(y) = \frac{c^\nu}{2^{\frac{\nu}{2}-1}\Gamma(\frac{\nu}{2})} y^{-(\nu+1)} e^{-\frac{c^2}{2y^2}}.$$

6.10 σελ. 183)

Ηλεκτρικές αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσους $\mu_1 = 600$, $\mu_2 = 700$, $\mu_3 = 800$ και τυπικές αποκλίσεις $\sigma_1 = 40$, $\sigma_2 = 50$, $\sigma_3 = 60$

αντίστοιχα. Ποια η κατανομή της ολικής αντίστασης $R_1+R_2+R_3$; Να βρεθεί η πιθανότητα $P[1950<R=R_1+R_2+R_3\le 2200]$;

Λύση :

$R=R_1+R_2+R_3\sim N(\mu,\sigma^2)$, όπου $\mu=\sum_{i=1}^{3}\mu_i=2100$ και

$\sigma^2=V[R]=V[R_1+R_2+R_3]\overset{R_i\ \text{ανεξ.}}{=}40^2+50^2+60^2=7700$, δηλαδή $\sigma=87.75$. Άρα έχουμε

$$P[1950<R\le 2200]=P[\frac{1950-2100}{87.75}<Z\le\frac{2200-2100}{87.75}]=P[-1.71<Z\le 1.14]=$$
$$=\Phi(1.14)-\Phi(-1.71)=\Phi(1.14)-[1-\Phi(1.71)]=0.87286+0.95637-1=0.82923.$$

6.11 σελ. 183)

Λαμπτήρες ορισμένου τύπου έχουν μέση διάρκεια ζωής 2000h και τυπική απόκλιση 150h. Ποια η πιθανότητα ώστε η συνολική διάρκεια ζωής 12 λαμπτήρων να μην υπερβαίνει τις 23000h; Πόσοι λαμπτήρες απαιτούνται ώστε με πιθανότητα 0.99 να υπάρχει φως για τουλάχιστον 50000h;

Λύση :

Ορίζουμε την παρακάτω τ.μ.

T_i : ‘‘Διάρκεια ζωής i λαμπτήρα’’, όπου $\mu_i=E[T_i]=2000h$ και $\sigma_i=\sqrt{V[T_i]}=150h$.

Τότε $T=\sum_{i=1}^{12}T_i\sim N(\sum_{i=1}^{12}\mu_i,\sum_{\iota=1}^{12}\sigma_\iota^2)=N(12\mu,n\sigma^2)=N(24000,270000)$, δηλαδή $\sigma_T=519.6$.

$P[T<23000]=P[Z<-1.92]=1-\Phi(1.92)=0.03$.

$$P[T>50000]=0.99\Rightarrow P[Z>\frac{50000-2000\cdot n}{150\cdot\sqrt{n}}]=0.99\Rightarrow P[Z\le-\frac{50000-2000\cdot n}{150\cdot\sqrt{n}}]=0.99$$

λόγω συμμετρίας του γραφήματος της κανονικής κατανομής. Από τον πίνακα τιμών έχουμε $-\frac{50000-2000\cdot n}{150\cdot\sqrt{n}}=2.33\Rightarrow n\cong 26$.

6.12 σελ. 183)

Φορτηγό μεταφέρει κομμάτια συμπιεσμένου χαρτιού. Το βάρος κάθε κομματιού είναι τ.μ. με μέση τιμή $\mu = 25kgr$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1.5kgr$. Πόσα το πολύ κομμάτια μπορεί να μεταφέρει το φορτηγό ώστε με πιθανότητα 0.95 το ολικό φορτίο να είναι μικρότερο από $1tn$;

Λύση :

Έστω X_i : ''Βάρος κομματιού'', με $\mu = E[X_i] = 25$, $\sigma = \sqrt{V[X_i]} = 1.5$. Τότε έχουμε $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

$P[X < 1000] = 0.95 \Rightarrow P[Z < \frac{1000 - n \cdot 25}{1.5 \cdot \sqrt{n}}] = 0.95$, από τον πίνακα τιμών της κανονικής κατανομής έπεται ότι $\frac{1000 - n \cdot 25}{1.5 \cdot \sqrt{n}} = 1.65 \Rightarrow n \cong 39$.

6.13 σελ. 184)

Σωματίδιο κινείται στον άξονα $x'x$ ως εξής : Ανά μονάδα χρόνου πραγματοποιεί βήμα μήκους μιας μονάδας ή μένει ακίνητο στη θέση που βρίσκεται. Η πιθανότητα να κινηθεί ένα βήμα δεξιά είναι $p = 0.45$, η πιθανότητα να παραμείνει ακίνητο είναι $q = 0.1$ και η πιθανότητα να κινηθεί αριστερά είναι $r = 0.45$. Δεδομένου ότι το σωματίδιο ξεκινά από τη θέση 0 του άξονα $x'x$:

α) Ποια η πιθανότητα ώστε κατά την 20^{η} χρονική μονάδα να βρίσκεται στο διάστημα $[-6, 6]$;

β) Να εξεταστεί η οριακή συμπεριφορά της πιθανότητας p_n να βρεθεί στο διάστημα $[-6, 6]$ μετά n χρονικές μονάδες. Ποιό το $\lim p_n$ για $n \to \infty$;

Λύση :

Έστω $X_i = \begin{cases} +1 & , \quad p = 0.45 \\ 0 & , \quad q = 0.1 \\ -1 & , \quad r = 0.45 \end{cases}$ τότε μετά από n χρονικές μονάδες η θέση του σωματιδίου δίνεται από την τ.μ. $Y_n = X_1 + ... + X_n$. Όσον αφορά στην τ.μ. X_i έχουμε

$E[X_i] = 1 \cdot 0.45 + 0 \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.45 = 0$ και

$V[X_i] = E[X_i^2] - E[X_i]^2 = 1^2 \cdot 0.45 + 0^2 \cdot 0.1 + (-1)^2 \cdot 0.45 - 0 = 0.9$.

Συνεπώς $E[Y_n] = n \cdot E[X_i] = 0$ και $V[Y_n] = n \cdot V[X_i] = n \cdot 0.9$

α)

$$P[-6 < Y_{20} < 6] = P[\frac{-6-0-0.5}{\sqrt{0.9 \cdot 20}} < Z < \frac{6-0+0.5}{\sqrt{0.9 \cdot 20}}] = \Phi(\frac{6.5}{\sqrt{0.9 \cdot 20}}) - \Phi(-\frac{6.5}{\sqrt{0.9 \cdot 20}}) =$$

$$= 2\Phi(\frac{6.5}{\sqrt{0.9 \cdot 20}}) - 1 = 2 \cdot 0.93699 - 1 = 0.87398.$$

β) $p_n = 2\Phi(\frac{6.5}{\sqrt{0.9 \cdot n}}) - 1 \overset{n \to \infty}{\to} 2\Phi(0) - 1 = 0$.

6.14 σελ. 184)

Η διάρκεια ζωής X σε ώρες ενός ανταλλακτικού μιας μηχανής είναι τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{200}\exp\{-\frac{1}{200}(x-50)\}$, $x > 50$. Ποια η πιθανότητα ώστε η λειτουργία της μηχανής να ξεπεράσει τις 4500 ώρες, αν διαθέτουμε συνολικά 20 τέτοια ανταλλακτικά;

Λύση :

X: ''Διάρκεια ζωής ανταλλακτικού σε ώρες'', με $f(x) = \frac{1}{200}\exp\{-\frac{1}{200}(x-50)\}$, $x > 50$. Τότε η τ.μ. $Y = X - 50 \sim \text{Εκθ}(\frac{1}{200})$, με $E[Y] = 200$ και $V[Y] = 200^2$.

Συνεπώς για την τ.μ. X έχουμε $E[X] = E[Y+50] = 250$, $V[X] = V[Y+50] = 200^2$.

Αν διαθέτουμε 20 τέτοια ανταλλακτικά η διάρκεια ζωής της μηχανής είναι $T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim N(20 \cdot 250, 20 \cdot 200^2)$. Άρα

$$P[T > 4500] = P[Z > \frac{4500 - 5000}{200 \cdot \sqrt{20}}] = P[Z > -0.56] = P[Z \leq 0.56] = \Phi(0.56) = 0.71226.$$

6.15 σελ. 184)

Κατά την κατασκευή μιας ηλεκτρονικής συσκευής χρησιμοποιούνται 25 αντιστάσεις των 6 Ohms για τον σχηματισμό απαιτούμενης συνολικής αντίστασης των 150 Ohms. Στην πραγματικότητα το μέγεθος κάθε αντίστασης είναι τ.μ. με μέση τιμή $\mu = 0.6$ Ohms και τυπική απόκλιση σ. Ποια η μέγιστη τιμή του σ ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 0.95 η συνολική αντίσταση να μην αποκλίνει της απαιτούμενης περισσότερο του 2%;

Λύση :

Έστω R_i η τ.μ. που εκφράζει το μέγεθος της i αντίστασης, τότε $E[R_i] = \mu = 6$ και $V[R_i] = \sigma^2$. Το μέγεθος της συνολικής αντίστασης είναι η τ.μ. $R = \sum_{i=1}^{25} R_i \sim N(25 \cdot 6, 25 \cdot \sigma^2)$, αφού χρησιμοποιούμε 25 αντιστάσεις. Ζητείται μέγιστο σ ώστε να ισχύει $P[|R - 150| < 0.02 \cdot 150] = 0.95$.

$$P[|R - 150| < 0.02 \cdot 150] = 0.95 \Rightarrow P[147 < R < 153] = 0.95 \Rightarrow P[\frac{-3}{5\sigma} < R < \frac{3}{5\sigma}] = 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\Phi(\frac{3}{5\sigma}) - 1 = 0.95 \Rightarrow \Phi(\frac{3}{5\sigma}) = 0.975 \Rightarrow \frac{3}{5\sigma} = 1.96 \Rightarrow \sigma = 0.306.$$

6.16 σελ. 184)

Μηχανή A κατασκευάζει άξονες με διάμετρο X και μηχανή B υποδοχές των αξόνων με εσωτερική διάμετρο Y. Εάν $X \sim N(5cm, 2 \cdot 10^{-6} cm^2)$ και $Y \sim N(5.01cm, 2 \cdot 10^{-6} cm^2)$ και για να εφαρμόζει ένα ζεύγος άξονα – υποδοχής απαιτείται όπως $0.5 \cdot 10^{-2} < Y - X < 2 \cdot 10^{-2}$, ποιό το ποσοστό των ζευγών που εφαρμόζουν;

Λύση :

Είναι γνωστό ότι αν $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ τότε $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$.

Συνεπώς $W = Y - X \sim N(0.01, 2 \cdot 2 \cdot 10^{-6})$, άρα

$$P[0.5 \cdot 10^{-2} < W < 2 \cdot 10^{-2}] = P[-2.5 < Z < 5] = \Phi(5) - \Phi(-2.5) =$$
$$= 1 - (1 - \Phi(2.5)) = 0.99379.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

3.6 σελ. 237) Έστω $X_1,\ldots, X_n$ και $Y_1,\ldots,Y_m$ ανεξάρτητα τ.μ. από πληθυσμούς με μέση τιμή θ και γνωστές διασπορές σ_1^2 και σ_2^2. Δείξτε ότι για $c \in [0,1]$ η $U = c\overline{X} +(1-c)\overline{Y}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ και βρείτε το c για το οποίο η διασπορά της U είναι ελάχιστη.

Λύση:

Έστω $U = c\overline{X} +(1-c)\overline{Y}$, $c \in [0,1]$. Τότε:

$$E(U) = cE(\overline{X})+(1-c)E(\overline{Y}) = cE(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)+(1-c)E(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i) = c\frac{1}{n}n\theta+(1-c)\frac{1}{m}m\theta = \theta ,$$

δηλαδή η U είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της θ.

Ακόμα:

$$Var(U) = c^2Var(\overline{X})+(1-c)^2Var(\overline{Y}) = c^2Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)+(1-c)^2Var(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i) \ .$$

Αλλά X_i, Y_j (i=1,..n; j=1,..,m) ανεξάρτητα, άρα και ασυσχέτιστα, οπότε η τελευταία έκφραση παίρνει την μορφή:

$$Var(U)=c^2\frac{1}{n^2}n\sigma_1^2+(1-c)^2\frac{1}{m^2}m\sigma_2^2 = g(c) .$$

Η τελευταία συνάρτηση ελαχιστοποιείται στο σημείο που μηδενίζεται η παράγωγος της, δηλαδή:

$$g'(c)=2c\frac{\sigma_1^2}{n}-2(1-c)\frac{\sigma_2^2}{m}=0 \Rightarrow c^*=\frac{\frac{\sigma_2^2}{m}}{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}} \ .$$

3.7 σελ. 237) Έστω $X_1,\ldots, X_n$ τ.δ. από την $U(\theta,2\theta)$, $\theta\in \mathbb{R}$.

i) Να βρεθεί η σ.π.π. της $Y = \max\{ X_1,\ldots, X_n\}$.

ii) Δείξτε ότι η $T=\frac{n+1}{2n+1}Y$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της θ.

Λύση:

i) Θυμίζουμε ότι όταν μια τ.μ.X ακολουθεί την ομοιόμορφη U(α,β) έχει συνάρτηση κατανομής:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<\alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \le x<\beta \\ 1, & \beta \le x \end{cases}.$$

Ενδιαφερόμαστε για την συνάρτηση κατανομής της τ.μ Y.

$$F(y)=P(Y\le y)=P(\max\{X_1,\ldots,X_n\}\le y)=P(X_1\le y,\ldots,X_n\le y)\overset{X_i\text{ ανεξάρτητα}}{=}\prod_{i=1}^{n}P(X_i\le y)$$

$$\overset{X_i\sim U(\theta,2\theta)}{=}\left(\frac{y-\theta}{\theta}\right)^n.$$

Άρα η σ.π.π. της Y είναι:

$$f(y)=F'(y)=n\left(\frac{y-\theta}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}=n\frac{(y-\theta)^{n-1}}{\theta^n},\ y\in(\theta,2\theta).$$

ii) Είναι:

$$E(Y)=\int_{\theta}^{2\theta}n\frac{y(y-\theta)^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{y(y-\theta)^n}{\theta^n}\Big|_{\theta}^{2\theta}-\int_{\theta}^{2\theta}\frac{(y-\theta)^n}{\theta^n}dy=2\theta-\frac{\theta}{n+1}=\frac{2n+1}{n+1}\theta.$$

Άρα $E(\frac{n+1}{2n+1}Y)=\theta$, οπότε η $T=\frac{n+1}{2n+1}Y$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της θ.

3.11 σελ. 237) Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με σ.π.π $f(x)=a^2xe^{-ax}$, x>0.

i) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. της α.

ii) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. της μέσης τιμής του πληθυσμού.

Λύση:

i) Καταρχήν παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη σ.π.π. είναι η G(a, p=2). Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(a)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=a^{2n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)e^{-a\sum_{i=1}^{n} x_i} \Rightarrow l(a)=2n\cdot\ln(a)+\ln(\sum_{i=1}^{n} x_i)-a\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Άρα η Ε.Μ.Π. της α προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$l^{'}(a)=0\Rightarrow\frac{2n}{a}-\sum_{i=1}^{n}X_i=0\Rightarrow\hat{a}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}X_i}.$$

ii) Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή μιας G(a,p) ισούται με $\mu=\frac{p}{a}$. Στην συγκεκριμένη οπότε περίπτωση $\mu=\frac{2}{a}$. Με χρήση του Θεωρήματος 9.1 η Ε.Μ.Π τότε της μ θα είναι:

$$\hat{\mu}=\frac{2}{\hat{a}}=\frac{2}{\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}X_i}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}.$$

Άσκηση) Έστω $X_1,\ldots, X_n$ τ.δ. από την G(a,p). Να προσδιοριστούν οι εκτιμήτριες των a, p με την μέθοδο των ροπών.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η σ.π.π. μιας G(a,p) είναι η $f(x)=\frac{a^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-ax}$.

Οι δύο πρώτες δειγματικές ροπές περί την αρχή είναι:

$$m_1^{'}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X} \text{ και } m_2^{'}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\overline{X^2}.$$

Οι αντίστοιχες δύο πρώτες ροπές του πληθυσμού είναι:

$$\mu_1' = E(X) = \frac{p}{a} \quad \text{και} \quad \mu_2' = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = \frac{p(p+1)}{a^2}.$$

Άρα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{p}{a} = \overline{X} \\ \dfrac{p(p+1)}{a^2} = \overline{X^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p' = \dfrac{\left(\overline{X}\right)^2}{\overline{X^2} - \left(\overline{X^2}\right)^2} \\ a' = \dfrac{\overline{X}}{\overline{X^2} - \left(\overline{X^2}\right)^2} \end{cases}.$$

Άσκηση) Έστω $X_1,\ldots, X_n$ τ.δ. από την ομοιόμορφη U(a,b).

i) Να προσδιοριστούν οι εκτιμήτριες των a, b με την μέθοδο των ροπών.

ii) Να προσδιοριστούν οι Ε.Μ.Π των a, b.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η σ.π.π. μιας U(a,b) είναι η $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$

i) Οι δύο πρώτες δειγματικές ροπές περί την αρχή είναι:

$$m_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} \quad \text{και} \quad m_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \overline{X^2}.$$

Οι αντίστοιχες δύο πρώτες ροπές του πληθυσμού είναι:

$$\mu_1' = E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{και} \quad \mu_2' = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Άρα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \overline{X} \\ \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} = \overline{X^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = \overline{X} - \sqrt{3}\,\left(\overline{X^2}\text{-}\overline{X}^2\right)^{1/2} \\ b' = \overline{X} + \sqrt{3}\,\left(\overline{X^2}\text{-}\overline{X}^2\right)^{1/2} \end{cases}.$$

ii) Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b\text{-}a} I_{[a,b]}(x_i) = \left(\frac{1}{b\text{-}a}\right)^n \prod_{i=1}^{n} I_{[a,b]}(x_i) = \left(\frac{1}{b\text{-}a}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \{I_{(-\infty,b]}(x_i) I_{[a,+\infty]}(x_i)\}$$
$$= \left(\frac{1}{b\text{-}a}\right)^n I_{(-\infty,b]}(\max x_i) I_{[a,+\infty]}(\min x_i).$$

Η συνάρτηση αυτή δεν διαφορίζεται παντού ως προς a και b, για να μεγιστοποιηθεί όμως είναι φανερό ότι θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η διαφορά b-a με την προϋπόθεση ότι ισχύει $\max x_i \le$ b και $\min x_i \ge \alpha$.

Επομένως οι Ε.Μ.Π. των a, b είναι: $\hat{a} = \min x_i$ και $\hat{b} = \max x_i$.

3.17 σελ. 238) Το πλάτος ενός παλμού είναι τ.μ. $X \sim N(\mu, 4)$. Στην έξοδο του μηχανήματος μπορούμε να παρατηρήσουμε αν το X υπερβαίνει την τιμή 40 ή όχι. Αν σε 100 παρατηρήσεις το X υπερέβη την τιμή αυτή 80 φορές, ποια είναι η Ε.Μ.Π. της μέσης τιμής μ;

Λύση:

Έστω $Y_i = \begin{cases} 1, & x_i > 40 \\ 0, & x_i \le 40 \end{cases}$. Γνωρίζουμε ότι $\hat{p} = \hat{P}(Y_i = 1) = 0.8$ και $(1\text{-}\hat{p}) = \hat{P}(Y_i = 0) = 0.2$.

Τότε:

$$p = P(x > 40) = P(\frac{X\text{-}\mu}{2} > \frac{40\text{-}\mu}{2}) = 1 - \Phi(\frac{40\text{-}\mu}{2}) \Rightarrow \Phi(\frac{40\text{-}\mu}{2}) = 1 - p.$$

Αν $\hat{p}$ η Ε.Μ.Π του p και $\hat{\mu}$ η Ε.Μ.Π. του μ τότε:

$$\Phi(\frac{40-\hat{\mu}}{2}) = 1 - \hat{p} = 0.20 \Rightarrow \hat{\mu} = 41.68.$$

3.19 σελ. 237) Ο αριθμός των σωματιδίων α που εκπέμπονται από ραδιενεργό πηγή σε χρόνο t(sec) ακολουθεί την P(λ), δηλαδή P(X=k) = $e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$. Για την εκτίμηση του λ καταγράφηκε ο αριθμός ν των πηγών που εξέπεμψαν ένα τουλάχιστον σωματίδιο σε χρόνο 1sec από 30 πηγές. Να προσδιοριστεί η Ε.Μ.Π της λ για ν = 20.

Λύση:

Έστω $Y_i = \begin{cases} 1, & x_i \geq 1 \\ 0, & x_i = 0 \end{cases}$.

Τότε $p = P(Y_i = 1) = P(X_i \geq 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - e^{-\lambda}$.

Αν $\hat{p}$ η Ε.Μ.Π του p και $\hat{\lambda}$ η Ε.Μ.Π. του λ τότε:

$\hat{p} = 1 - e^{-\hat{\lambda}} \Rightarrow \frac{20}{30} = 1 - e^{-\hat{\lambda}} \Rightarrow \hat{\lambda} = \log(3)$.

Άσκηση) Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από την B(N,p) με N γνωστό. Να προσδιοριστεί η Ε.Μ.Π της p.

Λύση:

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}\{\binom{N}{x_i}p^{x_i}(1\text{-}p)^{N\text{-}x_i}\}=\prod_{i=1}^{n}\binom{N}{x_i}\,p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\,(1\text{-}p)^{(nN-\sum_{i=1}^{n}x_i)}$$

$$\Rightarrow l(p)=\log\left(\prod_{i=1}^{n}\binom{N}{x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}x_i\log(p)-(nN-\sum_{i=1}^{n}x_i)\log(1\text{-}p).$$

Άρα η Ε.Μ.Π. της p προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$l'(p)=0\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{nN-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1\text{-}p}=0\Rightarrow\hat{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{nN}=\frac{\overline{X}}{N}.$$

<u>Σημείωση:</u> $\hat{p}=\frac{\overline{X}}{N}=\frac{k}{m}$, όπου $k=\sum_{i=1}^{n}x_i$ είναι ο συνολικός αριθμός επιτυχιών και $m=n\cdot N$ ο συνολικός αριθμός δοκιμών Bernoulli.

Άσκηση) Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τ.δ. από την $N(\mu,\sigma^2)$.

i) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π της μ όταν σ^2 γνωστό.
ii) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π της σ^2 όταν μ γνωστό.
iii) Να βρεθούν οι Ε.Μ.Π. των μ, σ^2.

Λύση:

i) Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Rightarrow l(\mu)=-\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2)-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Άρα η Ε.Μ.Π. της μ προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$l'(\mu)=0\Rightarrow\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\mu)=0\Rightarrow\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\Rightarrow\frac{n}{\sigma^2}(\overline{X}-\mu)=0\Rightarrow\hat{\mu}=\overline{X}.$$

ιι) Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Rightarrow l(\mu)=-\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2)-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Άρα η Ε.Μ.Π. της σ^2 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$l'(\sigma^2)=0\Rightarrow -\frac{n}{2}\cdot\frac{2\pi}{2\pi\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=0\Rightarrow -n+\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=0\Rightarrow \widehat{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}.$$

iii) Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Rightarrow l(\mu)=-\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2)-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Άρα οι Ε.Μ.Π. των μ, σ^2 προκύπτουν από την λύση του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=0\\[2ex] \dfrac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\\[2ex] -n+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\hat{\mu}=\bar{X}\\[2ex] \widehat{\sigma^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}\end{array}\right..$$

Άσκηση) Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής $F(x;\theta)=1-(1+x^2)^{-\theta}$, $x>0$, $\theta>0$. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π της θ.

Λύση:

Εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε την σ.π.π. της παραπάνω κατανομής.

$$f(x;\theta)=\frac{d\ F(x;\theta)}{dx}=2x\cdot\theta(1+x^2)^{-(\theta+1)},\ x>0.$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \{\theta(1+x_i^2)^{-(\theta+1)} \cdot 2x_i\} = (2\theta)^n \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)^{-(\theta+1)}}$$

$$\Rightarrow l(\theta) = n\log(2\theta) + \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - (\theta+1)\sum_{i=1}^{n} \log(1+x_i^2).$$

Άρα η Ε.Μ.Π. της θ προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$l'(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \log(1+x_i^2) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log(1+x_i^2)}{n}.$$

Μιας και η συγκεκριμένη κατανομή δεν είναι κάποια από τις γνωστές κατανομές που έχουμε μάθει για να είμαστε σίγουροι ότι η παραπάνω λύση είναι μέγιστο θα πρέπει να δείξουμε ότι η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική για $\theta = \hat{\theta}$. Πράγματι: $l''(\theta) = -\frac{n}{\theta} < 0 \ \forall \ \theta > 0.$

4.2 σελ. 257) Για τον προσδιορισμό της σκληρότητας αλουμινίου έγιναν 16 μετρήσεις και προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα:

12.4, 11.4, 11.7, 12.3, 13.0, 10.9, 11.8, 13.5, 13.1, 11.8, 12.1, 11.7, 10.6, 12.2, 12.8

Να βρεθεί 0.95 Δ.Ε. για τον μέσο μ.

Λύση:

Πρόκειται για Δ.Ε. της μέσης τιμής μ με άγνωστη διασπορά σ.

Από τα δεδομένα προκύπτει:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 12.08,\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = 0.61,\ n = 16.$$

Από τους πίνακες της κατανομής t έχουμε ότι $t_{15,0.025} = 2.131$.

Το ζητούμενο λοιπόν Δ.Ε. με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\bar{X} - t_{15,0.025} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{15,0.025} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \Rightarrow 11.66 < \mu < 12.53.$$

4.4 σελ. 257) Μετρήσεις του δείκτη διάθλασης 25 τεμαχίων διαφανούς υάλου έδωσαν τυπική απόκλιση 0.012. Να βρεθεί 0.90 Δ.Ε. για την διασπορά σ^2 του δείκτη διάθλασης.

Λύση:

Πρόκειται για Δ.Ε. της διασποράς σ^2 με άγνωστο μέσο μ.
Από την εκφώνηση έχουμε: S = 0.012 και n = 25, ενώ από τους πίνακες της X^2 κατανομής προκύπτει ότι $X^2_{24,0.05} = 36.42$ και $X^2_{24,0.95} = 13.84$.

Το ζητούμενο Δ.Ε. τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\frac{(n-1)S^2}{X^2_{24,0.05}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{X^2_{24,0.95}} \Rightarrow 0.010 < \sigma < 0.016.$$

4.6 σελ. 257) Πόσο πρέπει να είναι το μέγεθος ενός τυχαίου δείγματος από Κανονικό πληθυσμό αν απαιτείται $|\bar{X}-\mu| < c$ με βαθμό εμπιστοσύνης γ. Να θεωρηθεί η διασπορά γνωστή.

Λύση:

$$P(|\bar{X}-\mu| < c) = \gamma \Rightarrow P(-c < \bar{X}-\mu < c) = \gamma \Rightarrow P\left(-\frac{c}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{c}{\sigma/\sqrt{n}} < Z < \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \gamma = 1-\alpha \Rightarrow \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{c}\right)^2.$$

4.7 σελ. 257) Δυο μηχανές κόβουν σιδηρές ράβδους. Δύο τυχαία δείγματα $n_1 = 41$, $n_2 = 31$ από παραγωγές των έδωσαν αντίστοιχα $\overline{X}_1 = 64cm$, $S_1 = 0.9cm$ και $\overline{X}_2 = 60cm$, $S_2 = 0.7cm$. Να κατασκευαστεί ένα 0.95 Δ.Ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ των μέσων μηκών των σιδηρών ράβδων.

Λύση:

Πρόκειται για Δ.Ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ με άγνωστες διασπορές . Επίσης ουδεμία πληροφορία έχουμε για ισότητα των διασπορών οπότε μπορούμε να τις θεωρήσουμε άνισες.

Το ζητούμενο Δ.Ε. τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{\nu,\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{\nu,\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \text{ , με}$$

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} \text{ και } \alpha = 0.05.$$

4.9 σελ. 258) Δυο μηχανές κατασκευάζουν πυκνωτές. Από τ.δ. μεγέθους $n_1 = 16$, $n_2 = 13$ από τις δύο μηχανές αντίστοιχα προέκυψαν: $\overline{X}_1 = 52\mu F$, $S_1 = 4\mu F$ και $\overline{X}_2 = 48\mu F$, $S_2 = 6\mu F$.

Να δοθούν :

α) Ένα 0.98 Δ.Ε. του λόγου $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

β) Ένα 0.95 Δ.Ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$.

Λύση:

α) Το ζητούμενο Δ.Ε. τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}}.$$

Από τους πίνακες της κατανομής F έχουμε ότι $F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2} = F_{15,12,0.01} = 4.01$, ενώ $\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}} = F_{n_2-1,n_1-1,\alpha/2} = F_{12,15,0.01} = 3.67$ και έτσι προκύπτει ότι $0.11 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1.63$.

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω Δ.Ε. περιέχει την τιμή 1 οπότε μπορούμε να δεχτούμε ισότητα των διασπορών.

β) Πρόκειται για Δ.Ε. της διαφοράς μ_1 - μ_2 με άγνωστες, αλλά λόγω του α) ίσες διασπορές . Με την βοήθεια των πινάκων έχουμε:

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2-t_{v,\alpha/2}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < \bar{X}_1-\bar{X}_2+t_{v,\alpha/2}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},$$

με $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{v}$, $v = n_1+n_2-2$ και $\alpha = 0.05$.

4.10 σελ. 258) Δέκα άτομα παρακολούθησαν πρόγραμμα βελτίωσης και ικανότητας απομνημόνευσης. Με ειδικό τεστ προσδιορίστηκε για κάθε άτομο ο βαθμός απομνημόνευσης πριν και μετά το πρόγραμμα. Τα αποτελέσματα δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

Πριν	62	56	74	87	82	68	76	65	73	81
Μετά	68	63	79	91	86	74	83	72	78	86

Να κατασκευαστεί ένα 0.80 Δ.Ε. της διαφοράς των μέσων βαθμών απομνημόνευσης πριν και μετά το πρόγραμμα.

Λύση:

Πρόκειται για Δ.Ε. της διαφοράς μ_1 - μ_2 συσχετισμένων πληθυσμών (τα ίδια άτομα πριν και μετά). Ο πίνακας παίρνει την μορφή:

Μετά	68	63	79	91	86	74	83	72	78	86
Πριν	62	56	74	87	82	68	76	65	73	81
Διαφορές D_i	6	7	5	4	4	6	7	7	5	5

Εύκολα υπολογίζουμε την μέση διαφορά $\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = 5.6$ και την διασπορά των διαφορών $S_D^2 = \frac{1}{n\text{-}1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2 = 1.17$, όπου n = 10.

Το ζητούμενο Δ.Ε. τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\overline{D} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}} < \mu_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - \mu_{\pi\rho\iota\nu} < \overline{D} + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}, \text{ με } \alpha=0.20$$

Από τους πίνακες της κατανομής t έχουμε ότι $t_{9,0.10} = 1.383$, οπότε $5.12 < \mu_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - \mu_{\pi\rho\iota\nu} < 6.08$. Παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο Δ.Ε. δεν περιλαμβάνει την τιμή 0, οπότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το πρόγραμμα πράγματι βελτιώνει την ικανότητα απομνημόνευσης των ατόμων.

4.11 σελ. 258) Τα παρακάτω δεδομένα αποτελούν πωλήσεις (σε δισεκ. Δολλάρια) ημιαγωγών ανά τρίμηνο από τις αρχές του 1985 έως τα μέσα του 1986.

		ΙΑΠΩΝΙΑ	ΗΠΑ
1985	1^o τρίμηνο	1881	2282
	2^o τρίμηνο	1888	2066
	3^o τρίμηνο	1853	1893
	4^o τρίμηνο	1976	1850
1986	1^o τρίμηνο	2229	1946
	2^o τρίμηνο	2631	2205

Να κατασκευαστεί 0.90 Δ.Ε. της διαφοράς των μέσων τριμηνιαίων πωλήσεων.

Λύση:

Όπως και στην προηγούμενη άσκηση έτσι και εδώ πρόκειται για Δ.Ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ συσχετισμένων πληθυσμών. Ο πίνακας παίρνει την μορφή:

		ΙΑΠΩΝΙΑ	ΗΠΑ	Διαφορές D_i
1985	1^o τρίμηνο	1881	2282	-401
	2^o τρίμηνο	1888	2066	-178
	3^o τρίμηνο	1853	1893	-40
	4^o τρίμηνο	1976	1850	126
1986	1^o τρίμηνο	2229	1946	283
	2^o τρίμηνο	2631	2205	426

Εύκολα υπολογίζουμε την μέση διαφορά $\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = 36$ και την διασπορά των διαφορών $S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2 = 304.55$, όπου n = 6.

Το ζητούμενο Δ.Ε. τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\overline{D} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}} < \mu_{ΙΑΠΩΝΙΑ} - \mu_{ΗΠΑ} < \overline{D} + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}, \text{ με } \alpha=0.10.$$

4.13 σελ. 259) Σε τυχαίο δείγμα 50 αντικειμένων βρέθηκαν 5 ελαττωματικά.

α) Να κατασκευαστεί ένα 0.95 Δ.Ε. του ποσοστού p των ελαττωματικών.

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέγεθος του δείγματος ώστε με πιθανότητα 0.95 το απόλυτο σφάλμα εκτίμησης $|\hat{p} - p|$ να είναι μικρότερο του 0.01;

Λύση:

α) Από την εκφώνηση προκύπτει ότι: $\hat{p} = \frac{5}{50} = 0.10$. Το ζητούμενο Δ.Ε. του ποσοστού p των ελαττωματικών τότε με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \text{ με } \alpha=0.05 \text{ και } n=50.$$

Με την βοήθεια του πίνακα της κανονικής κατανομής προκύπτει ότι $z_{\alpha/2}=1.96$, οπότε έχουμε $0.02 < p < 0.18$.

β)

$$P(\,|\hat{p}-p|<0.01\,)=0.95 \Rightarrow P\,(-0.01<\hat{p}-p<0.01)=0.95 \Rightarrow$$

$$P\,\left(\frac{-0.01}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}<\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}<\frac{0.01}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\right)=0.95 \Rightarrow$$

$$P\,\left(\frac{-0.01}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}<Z<\frac{0.01}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\right)=0.95 \Rightarrow \frac{0.01}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}=z_{0.05/2}=1.96 \Rightarrow n=3456.$$

4.16 σελ. 259) Δύο παραγωγικές διαδικασίες έδωσαν 12 και 20 ελαττωματικά αντικείμενα σε τυχαία δείγματα 300 και 400 αντικειμένων αντίστοιχα. Να κατασκευαστεί ένα 0.95 Δ.Ε. της διαφοράς p_1-p_2.

Λύση:

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι: $\widehat{p_1}=\frac{12}{300}=0.04$ και $\widehat{p_2}=\frac{20}{400}=0.05$. Το ζητούμενο Δ.Ε. της διαφοράς p_1-p_2 με την βοήθεια των πινάκων είναι:

$$\hat{p}_1-\widehat{p_2}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1}+\frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}}<p_1-p_2<\hat{p}_1-\widehat{p_2}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1}+\frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}}\,,$$

με α=0.05 και n_1=300, n_2=400.

5.8 σελ. 299) Με μια νέα μέθοδο προσδιορισμού του σημείου τήξης (σ.τ.) μετάλλων προέκυψαν οι παρακάτω μετρήσεις για το μαγγάνιο:

1267, 1262, 1267, 1263, 1258, 1263, 1268.

Να εξεταστεί αν η νέα μέθοδος σφάλει με ε.σ. 0.05, δεδομένου ότι το σ.τ. του μαγγανίου είναι 1260°C.

Λύση:

Έχουμε έναν αμφίπλευρο έλεγχο μέσου με άγνωστη διασπορά σε μικρό δείγμα (n=7):

$$H_o: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0, \text{ όπου } \mu_0 = 1260.$$

Εύκολα υπολογίζουμε το δειγματικό μέσο των παρατηρήσεων μας $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 1264$ καθώς και τη δειγματική διασπορά $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = 12.67$.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή (περιοχή απόρριψης της H_0) είναι:

$$K: |t| = \frac{|\overline{X}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2,n-1}, \text{ με } \alpha = 0.05.$$

Έτσι $|t| = 2.98$, ενώ από τους πίνακες της κατανομής t προκύπτει ότι $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,\,6} = 2.447$, οπότε απορρίπτουμε την H_0, δηλαδή η νέα μέθοδος σφάλει.

5.9 σελ. 299) Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν τα φορτία θραύσης (σε tn/cm^2) συνθετικών νημάτων δύο τύπων:

Τύπος I	1.2	0.3	0.8	0.5	0.4	0.9	1.0		
Τύπος II	1.4	1.5	1.1	1.0	0.8	1.7	0.9	0.7	0.6

Υποθέτοντας ισότητα διασπορών να εξεταστεί αν οι δύο τύποι νημάτων έχουν την ίδια μέση αντοχή σε ε.σ. 0.05.

Λύση:

Έχουμε έναν αμφίπλευρο έλεγχο ισότητας μέσων με άγνωστες αλλά κοινές διασπορές:

$$H_o: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2, \text{ με } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma.$$

Εύκολα προκύπτει ότι $\overline{X}_1$=0.73, $S_1^2 = 0.11$, n_1=7 και $\overline{X}_2$=1.08, $S_2^2 = 0.14$, n_2=9.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: |t| = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}}} > t_{\alpha/2,v},$$

με $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{v}$, $v = n_1+n_2-2$ και $\alpha = 0.05$.

Έτσι $|t| = 1.91$, ενώ από τους πίνακες της κατανομής t προκύπτει ότι $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,\,14} =$ 2.145, οπότε αποδεχόμαστε την H_0, δηλαδή οι δύο τύποι νημάτων έχουν την ίδια μέση αντοχή.

5.11 σελ. 299) Έξη συνθετικά νήματα κόπηκαν στη μέση. Στο ένα τμήμα από κάθε ζεύγος εφαρμόστηκε μία ειδική χημική επεξεργασία για την αύξηση της αντοχής του, ενώ το άλλο αφέθηκε όπως είχε. Με βάση τα παρακάτω δεδομένα, όπου x_1 εκφράζει το δείκτη αντοχής του τμήματος με χημική επεξεργασία και x_2 το δείκτη αντοχής του τμήματος χωρίς χημική επεξεργασία, να εξεταστεί αν αυξάνει κατά 2.0 τουλάχιστον μονάδες ο δείκτης αντοχής των τμημάτων με χημική επεξεργασία (α=0.10).

x_1	15.2	13.4	14.6	15.1	13.1	15.3
x_2	12.7	10.8	12.8	12.9	11.0	13.0

Λύση:

Έχουμε έναν έλεγχο διαφοράς μέσων εξαρτημένων δειγμάτων.

x_1	15.2	13.4	14.6	15.1	13.1	15.3
x_2	12.7	10.8	12.8	12.9	11.0	13.0
Διαφορές D_i	2.5	2.6	1.8	2.2	2.1	2.3

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 2 = \mu_D$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 2 = \mu_D.$$

Εύκολα προκύπτει ότι $\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = 2.25$ και $S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2 = 0.083$ με n=6.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: |t| = \frac{|\overline{D}-\mu_D|}{S_D/\sqrt{n}} > t_{\alpha,\, n-1}, \text{ με } \alpha = 0.10.$$

Έτσι |t| = 2.13, ενώ από τους πίνακες της κατανομής t προκύπτει ότι $t_{\alpha,n-1} = t_{0.10,\,5} = 1.476$, οπότε αποδεχόμαστε την H_0, δηλαδή πράγματι αυξάνει κατά 2.0 τουλάχιστον μονάδες ο δείκτης αντοχής των τμημάτων με χημική επεξεργασία.

5.12 σελ. 299) Σε προβλήματα ελέγχου ποιότητας εκτός από τη διατήρηση ενός σταθερού μέσου μας ενδιαφέρει και η διατήρηση της διασποράς σε χαμηλά επίπεδα, διότι διαφορετικά αυξάνει ο κίνδυνος απόρριψης του προϊόντος. Από την παραγωγή τυχαίο δείγμα μεγέθους n=16 έδωσε δειγματική απόκλιση S = 5.5. Αν η μεγαλύτερη επιτρεπόμενη τυπική απόκλιση είναι $\sigma_0 = 4$ να εξεταστεί αν η παραπάνω υπέρβαση είναι στατιστικά σημαντική ή όχι (α=0.05).

Λύση:

Έχουμε έναν έλεγχο διασποράς της μορφής

$$H_0: \sigma \leq 4 = \sigma_0$$
$$H_1: \sigma > 4 = \sigma_0.$$

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: |x^2| = \frac{(n-1)\, S^2}{\sigma_0^2} > X^2_{n-1,\,\alpha}, \text{ με } S^2 = 5.5^2, \text{ n=16 και } \alpha = 0.05.$$

Έτσι $|x^2|$ =28.36, ενώ από τους πίνακες της κατανομής χ^2 προκύπτει ότι $X^2_{n-1,\,\alpha} = X^2_{15,\,0.05} = 25.00$, οπότε απορρίπτουμε την H_0 και άρα η υπέρβαση είναι στατιστικά σημαντική.

5.13 σελ. 300) Δυο αναλυτές Α και Β έκαναν 6 μικροαναλυτικούς προσδιορισμούς της περιεκτικότητας σε άνθρακα ενός χημικού προϊόντος και πήραν τις ακόλουθες τιμές:

Αναλυτής Α	59.09	59.17	59.27	59.13	59.10	59.14
Αναλυτής Β	59.06	59.40	59.00	59.12	59.01	59.25

Να ελεγχθεί η υπόθεση Ho: $\sigma_1 = \sigma_2$ με εναλλακτική την H_1: $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (α=0.02).

Λύση:

Εύκολα προκύπτει ότι $S_A^2 = 4.28 \cdot 10^{-3}$, n_A=6 και $S_B^2 = 24.59 \cdot 10^{-3}$, n_B=6.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K:\ F = \frac{S_A^2}{S_B^2} > F_{n_A-1,\, n_B-1,\, \alpha/2} \ \text{ή}\ F = \frac{S_A^2}{S_B^2} < F_{n_A-1,\, n_B-1,\, 1-\alpha/2}.$$

Αλλά F = 5.75 και από τους πίνακες της κατανομής F έχουμε ότι $F_{n_A-1,n_B-1,\alpha/2} = F_{5,5,0.01} =$ 10.97, ενώ $F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2} = \dfrac{1}{F_{n_2-1,n_1-1,\alpha/2}} = \dfrac{1}{F_{5,5,0.01}} = \dfrac{1}{10.97} = 0.09$, οπότε αποδεχόμαστε την H_0.

5.15 σελ. 300) Κατασκευαστής ισχυρίζεται ότι το πολύ 2% των προϊόντων του είναι ελαττωματικά. Σε τυχαίο δείγμα μεγέθους n=900 βρέθηκαν κ=27 ελαττωματικά. Με ε.σ. α=0.05 να ελεγχθεί ο ισχυρισμός του κατασκευαστή με εναλλακτική υπόθεση την H_1: p>0.02.

Λύση:

Έχουμε τον παρακάτω έλεγχο:

$$H_0: p \leq 0.02 = p_0$$

$$H_1: p > 0.02 = p_0.$$

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι $\hat{p} = \frac{27}{900} = 0.03$ και n=900.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: Z= \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > z_\alpha, \text{ με } \alpha = 0.05.$$

Έτσι Z=2.14 και από τους πίνακες της κανονικής κατανομής προκύπτει ότι z_α =1.64, οπότε απορρίπτουμε την H_0 και τον ισχυρισμό του κατασκευαστή.

5.16 σελ. 300) Από την παραγωγή δύο μηχανών τυχαία δείγματα μεγέθους n_1=450 και n_2=400 έδωσαν αριθμό ελαττωματικών προϊόντων 17 και 12 αντίστοιχα. Να εξεταστεί αν υπάρχει διαφορά στα ποσοστά παραγωγής ελαττωματικών προϊόντων από τις δύο μηχανές.

Λύση:

Έχουμε τον παρακάτω έλεγχο:

$$H_0: p_1 = p_2$$
$$H_1: p_1 \neq p_2.$$

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι $\widehat{p_1} = \frac{17}{450} = 0.038$ και $\widehat{p_2} = \frac{12}{400} = 0.03$.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: |Z|= \frac{|\widehat{p_1}-\widehat{p_2}|}{\sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})\cdot(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} > z_{\alpha/2},$$

με $\tilde{p} = \frac{17+12}{450+400} = 0.034$ και α = 0.05.

Έτσι $|Z|=0.64$ και από τους πίνακες της κανονικής κατανομής προκύπτει ότι $z_{\alpha/2}=1.96$, οπότε αποδεχόμαστε την H_0 για την μη ύπαρξη διαφοράς στα ποσοστά παραγωγής ελαττωματικών προϊόντων από τις δύο μηχανές.

5.19 σελ. 301) Τα παρακάτω δεδομένα εκφράζουν το χρόνο διαδρομής X (sec) ενός γερανού – γέφυρα. Να εξεταστεί σε ε.σ. α=0.05 αν ο χρόνος διαδρομής ακολουθεί την ομοιόμορφη στο διάστημα (40,90) κατανομή.
82, 63, 58, 67, 75, 44, 48, 77, 86, 51, 74, 69, 56, 42, 68, 73, 85, 89, 45, 65, 72, 83, 64, 48, 58, 63.

Λύση:

Η ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (40,90) έχει σ.π.π. την εξής:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{90\text{-}40}=0.2, & x \in (40, 90) \\ 0, \; x \notin (40, 90) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη κατανομή δεν έχει καμία παράμετρο ως προς εκτίμηση.

Εύκολα κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα:

$x_{i-1} < x \le x_i$	O_i	$\widehat{p_i}$	$\widehat{E_i} = n \cdot \widehat{p_i}$
40-50	5	0.2	5.2
51-60	4	0.2	5.2
61-70	7	0.2	5.2
71-80	5	0.2	5.2
81-90	5	0.2	5.2
Σύνολο	26 = n	1.0	-

Με βάση το κριτήριο χ^2 καλής προσαρμογής έχουμε:

$$X^2 = \frac{(5-5.2)^2}{5.2} + \frac{(4-5.2)^2}{5.2} + \frac{(7-5.2)^2}{5.2} + \frac{(5-5.2)^2}{5.2} + \frac{(5-5.2)^2}{5.2} = 0.931 < X^2_{5-1-0,0.05} = 9.488,$$

οπότε η υπόθεση ότι ο χρόνος διαδρομής ακολουθεί την ομοιόμορφη στο διάστημα (40,90) κατανομή γίνεται δεκτή.

5.20 σελ. 300) Μετρήσεις του αριθμού X των χρηστών τερματικών μονάδων σε μία αίθουσα τερματικών ενός κέντρου Η/Υ ελήφθησαν σε τυχαίες χρονικές στιγμές μεταξύ 10.00 και 12.00 μ. Τα αποτελέσματα δίνονται από τον παρακάτω πίνακα κατανομών συχνοτήτων.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	1	3	5	9	10	7	5	4	3	2	1

Να ελεγχθεί αν ο αριθμός X ακολουθεί την κατανομή Poisson (α=0.05).

Λύση:

Η κατανομή Poisson έχει σ.μ.π. την εξής:

$$f(x) = P(X=x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \ x = 0,1,2,\ldots$$

Θυμίζουμε επίσης ότι στην συγκεκριμένη κατανομή η άγνωστη παράμετρος λ ισούται με την μέση τιμή της τ.μ. X.

Έτσι εύκολα κατασκευάζουμε το ακόλουθο πίνακα:

X_i	O_i	$X_i \cdot O_i$	$\widehat{p_i}$	$\widehat{E_i} = n \cdot \widehat{p_i}$
0	1	0	0.0110	0.555
1	3	3	0.0500	2.500
2	5	10	0.1125	5.625
3	9	27	0.1687	8.435
4	10	40	0.1898	9.490
5	7	35	0.1708	8.540
6	5	30	0.1281	6.405
7	4	28	0.0824	4.120
8	3	24	0.0463	2.315
9	2	18	0.0232	1.160
10	1	10	0.0171	0.855
ΣΥΝΟΛΟ	50=n	225	1.00	-

Οι πιθανότητες στην τέταρτη στήλη του πίνακα έχουν προκύψει με βάση την σ.μ.π. της Poisson, δηλαδή $\widehat{p_i} = e^{-\hat{\lambda}} \cdot \frac{\hat{\lambda}^i}{i!}$, για i = 0,1,…9 και $\hat{\lambda} = \overline{X} = \frac{225}{50} = 4.5$, ενώ $\widehat{p_{10}} = 1 - \sum_{i=1}^{9} \widehat{p_i}$.

Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω πίνακα υπάρχουν $\widehat{E_i} < 5$. Έτσι αποφασίζουμε να ενώσουμε τις 3 πρώτες (0.555+2.500+5.625 = 8.690) και τις 4 τελευταίες (4.120+2.315+1.160+0.855 = 12.570) κλάσεις, οπότε προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας με 6 συνολικά κλάσεις:

X_i	O_i	$\widehat{E_i} = n \cdot \widehat{p_i}$
0 - 2	9	8.680
3	9	8.435
4	10	9.490
5	7	8.540
6	5	6.405
7-10	10	12.570
ΣΥΝΟΛΟ	50=n	-

Με βάση το κριτήριο χ^2 καλής προσαρμογής έχουμε:

$$X^2 = \frac{(9-8.680)^2}{8.680} + \frac{(9-8.435)^2}{8.435} + \frac{(10-9.490)^2}{9.490} + \frac{(7-8.540)^2}{8.540} + \frac{(5-6.405)^2}{6.405} + \frac{(10-12.570)^2}{12.570} =$$

$= 1.1883 < X^2_{6-1-1,0.05} = 9.488$,

οπότε η υπόθεση ότι ο αριθμός X ακολουθεί την κατανομή Poisson γίνεται δεκτή.