ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ονομάζουμε *δειγματικό χώρο* Ω το σύνολο των αποτελεσμάτων ενός πειράματος. Αποφεύγοντας μετροθεωρητικούς όρους, *ενδεχόμενο* ονομάζεται κάθε υποσύνολο Ε του δειγματικού χώρου Ω το οποίο έχει, άμεσα ή έμμεσα, προσδιορίσιμη πιθανότητα. Πιο αυστηρά, ένα ενδεχόμενο Ε απαιτείται να ανήκει σε μια *οικογένεια* $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του δειγματικού χώρου Ω η οποία είναι *κλειστή* ως προς τις δύο συνολοθεωρητικές πράξεις "*συμπλήρωμα*" και (αριθμήσιμη) "*ένωση*". Η πιθανότητα, ως συνολοσυνάρτηση πάνω στα στοιχεία του $\mathcal{F}$, ικανοποιεί τα παρακάτω τρία αξιώματα:

A1. $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο Α.

A2. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ όταν $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j = 1, 2, \ldots$

A3. $P(\Omega) = 1$.

Ο δειγματικός χώρος Ω, θεωρούμενος ως ενδεχόμενο, ονομάζεται *βέβαιο* ενδεχόμενο, ενώ το κενό σύνολο ∅ ονομάζεται *αδύνατο* ενδεχόμενο. Έστω τώρα Α και Β δύο ενδεχόμενα. Εάν έχουμε $A \cap B$ (=AB) = ∅, τα ενδεχόμενα Α και Β ονομάζονται *ασυμβίβαστα* (ή απλώς ξένα). Ο όρος *ασυμβίβαστα* όταν χρησιμοποιείται για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα A, B, C κλπ. είναι με την έννοια ότι το καθένα από αυτά αποκλείει οποιοδήποτε άλλο. Είναι δηλαδή τα ενδεχόμενα αυτά ανά ζεύγη ξένα και συνεπώς αμοιβαία αποκλειόμενα (*αμοιβαία ασυμβίβαστα*). Εάν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι συμπληρωματικά, εάν δηλαδή $A \cup B = \Omega$ και $A \cap B = \emptyset$, τότε τα ενδεχόμενα Α και Β ονομάζονται *αντίθετα*. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $B = A^c$ ή, ισοδύναμα, $A = B^c$. Ως άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων Α1, Α2 και Α3 προκύπτουν τα ακόλουθα βασικά αποτελέσματα:

- $P(\emptyset) = 0$.
- $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- $P(AB^c) = P(A-B) = P(A) - P(AB)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
- $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(AB)$.
- $P(A^c B^c) = 1 - P(A \cup B)$.

Θεώρημα *(Γενικευμένος Αθροιστικός τύπος)*. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A_1, A_2, ..., A_n ισχύει η σχέση

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_iA_j) + \sum\sum\sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_iA_jA_k) - \ldots$$

$$+ (-1)^{(n-1)}P(A_1A_2 \ldots A_n).$$

Ορισμός (*Δεσμευμένη Πιθανότητα*). Με $P(B) > 0$, η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχόμενου A δεδομένου του B ορίζεται ως:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Θεώρημα (*Πολλαπλασιαστικός Τύπος*). Με $P(A)$, $P(B) > 0$ ισχύουν τα παρακάτω:

$$P(AB) = P(A|B)\, P(B) = P(B|A)\, P(A).$$

Από τον πολλαπλασιαστικό τύπο και τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας προκύπτει η ακόλουθη σχέση όταν $P(A)$, $P(B) > 0$:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Θεώρημα (*Ολικής Πιθανότητας*). Αν B_1, B_2,… είναι ακολουθία ασυμβίβαστων (ξένων) ενδεχομένων με $\bigcup_i B_i = \Omega$ και $P(B_i) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, τότε $\forall$ ενδεχόμενο A έχουμε:

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

Παρατήρηση: Το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας ισχύει και στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε $A \subset \bigcup_i B_i \subset \Omega$.

Θεώρημα (*Bayes*). Αν B_1, B_2,… είναι ακολουθία ασυμβίβαστων ενδεχομένων με $\bigcup_i B_i = \Omega$ και $P(B_i) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, τότε $\forall$ ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$ έχουμε

$$P(Bk|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Παρατήρηση: Όπως και στο Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έτσι και εδώ το Θεώρημα ισχύει επίσης και όταν $A \subset \bigcup_i B_i \subset \Omega$.

Θεώρημα (*Γενικευμένος Πολλαπλασιαστικός Τύπος*).

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1}),$$

όταν $P(A_1A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$.

<u>Ανεξαρτησία Ενδεχομένων</u>:

Ορισμός (*Ανεξαρτησία δύο Ενδεχομένων*). Τα ενδεχόμενα A και B καλούνται ανεξάρτητα όταν $P(AB) = P(A)P(B)$.

Με $P(A), P(B) > 0$ έχουμε τις παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B).$$

Ισχύουν επίσης:

- $\varnothing$ και A είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.
- Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα με θετικές πιθανότητες είναι, εξ ορισμού εξαρτημένα.
- A, B ανεξάρτητα ενδεχόμενα $\Leftrightarrow$ A, B^c ανεξάρτητα ενδεχόμενα $\Leftrightarrow$ A^c, B ανεξάρτητα ενδεχόμενα $\Leftrightarrow$ A^c, B^c ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Ορισμός (*Ανά δύο Ανεξαρτησία Πολλών Ενδεχομένων*). Τα ενδεχόμενα A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ καλούνται ανά δύο ανεξάρτητα όταν $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$, $\forall\ i \neq j = 1, 2, \ldots$.

Ορισμός (*Πλήρης Ανεξαρτησία Πολλών Ενδεχομένων*). Τα ενδεχόμενα A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ καλούνται (πλήρως) ανεξάρτητα όταν $\forall$ σύνολο δεικτών $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in N$, $P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P\left(A_j\right)$.

Παρατήρηση: Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots$ είναι πλήρως ανεξάρτητα $\Rightarrow$ Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots$ είναι ανά δύο ανεξάρτητα (το αντίστροφο δεν ισχύει).