ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Ορισμός (*Τυχαία Μεταβλητή*). Ονομάζουμε *τυχαία μεταβλητή* (τ.μ.) κάθε απεικόνιση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ για την οποία το σύνολο $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}$ έχει προσδιορίσιμη πιθανότητα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τούτο σημαίνει ότι η αντίστροφη εικόνα $X^{-1}(-\infty, x] \in \mathcal{F}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός (*Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας*). Ονομάζουμε *συνάρτηση κατανομής πιθανότητας* (σ.κ.π.) της τ.μ. X την:

$$F(x) = P(X \le x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

__Ιδιότητες:__

1. $0 \le F(x) \le 1$,
2. $F(x_1) \le F(x_2)$ όταν $x_1 \le x_2$,
3. $F(x_n) \downarrow F(x)$ όταν $x_n \downarrow x$, δηλαδή η F είναι δεξιά συνεχής,
4. $F(-\infty) \equiv \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ και $F(\infty) \equiv \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Αντίστροφα αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση F, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες 2, 3 και 4 είναι σ.κ.π.

__**i) Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές**__**:**

Μια τ.μ. X καλείται *διακριτή* αν παίρνει με πιθανότητα 1 πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο τιμών $\{x_0, x_1, \ldots\}$, δηλαδή:

$$P(X \in \{x_0, x_1, \ldots\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = x_k) = 1.$$

Η συνάρτηση $f(x_k) = P(X = x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, καλείται *συνάρτηση μάζας πιθανότητας* (σ.μ.π.) της τ.μ. X και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $f(x_k) \ge 0, \ \forall\ k = 0, 1, 2, \ldots$,
2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(x_k) = 1$.

Αντίστροφα αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες 1 και 2 είναι σ.μ.π.

Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ \sum\limits_{k=0}^{r} f(x_k), & x_r \le x < x_{r+1}, \ r = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

και

$$f(x_k) = \begin{cases} F(x_0), & k = 0, \\ F(x_k) - F(x_{k-1}), & k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Ισχύουν επίσης τα παρακάτω με $a < b$:

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$,
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$,
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$,
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) + P(X = a) - P(X = b)$.

Παράμετροι κατανομής:

Έστω X μία διακριτή τ.μ. με τιμές $\{x_0, x_1, \ldots\}$ και σ.μ.π. $f(x_k) = P(X = x_k)$, $k = 0,1,\ldots$.

Λέγεται ότι η X έχει (πεπερασμένη) μέση τιμή όταν

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|\, f(x_k) < \infty.$$

Τότε η **μέση τιμή** αυτής ορίζεται ως:

$$\mu = E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f(x_k).$$

Έστω $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Τότε ισχύει:

$$E[g(X)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k) f(x_k),$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(x_k)| f(x_k) < \infty.$$

Λέγεται ότι η υπάρχει η ροπή ν-τάξης περί την αρχή της τ.μ. X, $\nu \in \mathbb{N}$, όταν $E[|X|^\nu] < \infty$. Τότε η **ροπή ν-τάξης περί την αρχή** ορίζεται ως:

$$\mu'_\nu = E[X^\nu] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^\nu f(x_k).$$

Έστω ότι η τ.μ. X έχει πεπερασμένη μέση τιμή $\mu = E[X]$. Λέγεται ότι η υπάρχει η κεντρική ροπή ν-τάξης, $\nu \in \mathbb{N}$, όταν $E[|X - \mu|^\nu] < \infty$. Τότε η **κεντρική ροπή ν-τάξης** ορίζεται ως:

$$\mu_\nu = E[(X - \mu)^\nu] = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - \mu)^\nu f(x_k).$$

Ειδικά η κεντρική ροπή $2^{ης}$-τάξης ονομάζεται **διασπορά** και συμβολίζεται σ^2 ή $V[X]$. Έχουμε συνεπώς

$$\sigma^2 = V[X] = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - \mu)^2 f(x_k).$$

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς ονομάζεται **τυπική απόκλιση** και συμβολίζεται με σ ($\sigma \geq 0$).

ii) Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές:

Μια τ.μ. X καλείται *συνεχής* αν υπάρχει πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$:

1. $f(x) \geq 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Η συνάρτηση f καλείται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* (σ.π.π.) της τ.μ. X.

Αντίστροφα αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες 1 και 2 είναι σ.π.π.

Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

- $P(X = a) = 0, \ \forall \ a \in \mathbb{R}$.
- $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.
- $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$, όπου η παράγωγος υπάρχει.
- $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$

$$= \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a), \ \forall \ a < b \in \mathbb{R}.$$

Παράμετροι κατανομής:

Έστω X μία συνεχής τ.μ. και σ.π.π. f(x).

Λέγεται ότι η X έχει (πεπερασμένη) μέση τιμή όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx < \infty.$$

Τότε η **μέση τιμή** ορίζεται ως:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

Έστω g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Τότε ισχύει:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx,$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, f(x)dx < \infty.$$

Λέγεται ότι η υπάρχει η ροπή ν-τάξης περί την αρχή, $\nu \in \mathbb{N}$, όταν $E[|X|^{\nu}] < \infty$. Τότε η **ροπή ν-τάξης περί την αρχή** ορίζεται ως:

$$\mu'_{\nu} = E[X^{\nu}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\nu} f(x)dx.$$

Έστω ότι η X έχει πεπερασμένη μέση τιμή μ = E[X]. Λέγεται ότι η υπάρχει η κεντρική ροπή ν-τάξης αυτής, $\nu \in \mathbb{N}$, όταν $E(|X\text{-}\mu|^{\nu}) < \infty$. Τότε η **κεντρική ροπή ν-τάξης** ορίζεται ως:

$$\mu_{\nu} = E[(X\text{-}\mu)^{\nu}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x\text{-}\mu)^{\nu} f(x)dx.$$

Ειδικά η κεντρική ροπή $2^{ης}$-τάξης ονομάζεται **διασπορά** και συμβολίζεται σ^2 ή V(X).

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x\text{-}\mu)^2 f(x)dx.$$

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς συμβολίζεται με σ ($\sigma \geq 0$) και ονομάζεται **τυπική απόκλιση**.

<u>Ιδιότητες Μέσης Τιμής και Διασποράς</u>:

- Έστω X = α με πιθανότητα 1. Τότε E[X] = α.
- Έστω α, β $\in \mathbb{R}$ και X, Y τ.μ. με (πεπερασμένες) μέσες τιμές. Τότε η τ.μ. αX+βY έχει (πεπερασμένη) μέση τιμή και ισχύει:

  $$E[\alpha X+\beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y].$$

- Έστω X τ.μ. και g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι μέσες τιμές E[g(X)] και E[h(X)] ισχύει:

  $$E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)].$$

- Έστω $\alpha_i \in \mathbb{R}$, g_i: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $i = 1, 2, ..., \nu$ και X τ.μ. Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι $E[g_i(X)]$ με $i = 1, 2, ..., \nu$ ισχύει:

  $$E[\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i g_i(X)\,] = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i E[g_i(X)].$$

- Αν υπάρχει η ροπή ν-τάξης περί την αρχή, δηλαδή αν $E[|X|^{\nu}] < \infty$, τότε και $E[|X|^{m}] < \infty$, $\forall\, m < \nu$.
- Έστω X = α με πιθανότητα 1. Τότε V[X] = 0.
- Έστω α, β $\in \mathbb{R}$ και X τ.μ. Τότε $V[\alpha X+\beta] = \alpha^2 V[X]$.
- Έστω X τ.μ. με πεπερασμένη $E[X^2]$. Τότε η V[X] είναι πεπερασμένη και ισχύει:

  $$V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2.$$

Θεώρημα (*Ανισότητα Markov*). Έστω X τ.μ. και Y = g(X) μια μη αρνητική τ.μ. Αν υπάρχει η E[g(X)] τότε $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$P(g(X) \geq \alpha) \leq \frac{E[g(X)]}{\alpha}.$$

Πόρισμα (*Ανισότητα Chebyshev*). Έστω X τ.μ. της οποίας υπάρχει η $E[X] = \mu$ και η $V[X] = \sigma^2$. Τότε $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}^+$

$$P(|X-\mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$