ΤΡΟΠΟΙ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΚΑΙ ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Ορισμοί:

α) Η ακολουθία συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας $\{F_n,\ n=1,2,...\}$ λέγεται ότι *συγκλίνει ασθενώς* στη συνάρτηση κατανομής F, $F_n \xrightarrow{w} F$, εάν $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, $\forall$ x σημείο συνέχειας της F.

β) Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n=1,2,...\}$ λέγεται ότι *συγκλίνει κατά νόμο* στην τυχαία μεταβλητή X, $X_n \xrightarrow{D} X$, όταν $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$, όπου $\{F_{X_n},\ n=1,2,...\}$ η ακολουθία των συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας των X_n και F_X η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της X.

γ) Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n=1,2,...\}$ λέγεται ότι *συγκλίνει κατά πιθανότητα* στην τυχαία μεταβλητή X, $X_n \xrightarrow{P} X$, εάν $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, $\forall\ \varepsilon > 0$.

δ) Έστω $\{X_n,\ n=1,2,...\}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Θα λέμε ότι *συγκλίνει σχεδόν βεβαίως* στην τυχαία μεταβλητή X, $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, εάν $P(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| = 0) = 1$.

ε) Έστω $\{X_n,\ n=1,2,...\}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Θα λέμε ότι *συγκλίνει κατά τετραγωνικό μέσο* στην τυχαία μεταβλητή X, $X_n \xrightarrow{s.m.} X$, εάν $\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0$.

Παρατήρηση: Αποδεικνύεται ότι η σύγκλιση κατά πιθανότητα συνεπάγεται τη σύγκλιση κατά κατανομή, ενώ τόσο η σχεδόν βεβαία σύγκλιση όσο και η σύγκλιση κατά τετραγωνικό μέσο συνεπάγονται τη σύγκλιση κατά πιθανότητα. Δεν υπάρχει διάταξη μεταξύ σχεδόν βεβαίας σύγκλισης και σύγκλισης κατά τετραγωνικό μέσο.

Θεώρημα (*Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών*). Έστω $\{X_n,\ n=1,2,..\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή μ. Έστω επίσης $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_1^n X_i$. Τότε $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Θεώρημα (*Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών*). Έστω $\{X_n,\ n=1,2,..\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη μέση τιμή μ. Έστω $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_1^n X_i$. Τότε $\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$.

Θεώρημα (*Κεντρικό Οριακό Θεώρημα*). Έστω $\{X_n,\ n=1,2,..\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Έστω επίσης $S_n = \sum_1^n X_i$. Τότε $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$.