



Στοχαστικές Ανελιξίες- 13 Φεβρουαρίου 2015

**ΑΣΚΗΣΗ 1** Θεωρήστε έναν απλό συμμετρικό τυχαίο περίπατο στο  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  με ανακλαστικό φράγμα στο 0. Δηλαδή,  $p(x, x+1) = p(x, x-1) = 1/2$  για κάθε  $x \in \mathbb{N}$  και  $p(0, 1) = 1$ . Ορίζουμε  $T_x$  τον χρόνο πρώτης άφιξης στο  $x$ , δηλαδή  $T_x = \inf\{k \geq 0 : X_k = x\}$ . Υπολογίστε την  $\mathbb{E}[T_N | X_0 = N-1]$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 2** Δίνεται μια αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- α) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.
- β) Ποια είναι η μοναδική αναλλοίωτη κατανομή  $\pi_*$  της αλυσίδας;
- γ) Αν  $X_0 = 7$  ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα  $\mathbb{P}[X_{2015} = 7]$ ; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.
- δ) Αν  $X_0 = 7$  ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων μέχρι την πρώτη επιστροφή στο 7;
- ε) Αν  $X_0 = 1$  ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων στην κατάσταση 3 μέχρι η αλυσίδα να απορροφηθεί από κλειστή κλάση;

**ΑΣΚΗΣΗ 3** Ένας παντοπώλης εφοδιάζεται με μπισκότα κάθε Δευτέρα πρωί και φροντίζει ώστε να έχει 5 πακέτα από ένα τύπο μπισκότων στην αρχή κάθε εβδομάδας. Εκτιμά δε ότι η ημερήσια ζήτηση για τα μπισκότα αυτού του τύπου (σε πακέτα) είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο σύνολο  $\{0, 1, 2\}$  και συνάρτηση μάζας πιθανότητας  $p(0) = 1/2$ ,  $p(1) = 1/3$ ,  $p(2) = 1/6$ . Με την βοήθεια μιας μαρκοβιανής αλυσίδας στον χώρο καταστάσεων  $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα.

- α) Ποια είναι η πιθανότητα τα μπισκότα να έχουν εξαντληθεί το πρωί της Παρασκευής;
- β) Αν κάποια Δευτέρα αποφασίσει να εφοδιαστεί για τελευταία φορά ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ημερών μέχρι να εξαντληθούν τα μπισκότα;

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες  
**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**