ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στοχαστικές Ανελίξεις- 28 Αυγούστου 2014

Ζήτημα 1 Δίνεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P}$ μιας μαρκοβιανής αλυσίδας στον $\mathbb{X} = \{s_1, \dots, s_5\}$, $p \in (0,1)$.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

α) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας, και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.

β) Αν $T_i = \inf\{k \geq 0 : \ X_k = s_i\}$ είναι ο χρόνος πρώτης άφιξης στην κατάσταση s_i υπολογίστε την πιθανότητα

$$\mathbb{P}\big[T_1 < T_5 \mid X_0 = s_3\big].$$

γ) Αν $T = \min\{T_1, T_5\}$ είναι ο χρόνος άφιξης στο $\{s_1, s_5\}$ υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[T \mid X_0 = s_3\big]$.

δ) Αν έχετε ένα κέρμα που φέρνει κορώνα με πιθανότητα $p \neq 1/2$, μπορείτε με τη βοήθεια της παραπάνω αλυσίδας να φτιάξετε ένα αλγόριθμο που μιμείται το στρίψιμο ενός *τίμιου* κέρματος; Συγκεκριμένα θέλουμε ο αλγόριθμος τερματίζει με πιθανότητα 1 σε πεπερασμένο χρόνο, και με πιθανότητα 1/2 σε καθεμία από δύο δυνατές τελικές καταστάσεις.

Ζήτημα 2 Θεωρήστε δύο ανεξάρτητους τυχαίους περίπατους στους ακεραίους $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Δίνεται ότι $X_0 = 0$, $Y_0 = 2$, και για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, ενώ $Y_n = 2 + \sum_{k=1}^n \zeta_k$, όπου οι $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ και $\{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με

$$\mathbb{P}[\xi_k = 1] = \mathbb{P}[\xi_k = -1] = \frac{1}{2}, \qquad \text{ενώ} \qquad \mathbb{P}[\zeta_k = 1] = \frac{3}{5},\ \mathbb{P}[\zeta_k = -1] = \frac{2}{5},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Για $n \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε $Z_n = \frac{Y_n - X_n}{2}$.
α. Δείξτε ότι ο Z_n είναι τυχαίος περίπατος στους ακεραίους με $p_{k,k+1} = \frac{3}{10}$, $p_{k,k} = \frac{1}{2}$, $p_{k,k-1} = \frac{1}{5}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
β. Είναι η αλυσίδα Z_n περιοδική ή απεριοδική; δικαιολογήστε την απάντησή σας.
γ. Είναι η αλυσίδα Z_n επαναληπτική ή παροδική; δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ζήτημα 3 Ένας παίκτης του μπάσκετ προπονείται στα τρίποντα. Έχετε παρατηρήσει ότι η πιθανότητα να ευστοχήσει σε ένα σουτ είναι ίση με $\frac{1}{2+k}$ αν έχει αστοχήσει σε k από τα δύο προηγούμενα σουτ που έχει επιχειρήσει ($k \in \{0, 1, 2\}$). Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $X_n = 1$ αν το n-οστό σουτ του παίκτη είναι εύστοχο και 0 διαφορετικά.

α. Είναι η ακολουθία $\{X_n\}$ μαρκοβιανή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
β. Είναι η αλυσίδα $Y_n = (X_n, X_{n+1})$ μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$; Ποιες είναι οι πιθανότητες μετάβασης;
γ. Ποια είναι η αναλλοίωτη κατανομή αυτής της αλυσίδας;
δ. Σε βάθος χρόνου τι ποσοστό από τα σουτ του είναι εύστοχα;

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!