



Στοχαστικές Ανελιξίες- 24 Σεπτεμβρίου 2014

Ζήτημα 1 Μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ έχει πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 & 9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

- α) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.
β) Αν η αλυσίδα ξεκινά στην κατάσταση 1 ποια είναι η πιθανότητα να την ξαναβρούμε στην κατάσταση 1 μετά από ένα μεγάλο αριθμό βημάτων; Δηλαδή, ποιο είναι το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = 1 \mid X_0 = 1]$;
γ) Αν η αλυσίδα ξεκινά στην κατάσταση 5 ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος εξόδου από την κλάση της 5;
δ) Αν η αλυσίδα βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση 5 ποια είναι η πιθανότητα να την βρούμε στην κατάσταση 1 μετά από ένα μεγάλο αριθμό βημάτων;

Ζήτημα 2 Μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ έχει πιθανότητες μετάβασης

$$p(x, x+1) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad p(x, 0) = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{N}_0.$$

- α) Δείξτε ότι η $\pi(\cdot)$ με $\pi(k) = \frac{1}{2^{k+1}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ είναι αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας. Είναι αυτή η μοναδική αναλλοίωτη κατανομή;
β) Είναι η αλυσίδα επαναληπτική; Είναι γνήσια επαναληπτική; Είναι απεριοδική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
γ) Δείξτε ότι το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

υπάρχει με πιθανότητα 1 και υπολογίστε το. (Υπόμνηση: $\sum_{k=1}^{\infty} k a^{k-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$, $\forall a \in (-1, 1)$.)

δ) Εξηγήστε πώς θα μπορούσατε, προσομοιώνοντας αυτήν την αλυσίδα, να υπολογίσετε αριθμητικά το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n+n}}}.$$

Ζήτημα 3 Επαναλαμβάνουμε ρίψεις ενός ζαριού και ορίζουμε S_n το άθροισμα των ενδείξεων στις n πρώτες ζαριές μας. Ορίζουμε $T = \inf\{n > 0 : \text{το } S_n \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 5\}$. Υπολογίστε την $\mathbb{E}[T]$.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!