ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι για την Δευτέρα 5/5/2014

Άσκηση 1 Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X}=\{1,2,3\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X_n=1\;|X_0=1\big]$ στις περιπτώσεις: α) $p=1/16$, β) $p=1/6$, γ) $p=1/12$.

Άσκηση 2 Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}=\{1,2,3,4\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/12 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αν π_n είναι η κατανομή της αλυσίδας μετά από n βήματα, δείξτε ότι ανεξάρτητα από την αρχική της κατανομή π_0, έχουμε $\pi_n\to\pi_*$ για κάποια κατανομή π_* που θα προσδιορίσετε. Δείξτε επιπλέον ότι $\|\pi_n-\pi_*\|\le C(n+1)2^{-n}$ για κάποια σταθερά $C>0$.

Άσκηση 3 Ένα ηλεκτονικό ζάρι είναι προγραμματισμένο ώστε σε κάθε ζαριά η πιθανότητα να φέρουμε ό,τι και στην προηγούμενη είναι 1/11, ενώ τα υπόλοιπα 5 δυνατά αποτελέσματα έχουν όλα πιθανότητα 2/11. Αν η πρώτη ζαριά που φέρνουμε είναι 6, ποια είναι η πιθανότητα η n-οστή ζαριά μας να είναι πάλι 6;

Άσκηση 4 Βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας της μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβασης

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ταξινομήστε τις κλάσεις σε ανοιχτές και κλειστές.

Άσκηση 5 Θεωρήστε μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ στο σύνολο καταστάσεων $\mathbb{X}=\{1,2,\dots,8\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

α) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας. Ποιες κλάσεις είναι ανοιχτές και ποιες κλειστές;
β) Αν $X_0=1$ υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X_n=k\big]$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και κάθε $k\in\mathbb{X}$.

Άσκηση 6 Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P_X. Στον ίδιο χώρο καταστάσεων κατασκευάζουμε μια καινούργια αλυσίδα $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ -μια ράθυμη εκδοχή της $\{X_n\}$- ως εξής: πριν από κάθε βήμα στρίβουμε ένα νόμισμα με πιθανότητα να φέρει κεφαλή q $(0<q<1)$, ανεξάρτητα από ό,τι έχει συμβεί μέχρι τότε. Αν έρθει κεφαλή αφήνουμε την Y_n στην ίδια κατάσταση, ενώ αν έρθει γράμματα αποφασίζουμε ποια θα είναι η επόμενη κατάστασή της σύμφωνα με τις πιθανότητες μετάβασης της $\{X_n\}$.

α) Δείξτε ότι ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης της Y είναι

$$P_Y = qI + (1-q)P_X.$$

β) Πώς σχετίζονται οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του P_Y με αυτά του P_X;

γ) Δείξτε ότι αν η $\{X_n\}$ έχει κατανομή ισορροπίας π_* τότε και η $\{Y_n\}$ έχει την ίδια κατανομή ισορροπίας. Το περιμένατε αυτό διαισθητικά;

δ) Ορίζουμε μια νέα μαρκοβιανή αλυσίδα $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ στο $\mathbb{N}_0$ με $N_0 = 0$ και πιθανότητες μετάβασης $p(n,n) = q,\ p(n,n+1) = 1-q$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Δείξτε ότι η

$$Z_n = X_{N_n}$$

είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P_Y. Είναι τώρα φανερό το αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ);

Άσκηση 7 Στην άσκηση αυτή θέλουμε να προσομοιώσουμε στον υπολογιστή μια μαρκοβιανή αλυσίδα σ' ένα πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, \ldots, N\}$. Υποθέστε αρχικά ότι έχουμε μια συνάρτηση

$$G : \mathbb{X} \times [0,1] \to \mathbb{X},$$

αύξουσα ως προς την δεύτερη μεταβλητή της, δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{X}$ και $0 \le s \le t \le 1$ έχουμε $G(x,s) \le G(x,t)$, και μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1].
α) Αν η X_0 είναι μια τ.μ. με τιμές στον $\mathbb{X}$ και ορίσουμε

$$X_n = G\big(X_{n-1}, \xi_n\big),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

δείξτε ότι η $\{X_n\}$ είναι μια μαρκοβιανή ακολουθία στον $\mathbb{X}$ και υπολογίστε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

β) Πώς πρέπει να διαλέξουμε την G ώστε η $\{X_n\}$ να κινείται στις κορυφές ενός τριγώνου έτσι ώστε σε κάθε βήμα με πιθανότητα $2/3$ να μετακινείται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού και με πιθανότητα $1/3$ αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.;

γ) Γράψτε ένα αλγόριθμο που θα προσομοιώνει με τη βοήθεια μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών οποιαδήποτε μαρκοβιανή αλυσίδα σε ένα πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$, αν μας δίνεται ο πληθάριθμος του $\mathbb{X}$, η αρχική κατανομή της αλυσίδας και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης.

δ) Γράψτε έναν κώδικα -σε οποιαδήποτε γλώσσα νιώθετε άνετα- που υλοποιεί τον παραπάνω αλγόριθμο.