ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙ για την Δευτέρα 26/5/2014

Άσκηση 1 Θεωρήστε μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ στο σύνολο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, \ldots, 8\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Επιλέγουμε τυχαία μια από τις καταστάσεις $\{3, 4, 5\}$ και ξεκινάμε την αλυσίδα μας από εκεί. Υπολογίστε
α) Την πιθανότητα η αλυσίδα να καταλήξει σε καθεμία από τος κλειστές κλάσεις της.
β) Την πιθανότητα να φτάσετε στο 1 πριν φτάσετε στο 8. Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 2 Δύο παίκτες Α,Β παίζουν το εξής παιχνίδι: στρίβουν διαδοχικά ένα νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί είτε η ακολουθία ΚΓΓ είτε η ΓΚΓ. Αν εμφανιστεί πρώτα η ΚΓΓ νικητής είναι ο Α, διαφορετικά νικητής είναι ο Β.
α) Ποια είναι η πιθανότητα νίκης κάθε παίκτη;
β) Αν N είναι η διάρκεια του παιχνιδιού σε στριψίματα του νομίσματος υπολογίστε την $\mathbb{E}[N]$.

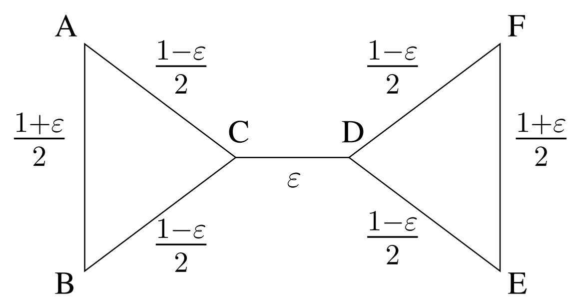
Άσκηση 3 Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός φορών που πρέπει να στρίψουμε ένα τίμιο νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί μια σειρά από N ίδια αποτελέσματα; Ποια είναι η απάντηση αν η πιθανότητα να φέρουμε γράμματα σε κάθε στρίψιμο είναι $p \neq \frac{1}{2}$;

Άσκηση 4 Κάθε φορά που επισκέπτεστε ένα εστιατόριο επιλέγετε ένα από τα N πιάτα του μενού τυχαία. Ποια είναι ο μέσος αριθμός επισκέψεων που θα σας πάρει να δοκιμάσετε όλα τα πιάτα;

Άσκηση 5 Μια αράχνη κινείται τυχαία στον ιστό της που αποτελείται από N ομόκεντρα εξάγωνα και τις ακτίνες τους. Πόσο χρόνο κατά μέσο όρο θα της πάρει για να φτάσει στο κέντρο του ιστού;

Άσκηση 6 Έχετε €1 και θέλετε να συμπληρώσετε γρήγορα ένα ποσό €10. Για το σκοπό αυτό παίζετε ένα παιχνίδι με τους εξής κανόνες. Σε κάθε γύρο η πιθανότητα νίκης σας είναι $0 < p < 1$, ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα των προηγούμενων γύρων. Πριν από κάθε γύρο επιλέγετε το ποσό που στοιχηματίζετε. Αν κερδίσετε σας επιστρέφεται το διπλάσιο του στοιχήματός σας, αν όχι χάνετε το ποσό που ποντάρατε σ' αυτόν τον γύρο. Έχετε αποφασίσει να ποντάρετε όσα χρήματα έχετε αν αυτά είναι λιγότερα από €5, διαφορετικά όσα χρειάζεστε για να φτάσετε τα €10.
α) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσετε ποτέ τα €10 με αυτήν τη στρατηγική;
β) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσετε ποτέ τα €10 αν σε κάθε γύρο ποντάρετε €1;
γ) Με την βοήθεια του υπολογιστή παραστήστε σε ένα κοινό γράφημα τα παραπάνω αποτελέσματα σαν συνάρτηση του $p \in (0, 1)$. Τι παρατηρείτε;
δ) Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να χάσετε τα χρήματά σας ή να φτάσετε τα €10 σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις;

Άσκηση 7 Μια μαρκοβιανή αλυσίδα κινείται ανάμεσα σε 6 καταστάσεις. Οι δυνατές μεταβάσεις εικονίζονται σαν ακμές στο διπλανό σχήμα. Οι πιθανότητες μετάβασης είναι συμμετρικές, δηλ. $p(x, y) = p(y, x)$ για κάθε $x, y \in \{A, B, C, D, E, F\}$ και δίνονται και αυτές στο σχήμα. Π.χ. $p_{CD} = p_{DC} = \varepsilon$, με $0 < \varepsilon < 1$.
α) Αν $X_0 = C$ υπολογίστε την πιθανότητα η αλυσίδα να φτάσει στο σύνολο $\{E, F\}$ πριν φτάσει για πρώτη φορά στο A.
β) Ορίζουμε $T_\varepsilon = \inf\{m \geq 0 : X_m \in \{D, E, F\}\}$ τον χρόνο εισόδου στο $\{D, E, F\}$. Υπολογίστε για $x \in \{A, B, C\}$ την $\mathbb{E}[\,T_\epsilon \mid X_0 = x]$.



γ) Αν $X_0 = A$ και $s > 0$, υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[e^{-s\varepsilon T_\varepsilon}\big]$ και αποδείξτε ότι ο χρόνος $\varepsilon T_\varepsilon$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 3 καθώς $\varepsilon \to 0$.

Άσκηση 8 Έχουμε 5 χαρτιά της τράπουλας, τα τέσσερα είναι 7 κούπα και το ένα ρήγας σπαθί. Τα απλώνουμε στη σειρά σε ένα τραπέζι και σε κάθε βήμα επιλέγουμε ένα από τα δύο ακραία χαρτιά (το αριστερότερο με πιθανότητα $2/3$, το δεξιότερο με πιθανότητα $1/3$) και το βάζουμε στην μέση.

α) Κατασκευάστε ένα μαρκοβιανό μοντέλο για αυτή τη διαδικασία, περιγράψτε δηλαδή έναν κατάλληλο χώρο καταστάσεων και τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης.

β) Βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας σας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.

γ) Αν αρχικά ο ρήγας βρίσκεται στο κέντρο ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκεται στο κέντρο μετά από 4 βήματα;

δ) Αν αρχικά ο ρήγας είναι αριστερά ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός κινήσεων μέχρι να βρεθεί για πρώτη φορά δεξιά;

ε) Επιβεβαιώστε αριθμητικά τα αποτελέσματα των (γ) και (δ) τροποποιώντας κατάλληλα τον κώδικα προσομοίωσης από το προηγούμενο Φυλλάδιο.