

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014
 ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ για την Δευτέρα 23/6/2014

Άσκηση 1 Η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

α) Βρείτε την κατανομή ισορροπίας της αλυσίδας.

β) Αν $X_0 = 1$ υπολογίστε τον αναμενόμενο χρόνο πρώτης επιστροφής $T_1^+ = \inf\{k > 0 : X_k = 1\}$ στην κατάσταση 1.

γ) Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό επισκέψεων στην κατάσταση 3 μέχρι τη συμπλήρωση 93 επιστροφών στην κατάσταση 1.

Άσκηση 2 Ένα έντομο κινείται στις κορυφές ενός n -γώνου. Σε κάθε βήμα του μετακινείται με πιθανότητα $p = 2/3$ στην γειτονική κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, και με πιθανότητα $1 - p = 1/3$ στην γειτονική κορυφή αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Δείξτε χωρίς πράξεις ότι η αλυσίδα αυτή έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή και μαντέψτε ποια είναι αυτή. Επιβεβαιώστε το εύρημά σας βρίσκοντας όλες τις κατανομές π στις κορυφές του n -γώνου που ικανοποιούν την εξίσωση $\pi = \pi \cdot P$.

Άσκηση 3 Σ' ένα ράφι της βιβλιοθήκης σας υπάρχουν τρία βιβλία: Algebra, Basic Topology, Calculus, που θα συμβολίζουμε με A,B,C για συντομία. Κάθε πρωί παίρνετε τυχαία ένα βιβλίο από τη θέση του, με πιθανότητα p, q, r αντίστοιχα. Υποθέτουμε $p, q, r > 0$ με $p + q + r = 1$. Όταν τελειώνετε το διάβασμά σας για την ημέρα το ξαναβάζετε στο ράφι στην αριστερότερη θέση. Η διάταξη των βιβλίων είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο \mathbb{X} των μεταθέσεων των συμβόλων $\{A, B, C\}$. Δείξτε ότι η αλυσίδα αυτή είναι μη υποβιβάσιμη και βρείτε την κατάσταση ισορροπίας της. Μπορείτε να γενικεύσετε το αποτέλεσμα για ν βιβλία;

Άσκηση 4 Θεωρήστε μια αλυσίδα Markov στον $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ με $P(k, k+1) = \frac{1}{k+1}$, $P(k, k-1) = \frac{k}{k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{X}$. Βρείτε μια αναλλοίωτη κατανομή της. Είναι αυτή μοναδική; Είναι η αλυσίδα γνήσια επαναληπτική; Αν $X_0 = 5$ πόσες κατά μέση τιμή φορές θα βρεθεί η αλυσίδα στο 0 μέχρι να επιστρέψει για πρώτη φορά στο 5;

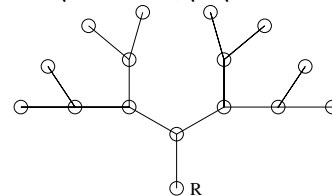
Άσκηση 5 Θεωρούμε μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ στον $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ με πιθανότητες μετάβασης

$$p_{k,k-1} = \frac{k-1}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, \quad p_{k,k+1} = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \quad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Η X_n έχει μια τάση να πηγαίνει δεξιά αλλά η τάση αυτή εξασθενεί όσο απομακρινόμαστε από το 1, οπότε και συμπεριφέρεται σχεδόν όπως ένας απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος. Για τον απλό συμμετρικό τυχαίο περίπατο γνωρίζουμε ότι απ' όπου κι αν ξεκινήσει θα φτάσει στο 1 με πιθανότητα 1. Αν $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}$ υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}_k[T < +\infty]$ και χαρακτηρίστε την αλυσίδα ως προς την επαναληπτικότητα.

Άσκηση 6 Ένα διωνυμικό δέντρο με ρίζα είναι ένας άπειρος γράφος, χωρίς κλειστά μονοπάτια, με μια

διακεκριμένη κορυφή R (την ρίζα) από την οποία διέρχεται μια ακμή, ενώ από κάθε άλλη κορυφή του διέρχονται τρεις ακμές όπως στο διπλανό σχήμα. Ένας τυχαίος περίπατος σ' αυτόν το γράφο είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο σύνολο V των κορυφών του γράφου, που επιλέγει σε κάθε βήμα τυχαία μια από τις κορυφές με τις οποίες συνδέεται με ακμή και μετακινείται εκεί. Δείξτε ότι αυτός ο τυχαίος περίπατος είναι παροδικός.



Άσκηση 7 Ένα αλογάκι ξεκινά από το κάτω αριστερό άκρο μιας σκακιέρας και επιλέγει σε κάθε βήμα τυχαία μια επιτρεπτή κίνηση. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός κινήσεων που θα χρειαστεί μέχρι να ξαναγυρίσει στην αρχική του θέση;

Άσκηση 8 Βρείτε ένα επιτραπέζιο φιδάκι και περιγράψτε τη θέση ενός παίκτη σαν μια μαρκοβιανή αλυσίδα. Ο χώρος των καταστάσεων δεν χρειάζεται να περιλαμβάνει τη βάση μιας σκάλας ή το στόμα ενός φιδιού αφού ποτέ δεν σταματάμε εκεί. Προσομοιώστε την μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει το παιχνίδι για $N = 1000, 10000, 100000$ επαναλήψεις και εκτιμήστε τον αναμενόμενο αριθμό ζαριών που διαρκεί ένα παιχνίδι με δύο παίκτες. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με ένα παιχνίδι με ζάρι που δεν έχει φιδάκια και σκάλες.