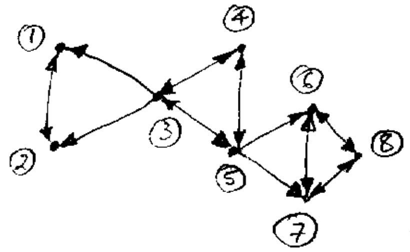
ΣV

1.



$C_1=\{1,2\}$ κλειστή + πεπερασμένη $\longrightarrow$ γν. επαναληπτική

$C_2=\{3,4,5\}$ ανοιχτή $\longrightarrow$ παροδική

$C_3=\{6,7,8\}$ κλειστή + πεπερασμένη $\longrightarrow$ γν. επαναληπτική

$\exists$ μοναδική αναλλοίωτη κατανομή π_1 που στηρίζεται στην C_1

$$\begin{cases} (\pi_1(1)\ \ \pi_1(2)) = (\pi_1(1)\ \ \pi_1(2)) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \\ \pi_1(1)+\pi_1(2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1(1)=1/3 \\ \pi_1(2)=2/3 \end{cases}$$

(1) για $x\in\{1,2\}$ $\mathbb{P}_x\left[\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\longrightarrow 1\cdot\pi_1(1)+2\cdot\pi_1(2)=\frac{5}{3}\right]=1$ (εργοδικό θεώρημα)

$\exists$ μοναδική αναλλοίωτη κατανομή π_3 που στηρίζεται στην C_3. Μάλιστα επειδή ο περιορισμός του P στην C_3 είναι διπλά στοχαστικός αυτή είναι η ομοιόμορφη στην C_3: $\pi_3(6)=\pi_3(7)=\pi_3(8)=\frac{1}{3}$

(2) για $x\in\{6,7,8\}$ $\mathbb{P}_x\left[\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\longrightarrow 6\pi_3(6)+7\pi_3(7)+8\pi_3(8)=7\right]=1$ (Εργοδικό θεώρημα).

Έστω τώρα $T_1=\inf\{k\geq 0: X_k\in C_1\}$, $T_3=\inf\{k\geq 0: X_k\in C_3\}$, $T=T_1\wedge T_3$.

(3) Επειδή η C_2 είναι ανοιχτή έχουμε $\mathbb{P}_4[T<+\infty]=1$

Για να βρούμε την $\mathbb{P}_4[T_1<T_3]$, χρησιμοποιούμε ότι η $h(x)=\mathbb{P}_x[T_1<T_3]$ λύνει το ΠΣΤ

$$\begin{Bmatrix} Lh(x)=0 & x\in C_2 \\ h(x)=1 & \text{για } x\in C_1 \\ h(x)=0 & \text{για } x\in C_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow h(4)=\frac{14}{41}.$$

Τώρα, $$\frac{X_1+\dots+X_n}{n}=\frac{X_1+\dots+X_{T-1}}{n}+\frac{X_T+\dots+X_n}{n}=\frac{X_1+\dots+X_{T-1}}{n}+\frac{n-T+1}{n}\,\frac{X_T+\dots+X_n}{n-T+1}$$

Όμως αν $T<+\infty$ έχουμε $\frac{X_1+\dots+X_{T-1}}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ κ' $\frac{n-T+1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

Άρα αν $T<+\infty$ έχουμε $\lim_n\frac{X_1+\dots+X_n}{n}=\lim_n\frac{X_T+\dots+X_n}{n-T+1}$ όταν το όριο αυτό υπάρχει.

Από τις (1)-(3) κ' την ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα, το όριο αυτό υπάρχει με πιθανότητα 1 κ' είναι ίσο με $\frac{5}{3}$ στο ενδεχόμενο $\{T_1<T_3\}$ (άρα κ πιθανότητα $\frac{14}{41}$) κ' ίσο με 7 στο ενδεχόμενο $\{T_1>T_3\}$ (άρα κ πιθανότητα $\frac{27}{41}$)

2. (Φυλλάδιο λυμένων ασκήσεων)

3. Η αλυσίδα Y_n είναι μη υποβιβάσιμη στον $\tilde{\mathbb{X}}=\{(x,y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}: p(x,y)>0\}$

Πράγματι αν $(x,y)\in\tilde{\mathbb{X}}$ κ' $(x',y')\in\tilde{\mathbb{X}}$, επειδή η $\mathbb{X}$ είναι μη υποβιβάσιμη υπάρχει ένα μονοπάτι $z_1=y, z_2, z_3,\dots, z_k=x'$ τ.ω. $p(z_i,z_{i+1})>0$ $i=1,\dots,k$. κ' επίσης

επειδή $(x,y)\in\tilde{\mathbb{X}}$ έχουμε κ' ότι $p(x,y)>0$

$(x',y')\in\tilde{\mathbb{X}}$ έχουμε κ' ότι $p(x',y')>0$. (Θέτε $z_0=x$, $z_{k+1}=y'$)

Επομένως για το μονοπάτι $\underbrace{(x,y)}_{u_0},\underbrace{(y,z_2)}_{u_1},(z_2,z_3),(z_3,z_4),\dots,\underbrace{(z_{k-1},x')}_{u_{k-1}},\underbrace{(x',y')}_{u_k}$

$$\tilde{p}(u_i,u_{i+1})=\tilde{p}((z_i,z_{i+1}),(z_{i+1},z_{i+2}))=\delta_{z_{i+1},z_{i+1}}\,p(z_{i+1},z_{i+2})=p(z_{i+1},z_{i+2})>0$$

κ' η $\{Y_n\}$ είναι μη υποβιβάσιμη. Επειδή η $\{Y_n\}$ έχει αναλλοίωτη κατανομή τότε είναι γν. επαναληπτική κ' από το εργοδικό θεώρημα $\forall (x,y)\in\tilde{\mathbb{X}}$

$$\mathbb{P}_{(x,y)}\left[\frac{f(Y_1)+\dots+f(Y_n)}{n}\longrightarrow\sum_{(x,y)\in\tilde{\mathbb{X}}}f(x,y)\pi(x)p(x,y)\right]=1.$$

4. Το πλήθος των μεταβάσεων μεταξύ των 3 κ' 4 μέχρι την χρ. στιγμή n είναι

$$\underbrace{\mathbb{1}\{X_0=3, X_1=4\}+\dots+\mathbb{1}\{X_{n-1}=3, X_n=4\}}_{M_{3,4}(n)} + \underbrace{\mathbb{1}\{X_0=4, X_1=3\}+\dots+\mathbb{1}\{X_{n-1}=4, X_n=3\}}_{M_{4,3}(n)}$$

μετάβαση από το 3 στο 4 — μετάβαση από το 4 στο 3

Από την άσκ 3 ($\{X_n\}$ μη υποβιβάσιμη) $\frac{M_{3,4}(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(3)p(3,4)$ με πιθανότητα 1

κ' $\frac{M_{4,3}(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(4)p(4,3)$ με πιθανότητα 1.

Με πιθανότητα 1 θα συμβαίνει κ' η τομή τους κ' άρα σε βάθος χρόνου το ποσοστό των μεταβάσεων ανάμεσα σε 3 κ' 4 θα συγκλίνει στο

$$\pi(3)p(3,4)+\pi(4)p(4,3) = \pi(3)\frac{1}{2}+\pi(4)\frac{1}{6}.$$

Βρίσκουμε τα $\pi(3), \pi(4)$ από τον ορισμό της αναλλοίωτης κατανομής

$$\left\{\begin{array}{l}(\pi(1)\ \pi(2)\ \pi(3)\ \pi(4)) = (\pi(1)\ \pi(2)\ \pi(3)\ \pi(4))\begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/12 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix} \\ \pi(1)+\pi(2)+\pi(3)+\pi(4)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi(3)=\frac{38}{281},\ \pi(4)=\frac{111}{281}, \dots$$

$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[X_n=4 \mid X_{n-1}=3] = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}[X_n=4, X_{n-1}=3]}{\mathbb{P}(X_{n-1}=3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}(X_{n-1}=4)p(4,3)}{\mathbb{P}(X_{n-1}=3)}$ · $\{X_n\}$ {γν. αναγώγιμη, απεριοδική} $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n=4, X_{n-1}=3) = \frac{\pi(4)}{\pi(3)}p(4,3) = \frac{37}{76}$

5 α) Όχι! $\mathbb{P}[X_{n+1}=E \mid X_n=E, X_{n-1}=E] = \frac{1}{2}$, αν η $\{X_n\}$ ήταν Μαρκοβιανή θα έπρεπε κ' οι δύο πιθανότητες να είναι ίσες με $\mathbb{P}[X_{n+1}=E \mid X_n=E]$

$\mathbb{P}[X_{n+1}=E \mid X_n=E, X_{n-1}=\Delta] = \frac{1}{3}$

β) Ναι

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

γ) $\left\{\begin{array}{l}(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4) = (\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4)P \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1\end{array}\right\} \Rightarrow \pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}\right)$

δ) $f(x,y)=x$ Εύστοχες προσπάθειες στις n πρώτες προσπάθειες

$$N_n = f(Y_1)+f(Y_2)+\dots+f(Y_n)$$

Από το εργοδικό θεώρημα για κάθε $y\in X$

$$\mathbb{P}_y\left[\frac{N_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbb{E}^{\pi}[f]\right]=1 \Rightarrow \mathbb{P}_y\left[\frac{N_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{3}{16}\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 1+\frac{3}{16}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0\right]=1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_y\left[\frac{N_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{5}{16}\right]=1$$

6.

$$\begin{array}{r} x_n\ x_{n-1}\ \dots\ x_2\ x_1\ x_0 \ + \\ \underline{y_n\ y_{n-1}\ \dots\ y_2\ y_1\ y_0} \end{array}$$

Η ακολουθία των κρατουμένων είναι Μαρκοβιανή στο $\{0,1\}$.

$R_0=0$. Αν $R_n=0$ τότε $R_{n+1}=0 \Leftrightarrow x_{n+1}+y_{n+1}\le 9$

$\Leftrightarrow (x_{n+1},y_{n+1})\in\left\{\begin{array}{l}(0,0),(0,1),\dots,(0,9)\\ (1,0),(1,1),\dots,(1,8),\\ (9,0)\ (9,1)\ \dots\ (9,0)\end{array}\right\}$

Άρα $\mathbb{P}[R_{n+1}=0 \mid R_n=0] = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$

$\mathbb{P}[R_{n+1}=1 \mid R_n=0] = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

Όμοια, αν $R_n=1$ τότε $R_{n+1}=0 \Leftrightarrow x_{n+1}+y_{n+1}\le 8 \Leftrightarrow (x_{n+1},y_{n+1})\in\{(0,0),\dots,(0,8),\dots,(7,0),(7,1),(8,0)\}$

Άρα $\mathbb{P}[R_{n+1}=0 \mid R_n=1] = \frac{9}{20}$ $\mathbb{P}[R_{n+1}=1 \mid R_n=1]=\frac{11}{20}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{9}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{11}{20} \end{pmatrix}$$

, Η αλυσίδα είναι μη υποβιβάσιμη κ' επαναληπτική άρα

$$\mathbb{P}_0\left[\frac{A_n}{n}\to\frac{1}{2}\right] = \mathbb{P}_0\left[\frac{R_1+\dots+R_n}{n}\to 1\times\pi(1)+0\times\pi(0)\right] = 1.$$

$\pi(0)=\frac{1}{2}=\pi(1)$

7. $$-\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathcal{X}} \pi(x)p(x,y)\big(f(y)-f(x)\big)^2 = -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathcal{X}} \pi(x)p(x,y)\big(f^2(y)+f^2(x)-2f(x)f(y)\big)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{y} f^2(y)\underbrace{\sum_{x}\pi(x)p(x,y)}_{\pi\ \text{αναλλοίωτη}} - \frac{1}{2}\sum_{x} f^2(x)\pi(x)\underbrace{\sum_{y}p(x,y)}_{1} + \sum_{x,y}\pi(x)p(x,y)f(x)f(y)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{y} f^2(y)\pi(y) - \frac{1}{2}\sum_{x} f^2(x)\pi(x) + \sum_{x,y}\pi(x)p(x,y)f(x)f(y)$$

$$= -\sum_{xy}\pi(x)f^2(x)p(x,y) + \sum_{xy}\pi(x)p(x,y)f(x)f(y)$$

$$= \sum_{x}\pi(x)f(x)\sum_{y}p(x,y)\big(f(y)-f(x)\big) = \sum_{x}\pi(x)f(x)Lf(x)$$

Αν $Lf(x)=0$ $\forall x\in\mathcal{X}$ από την προηγούμενη ταυτότητα έχουμε

$$\sum_{x,y\in\mathcal{X}} \underbrace{\pi(x)p(x,y)\big(f(y)-f(x)\big)^2}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow \pi(x)p(x,y)\big(f(y)-f(x)\big)^2=0 \quad \forall x,y\in\mathcal{X}$$

$$\overset{\pi(x)>0}{\Longrightarrow} p(x,y)\big(f(y)-f(x)\big)^2=0 \quad \forall x,y\in\mathcal{X}.$$

Εφόσον η αλυσίδα είναι μη υποβιβάσιμη $\forall x\in\mathcal{X}$ υπάρχει μονοπάτι $x_0, x_1, \dots, x_n = x$ τ.ω. $p(x_i, x_{i+1})>0$ $i=0,1,\dots,n-1$

Άρα $f(x)=f(x_n)=f(x_{n-1})=\dots=f(x_0)$ κι άρα η f είναι σταθερή.

8. (1) Έστω $G(x) = \mathbb{E}[T_Y \mid X_0 = x]$

$$LG(x) = \sum_z p(x,z)\big(G(z)-G(x)\big) = \sum_z p(x,z)G(z) - G(x)$$

$$= \sum_z p(x,z)\,\mathbb{E}[T_Y \mid X_0 = z] - G(x) = \big(\mathbb{E}[T_Y^+ \mid X_0 = x] - 1\big) - \mathbb{E}[T_Y \mid X_0 = x]$$

$$= \mathbb{E}[T_Y^+ - T_Y \mid X_0 = x] - 1.$$

όμως με δεδομένο ότι $X_0 = x$ $\{T_Y^+ \neq T_Y\} \Leftrightarrow \{Y = x\}$ οπότε $T_Y^+ - T_Y = T_x^+$

$$LG(x) = \mathbb{P}[Y=x]\,\mathbb{E}[T_x^+] - 1 = \pi(x)\,\mathbb{E}[T_x^+] - 1 = 0.$$

Άρα από την προηγούμενη άσκηση η G είναι σταθερή!

Φ VI

t_0 : μεσημέρι(?)
t_1 : τέλος(?)

6.
$$\mathbb{P}[N^A_{t_0}=0,\ N^B_{t_0}=1,\ N^A_{t_1}=3\ \ N^B_{t_1}=1] =$$
$$= \mathbb{P}[N^A_{t_0}=0,\ N^A_{t_1}-N^A_{t_0}=3,\ N^B_{t_0}=1,\ N^B_{t_1}-N^B_{t_0}=0] =$$
$$= e^{-\lambda_A t_0}\frac{(\lambda_A t_0)^0}{0!}\, e^{-\lambda_A(t_1-t_0)}\frac{(\lambda_A(t_1-t_0))^3}{3!}\, e^{-\lambda_B t_0}\frac{(\lambda_B t_0)^1}{1!}\, e^{-\lambda_B(t_1-t_0)}\frac{(\lambda_B(t_1-t_0))^0}{0!}$$
$$= e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t_1}\frac{[\lambda_A(t_1-t_0)]^3(\lambda_B t_0)}{6} = e^{-\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{60}\right)90}\frac{\left(\frac{1}{45}45\right)^3\left(\frac{1}{60}45\right)^1}{6}$$
$$= e^{-\frac{7}{2}}\frac{3/4}{6} = \frac{1}{8}e^{-7/2}$$

$$\mathbb{P}[N^A_{t_1}=2,\ N^B_{t_1}=1 \mid N^A_{t_0}=0,\ N^B_{t_0}=1] = \mathbb{P}[N^A_{t_1}-N^A_{t_0}=2,\ N^B_{t_1}-N^B_{t_0}=0 \mid N^A_{t_0}=0,\ N^B_{t_0}=1]$$
$$= \mathbb{P}[N^A_{t_1}-N^A_{t_0}=2,\ N^B_{t_1}-N^B_{t_0}=0]$$ (αφού οι $N^*_{t_1}-N^*_{t_0}$ είναι ανεξάρτητα από τα $N^*_{t_0}$ για $*\in\{A,B\}$)
$$= \mathbb{P}[N^A_{t_1-t_0}=2]\,\mathbb{P}[N^B_{t_1-t_0}=0]$$
$$= e^{-\lambda_A(t_1-t_0)}\frac{[\lambda_A(t_1-t_0)]^2}{2!}\, e^{-\lambda_B(t_1-t_0)}\frac{[\lambda_B(t_1-t_0)]^0}{0!} = e^{-(\lambda_A+\lambda_B)(t_1-t_0)}\frac{[\lambda_A(t_1-t_0)]^2}{2}$$
$$= e^{-\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{60}\right)45}\frac{\left(\frac{1}{45}\cdot 45\right)^2}{2} = \frac{1}{2}e^{-7/4}$$

7. Έστω $N_t = N_t^A + N_t^B$. Από την ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα η πιθανότητα ένα σωματίδιο που φτάνει να είναι τύπου B είναι $p=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$, ανεξάρτητα από τον τύπο κ' το πλήθος των άλλων αφίξεων. Άρα σε κάθε άφιξη έχουμε μια δοκιμή Bernoulli με πιθ. επιτυχίας ίση με p. Το πλήθος των αποτυχιών μέχρι την 1η επιτυχία (τύπου B) είναι το πλήθος των σωματιδίων τύπου A μέχρι την 1η άφιξη σωματιδίου τύπου B. Άρα αν n_A το πλήθος των σωματιδίων τύπου A μέχρι την 1η άφιξη σωμ. τύπου B τότε

$$\mathbb{P}[n_A=k] = (1-p)^k p = \frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \qquad k=0,1,2,\dots$$

Αν n_A^3 είναι το πλήθος των σωματιδίων τύπου A μέχρι την άφιξη του 3ου σωματιδίου τύπου B τότε για να έχουμε $n_A^3=k$ θα πρέπει στα πρώτα $k+3$ σωματίδια, το τελευταίο να είναι τύπου B κ' στις υπόλοιπες $k+2$ θέσεις να έχουμε k σωμ. τύπου A κ' 2 τύπου B. Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι

$$\mathbb{P}[n_A^3=k] = \binom{k+2}{2}p^3(1-p)^k = \frac{(k+2)(k+1)}{2}\frac{\mu^3\lambda^k}{(\lambda+\mu)^{k+3}} \qquad k=0,1,2,\dots$$