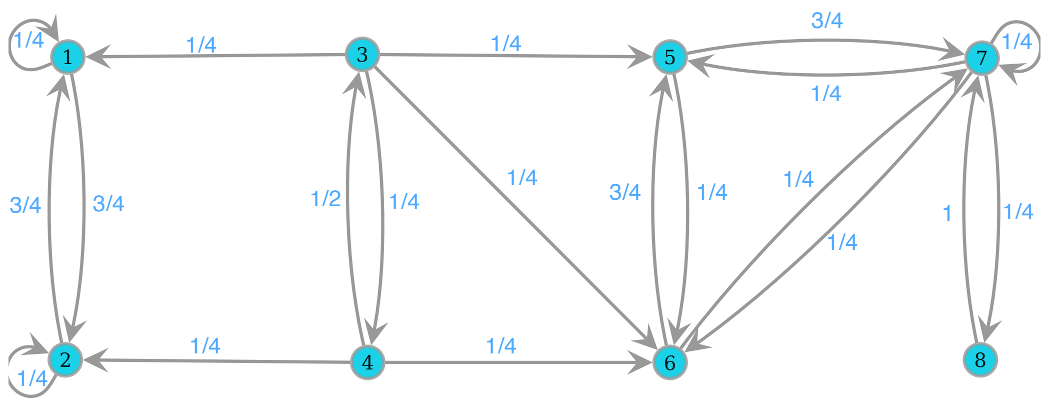
Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στοχαστικές Ανελίξεις- 8 Ιουλίου 2015

ΑΣΚΗΣΗ 1 (6 μονάδες) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι καταστάσεις και οι πιθανότητες μετάβασης μιας μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n\}_n$.



α) Βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.

β) Αν $X_0 = 3$, ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος εξόδου της αλυσίδας από την κλάση που περιέχει την κατάσταση 3 και ποια η πιθανότητα να καταλήξει σε καθεμιά από τις άλλες κλάσεις;

γ) Βρείτε μια αναλλοίωτη κατανομή π της αλυσίδας για την οποία $\pi(8) > 0$ και υπολογίστε το όριο $\lim_n \mathbb{P}\big[X_n = 8 \,|\, X_0 = 8\big]$.

δ) Αν $X_0 = 8, T_1 = \inf\{k > 0 : X_k = 8\}$ και $T_2 = \inf\{k > T_1 : X_k = 8\}$, δηλαδή T_1 και T_2 είναι οι χρόνοι πρώτης και δεύτερης επανόδου στο 8 αντίστοιχα, υπολογίστε τις $\mathbb{E}\big[T_1\big]$ και $\mathbb{E}\big[T_2\big]$.

ε) Έστω $X_0 = 3$. Αν κερδίζετε 1 ευρώ κάθε φορά που η αλυσίδα βρίσκεται σε κατάσταση με άρτιο δείκτη, τι μπορείτε να πείτε για το μέσο κέρδος σας ανά κίνηση σε βάθος χρόνου; ποιες τιμές μπορεί να πάρει; με ποια πιθανότητα;

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2 μονάδες) Έστω $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ένας τυχαίος περίπατος στους ακεραίους με $X_0 = 0$ και πιθανότητες μετάβασης

$$p(x, x+1) = \frac{2}{5}, \quad p(x, x-1) = \frac{3}{5}, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{Z}.$$

α) Χαρακτηρίστε τον περίπατο ώς προς την επαναληπτικότητα και την περιοδικότητα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

β) Ορίζουμε $M = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} X_k$, το δεξιότερο σημείο που φτάνει ποτέ ο περίπατος. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}\big[M \geq x\big] = \mathbb{P}\big[T_x < +\infty\big],$$

όπου $T_x = \inf\{k \geq 0 : X_k = x\}$ και υπολογίστε την κατανομή της τ.μ. M.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2 μονάδες) Αρσενικά και θηλυκά μπαρμπούνια πέφτουν στα δίχτυα ενός ψαρά σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\alpha = 1/20\text{min}$, και $\theta = 1/30\text{min}$ αντίστοιχα.

α) Αν ο ψαράς αφήσει τα δίχτυα για 2 ώρες ποια είναι η κατανομή του πλήθους των μπαρμπουνιών που θα πιάσει;

β) Αν σε 2 ώρες έπιασε 10 μπαρμπούνια ποια είναι η πιθανότητα να μην έπιασε κανένα στο διάστημα 30min έως 90min;

γ) Αν σε 2 ώρες έπιασε 10 μπαρμπούνια ποια είναι η πιθανότητα να μην έπιασε κανένα θηλυκό μεταξύ 30min και 90min;

δ) Αν T είναι η πρώτη χρονική στιγμή (από την ώρα που έριξε τα δίχτυα) που έχουν πιαστεί τουλάχιστον 2 αρσενικά και τουλάχιστον 2 θηλυκά μπαρμπούνια, ποια κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή T;

Διάρκεια Εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!