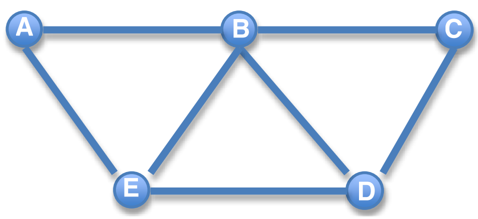
**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**
**ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

# Στοχαστικές Ανελίξεις- 11 Σεπτεμβρίου 2015

**ΑΣΚΗΣΗ 1** (5 μονάδες) Μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_n$ κινείται στις κορυφές $\mathbb{X} = \{A, B, C, D, E\}$ του παρακάτω γράφου. Σε κάθε βήμα, αν η αλυσίδα βρίσκεται στην κορυφή $x \in \mathbb{X}$, επιλέγει τυχαία μια από τις κορυφές που συνδέονται με την $x$ μέσω μιας ακμής του γράφου, και μεταβαίνει εκεί. Σε όλα τα ερωτήματα υποθέστε ότι $X_0 = A$.




α) Εξηγήστε γιατί η αλυσίδα $\{X_n\}_n$ έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή $\pi$, και βρείτε την $\pi$.
β) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[X_n \in \{B, D\}\big]$.
γ) Ορίζουμε τον χρόνο πρώτης επανόδου στην $A$, ως $T_A^+ = \inf\{k > 0 : X_k = A\}$. Υπολογίστε τις αναμενόμενες τιμές

$$\mathbb{E}\big[T_A^+\big] \quad \text{και} \quad \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{T_A^+} \mathbb{1}\{X_k = B\}\Big].$$

δ) Για $x \in \mathbb{X}$ ορίζουμε τον χρόνο πρώτης άφιξης στην $x$, ως $T_x = \inf\{k \geq 0 : X_k = x\}$. Υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[T_C < T_B\big]$.
ε) Για μια ακμή $e = (x, y)$ ορίζουμε τον μέσο αριθμό διαβάσεων της $e$ ανά βήμα της αλυσίδας, ως

$$A_n(e) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}\big\{X_k, X_{k+1} \in \{x, y\}\big\}.$$

Δείξτε ότι $\mathbb{P}\big[\lim_n A_n(e) = 1/7, \quad \text{για κάθε ακμή } e\big] = 1$.

**ΑΣΚΗΣΗ 2** (3 μονάδες) Θεωρήστε έναν τυχαίο περίπατο στο $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ με

$$p(x, x+1) = p \in (0, \frac{1}{2}),\ \forall x \in \mathbb{N}_0, \quad p(x, x-1) = 1-p,\ \forall x \in \mathbb{N}, \quad \text{και } p(0,0) = 1-p.$$

α) Βρείτε μια κατανομή $\pi$ που ικανοποιεί τις συνθήκες ακριβούς ισορροπίας: $\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x),\ \forall x, y \in \mathbb{N}_0$.
β) Χαρακτηρίστε τον περίπατο ως προς την επαναληπτικότητα, αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.
γ) Αν $x \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι $\mathbb{E}[T_0 \,|\, X_0 = x] = \frac{x}{1-2p}$.

**ΑΣΚΗΣΗ 3** (2 μονάδες) Σε μια ακτίνα laser, το πλήθος των φωτονίων που προσπίπτει σε έναν διαχωριστή περιγράφεται από μια διαδικασία Poisson $\{N_t\}_{t>0}$, με ρυθμό $\lambda > 0$. Κάθε φωτόνιο που προσπίπτει στον διαχωριστή, κατευθύνεται είτε αριστερά, με πιθανότητα $p \in (0, 1)$, είτε δεξιά, με πιθανότητα $1-p$, ανεξάρτητα από την διαδικασία αφίξεων και από τα άλλα φωτόνια. Συγκεκριμένα, αν ορίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, όπου $X_i = 1$ ή $0$ ανάλογα με το αν το φωτόνιο $i$ κατευθυνθεί αριστερά ή δεξιά, τότε οι $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή Bernoulli($p$), και ανεξάρτητες από την διαδικασία $\{N_t\}_{t>0}$. Επίσης, αν ορίσουμε

$$A_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \quad \text{και} \quad B_t = N_t - A_t = \sum_{i=1}^{N_t}(1 - X_i),$$

τότε οι $\{A_t\}_{t>0}$ και $\{B_t\}_{t>0}$ είναι οι διαδικασίες που περιγράφουν το πλήθος των φωτονίων που έχουν κατευθυνθεί στην αριστερή και δεξιά δέσμη αντίστοιχα.
α) Δείξτε ότι αν $m \leq n$, τότε $\mathbb{P}\big[A_t = m \,|\, N_t = n\big] = \binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$. Στην συνέχεια, υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[A_t = m,\ B_t = n\big]$, και συμπεράνετε ότι οι $A_t$ και $B_t$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, που ακολουθούν κατανομή Poisson με παραμέτρους $\lambda tp$ και $\lambda t(1-p)$ αντίστοιχα.
β) Για $0 < s < t$, δείξτε ότι οι $A_s$ και $B_t$ είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Διάρκεια Εξέτασης 2,5 ώρες
**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**