ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι

Άσκηση 1 Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X}=\{1,2,3\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X_n=1\,|X_0=1\big]$ στις περιπτώσεις: α) $p=1/16$, β) $p=1/6$, γ) $p=1/12$.

Άσκηση 2 Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X}=\{1,2,3\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ p & 2/3-p & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X_n=1\,|X_0=1\big]$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ στις περιπτώσεις: α) $p=0$, β) $p=1/6$, γ) $p=2/3$.
Ενθυμούμενοι ότι $(P^n)_{ij}=\mathbb{P}\big[X_n=j\,|X_0=i\big]$, πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε το $\lim_{n\to\infty}P^n$ χωρίς πολλές πράξεις;

Άσκηση 3 Ένα ηλεκτονικό ζάρι είναι προγραμματισμένο ώστε σε κάθε ζαριά η πιθανότητα να φέρουμε ό,τι και στην προηγούμενη είναι 1/11, ενώ τα υπόλοιπα 5 δυνατά αποτελέσματα έχουν όλα πιθανότητα 2/11. Αν η πρώτη ζαριά που φέρνουμε είναι 6, ποια είναι η πιθανότητα η n-οστή ζαριά μας να είναι πάλι 6;

Άσκηση 4 Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}=\{1,2,3,4\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/12 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αν π_n είναι η κατανομή της αλυσίδας μετά από n βήματα, δείξτε ότι ανεξάρτητα από την αρχική της κατανομή π_0, έχουμε $\pi_n\to\pi_*$ για κάποια κατανομή π_* που θα προσδιορίσετε. Δείξτε επιπλέον ότι $\|\pi_n-\pi_*\|\le C(n+1)2^{-n}$ για κάποια σταθερά $C>0$.

Άσκηση 5 Στην άσκηση αυτή θέλουμε να προσομοιώσουμε στον υπολογιστή μια μαρκοβιανή αλυσίδα σ' ένα πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}=\{1,2,\ldots,N\}$. Υποθέστε αρχικά ότι έχουμε μια συνάρτηση

$$G:\mathbb{X}\times[0,1]\to\mathbb{X},$$

αύξουσα ως προς την δεύτερη μεταβλητή της, δηλαδή για κάθε $x\in\mathbb{X}$ και $0\le s\le t\le 1$ έχουμε $G(x,s)\le G(x,t)$, και μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1].
α) Αν η X_0 είναι μια τ.μ. με τιμές στον $\mathbb{X}$ και ορίσουμε

$$X_n=G\big(X_{n-1},\xi_n\big),\ \forall n\in\mathbb{N}$$

δείξτε ότι η $\{X_n\}$ είναι μια μαρκοβιανή ακολουθία στον $\mathbb{X}$ και υπολογίστε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

β) Πώς πρέπει να διαλέξουμε την G ώστε η $\{X_n\}$ να κινείται στις κορυφές ενός τριγώνου έτσι ώστε σε κάθε βήμα με πιθανότητα 2/3 να μετακινείται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού και με πιθανότητα 1/3 αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.;

γ) Γράψτε ένα αλγόριθμο που θα προσομοιώνει με τη βοήθεια μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών οποιαδήποτε μαρκοβιανή αλυσίδα σε ένα πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$, αν μας δίνεται ο πληθάριθμος του $\mathbb{X}$, η αρχική κατανομή της αλυσίδας και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης.

δ) Γράψτε έναν κώδικα -σε οποιαδήποτε γλώσσα νιώθετε άνετα- που υλοποιεί τον παραπάνω αλγόριθμο.