

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

## ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙ

**Άσκηση 1** Βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας της μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ταξινομήστε τις κλάσεις σε ανοιχτές και κλειστές.

**Άσκηση 2** Θεωρήστε μια μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{X_n\}$  στο σύνολο καταστάσεων  $\mathbb{X} = \{1, 2, \dots, 8\}$  με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- α) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας. Ποιες κλάσεις είναι ανοιχτές και ποιες κλειστές;
- β) Αν  $X_0 = 1$  υπολογίστε την  $\mathbb{P}[X_n = k]$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και κάθε  $k \in \mathbb{X}$ . Για τα επόμενα δύο ερωτήματα επιλέγουμε τυχαία μια από τις καταστάσεις  $\{3, 4, 5\}$  και ξεκινάμε την αλυσίδα μας από εκεί. Υπολογίστε
- γ) Την πιθανότητα η αλυσίδα να καταλήξει σε καθεμία από τις κλειστές κλάσεις της.
- δ) Την πιθανότητα να φτάσετε στο 1 πριν φτάσετε στο 8. Πριν κάνετε πράξεις σκεφτείτε!

**Άσκηση 3** Έχετε €1 και θέλετε να συμπληρώσετε γρήγορα ένα ποσό €10. Για το σκοπό αυτό παίζετε ένα παιχνίδι με τους εξής κανόνες. Σε κάθε γύρο η πιθανότητα νίκης σας είναι  $0 < p < 1$ , ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα των προηγούμενων γύρων. Πριν από κάθε γύρο επιλέγετε το ποσό που στοιχηματίζετε. Αν κερδίσετε σας επιστρέφεται το διπλάσιο του στοιχήματός σας, αν όχι χάνετε το ποσό που ποντάρατε σ' αυτόν τον γύρο. Έχετε αποφασίσει να ποντάρετε όσα χρήματα έχετε αν αυτά είναι λιγότερα από €5, διαφορετικά όσα χρειάζεστε για να φτάσετε τα €10.

- α) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσετε ποτέ τα €10 με αυτήν τη στρατηγική;
- β) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσετε ποτέ τα €10 αν σε κάθε γύρο ποντάρετε €1;
- γ) Με την βοήθεια του υπολογιστή παραστήστε σε ένα κοινό γράφημα τα παραπάνω αποτελέσματα σαν συνάρτηση του  $p \in (0, 1)$ . Τι παρατηρείτε;

**Άσκηση 4** Δίνεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  μιας μαρκοβιανής αλυσίδας στον  $\mathbb{X} = \{s_1, \dots, s_5\}$ ,  $p \in (0, 1)$ .

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

- α) Αν  $T_i = \inf\{k \geq 0 : X_k = s_i\}$  είναι ο χρόνος πρώτης άφιξης στην κατάσταση  $s_i$  υπολογίστε την πιθανότητα

$$\mathbb{P}[T_1 < T_5 \mid X_0 = s_3].$$

- β) Αν έχετε ένα κέρμα που φέρνει κορώνα με πιθανότητα  $p \neq 1/2$ , μπορείτε με τη βοήθεια της παραπάνω αλυσίδας να φτιάξετε ένα αλγόριθμο που μιμείται το στρίψιμο ενός τήμιου κέρματος; Συγκεκριμένα θέλουμε ο αλγόριθμος να τερματίζει με πιθανότητα 1 σε πεπερασμένο χρόνο, και με πιθανότητα  $1/2$  σε καθεμία από δύο δυνατές τελικές καταστάσεις.

**Άσκηση 5** Ένα διωνυμικό δέντρο με ρίζα είναι ένας άπειρος γράφος, χωρίς κλειστά μονοπάτια, με μια διακεκριμένη κορυφή  $R$  (την ρίζα) από την οποία διέρχεται μια ακμή, ενώ από κάθε άλλη κορυφή του διέρχονται τρεις ακμές όπως στο διπλανό σχήμα. Ένας τυχαίος περίπατος σ' αυτόν το γράφο είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο σύνολο  $V$  των κορυφών του γράφου, που επιλέγει σε κάθε βήμα τυχαία μια από τις κορυφές με τις οποίες συνδέεται με ακμή και μετακινείται εκεί. Αν ξεκινήσουμε από την κορυφή που συνδέεται με την ρίζα ποια είναι η πιθανότητα να φτάσουμε κάποια στιγμή στην ρίζα, δηλαδή ποια είναι η  $\mathbb{P}[T_R < +\infty]$ ;

