

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙ

Άσκηση 1 Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός φορών που πρέπει να στρίψουμε ένα τίμιο νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί μια σειρά από N ίδια αποτελέσματα; Ποια είναι η απάντηση αν η πιθανότητα να φέρουμε γράμματα σε κάθε στρίψιμο είναι $p \neq \frac{1}{2}$;

Άσκηση 2 Κάθε φορά που επισκέπτεστε ένα εστιατόριο επιλέγετε ένα από τα N πιάτα του μενού τυχαία. Ποια είναι ο μέσος αριθμός επισκέψεων που θα σας πάρει να δοκιμάσετε όλα τα πιάτα;

Άσκηση 3 Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι μέχρι να φέρουμε 4 εξάρια στην σειρά; Μέχρι να δούμε για πρώτη φορά την ακολουθία 6,5,6,4; Μέχρι το άθροισμα των ζαριών μας να είναι πολλαπλάσιο του 7;

Άσκηση 4 Έχουμε 5 χαρτιά της τράπουλας, τα τέσσερα είναι 7 κούπα και το ένα ρήγας σπαθί. Τα απλώνουμε στη σειρά σε ένα τραπέζι και σε κάθε βήμα επιλέγουμε ένα από τα δύο ακραία χαρτιά (το αριστερότερο με πιθανότητα $2/3$, το δεξιότερο με πιθανότητα $1/3$) και το βάζουμε στην μέση.

α) Κατασκευάστε ένα μαρκοβιανό μοντέλο για αυτή τη διαδικασία, περιγράψτε δηλαδή έναν κατάλληλο χώρο καταστάσεων και τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης.

β) Βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας σας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.

γ) Αν αρχικά ο ρήγας βρίσκεται στο κέντρο ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκεται στο κέντρο μετά από 4 βήματα;

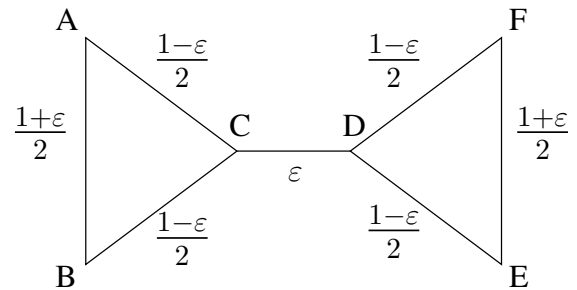
δ) Αν αρχικά ο ρήγας είναι αριστερά ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός κινήσεων μέχρι να βρεθεί για πρώτη φορά δεξιά;

Άσκηση 5 Μια μαρκοβιανή αλυσίδα κινείται ανάμεσα σε 6 καταστάσεις.

Οι δυνατές μεταβάσεις εικονίζονται σαν ακμές στο διπλανό σχήμα. Οι πιθανότητες μετάβασης είναι συμμετρικές, δηλ. $p(x, y) = p(y, x)$ για κάθε $x, y \in \{A, B, C, D, E, F\}$ και δίνονται και αυτές στο σχήμα. Π.χ. $p_{CD} = p_{DC} = \varepsilon$, με $0 < \varepsilon < 1$.

α) Ορίζουμε $T_\varepsilon = \inf \{m \geq 0 : X_m \in \{D, E, F\}\}$ τον χρόνο εισόδου στο $\{D, E, F\}$. Υπολογίστε για $x \in \{A, B, C\}$ την $\mathbb{E}[T_\varepsilon | X_0 = x]$.

β) Υπολογίστε την $\phi(x) = \mathbb{E}[e^{-sT_\varepsilon} | X_0 = x]$ για $x = A, B, C$ και βρείτε ποιο είναι το όριο της καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$. Συμπεράνετε ότι η τ.μ. $\varepsilon T_\varepsilon$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια εκθετική τ.μ. με ρυθμό $\lambda = 3$.



Άσκηση 6 Θεωρούμε μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ στον $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ με πιθανότητες μετάβασης

$$p_{k,k-1} = \frac{k-1}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, \quad p_{k,k+1} = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \quad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Η X_n έχει μια τάση να πηγαίνει δεξιά αλλά η τάση αυτή εξασθενεί όσο απομακρινόμαστε από το 1, οπότε και συμπεριφέρεται σχεδόν όπως ένας απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος. Για τον απλό συμμετρικό τυχαίο περίπατο γνωρίζουμε ότι απ' όπου κι αν ξεκινήσει θα φτάσει στο 1 με πιθανότητα 1. Αν $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}$ υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}_k[T < +\infty]$ και χαρακτηρήστε την αλυσίδα ως προς την επαναληπτικότητα.

Άσκηση 7 Μια αράχνη κινείται τυχαία στον ιστό της που αποτελείται από N ομόκεντρα εξάγωνα και τις ακτίνες τους. Πόσο χρόνο κατά μέσο όρο θα της πάρει για να φτάσει στο κέντρο του ιστού;