

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV

Άσκηση 1 Η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

α) Βρείτε την κατανομή ισορροπίας της αλυσίδας.

β) Αν $X_0 = 1$ υπολογίστε τον αναμενόμενο χρόνο πρώτης επιστροφής $T_1^+ = \inf\{k > 0 : X_k = 1\}$ στην κατάσταση 1.

γ) Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό επισκέψεων στην κατάσταση 3 μέχρι τη συμπλήρωση 93 επιστροφών στην κατάσταση 1.

Άσκηση 2 Ένα έντομο κινείται στις κορυφές ενός n -γώνου. Σε κάθε βήμα του μετακινείται με πιθανότητα $p = 2/3$ στην γειτονική κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, και με πιθανότητα $1 - p = 1/3$ στην γειτονική κορυφή αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Δείξτε χωρίς πράξεις ότι η αλυσίδα αυτή έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή καιμαντέψτε ποια είναι αυτή. Επιβεβαιώστε το εύρημά σας βρίσκοντας όλες τις κατανομές π στις κορυφές του n -γώνου που ικανοποιούν την εξίσωση $\pi = \pi \cdot P$.

Άσκηση 3 Σ' ένα ράφι της βιβλιοθήκης σας υπάρχουν τρία βιβλία: Algebra, Basic Topology, Calculus, που θα συμβολίζουμε με A, B, C για συντομία. Κάθε πρωί παίρνετε τυχαία ένα βιβλίο από τη θέση του, με πιθανότητα p, q, r αντίστοιχα. Υποθέτουμε $p, q, r > 0$ με $p + q + r = 1$). Όταν τελειώνετε το διάβασμά σας για την ημέρα το ξαναβάζετε στο ράφι στην αριστερότερη θέση. Η διάταξη των βιβλίων είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο \mathbb{X} των μεταθέσεων των συμβόλων $\{A, B, C\}$. Δείξτε ότι η αλυσίδα αυτή είναι μη υποβιβάσιμη και βρείτε την κατάσταση ισορροπίας της. Μπορείτε να γενικεύσετε το αποτέλεσμα για ν βιβλία;

Άσκηση 4 Θεωρήστε μια αλυσίδα Markov στον $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ με $P(k, k+1) = \frac{1}{k+1}$, $P(k, k-1) = \frac{k}{k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{X}$. Βρείτε μια αναλλοίωτη κατανομή της. Είναι αυτή μοναδική; Είναι η αλυσίδα γνήσια επαναληπτική; Αν $X_0 = 5$ πόσες κατά μέση τιμή φορές θα βρεθεί η αλυσίδα στο 0 μέχρι να επιστρέψει για πρώτη φορά στο 5;

Άσκηση 5 Μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X} = \mathbb{N}_0$ μετατοπίζεται ένα βήμα προς τα αριστερά όταν δεν βρίσκεται στο 0, και όταν φτάσει στο 0 κάνει ένα άλμα που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο q ($0 < q < 1$). Δείξτε ότι η αλυσίδα είναι γνήσια επαναληπτική και υπολογίστε την αναλλοίωτη κατανομή της με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

Άσκηση 6 Μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ έχει πιθανότητες μετάβασης $p_{k, k+1} = p < 1$, $p_{k, 0} = 1 - p$, $\forall k \in \mathbb{X}$. Βρείτε την κατανομή ισορροπίας της.

Άσκηση 7 Ένας παντοπώλης εφοδιάζεται κάθε πρωί με ένα πακέτο μπισκότα. Έχει παρατηρήσει ότι η ημερήσια ζήτηση είναι μια τυχαία μεταβλητή X με κατανομή $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}[X = 1] = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}[X = 2] = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}[X = 3] = \frac{1}{12}$. Περιγράψτε την ποσότητα από μπισκότα που έχει στο παντοπωλείο κάθε βράδυ σαν μια μαρκοβιανή αλυσίδα και βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή της.

Άσκηση 8 Ένα αλογάκι ξεκινά από το κάτω αριστερό άκρο μιας σκακιέρας και επιλέγει σε κάθε βήμα τυχαία μια επιτρεπτή κίνηση. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός κινήσεων που θα χρειαστεί μέχρι να ξαναγυρίσει στην αρχική του θέση;