ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V

Άσκηση 1 Στην άσκηση 2 του Φυλλαδίου ΙΙ, αν $X_0 = 4$, τι μπορείτε να πείτε για το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n};$$

Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει; ποιες τιμές μπορεί να πάρει και με ποια πιθανότητα;

Άσκηση 2 Αν η X_n είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα σ' ένα χώρο $\mathbb{X}$ τότε η $Y_{n+1} = (X_n, X_{n+1})$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$. Ποιες είναι οι πιθανότητες μετάβασης της Y; Αν η X έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή π, δείξτε ότι η y έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή την $\pi_*(j,k) = \pi(j)p(j,k)$.

Άσκηση 3 Με την βοήθεια και της προηγούμενης άσκησης δείξτε ότι αν η αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη υποβιβάσιμη και κινείται σ' έναν πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$ και $f : \mathbb{X}\times\mathbb{X} \to \mathbb{R}$ τότε με πιθανότητα 1 έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(X_0,X_1) + f(X_1,X_2) + \cdots + f(X_{n-1},X_n)}{n} = \sum_{(x,y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}} f(x,y)\pi(x)p(x,y).$$

για οποιαδήποτε κατανομή της X_0.

Άσκηση 4 Στην άσκηση 4 του Φυλλαδίου Ι, σε βάθος χρόνου τι ποσοστό των μεταβάσεων γίνονται μεταξύ των καταστάσεων 3 και 4; Ποιο είναι το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[X_n = 4 | X_{n+1} = 3\big]?$$

Άσκηση 5 Ένας παίκτης του μπάσκετ προπονείται στα τρίποντα. Έχετε παρατηρήσει ότι η πιθανότητα να ευστοχήσει σε ένα σουτ είναι ίση με

- 1/2 αν έχει ευστοχήσει και στα δύο προηγούμενα σουτ που έχει επιχειρήσει
- 1/3 αν έχει ευστοχήσει σε 1 από τα δύο προηγούμενα σουτ που έχει επιχειρήσει
- 1/4 αν έχει αστοχήσει και στα δύο προηγούμενα σουτ που έχει επιχειρήσει.

Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $X_n = 1$ αν το n-οστό σουτ του παίκτη είναι εύστοχο και 0 διαφορετικά.

α. Είναι η ακολουθία $\{X_n\}$ μαρκοβιανή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
β. Είναι η αλυσίδα $Y_n = (X_n, X_{n+1})$ μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων
$\mathbb{X} = \{0,1\}\times\{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$; Ποιες είναι οι πιθανότητες μετάβασης;
γ. Ποια είναι η αναλλοίωτη κατανομή αυτής της αλυσίδας;
δ. Σε βάθος χρόνου τι ποσοστό από τα σουτ του είναι εύστοχα;

Άσκηση 6 Επιλέγουμε τυχαία δύο n-ψήφιους αριθμούς και τους προσθέτουμε. Αν A_n είναι το πλήθος των κρατούμενων που μεταφέραμε κατά την πρόσθεση, τι συμβαίνει στο όριο $\lim_n \frac{A_n}{n}$;

Άσκηση 7 Δείξτε ότι για μια μαρκοβιανή αλυσίδα σε έναν πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$ με γεννήτορα L και αναλλοίωτη κατανομή π έχουμε

$$\sum_{x\in\mathbb{X}} \pi(x)f(x)Lf(x) = -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{X}} \pi(x)p(x,y)\big(f(y)-f(x)\big)^2.$$

Συμπεράνετε ότι αν η αλυσίδα είναι μη υποβιβάσιμη και $Lf(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{X}$ τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Άσκηση 8 (Η σταθερά του Kemeny) Έστω $\{X_n\}_n$ μια μη υποβιβάσιμη αλυσίδα σε έναν πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$ με αναλλοίωτη κατανομή π. Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή Y ανεξάρτητη από τις $\{X_n\}$ και με κατανομή π, δηλαδή $\mathbb{P}\big[Y = x\big] = \pi(x),\ \forall x \in \mathbb{X}$. Ορίζουμε τώρα $T_Y = \inf\{k \geq 0 :\ X_k = Y\}$. Ποια είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_{T_Y}; Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \mathbb{E}\big[T_Y \mid X_0 = x\big]$ είναι σταθερή.