

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

## ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VI

**Άσκηση 1** Σωματίδια προσπίπτουν σ' έναν ανιχνευτή σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson. Αν είναι γνωστό ότι στο πρώτα δύο λεπτά λειτουργίας του ανιχνευτή προσέπεσαν 10 σωματίδια, ποια είναι η πιθανότητα τα 9 από αυτά να προσέπεσαν κατά το πρώτο λεπτό;

**Άσκηση 2** Σε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων  $\mu$ , αν  $S_N$  είναι ο χρόνος της  $N$ -οστής άφιξης, υπολογίστε τα όρια

$$\mathbb{P}\left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} = \frac{1}{\mu}\right] \quad \text{και} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[S_N \leq \frac{N}{\mu}\right].$$

**Άσκηση 3** Σε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων  $\lambda$ , βρείτε την κατανομή που ακολουθεί το πλήθος των αφίξεων στο διάστημα  $(0, s]$  δεδομένου ότι έχουμε  $N$  αφίξεις στο διάστημα  $(0, t]$  με  $t \geq s$ .

**Άσκηση 4** Οι αφίξεις φοιτητών στην βιβλιοθήκη του ΕΜΠ μεταξύ 8πμ και 2μμ είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων  $1/5$  min. Οι αφίξεις καθηγητών την ίδια περίοδο είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων  $1/30$  min. Αν στο διάστημα 11πμ και 12μ μπήκαν στην βιβλιοθήκη 10 άτομα, ποια είναι η πιθανότητα να μπήκαν το πολύ δύο καθηγητές; Η πιθανότητα να δανειστεί βιβλίο κάποιος καθηγητής που επισκέπτεται την βιβλιοθήκη είναι  $4/5$  ενώ η πιθανότητα να δανειστεί βιβλίο ένας φοιτητής που επισκέπτεται την βιβλιοθήκη είναι  $1/6$ . Υποθέστε ότι δεν μεσολαβεί χρόνος ανάμεσα στην άφιξη ενός ατόμου που θέλει να δανειστεί βιβλίο και στον δανεισμό του βιβλίου. Πώς θα περιγράφατε την διαδικασία που μετράει τους δανεισμούς βιβλίων κατά την παραπάνω περίοδο; Ποια είναι η πιθανότητα το πρώτο βιβλίο της ημέρας να το δανειστεί ένας φοιτητής;

**Άσκηση 5** Σ' ένα δισκάδικο εξυπηρετούν δύο υπάλληλοι. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό  $1/2$  min. Μπαίνετε στο δισκάδικο και παρατηρείτε ότι και οι δύο υπάλληλοι εξυπηρετούν, ενώ υπάρχει ακόμα ένας πελάτης πριν από σας που περιμένει να εξυπηρετηθεί. Ποια είναι η κατανομή του χρόνου που θα σας πάρει μέχρι να εξυπηρετηθείτε; Ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσετε πριν από τον πελάτη που περιμένει; Ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσετε πριν από κάποιον πελάτη που εξυπηρετείται όταν μήκατε;

**Άσκηση 6** Στις αναμετρήσεις των ποδοσφαιρικών ομάδων A και B, τα τέρματα της ομάδας A σημειώνονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων  $1/45$  min, ενώ εκείνα της ομάδας B σύμφωνα με μια ανεξάρτητη από την προηγούμενη διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων  $1/60$  min. Ποια είναι η πιθανότητα στο ημίχρονο να προηγείται η ομάδα B με 0-1, αλλά στο τέλος να κερδίσει η ομάδα A με 3-1; Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα A με 2-1, δεδομένου ότι το σκορ ημιχρόνου είναι 0-1;

**Άσκηση 7** Σωματίδια τύπου A και τύπου B φτάνουν σ' έναν ανιχνευτή σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς αφίξεων  $\lambda$  και  $\mu$  αντίστοιχα. Ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των σωματιδίων τύπου A που έχουν ανιχνευτεί μέχρι την ανίχνευση του 1ου σωματιδίου τύπου B; Ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των σωματιδίων τύπου A που έχουν ανιχνευτεί μέχρι την ανίχνευση του 3ου σωματιδίου τύπου B;

**Άσκηση 8** Σε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων  $\lambda$ , ποια είναι η κατανομή του διαστήματος ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις που περιέχει το  $t > 0$ ; Γιατί η κατανομή  $\Delta EN$  είναι εκθετική με ρυθμό  $\lambda$ ; Ποιο είναι το όριο αυτής της κατανομής όταν  $t \rightarrow \infty$ ;