ΣΧΟΛΗ ΕΦ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Ασκήσεις στις αλυσίδες Markov- Ιούνιος 2011

***Άσκηση* 1** Η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X}=\{1,2,3\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X_n=1\,|X_0=1\big]$ στις περιπτώσεις: α) $p=1/16$, β) $p=1/6$, γ) $p=1/12$.

Λύση: Έχουμε $\mathbb{P}\big[X_n=1\,|X_0=1\big]=p_{11}^{(n)}$, όπου $p_{11}^{(n)}$ είναι το στοιχείο στην πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη του πίνακα P^n. Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του P:

$$|\lambda I-P|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2/3 & -1/3 \\ -p & -1+p & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda-2/3 & -1/3 \\ \lambda-1 & -1+p & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-2/3 & -1/3 \\ 1 & -1+p & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1/3 & -1/3 \\ 0 & p & \lambda \end{vmatrix}=\frac{(\lambda-1)}{3}(3\lambda^2+\lambda+p).$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου παραπάνω είναι $\Delta=1-12p$ και αναλύουμε ανάλογα με την τιμή του p τις τρεις περιπτώσεις:

α) $p=1/16$. Εδώ $\Delta=1/4$ και άρα οι ιδιοτιμές του P είναι $\lambda_1=1,\lambda_2=-5/24,\lambda_3=-1/8$. Αν $u_i,\ i=1,2,3$ είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i τότε $P=R\Lambda R^{-1}$, όπου οι στήλες του πίνακα R είναι τα ιδιοδιανύσματα u_i και ο Λ είναι διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Επομένως, $\forall n\in\mathbb{N}_0$

$$P^n=R\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-5/24)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/8)^n \end{pmatrix}R^{-1}. \tag{1}$$

Προκειμένου να αποφύγουμε τον υπολογισμό των u_i και την αντιστροφή του R παρατηρήστε ότι τα στοιχεία του πίνακα P^n είναι γραμμικοί συνδυασμοί των n-στων δυνάμεων των λ_i. Δηλαδή υπάρχουν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, ώστε $\forall n\in\mathbb{N}_0$

$$p_{11}^{(n)}=\alpha+\beta(-5/24)^n+\gamma(-1/8)^n. \tag{2}$$

Αυτό μπορείτε να το δείτε φανταζόμενοι ότι κάνετε τις πράξεις στην (1), αλλά μπορείτε να δείτε και την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία. Τα διανύσματα $u_i,\ i=1,2,3$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Αν $v_i^\top,\ i=1,2,3$ είναι οι γραμμές του R^{-1}, οι πίνακες $\Pi_i=u_iv_i^\top,\ i=1,2,3$ είναι οι προβολές στις αντίστοιχες διευθύνσεις u_i και έχουμε

$$I=\sum_{i=1}^{3}u_iv_i^\top.$$

Η ανάλυση κατ' αυτές τις διευθύνσεις είναι χρήσιμη γιατί ο P δρα με πολύ απλό τρόπο σ' αυτές: $Pu_i=\lambda_iu_i$, και επαγωγικά $P^nu_i=\lambda_i^nu_i$. Πολλαπλασιάζοντας με P^n τα δυο μέλη της παραπάνω σχέσης έχουμε

$$P^n=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^nu_iv_i^\top \qquad \text{και άρα} \qquad p_{11}^{(n)}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^n(u_iv_i^\top)_{11}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^n(u_i)_1(v_i)_1.$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε τους συντελεστές α,β,γ στην (2) από το γεγονός ότι

$$p_{11}^{(0)}=1,\qquad p_{11}^{(1)}=0,\qquad p_{11}^{(2)}=(0\ 1\ 0)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\p\end{pmatrix}=0$$

που μας δίνει το σύστημα των εξισώσεων

$$\left\{ \begin{array}{rl} \alpha+\beta+\gamma & =1 \\ \alpha-(5/24)\beta-(1/8)\gamma & =0 \\ \alpha+(5/24)^2\beta+(1/8)^2\gamma & =0 \end{array} \right\}.$$

Επιλύοντας βρίσκουμε $\alpha = 5/261, \beta = -36/29, \gamma = 20/9$.
β) $p = 1/6$. Εδώ $\Delta = -1$ και άρα οι ιδιοτιμές του P είναι $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \frac{-1\pm i}{6} = \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{\pm\frac{i3\pi}{4}}$. Όπως και στην περίπτωση α) έχουμε

$$p_{11}^{(n)} = \alpha + \frac{\beta}{(3\sqrt{2})^n}e^{\frac{i3\pi n}{4}} + \frac{\gamma}{(3\sqrt{2})^n}e^{-\frac{i3\pi n}{4}}$$

Μπορούμε πάλι να καταστρώσουμε ένα σύστημα εξισώσεων που θα μας δώσει τα α, β, γ, ή να παρατηρήσουμε ότι εφόσον τα στοιχεία του P είναι πραγματικοί αριθμοί θα πρέπει $\gamma = \beta^*$, οπότε μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση ως

$$p_{11}^{(n)} = \alpha + \frac{b}{(3\sqrt{2})^n}\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + \frac{c}{(3\sqrt{2})^n}\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$$

όπου τώρα οι b, c είναι πραγματικοί αριθμοί που μπορούμε να υπολογίσουμε επιλύοντας το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{rl} \alpha+b & =1 \\ \alpha-b/6+c/6 & =0 \\ \alpha-c/18 & =0 \end{array} \right\}.$$

Βρίσκουμε έτσι $\alpha = 1/25,\ b = 24/25,\ c = 18/25$.
γ) $p = 1/12$. Εδώ $\Delta = 0$ και άρα ο P έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1/6$ (διπλή.) Ο P δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος, αλλά μπορούμε να τον γράψουμε στη μορφή Jordan ως

$$P = J\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{array} \right)J^{-1}.$$

Εδώ οι δυο πρώτες στήλες του J είναι τα ιδιοδιανύσματα u_1, u_2 που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές 1 και -1/6 αντίστοιχα, ενώ η τρίτη στήλη του είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα u_3 που ικανοποιεί την $(P - \frac{1}{6}I)u_3 = u_2$. Επαγωγικά,

$$P^n = J\left(\begin{array}{ccc} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n & n\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{array} \right)J^{-1},$$

οπότε υπάρχουν πραγματικές σταθερές α, β, γ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$

$$p_{11}^{(n)} = \alpha + (\beta + \gamma n)\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

Οι σταθερές αυτές μπορούν να προσδιοριστούν και πάλι γράφοντας την παραπάνω για $n = 0, 1, 2$.

$$\left\{ \begin{array}{rl} \alpha+\beta & =1 \\ \alpha-\beta/6-\gamma/6 & =0 \\ \alpha+\beta/36+\gamma/18 & =0 \end{array} \right\}.$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $\alpha = 1/49,\ \beta = 48/49,\ \gamma = -6/7$.

Άσκηση 2 Ένα ηλεκτονικό ζάρι είναι προγραμματισμένο ώστε σε κάθε ζαριά η πιθανότητα να φέρουμε ό,τι και στην προηγούμενη είναι 1/5, ενώ τα υπόλοιπα 5 δυνατά αποτελέσματα έχουν όλα πιθανότητα 4/25. Αν η πρώτη ζαριά που φέρνουμε είναι 6, ποια είναι η πιθανότητα η n-οστή ζαριά μας να είναι πάλι 6;
Λύση 1: Αν ορίσουμε $X_n = 1$ αν η n-οστή ζαριά είναι 6 και $X_n = 2$ αν η n-οστή ζαριά είναι ό,τιδήποτε διαφορετικό, τότε η X_n είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X} = \{1, 2\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \left(\begin{array}{cc} 1/5 & 4/5 \\ 4/25 & 21/25 \end{array} \right).$$

Διαγωνιοποιούμε τον P κατά τα γνωστά.

$$|\lambda I - P| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{25} & \lambda - \frac{21}{25} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{26}{25}\lambda + \frac{1}{25} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{25}).$$

Αν u_1, u_2 είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1/25$ αντίστοιχα, και R είναι ο 2×2 πίνακας με στήλες τα u_1, u_2, τότε ο P διαγωνιοποιείται ως

$$P = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix} R^{-1},$$

και έτσι

$$P^n = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{25^n} \end{pmatrix} R^{-1}.$$

Από τη μαρκοβιανή ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mathbb{P}\big[X_n = 1 \mid X_1 = 1\big] = \mathbb{P}\big[X_{n-1} = 1 \mid X_0 = 1\big] = p_{11}^{(n-1)}$ και άρα

$$\mathbb{P}\big[X_n = 1 \mid X_1 = 1\big] = \alpha + \frac{\beta}{25^{n-1}}.$$

Θα προσδιορίσουμε τις σταθερές α, β από το γεγονός ότι $1 = \mathbb{P}\big[X_1 = 1 \mid X_1 = 1\big] = \alpha + \beta$ και $1/5 = \mathbb{P}\big[X_2 = 1 \mid X_1 = 1\big] = \alpha + \frac{\beta}{25}$. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων βρίσκουμε $\alpha = 1/6,\ \beta = 5/6$, οπότε

$$\mathbb{P}\big[X_n = 1 \mid X_1 = 1\big] = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{25^{n-1}}\right) = \frac{1 + 5^{3-2n}}{6}.$$

Λύση 2: Αν δεν σκεφτεί κανείς να δει τις διαφορετικές από 6 ζαριές σαν μια κατάσταση, και πάλι μπορεί να λύσει το πρόβλημα με περισσότερο κόπο. Οι διαδοχικές ζαριές μας είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/25 & 4/25 & 4/25 & 4/25 & 4/25 \\ 4/25 & 1/5 & 4/25 & 4/25 & 4/25 & 4/25 \\ 4/25 & 4/25 & 1/5 & 4/25 & 4/25 & 4/25 \\ 4/25 & 4/25 & 4/25 & 1/5 & 4/25 & 4/25 \\ 4/25 & 4/25 & 4/25 & 4/25 & 1/5 & 4/25 \\ 4/25 & 4/25 & 4/25 & 4/25 & 4/25 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε να διαγωνιοποιήσουμε τον P με το συνηθισμένο τρόπο, ας δούμε όμως εδώ ένα εναλλακτικό τρόπο που βασίζεται στην ειδική μορφή που έχει ο P. Παρατηρήστε ότι αν $u^\top = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$ τότε

$$uu^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

και άρα $P = \frac{I + 4uu^\top}{25}$. Αν το $x \in \mathbb{R}^6$ είναι ιδιοδιάνυσμα του P που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ έχουμε

$$\frac{I + 4uu^\top}{25}x = \lambda x \Leftrightarrow (25\lambda - 1)x = 4uu^\top x \Leftrightarrow (25\lambda - 1)x = 4(u^\top x)u.$$

Από την παραπάνω βλέπουμε πώς οποιοδήποτε διάνυσμα κάθετο στο u είναι ιδιοδιάνυσμα του P που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1/25$, ενώ το u είναι και αυτό ιδιοδιάνυσμα του P με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ (το 1 είναι πάντα ιδιοτιμή ενός στοχαστικού πίνακα, αλλά μπορείτε να το δείτε θέτοντας $x = u$ στην παραπάνω εξίσωση οπότε θα πρέπει $(25\lambda_2 - 1) = 4uu^\top = 24$.) Επομένως ο P έχει 6 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα (το u και 5 κάθετα σε αυτό) και άρα είναι διαγωνιοποιήσιμος και

$$P = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix} R^{-1}.$$

Τώρα από τη μαρκοβιανή ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mathbb{P}\big[X_n = 6 \mid X_1 = 6\big] = \mathbb{P}\big[X_{n-1} = 6 \mid X_0 = 6\big] = p_{66}^{(n-1)}$ και άρα

$$\mathbb{P}\big[X_n = 6 \mid X_1 = 6\big] = \alpha + \frac{\beta}{25^{n-1}},$$

απ' όπου βρίσκουμε όπως στην πρώτη λύση ότι $\alpha = 1/6,\ \beta = 5/6$.
Μια παρόμοια προσέγγιση θα ήταν να προσέξετε ότι

$$P^2 = \left(\frac{I + 4uu^\top}{25}\right)^2 = \frac{I + 8uu^\top + 16uu^\top uu^\top}{25^2} = \frac{I + 8uu^\top + 16u(u^\top u)u^\top}{25^2} = \frac{I + 104uu^\top}{25^2}.$$

και εν γένει ο P^n είναι της μορφής $\frac{I+\beta_n uu^\top}{25^n}$, όπου η β_n προσδιορίζεται από την αναδρομική σχέση $\beta_{n+1} = 25\beta_n + 4$, με $\beta_0 = 0$. Έτσι,

$$P^n = \frac{1}{25^n} I + \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{25^n})uu^\top.$$

Άσκηση 3 Η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε την κατανομή ισορροπίας της αλυσίδας.
Λύση: Μια κατανομή ισορροπίας $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ ικανοποιεί την εξίσωση $\pi = \pi P$ η οποία γράφεται ως

$$\left\{ \begin{array}{rl} \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_4 & = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4 & = \pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_4 & = \pi_3 \\ \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 & = \pi_4 \end{array} \right\}.$$

Επιλύοντας το ομογενές αυτό σύστημα με τον αγαπημένο σας τρόπο θα βρείτε ότι οι λύσεις του είναι της μορφής $t(93\ 108\ 71\ 78)$, με $t \in \mathbb{R}$. Θα βρούμε την κατανομή ισορροπίας π από το γεγονός ότι είναι μια κατανομή στον $\mathbb{X}$ και άρα ικανοποιεί επιπλέον την

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1.$$

Επομένως $\pi = \left(\frac{93}{350}\ \frac{108}{350}\ \frac{71}{350}\ \frac{78}{350}\right)$.

Άσκηση 4 Έστω $\{X_n\}$ μια μαρκοβιανή αλυσίδα. Στον ίδιο χώρο καταστάσεων κατασκευάζουμε μια καινούργια αλυσίδα $\{Y_n\}$ ως εξής: πριν από κάθε βήμα στρίβουμε ένα νόμισμα με πιθανότητα να φέρει κεφαλή p $(0 < p < 1)$, ανεξάρτητα από ό,τι έχει συμβεί μέχρι τότε. Αν έρθει κεφαλή αφήνουμε την Y_n στην ίδια κατάσταση, ενώ αν έρθει γράμματα αποφασίζουμε ποια θα είναι η επόμενη κατάστασή της σύμφωνα με τις πιθανότητες μετάβασης της $\{X_n\}$. Δείξτε ότι η $\{Y_n\}$ είναι μαρκοβιανή και υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασής της. Δείξτε ότι οι δυο αλυσίδες έχουν τις ίδιες καταστάσεις ισορροπίας.
Λύση: Θεωρούμε ένα ενδεχόμενο $A_j = \{Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \ldots, Y_{n-1} = j\}$. Αν K_n είναι το αποτέλεσμα του n-οστού στριψίματος, για οποιεσδήποτε καταστάσεις $j, k \in \mathbb{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big[Y_n = k\ |A_j\big] &= \mathbb{P}\big[Y_n = k\ |A_j, K_n = K\big]\mathbb{P}\big[K_n = K\ |A_j\big] + \mathbb{P}\big[Y_n = k\ |A_j, K_n = \Gamma\big]\mathbb{P}\big[K_n = \Gamma\ |A_j\big] \\ &= \mathbb{P}\big[Y_n = k\ |A_j, K_n = K\big]\mathbb{P}\big[K_n = K\big] + \mathbb{P}\big[Y_n = k\ |A_j, K_n = \Gamma\big]\mathbb{P}\big[K_n = \Gamma\big] \\ &= \delta_{jk}p + P_{jk}(1 - p). \end{aligned}$$

Στα παραπάνω η πρώτη ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, ενώ η δεύτερη από το γεγονός ότι το αποτέλεσμα κάθε στριψίματος είναι ανεξάρτητο από ό,τι έχει συμβεί μέχρι τότε. Επομένως,

$$\mathbb{P}\big[Y_n = k\ |A_j\big] = \mathbb{P}\big[Y_n = k\ |Y_{n-1} = j\big] = \delta_{jk}p + P_{jk}(1 - p)$$

και άρα η $\{Y_n\}$ είναι μαρκοβιανή ενώ ο πίνακας μετάβασης της Y_n είναι $Q = pI + (1 - p)P$. Επιπλέον έχουμε

$$\pi = \pi Q \Leftrightarrow \pi = p\pi + (1 - p)\pi P \Leftrightarrow (1 - p)\pi = (1 - p)\pi P \Leftrightarrow \pi = \pi P.$$

Επομένως το π είναι κατάσταση ισορροπίας της Y_n τότε και μόνο όταν είναι κατάσταση ισορροπίας της X_n. Διαισθητικά αυτό μπορεί κανείς να το αντιληφθεί ως εξής. Η $\{Y_n\}$ είναι μια ράθυμη εκδοχή της $\{X_n\}$. Χάνει το βήμα της με πιθανότητα $p > 0$, αλλά όταν μετακινείται διαλέγει το στόχο της ακριβώς όπως και η $\{X_n\}$. Περιμένουμε λοιπόν ότι οι δυο αλυσίδες θα έχουν την ίδια ασυμπτωτική κατανομή.

Άσκηση 5 Σ' ένα ράφι της βιβλιοθήκης σας υπάρχουν τρία βιβλία: Algebra, Basic Topology, Calculus, που θα συμβολίζουμε με A,B,C για συντομία. Κάθε πρωί παίρνετε τυχαία ένα βιβλίο από τη θέση του, με πιθανότητα p, q, r αντίστοιχα. Υποθέτουμε $p, q, r > 0$ με $p + q + r = 1$). Όταν τελειώνετε το διάβασμά σας για την ημέρα το ξαναβάζετε στο ράφι στην αριστερότερη θέση. Η διάταξη των βιβλίων είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο $\mathbb{X}$ των μεταθέσεων των συμβόλων $\{A, B, C\}$. Δείξτε ότι η αλυσίδα αυτή είναι μη αναγώγιμη και βρείτε την κατάσταση ισορροπίας της.

Λύση: Ας απαριθμήσουμε τις δυνατές καταστάσεις με την εξής σειρά $\mathbb{X} = \{ABC, CAB, BCA, BAC, ACB, CBA\}$. Ο πίνακας μετάβασης της αλυσίδας είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} p & r & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & r & q & 0 & p & 0 \\ p & 0 & q & 0 & 0 & r \\ p & 0 & 0 & q & 0 & r \\ 0 & r & 0 & q & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & r \end{pmatrix}.$$

Το ότι η αλυσίδα είναι μη αναγώγιμη είναι διαισθητικά φανερό. Μπορείτε να δείτε ότι όποια κι αν είναι η αρχική της κατάσταση, αν επιλέξετε τις δυο πρώτες μέρες το δεξιότερο βιβλίο, την τρίτη μέρα το μεσαίο βιβλίο, και τις δυο επόμενες πάλι το δεξιότερο βιβλίο (ενδεχόμενο το οποίο έχει θετική πιθανότητα) τότε η διάταξη των βιβλίων στο ράφι θα έχει περάσει από όλες τις δυνατές διαμορφώσεις της. Επομένως, όλα τα σημεία στον $\mathbb{X}$ βρίσκονται σε αμφίδρομη επικοινωνία και άρα όλος ο $\mathbb{X}$ αποτελεί μια κλειστή κλάση. Για να βρούμε την κατάσταση ισορροπίας λύνουμε το ομογενές σύστημα εξισώσεων $\pi = \pi P$. Ας δούμε τις εξισώσεις που αφορούν σε καταστάσεις με το A ως αριστερότερο βιβλίο:

$$\pi(ABC) = p\pi(ABC) + p\pi(BAC) + p\pi(BCA) \tag{3}$$
$$\pi(ACB) = p\pi(ACB) + p\pi(CAB) + p\pi(CBA). \tag{4}$$

Αν $X_A = \{ABC, ACB\}$, προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε $\pi(X_A) = p\sum_{x\in\mathbb{X}} \pi(x) = p$. Όμοια, αν $X_B = \{BAC, BCA\}$ και $X_C = \{CAB, CBA\}$ τότε $\pi(X_B) = q$, $\pi(X_C) = r$. Από τις (3), (4) παίρνουμε τελικά ότι

$$\pi(ABC) = \frac{p}{1-p}\pi(X_B) = \frac{pq}{1-p} \qquad \text{και} \qquad \pi(ACB) = \frac{p}{1-p}\pi(X_C) = \frac{pr}{1-p}. \tag{5}$$

Οι πιθανότητες των άλλων καταστάσεων βρίσκονται με ανάλογο τρόπο, οπότε τελικά

$$\pi = (\frac{pq}{1-p}, \frac{rp}{1-r}, \frac{qr}{1-q}, \frac{qp}{1-q}, \frac{pr}{1-p}, \frac{rq}{1-r}).$$

Αν είχαμε n βιβλία με πιθανότητα να επιλέξουμε καθένα απ' αυτά $p_1, p_2, \ldots, p_n$, μάλλον θα ήταν πολύ επίπονο να προσπαθήσουμε να λύσουμε το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα. Μπορούμε όμως με ένα επιχείρημα να αναγάγουμε το πρόβλημα στο αντίστοιχο πρόβλημα με ένα βιβλίο λιγότερο. Αν $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ είναι μια μετάθεση του $(1, 2, ..., n)$, τότε

$$\mathbb{P}\big[X_m = \sigma\big] = p_{\sigma_1}\mathbb{P}\big[X_{m-1} \in A_\sigma\big].$$

Στην παραπάνω A_σ είναι το σύνολο των μεταθέσεων όπου τα $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ εμφανίζονται με αυτή τη σειρά, και το σ_1 μπορεί να είναι σε οποιαδήποτε θέση ανάμεσά τους. Ας κατασκευάσουμε τώρα τη μαρκοβιανή αλυσίδα Y_n που καταγράφει τη σειρά όλων των βιβλίων εκτός του σ_1. Ο χώρος των καταστάσεών της θα είναι οι $(n-1)$-άδες που αποτελούν μεταθέσεις των $\{\sigma_k\}_{k\neq 1}$. Με αυτόν τον συμβολισμό

$$\pi(\sigma) = \mathbb{P}_\pi\big[X_m = \sigma\big] = p_{\sigma_1}\mathbb{P}_\pi\big[X_{m-1} \in A_\sigma\big] = p_{\sigma_1}\mathbb{P}_\pi\big[Y_{m-1} = (\sigma_2, \ldots, \sigma_n)\big]. \tag{6}$$

Σε κάθε βήμα, η Y_n θα μένει στην ίδια κατάσταση με πιθανότητα p_{σ_1}, ενώ με πιθανότητα p_{σ_k} το σ_k μεταβαίνει στην πρώτη θέση για $k \neq 1$. Σύμφωνα με της προηγούμενη άσκηση, η κατάσταση ισορροπίας $\tilde{\pi}$ της Y_n θα είναι ίδια με αυτή που αντιστοιχεί στο πρόβλημα των βιβλίων $(\sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ με πιθανότητα επιλογής για το σ_k ίση με $p_{\sigma_k}/(1-p_{\sigma_1}),\ k \neq 1$. Από την (6) περνώντας στο όριο έχουμε

$$\pi(\sigma) = p_{\sigma_1}\tilde{\pi}(\sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Έτσι, έχουμε λ.χ. για τέσσερα βιβλία

$$\pi(ABCD) = p_A\tilde{\pi}(BCD) = p_A \frac{\frac{p_B}{1-p_A}\frac{p_C}{1-p_A}}{1-\frac{p_B}{1-p_A}} = p_A \frac{p_B}{1-p_A}\frac{p_C}{1-p_A-p_B}.$$

Επαγωγικά μπορεί κανείς να δει τώρα ότι

$$\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = p_{\sigma_1}\frac{p_{\sigma_2}}{1-p_{\sigma_1}}\frac{p_{\sigma_3}}{1-p_{\sigma_1 - p_{\sigma_2}}} \cdots \frac{p_{\sigma_n}}{1-p_{\sigma_1}-p_{\sigma_2}-\cdots-p_{\sigma_n}}.$$

Άσκηση 6 Βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας της μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ταξινομήστε τις κλάσεις σε ανοιχτές και κλειστές. Ποιές κλάσεις είναι επαναληπτικές και ποιες παροδικές;
Λύση: Βλέπουμε εύκολα ότι $1 \leftrightarrow 5$, ενώ καμία άλλη κατάσταση δεν είναι προσβάσιμη από τις 1,5. Επίσης έχουμε $2 \leftrightarrow 4$, ενώ οι 2,4 δεν είναι προσβάσιμες από άλλη κατάσταση. Τέλος, η κατάσταση 3 αποτελεί μια κλάση μόνη της. Έχουμε λοιπόν

$$\mathcal{C}_1 = \{1, 5\},\ \mathcal{C}_2 = \{2, 4\},\ \mathcal{C}_3 = \{3\}.$$

Επιπλέον έχουμε $\mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ αφού $4 \to 5$, και $\mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ αφού $4 \to 3$. Τέλος οι κλάσεις $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3$ δεν επικοινωνούν. Έχουμε λοιπόν

$$\mathcal{C}_1 \leftarrow \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3.$$

Οι κλάσεις $\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_3$ είναι κλειστές, και εφόσον είναι πεπερασμένες είναι επαναληπτικές. Η $\mathcal{C}_2$ είναι ανοιχτή και άρα παροδική.

Άσκηση 7 Έχετε €1 και θέλετε να συμπληρώσετε γρήγορα ένα ποσό €10. Για το σκοπό αυτό παίζετε ένα παιχνίδι με τους εξής κανόνες. Σε κάθε γύρο η πιθανότητα νίκης σας είναι $0 < p < 1$, ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα των προηγούμενων γύρων. Πριν από κάθε γύρο επιλέγετε το ποσό που στοιχηματίζετε. Αν κερδίσετε σας επιστρέφεται το διπλάσιο του στοιχήματός σας, αν όχι χάνετε το ποσό που ποντάρατε σ΄ αυτόν τον γύρο. Έχετε αποφασίσει να ποντάρετε όσα χρήματα έχετε αν αυτά είναι λιγότερα από €5, διαφορετικά όσα χρειάζεστε για να φτάσετε τα €10.
α) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσετε ποτέ τα €10;
β) Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να χάσετε τα χρήματά σας ή να φτάσετε τα €10;
Λύση: Η περιουσία μας μετά από κάθε γύρο θα είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Αν πάρετε για χώρο καταστάσεων το $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ θα διαπιστώσετε διαμερίζοντας τον χώρο σε κλάσεις αμφίδρομης επικοινωνίας ότι οι κλάσεις $\{3\}, \{5\}, \{7\}$ και $\{9\}$ δεν είναι προσβάσιμες από το 1 (απ΄ όπου ξεκινάμε). Επομένως δεν έχει νόημα για το συγκεκριμένο πρόβλημα να τις συμπεριλάβουμε στο χώρο καταστάσεων. Ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης στον $\mathbb{X}$ είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

α) Αν ορίσουμε $T = \inf\{k \geq 0 : \ X_k = 10\}$ το χρόνο άφιξης στο 10, και την συνάρτηση $h(x) = \mathbb{P}_x\big[T < +\infty\big]$, τότε η $h(x)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\begin{cases} h(0) = 0, \qquad h(10) = 1 \\ (I - P)h(x) = h(x) - \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{xy} h(y) = 0, \ x = 1, 2, 4, 6, 8. \end{cases}$$

Γράφοντας αυτές τις εξισώσεις για τον πίνακα μετάβασης P του προβλήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} h(1) &= (1-p)h(0) + ph(2) = ph(2) \\ h(2) &= (1-p)h(0) + ph(4) = ph(4) \\ h(4) &= (1-p)h(0) + ph(8) = ph(8) \\ h(6) &= (1-p)h(2) + ph(10) = (1-p)h(2) + p \\ h(8) &= (1-p)h(6) + ph(10) = (1-p)h(6) + p. \end{aligned}$$

Εύκολα μπορούμε να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις και να βρούμε

$$h(1) = \mathbb{P}_1\big[T < +\infty\big] = \frac{(2-p)p^4}{1 - (1-p)^2 p^2}.$$

β) Ας ορίσουμε τώρα $\tau = \inf\{k \geq 0 : \ X_k \in \{0, 10\}\}$ τον χρόνο διάρκειας του παιχνιδιού και $g(x) = \mathbb{E}_x[\tau]$. Η $g(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\begin{cases} g(0) = g(10) = 0 \\ (I - P)g(x) = g(x) - \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{xy} g(y) = 1, \ x = 1, 2, 4, 6, 8. \end{cases}$$

Γράφουμε πάλι αυτές τις εξισώσεις για τον πίνακα P του προβλήματος.

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 + (1-p)g(0) + pg(2) = 1 + pg(2) \\ g(2) &= 1 + (1-p)g(0) + pg(4) = 1 + pg(4) \\ g(4) &= 1 + (1-p)g(0) + pg(8) = 1 + pg(8) \\ g(6) &= 1 + (1-p)g(2) + pg(10) = 1 + (1-p)g(2) \\ g(8) &= 1 + (1-p)g(6) + pg(10) = 1 + (1-p)g(6). \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$g(1) = 1 + p + p^2 + p^3 g(8),$$

ενώ

$$g(8) = 1 + (1-p)g(6) = 2 - p + (1-p)^2 g(2) = 3 - 3p + p^2 + (1-p)^2 pg(4) = 3 - 2p - p^2 + p^3 + (1-p)^2 p^2 g(8).$$

Άρα

$$g(8) = \frac{3 - 2p - p^2 + p^3}{1 - (1-p)^2 p^2} \qquad \text{και} \qquad g(1) = \mathbb{E}_1[\tau] = 1 + p + p^2 + p^3 \frac{3 - 2p - p^2 + p^3}{1 - (1-p)^2 p^2}.$$

Άσκηση 8 Πόσες φορές (κατά μέση τιμή) πρέπει να στρίψουμε ένα τίμιο νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί μια σειρά από N ίδια αποτελέσματα;

Λύση 1: Θεωρούμε μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X} = \mathbb{N}_0$ που η τιμή της X_n είναι το πλήθος των συνεχόμενων ίδιων αποτελεσμάτων που έχουμε μετά τη ρίψη n. Π.χ. αν τα αποτελέσματα των ρίψεων είναι Κ,Κ,Γ,Γ,Γ,Κ,Γ,Γ... τότε οι τιμές της X_n για $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι 0,1,2,1,2,3,1,1,2,.... Οι πιθανότητες μετάβασης αυτής της αλυσίδας είναι $p_{01} = 1$, ενώ $p_{k,k+1} = 1/2$ και $p_{k,1} = 1/2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Αν $T_N = \inf\{k \geq 0 : \ X_k \geq N\}$ και $g(x) = \mathbb{E}_x\big[T_N\big]$, η $g(\cdot)$ θα ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \ x = N, N+1, \ldots \\ g(0) &= 1 + g(1) \\ g(x) &= 1 + \frac{1}{2}g(1) + \frac{1}{2}g(x+1), \ x = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Λύνουμε την αναδρομική εξίσωση $g(x+1) = 2g(x) - \big(2 + g(1)\big),\ x = 1, 2, ..., N-1$. Η λύση είναι της μορφής $g(x) = \alpha 2^x + \beta$, με $\beta = 2 + g(1)$ (από την αναδρομική σχέση) και $\alpha = -1$ από τη συνθήκη για $x = 1$. Έχουμε λοιπόν

$$g(x) = g(1) + 2 - 2^x,\ x = 1, 2, \ldots, N$$

οπότε από την $g(N) = 0$ βρίσκουμε $g(1) = 2^N - 2$ και άρα $g(0) = 1 + g(1) = 2^N - 1$.

Λύση 2: Στο ενδεχόμενο $\{T_{N-1} < +\infty\}$ ορίζουμε $S = \inf\{n > T_{N-1} :\ X_n \geq N\}$. Η τ.μ. S μετρά το χρόνο από τη στιγμή που θα συμπληρώσουμε μια σειρά ίδιων αποτελεσμάτων μήκους $N-1$ μέχρι να συμπληρώσουμε μια σειρά μήκους N. Έχουμε λοιπόν $T_N = T_{N-1} + S$ και άρα $\mathbb{E}\big[T_N\big] = \mathbb{E}\big[T_{N-1}\big] + \mathbb{E}[S]$. Από την ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα η $Y_n = X_{T_{N-1}+n}$ είναι η ίδια μαρκοβιανή αλυσίδα με $Y_0 = N-1$, ενώ $S = \inf\{n > 0 :\ Y_n \geq N\}$. Έτσι,

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}\big[S\ |Y_1 = 1\big]\mathbb{P}[Y_1 = 1] + \mathbb{E}\big[S\ |Y_1 = N\big]\mathbb{P}[Y_1 = N] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[T_N] + \frac{1}{2} \times 1$$

Έχουμε επομένως την αναδρομική σχέση $\mathbb{E}\big[T_N\big] = \mathbb{E}\big[T_{N-1}\big] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[T_N\big] + \frac{1}{2} \times 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}\big[T_N\big] = 2\mathbb{E}\big[T_{N-1}\big] + 1$, που μαζί με την $T_1 = 1$ δίνει $\mathbb{E}[T_N] = 2^N - 1$.

Άσκηση 9 Στρίβετε ένα νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί η ακολουθία ΚΓΚ. Βρείτε τον αναμενόμενο αριθμό φορών που θα στρίψετε το νόμισμα.

Λύση 1: Θεωρούμε τη μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ το χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma, A\}$, με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αφού στρίψουμε το νόμισμα 2 φορές καθορίζουμε ανάλογα την αρχική κατάσταση της αλυσίδας και το παιχνίδι τελειώνει όταν η αλυσίδα φτάσει στην κατάσταση Α. Αν $T_A = \inf\{k \geq 0 :\ X_k = A\}$ και $g(x) = \mathbb{E}_x\big[T_A\big]$ για $x \in \mathbb{X}$, η $g(\cdot)$ λύνει το πρόβλημα

$$\begin{aligned} g(A) &= 0 \\ g(x) &= 1 + \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{xy} g(y),\ x \neq A. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των πιθανοτήτων μετάβασης έχουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\left\{ \begin{array}{rl} g(KK) & = 1 + 1/2g(KK) + 1/2g(K\Gamma) \\ g(K\Gamma) & = 1 + 1/2g(\Gamma\Gamma) \\ g(\Gamma K) & = 1 + 1/2g(KK) + 1/2g(K\Gamma) \\ g(\Gamma\Gamma) & = 1 + 1/2g(\Gamma K) + 1/2g(\Gamma\Gamma) \end{array} \right\}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $g(K\Gamma) = 6,\ g(KK) = g(\Gamma K) = 8,\ g(\Gamma\Gamma) = 10$. Η αρχική κατανομή της αλυσίδας μετά τα δύο πρώτα στριψίματα είναι $\pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 0)$ και άρα

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi\big[T_A\big] &= \mathbb{E}_{KK}[T_A]\pi(KK) + \mathbb{E}_{K\Gamma}[T_A]\pi(K\Gamma) + \mathbb{E}_{\Gamma K}[T_A]\pi(\Gamma K) + \mathbb{E}_{\Gamma\Gamma}[T_A]\pi(\Gamma\Gamma) \\ &= \frac{8 + 6 + 8 + 10}{4} = 8. \end{aligned}$$

Συνυπολογίζοντας τα δυο στριψίματα που κάνουμε για να αρχικοποιήσουμε την αλυσίδα, έχουμε ότι το αναμενόμενο πλήθος των φορών που πρέπει να στρίψουμε ένα νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί η ακολουθία $K\Gamma K$ είναι 10.

Λύση 2: Αν T_K είναι ο χρόνος εμφάνισης της πρώτης κεφαλής και $T_{K\Gamma K}$ ο χρόνος πρώτης εμφάνισης της ακολουθίας $K\Gamma K$, ορίζουμε $S = T_{K\Gamma K} - T_K$. Ο χρόνος T_K έχει μέση τιμή 2 γιατί ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με $p = 1/2$. Επομένως $\mathbb{E}\big[T_{K\Gamma K}\big] = 2 + \mathbb{E}[S]$. Για να βρούμε τη μέση τιμή του χρόνου S θεωρούμε μια αλυσίδα Y_n που καταγράφει τα τρία τελευταία αποτελέσματα και ξεκινά από το $K\Gamma K$. Ο χρόνος S έχει την ίδια κατανομή με το χρόνο επανόδου της Y_n στο $K\Gamma K$, $\tilde{T}_{K\Gamma K} = \inf\{k > 0 :\ Y_k = K\Gamma K\}$ (σκεφτείτε γιατί!).

Έτσι $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}_{K\Gamma K}\big[\tilde{T}_{K\Gamma K}\big]$. Όμως η Y_n είναι μη αναγώγιμη (εύκολο) με κατανομή ισορροπίας π_* που δίνει λόγω συμμετρίας την ίδια πιθανότητα (1/8) σε κάθε τριάδα. Επομένως, από το ανανεωτικό θεώρημα

$$\mathbb{E}_{K\Gamma K}\big[\tilde{T}_{K\Gamma K}\big] = \frac{1}{\pi_*(K\Gamma K)} = 8.$$

και άρα $\mathbb{E}\big[T_{K\Gamma K}\big] = 2 + 8 = 10$.

Άσκηση 10 Θεωρούμε μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ στον $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ με πιθανότητες μετάβασης

$$p_{k,k-1} = \frac{k-1}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k},\ p_{k,k+1} = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \text{ για } k \in \mathbb{N}.$$

Η X_n έχει μια τάση να πηγαίνει δεξιά αλλά η τάση αυτή εξασθενεί όσο απομακρινόμαστε από το 1, οπότε και συμπεριφέρεται σχεδόν όπως ένας απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος. Για τον απλό συμμετρικό τυχαίο περίπατο γνωρίζουμε ότι απ΄ όπου κι αν ξεκινήσει θα φτάσει στο 1 με πιθανότητα 1. Αν $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}$ υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}_k\big[T < +\infty\big]$.

Λύση: Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $h(k) = \mathbb{P}_k\big[T < +\infty\big]$, τότε η $h(\cdot)$ είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση του προβλήματος

$$(*)\begin{cases} h(1) = 1 \\ h(k) - \sum_j p_{kj}h(j) = 0, k \geq 2. \end{cases}$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται ως

$$h(k) = \left(\frac{k-1}{2k}\right)h(k-1) + \left(\frac{k+1}{2k}\right)h(k+1) \Leftrightarrow h(k) - h(k+1) = \frac{k-1}{k+1}\big(h(k-1) - h(k)\big).$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά την τελευταία σχέση για $k, k-1, \ldots, 2$ έχουμε

$$h(k) - h(k+1) = \frac{k-1}{k+1}\frac{k-2}{k}\big(h(k-2) - h(k-1)\big) = \cdots = \frac{2}{k(k+1)}\big(h(1) - h(2)\big), \forall k \in \mathbb{N}$$

Αθροίζοντας τώρα τις παραπάνω σχέσεις για $k = 1, 2, \ldots, m-1$ παίρνουμε

$$h(1) - h(m) = 2\big(h(1) - h(2)\big)\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k(k+1)} = 2\big(h(1) - h(2)\big)\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

και άρα

$$1 - h(m) = 2\big(1 - h(2)\big)\frac{m-1}{m},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Αυτές είναι όλες οι λύσεις του προβλήματος $(*)$. Εφόσον $(m-1)/m \to 1$, για να είναι μια τέτοια λύση μη αρνητική για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θα πρέπει $2\big(1 - h(2)\big) \leq 1$ και άρα $h(2) \geq 1/2$. Ανάμεσα σε αυτές η $h(m)$ ελαχιστοποιείται αν $h(2) = 1/2$, οπότε

$$h(k) = \mathbb{P}_k\big[T < +\infty\big] = 1 - 2\Big(1 - \frac{1}{2}\Big)\frac{k-1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι, σε αντίθεση με τον απλό συμμετρικό τυχαίο περίπατο, η X_n δεν φτάνει οπωσδήποτε στο 1. Ειδικώτερα, μπορούμε να δούμε ότι η κατάσταση 1 είναι παροδική, αφού $p_{12} = 1$ και άρα αν $\tilde{T}_1 = \inf\{k > 0 :\ X_k = 1\}$ είναι ο χρόνος επανόδου στο 1 έχουμε

$$\mathbb{P}_1\big[\tilde{T}_1 < +\infty\big] = \mathbb{P}_2\big[T < +\infty\big] = \frac{1}{2} < 1.$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι όλο το $\mathbb{N}$ είναι μια κλάση επικοινωνίας και άρα όλες οι καταστάσεις είναι παροδικές. Για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$ η αλυσίδα με πιθανότητα 1, κάνει πεπερασμένου πλήθους επισκέψεις το k . Πεισθείτε ότι αυτό σημαίνει $\mathbb{P}[X_n \to \infty] = 1$.

Άσκηση 11 Για ένα απλό συμμετρικό τυχαίο περίπατο στο $\mathbb{Z}$ που ξεκινά από το 1, ποιός είναι ο αναμενόμενος χρόνος άφιξής του στο 0;

Λύση 1: Ορίζουμε $T = \inf\{k \geq 0 : X_k = 0\}$ και $g(x) = \mathbb{E}_x[T]$. Παρότι θέλουμε να υπολογίσουμε την $g(1)$, μπορούμε να βρούμε την $g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Z}$ σαν την ελάχιστη μη αρνητική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(k) - \sum_j p_{kj} g(j) = 1, k \neq 0. \end{cases}$$

Για $k \in \mathbb{N}$ η τελευταία εξίσωση γράφεται ως

$$g(k) = 1 + \frac{g(k-1) + g(k)}{2} \Leftrightarrow g(k+1) - g(k) = g(k) - g(k-1) - 2.$$

Επομένως η $g(k+1) - g(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ είναι αριθμητική πρόοδος και

$$g(k+1) - g(k) = g(1) - g(0) - 2k = g(1) - 2k, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις για $k = 0, 1, \ldots, m-1$ παίρνουμε

$$g(m) = mg(1) - m(m-1).$$

Αυτή είναι η μορφή για $k \in \mathbb{N}$ οποιασδήποτε λύσης του προβλήματος που θεωρήσαμε. Εφόσον $m(m-1) \gg m$ καθώς $m \to \infty$, ο μόνος τρόπος να είναι η λύση αυτή να είναι μη αρνητική για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι αν $g(1) = \infty$, οπότε $g(k) = \infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Μπορούμε τώρα να δούμε ότι ο απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ (που είναι επαναληπτικός) δεν είναι γνήσια επαναληπτικός. Πράγματι, αν $X_0 = 0$ και ορίσουμε $\tilde{T}_0 = \inf\{k > 0 : \ X_k = 0\}$ τον χρόνο πρώτης επιστροφής στο μηδέν τότε από το θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$\mathbb{E}_0[\tilde{T}_0] = 1 + \frac{1}{2}g(1) + \frac{1}{2}g(-1) = +\infty.$$

Λύση 2: Μπορούμε να βρούμε την γεννήτρια συνάρτηση του χρόνου άφιξης στο 0. Πράγματι, για $0 < s < 1$ ορίζουμε $\phi(s) = \mathbb{E}_1[s^T]$. Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \mathbb{E}_1[s^T \ | X_1 = 0]\mathbb{P}_1[X_1 = 0] + \mathbb{E}_1[s^T \ | X_1 = 2]\mathbb{P}_1[X_1 = 2] \\ &= s^1 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}_1[s^T \ | X_1 = 2]. \end{aligned}$$

Αν $H = T - 1$, όπου H είναι ο χρόνος άφιξης στο 0 για την $Y_n = X_{n+1}$, από την μαρκοβιανή ιδιότητα η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\phi(s) = \frac{s}{2} + \frac{s}{2}\mathbb{E}_2[s^H].$$

Αν τώρα $H_1 = \inf\{k \geq 0 : \ Y_k = 1\}$ και $H_2 = H - H_1$, αν δηλαδή σπάσουμε το χρόνο H στο κομμάτι μέχρι η αλυσίδα Y_n να ξαναφτάσει στο 1 για πρώτη φορά και στο υπόλοιπο του χρόνου μέχρι η αλυσίδα να φτάσει στο 0, τότε ο H_1 έχει την ίδια κατανομή με τον T (αν η Y_n είναι ένας απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος που ξεκινά από το 2, τότε η $Z_n = Y_n - 1$ είναι ένας απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος που ξεκινά από το 1, και ο H_1 είναι ο χρόνος άφιξης της Z_n στο μηδέν). Επιπλέον, από την ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα ο H_2 θα είναι ανεξάρτητος από τον H_1, ενώ θα έχει και αυτός την ίδια κατανομή όπως ο T (Η $V_n = Y_{H_1+n}$ είναι ένας απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος με $V_0 = 1$ και ο H_2 είναι ο χρόνος άφιξης της V_n στο μηδέν.) Επομένως

$$\mathbb{E}_2[s^H] = \mathbb{E}_2[s^{H_1}]\mathbb{E}_2[s^{H_2}] = \phi^2(s),$$

και άρα η $\phi(s)$ ικανοποιεί την αλγεβρική εξίσωση $s\phi^2(s) - 2\phi(s) + s = 0$, που δίνει

$$\phi(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - s^2}}{s}.$$

Εφόσον η ϕ είναι συνεχής και $\lim_{s \to 0} \phi(s) = 0$ η $\phi(s)$ θα είναι η ρίζα του τριωνύμου με το αρνητικό πρόσημο.

$$\phi(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - s^2}}{s}.$$

Και εφόσον $\mathbb{P}_1[T < +\infty] = 1$ έχουμε

$$\mathbb{E}_1[T] = \lim_{s \uparrow 1} \phi^{'}(s) = \infty.$$

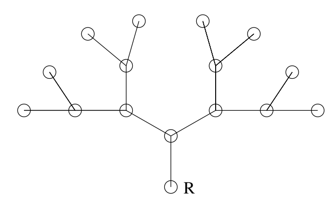
Παρατηρήστε ότι η λύση αυτή μας δίνει όχι μόνο την μέση τιμή του T αλλά ολόκληρη την κατανομή του. Αν αναπτύξουμε την $\phi(s)$ σε σειρά Taylor έχουμε

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)4^k} \binom{2k}{k} s^{2k-1}$$

και άρα

$$\mathbb{P}_1\big[T = 2k-1\big] = \frac{1}{(2k-1)4^k} \binom{2k}{k}, \ \mathbb{P}_1\big[T = 2k\big] = 0.$$

Άσκηση 12 Ένα διωνυμικό δέντρο με ρίζα είναι ένας άπειρος γράφος, χωρίς κλειστά μονοπάτια, με μια διακεκριμένη κορυφή R (την ρίζα) από την οποία διέρχεται μια ακμή, ενώ από κάθε άλλη κορυφή του διέρχονται τρεις ακμές όπως στο διπλανό σχήμα. Ένας τυχαίος περίπατος σ' αυτόν το γράφο είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο σύνολο V των κορυφών του γράφου, που επιλέγει σε κάθε βήμα τυχαία μια από τις κορυφές με τις οποίες συνδέεται με ακμή και μετακινείται εκεί. Δείξτε ότι αυτός ο τυχαίος περίπατος είναι παροδικός.



Λύση: Ορίζουμε $T = \inf\{k \geq 0 : \ X_k = R\}$ τον χρόνο άφιξης στη ρίζα, και $h(x) = \mathbb{P}_x\big[T < +\infty\big]$. Η συνάρτηση h είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} h(R) = 1 \\ h(x) = \sum_{y \in V} p_{xy} h(y), \ x \neq R. \end{cases}$$

Μπορούμε να ορίσουμε ως βάθος $u(x)$ μιας κορυφής x το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού που τη συνδέει με το R. Λόγω συμμετρίας η $h(x)$ πρέπει να έχει την ίδια τιμή για όλες τις κορυφές με το ίδιο βάθος. Επομένως αρκεί να βρούμε την ελάχιστη μη αρνητική λύση του παραπάνω προβλήματος της μορφής $h(x) = H\big(u(x)\big)$. Κάθε κορυφή $x \neq R$ γειτνιάζει με μια κορυφή βάθους $u(x) - 1$ και με δυο κορυφές βάθους $u(x) + 1$. Επομένως αρκεί να βρούμε την ελάχιστη μη αρνητική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} H(0) = 1 \\ H(k) = \frac{H(k-1) + 2H(k+1)}{3}, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Λύνουμε την γραμμική αναδρομική εξίσωση $2H(k+1) = 3H(k) - H(k-1)$. Το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο είναι

$$p(\lambda) = 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 2(\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2})$$

επομένως $H(k) = \alpha + \beta(\frac{1}{2})^k$, για κάποιες σταθερές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Από την $H(0) = 1$ βρίσκουμε $\alpha + \beta = 1$. Έτσι

$$H(k) = 1 + \beta\left((\frac{1}{2})^k - 1\right).$$

Για να έχουμε $H(k) \geq 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$ θα πρέπει $\beta \leq 1$, και από τις μη αρνητικές λύσεις η ελάχιστη λαμβάνεται όταν $\beta = 1$ οπότε

$$h(x) = \mathbb{P}_x\big[T < +\infty\big] = 2^{-u(x)}.$$

Αν τώρα $X_0 = R$, $T_R = \inf\{k > 0 : \ X_k = R\}$ είναι ο χρόνος επανόδου στη ρίζα, και O η μοναδική κορυφή με βάθος 1, έχουμε

$$\mathbb{P}_R\big[T_R < +\infty\big] = \mathbb{P}_O\big[T < +\infty\big] = \frac{1}{2}.$$

η ρίζα R είναι επομένως παροδική κατάσταση, και εφόσον όλο το V είναι μια κλειστή κλάση (οποιαδήποτε κορυφή επικοινωνεί αμφίδρομα με την ρίζα), έχουμε ότι όλες οι κορυφές είναι παροδικές.

Άσκηση 13 Βρείτε ένα επιτραπέζιο φιδάκι και περιγράψτε τη θέση ενός παίκτη σαν μια μαρκοβιανή αλυσίδα. Ο χώρος των καταστάσεων δεν χρειάζεται να περιλαμβάνει τη βάση μιας σκάλας ή το στόμα ενός φιδιού αφού ποτέ δεν σταματάμε εκεί. Βάλτε τον υπολογιστή σας να λύσει ένα μεγάλο γραμμικό σύστημα εξισώσεων για να υπολογίσετε τον αναμενόμενο αριθμό ζαριών ώστε να φτάσει ένας παίκτης στον τερματισμό.

Άσκηση 14 Κάθε φορά που επισκέπτεστε ένα εστιατόριο επιλέγετε ένα από τα N πιάτα του μενού τυχαία. Ποια είναι η μέση τιμή του χρόνου που θα σας πάρει να δοκιμάσετε όλα τα πιάτα;
Λύση: Το πλήθος των διαφορετικών πιάτων που έχουμε δοκιμάσει μετά από n επισκέψεις είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανότητες μετάβασης

$$p_{k,k+1} = \frac{N-k}{N} \text{ και } p_{k,k} = \frac{k}{N}, \text{ για } k = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Αυτό συμβαίνει γιατί αν έχουμε ήδη δοκιμάσει k πιάτα η πιθανότητα να επιλέξουμε ένα από αυτά στην παραγγελία μας είναι k/N. Αν $T = \inf\{k \geq 0 : \ X_k = N\}$ και $g(x) = \mathbb{E}_x[T]$ η $g(x)$ λύνει το πρόβλημα

$$\begin{cases} g(N) = 0 \\ g(k) = 1 + \frac{k}{N} g(k) + \frac{N-k}{N} g(k+1) \end{cases}$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται και ως

$$g(k) - g(k+1) = \frac{N}{N-k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις για $k = 0, 1, \ldots, N-1$ παίρνουμε

$$g(0) - g(N) = N \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N-k} \Rightarrow g(0) = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Παρατηρήστε ότι για μεγάλες τιμές του N έχουμε $g(0) \sim N \log N$.

Άσκηση 15 Μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X} = \mathbb{N}_0$ μετατοπίζεται ένα βήμα προς τα αριστερά όταν δεν βρίσκεται στο 0, και όταν φτάσει στο 0 κάνει ένα άλμα που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο q $(0 < q < 1)$. Δείξτε ότι η αλυσίδα είναι γνήσια επαναληπτική και υπολογίστε την αναλλοίωτη κατανομή της.
Λύση: Η αλυσίδα έχει πιθανότητες μετάβασης $p_{k,k-1} = 1$ για $k \in \mathbb{N}$, και $p_{0,k} = q^k(1-q)$ για $k \in \mathbb{N}_0$. Η αλυσίδα είναι μη αναγώγιμη (το μονοπάτι $k \to k-1 \to \cdots \to 0 \to k$ έχει πιθανότητα $q^k(1-q) > 0$.) Επιπλέον, αν η αλυσίδα ξεκινά από το μηδέν ο χρόνος επανόδου στο μηδέν $T_0 = \inf\{k > 0 : \ X_k = 0\}$ υπολογίζεται εύκολα. Αφού η αλυσίδα μετατοπίζεται οπωσδήποτε ένα βήμα αριστερά όταν δεν βρίσκεται στο μηδέν έχουμε $T_0 = 1+$ το μέγεθος του άλματος που κάνει από το μηδέν. Δηλαδή

$$\mathbb{E}_0[T_0] = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} k q^k (1-q) = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q} < +\infty.$$

Η αλυσίδα είναι επομένως γνήσια επαναληπτική. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να υπολογίσουμε την αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας.
1ος τρόπος: Η αναλλοίωτη κατανομή π ικανοποιεί την εξίσωση $\pi(k) = \sum_{j \in \mathbb{X}} p_{jk} \pi(j)$ για $k \in \mathbb{X}$. Επομένως,

$$\pi(k) = q^k(1-q)\pi(0) + \pi(k+1).$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω για $k = m, m+1, \ldots$ παίρνουμε $\pi(m) = q^m \pi(0)$ (παρατηρήστε ότι αφού $\sum_k \pi(k) = 1$ τότε $\pi(k) \to 0$ καθώς $k \to \infty$.) Τέλος, εφόσον $\sum_k \pi(k) = 1$ έχουμε $\pi(0) = 1 - q$ και άρα

$$\pi(k) = (1-q) q^k.$$

2ος τρόπος: Εφόσον η αλυσίδα είναι μη αναγώγιμη και γνήσια επαναληπτική η $\pi(k)$ είναι ανάλογη του ανάλογη του μέσου αριθμού επισκέψεων στο k κατά τη διάρκεια ενός κύκλου της. Συγκεκριμένα,

$$\pi(k) = c \mathbb{E}_0 \big[\sum_{j=1}^{T_k} 1\{X_j = k\} \big]$$

Αυτές οι επισκέψεις είναι 1 αν το άλμα από το μηδέν είναι τουλάχιστον k και 0 διαφορετικά. Επομένως,

$$\pi(k) = c\mathbb{P}_0[X_1 \geq k] = c\sum_{j=k}^{\infty} q^j(1-q) = cq^k.$$

Η σταθερά c προσδιορίζεται από τη συνθήκη $\sum_k \pi(k) = 1$ που δίνει $c = 1-q$.

Άσκηση 16 Έστω (X_n) ένας περίπατος στις κορυφές ενός πεπερασμένου συνεκτικού γράφου. Σε κάθε βήμα ο περίπατος επιλέγει τυχαία μια από τις κορυφές που συνδέεται με την κορυφή που βρίσκεται και μεταβαίνει εκεί. Δείξτε ότι η αλυσίδα είναι γνήσια επαναληπτική. Αν N είναι το πλήθος των ακμών του γράφου και $v(x)$ είναι το πλήθος των ακμών που συνδέονται με την κορυφή x δείξτε ότι η αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας είναι $\pi(x) = v(x)/2N$.

Λύση: Εφόσον ο γράφος είναι συνεκτικός (ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δυο κορυφές υπάρει ένα μονοπάτι του οποίου οι διαδοχικές κορυφές συνδέονται με ακμές) οι κορυφές του γράφου είναι σε αμφίδρομη επικοινωνία και αποτελούν μια κλειστή κλάση. Επειδή ο γράφος είναι πεπερασμένος αυτή θα είναι γνήσια επαναληπτική ενώ η αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας είναι η μοναδική κατανομή που λύνει την εξίσωση $\pi = \pi P$. Συγκεκριμένα για κάθε κορυφή x

$$\pi(x) = \sum_y p_{yx}\pi(y) = \sum_{y:\ y\sim x} \frac{\pi(y)}{v(y)}. \tag{7}$$

Αν τώρα $f(y) = cv(y)$ έχουμε

$$\sum_{y:\ y\sim x} \frac{f(y)}{v(y)} = c\sum_{y:\ y\sim x} 1 = cv(x) = f(x).$$

Επομένως η $f(x) = cv(x)$ ικανοποιεί την (7). Για να είναι κατανομή πρέπει

$$1 = \sum_x f(x) = c\sum_x v(x) = 2cN,$$

και έτσι $\pi(x) = v(x)/2N$ είναι η αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας.

Άσκηση 17 Ένα αλογάκι ξεκινά από το κάτω αριστερό άκρο μιας σκακιέρας και επιλέγει σε κάθε βήμα οποιαδήποτε επιτρεπτή κίνηση με την ίδια πιθανότητα. Πόσες κατά μέση τιμή κινήσεις θα χρειαστεί μέχρι να ξαναγυρίσει στην αρχική του θέση;

Λύση: Είναι μια εφαρμογή της προηγούμενης άσκησης, θεωρώντας τα τετράγωνα της σκακιέρας σαν κορυφές του γράφου τοποθετώντας ακμή για κάθε επιτρεπτή κίνηση για το αλογάκι. Ο μέσος χρόνος επανόδου σε κάθε τετραγωνάκι x δίνεται από την

$$\mathbb{E}_x[T_x] = \frac{1}{\pi(x)} = \frac{2N}{v(x)},$$

σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση. Για ένα γωνιακό τετράγωνο της σκακιέρας x, έχουμε $v(x) = 2$ ενώ με λίγο μέτρημα

$$2N = 4\times 2 + 8\times 3 + 20\times 4 + 16\times 6 + 16\times 8 = 336.$$

Επομένως $\mathbb{E}_x[T_x] = 168$.

Άσκηση 18 Αν η X_n είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα σ' ένα χώρο $\mathbb{X}$ τότε η $Y_{n+1} = (X_n, X_{n+1})$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$. Ποιες είναι οι πιθανότητες μετάβασης της Y; Αν η X έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή π, ισχύει το ίδιο για την Y και ποια είναι η αναλλοίωτη κατανομή της π_*;

Λύση: Η πρώτη συντεταγμένη της Y_{n+1} είναι οπωσδήποτε η δεύτερη συντεταγμένη της Y_n, έστω j, ενώ η δεύτερη συντεταμένη της Y_{n+1} είναι k με πιθανότητα p_{jk}. Επομένως οι πιθανότητες μετάβασης $\mathcal{P}$ της Y είναι

$$\mathcal{P}_{(j,k),(\ell,m)} = \delta_{k\ell}p_{\ell,m}$$

Αν τώρα π_* είναι μια αναλλοίωτη κατανομή για την Y θα πρέπει

$$\pi_*(\ell,m) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{X}^2} \mathcal{P}_{(j,k),(\ell,m)}\pi_*(j,k) = p_{\ell,m}\sum_{j\in\mathbb{X}} \pi_*(j,\ell). \tag{8}$$

Ορίζουμε τώρα $\omega(\ell) = \sum_{j\in\mathbb{X}} \pi_*(j,\ell)$. Έχουμε

$$\sum_{\ell\in\mathbb{X}} \omega(\ell) = \sum_{\ell\in\mathbb{X}} \sum_{j\in\mathbb{X}} \pi_*(j,\ell) = 1,$$

ενώ αθροίζοντας την (8) για όλα τα $\ell \in \mathbb{X}$ έχουμε

$$\omega_\ell = \sum_{j\in\mathbb{X}} p_{j\ell}\,\omega(j).$$

Από τη μοναδικότητα της αναλλοίωτης κατανομής για την X προκύπτει ότι $\omega = \pi$. Επομένως, και η π_* είναι μοναδική με

$$\pi_*(j,k) = \pi(j) p_{jk}$$