ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στοχαστικές Διαδικασίες (ΣΕΜΦΕ & ΣΗΜΜΥ) - Δευτέρα 27 Ιουνίου 2016

ΑΣΚΗΣΗ 1 (40 μονάδες) Δίνεται μια αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

α) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.

β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $\mathbb{P}\big[X_n = 1 \,\big|\, X_0 = 5\big]$ και $\mathbb{P}\big[X_n = 5 \,\big|\, X_0 = 5\big]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

γ) Βρείτε όλες τις αναλλοίωτες κατανομές της αλυσίδας.

δ) Αν $T_5^+ = \inf\{k > 0 : X_k = 5\}$ είναι ο χρόνος πρώτης επιστροφής στην 5, υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[T_5^+ \,\big|\, X_0 = 5\big]$.

ε) Αν $X_0 = 1$, ποια είναι η πιθανότητα η αλυσίδα να επισκεφτεί ποτέ την κατάσταση 2;

ΑΣΚΗΣΗ 2 (30 μονάδες) Ένα καλοκαιρινό μεσημέρι, οι παραθεριστές φτάνουν στη θάλασσα ως μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda =$3/10min. Κάθε παραθεριστής επιλέγει -ανεξάρτητα από τη διαδικασία άφιξης και από τις επιλογές των άλλων- αν θα πάει για μπάνιο στην παραλία A (με πιθανότητα $p = 2/3$) ή στην παραλία B (με πιθανότητα $1 - p = 1/3$). Έστω N_A (αντίστοιχα N_B) το πλήθος των ανθρώπων που έχει πάει για μπάνιο στην παραλία A (αντίστοιχα στη B) την πρώτη ώρα.

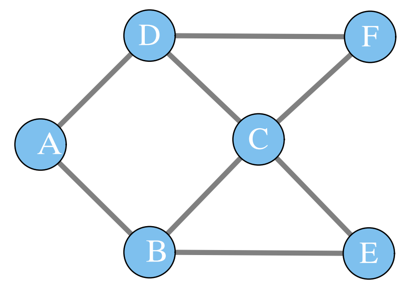
α) Ποια κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβητή N_A;

β) Ποια κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή N_A δεδομένου ότι $N_B = 5$;

γ) Ποια κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή N_A δεδομένου ότι την πρώτη ώρα έφτασαν συνολικά 16 παραθεριστές;

δ) Με δεδομένο ότι $N_B = 5$, ποια είναι η πιθανότητα όλοι οι παραθεριστές που έφτασαν τα πρώτα 10 λεπτά να επέλεξαν την παραλία A;

ΑΣΚΗΣΗ 3 (40 μονάδες) Θεωρήστε έναν πεπερασμένο, μη προσανατολισμένο, συνεκτικό γράφο $G = (V, E)$ με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E. Δεν ξέρουμε το πλήθος $|V|$ των κορυφών του G, ούτε τη δομή του. Μπορούμε να δούμε μόνο τοπικές πληροφορίες για τον G. Π.χ. αν είμαστε σε μια κορυφή $x \in V$ μπορούμε να δούμε να τους γείτονες της x, δηλαδή τις κορυφές $y \in V$ για τις οποίες $(x, y) \in E$, καθώς και πόσους γείτονες έχουν οι γείτονές της x. Αυτό είναι ένα συνηθισμένο σενάριο π.χ. σε γράφους κοινωνικών δικτύων. Σ' αυτή την άσκηση θα δούμε πώς μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία μια κορυφή από ένα τέτοιο γράφο.



Ας συμβολίζουμε με $d(x)$ και ας λέμε βαθμό της $x \in V$ το πλήθος των γειτόνων της x. Ορίζουμε μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ στο V με πιθανότητες μετάβασης που για $x \neq y$ δίνονται από την

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\max\{d(x),d(y)\}} & , \text{ αν } (x,y) \in E \\ 0 & , \text{ αν } (x,y) \notin E. \end{cases}$$

α) Ποια είναι η πιθανότητα $p(x, x)$ να παραμείνει η αλυσίδα σε μια κατάσταση $x \in V$;

β) Δείξτε ότι, αν υπάρχουν δύο κορυφές με διαφορετικό βαθμό, τότε $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[X_n = x\big] = \frac{1}{|V|}$ για κάθε $x \in V$ και οποιαδήποτε αρχική κατανομή (επομένως σε βάθος χρόνου είναι το ίδιο πιθανό να βρούμε την αλυσίδα σε οποιαδήποτε κορυφή).

γ) Δείξτε οι παραπάνω πιθανότητες μετάβασης προκύπτουν εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings για τον τυχαίο περίπατο στον G και γράψτε ένα ψευδοκώδικα που θα προσομοίωνε την παραπάνω αλυσίδα.

Τα επόμενα δύο ερωτήματα και μόνο αφορούν τον γράφο του παραπάνω σχήματος.

δ) Για τον γράφο του παραπάνω σχήματος γράψτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P της αλυσίδας.

ε) Αν $T = \inf\big\{k \geq 0 : X_k \in \{D, E, F\}\big\}$, υπολογίστε τον $\mathbb{E}\big[T \,\big|\, X_0 = A\big]$.

Διάρκεια Εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!