ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ VI

Άσκηση 1 Στην άσκηση αυτή θα επιβεβαιώσετε πειραματικά το Θεώρημα 19. Κατεβάστε τον κώδικα `set06_ex01.py`. Ο κώδικας αυτός υπολογίζει τον αναμενόμενο αριθμό επισκέψεων σε κάθε κατάσταση μιας μαρκοβιανής αλυσίδας στον $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ κατά τη διάρκεια μιας εκδρομής γύρω από την κατάσταση 1.

α) Τροποποιήστε τον κώδικα ώστε να υπολογίζει την αναλλοίωτη κατανομή π_1 του Θεωρήματος 19.

β) Αλλάξτε τώρα την αρχική κατάσταση ώστε να υπολογίσετε τις κατανομές π_2, π_3, π_4. Τι παρατηρείτε;

γ) Υπολογίστε θεωρητικά την αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας. Συμφωνεί το αριθμητικό αποτέλεσμα με τον θεωρητικό υπολογισμό;

Άσκηση 2 Αν επιλέξουμε τυχαία ένα σημείο σ' ένα τετράγωνο S πλευράς 2 με κέντρο το σημείο (0,0) η πιθανότητα το σημείο αυτό να πέσει στο μοναδιαίο δίσκο $D = \{(x, y) \in S :\ x^2 + y^2 < 1\}$ είναι

$$p = \frac{|D|}{|S|} = \frac{\pi}{4}.$$

Ο κώδικας `pi_estimation.py` χρησιμοποιεί αυτή την απλή παρατήρηση για να εκτιμήσει αριθμητικά το π.

α) Τροποποιήστε τον κώδικα ώστε να υπολογίσετε αριθμητικά το εμβαδό του χωρίου $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq |x|\}$.

β) Τροποποιήστε τον κώδικα ώστε να υπολογίσετε αριθμητικά τον όγκο της μοναδιαίας σφαίρας σε 3 διαστάσεις και συγκρίνετε με την θεωρητική τιμή $\frac{4\pi}{3}$.

γ) Τροποποιήστε τον κώδικα ώστε να τυπώνει για διάσταση $d = 2, 3, \ldots, 15$ τον όγκο της d-διάστατης μοναδιαίας σφαίρας όπως υπολογίζεται με Monte Carlo, τον πραγματικό όγκο της d-διάστατης μοναδιαίας σφαίρας και το σχετικό (%) σφάλμα της προσέγγισης. Μπορείτε να καταλάβετε γιατί το σχετικό σφάλμα στο ερώτημα (γ) μεγαλώνει καθώς μεγαλώνει η διάσταση d;

Για το τελευταίο ερώτημα θα χρειαστεί να αφαιρέσετε το σύμβολο του σχολιασμού μπροστά από την εντολή που καλεί τη βιβλιοθήκη `math` και τις εντολές που ορίζουν τη συνάρτηση `volume_sphere`.

Άσκηση 3 Η άσκηση 2 μας δίνει έναν τρόπο να κάνουμε δειγματοληψία από μια τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στον μοναδιαίο δίσκο D. Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο στο τετράγωνο S. Αν ανήκει στον D, το κρατάμε. Διαφορετικά, επιλέγουμε τυχαία ένα άλλο σημείο στο S και συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρι να πάρουμε ένα σημείο του D. Αυτή η μέθοδος δειγματοληψίας ονομάζεται *μέθοδος απόρριψης* (rejection sampling). Ο κώδικας `s2_color.py` επιλέγει με αυτόν τον τρόπο 1.000 τυχαία σημεία στον D και επιστρέφει ένα διάγραμμα με τη θέση αυτών των σημείων (με πράσινο χρώμα) και τη θέση των σημείων που απορρίφθηκαν (με κόκκινο χρώμα).

α) Κατασκευάστε ένα διάγραμμα με τη θέση 10.000 τυχαία επιλεγμένων σημείων στο D. Δώστε τίτλο στο διάγραμμά σας. Πόσα δείγματα στο S χρειάστηκαν για να το κατασκευάσετε;

β) Γράψτε έναν κώδικα που εκτιμά με τη μέθοδο Monte Carlo την τιμή του ολοκληρώματος

$$\iint_D |x + y| \ \frac{dxdy}{\pi}.$$

γ) Πόσα περίπου δείγματα στον υπερκύβο διάστασης 15 θα χρειαζόμασταν προκειμένου να κρατήσουμε 1.000 τυχαία σημεία στη μοναδιαία σφαίρα διάστασης 15; Θα ήταν πρακτικό να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο δειγματοληψίας για να υπολογίσουμε αριθμητικά ένα ολοκλήρωμα στη μοναδιαία σφαίρα διάστασης 15;

Στο επόμενο φυλλάδιο θα δούμε πώς μπορούμε να λύσουμε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας ιδέες από το μάθημά μας.