ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ VII

Είδαμε στο προηγούμενο εργαστήριο ότι είναι πρακτικά αδύνατο αν κάνουμε δειγματοληψία από μια σφαίρα πολλών διαστάσεων με rejection sampling. Εδώ θα δούμε πώς μπορούμε να πάρουμε τυχαία δείγματα από ένα χωρίο, χρησιμοποιώντας μια μαρκοβιανή αλυσίδα που έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή την ομοιόμορφη κατανομή στο χωρίο και αφήνοντας την αλυσίδα να τρέξει για κάποιο χρόνο ώστε να έρθει κοντά στην κατάσταση ισορροπίας της.

Άσκηση 1 Ο κώδικας `disc_sampler.py` χρησιμοποιεί αυτή την ιδέα για να πάρει 1.000 δείγματα από μια τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στον μοναδιαίο δίσκο

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Η αλυσίδα ξεκινά από το μηδέν και σε κάθε βήμα δοκιμάζει μια παράλληλη μετατόπιση προς έναν από τους άξονες, με ομοιόμορφη κατανομή στο (`-delta, +delta`). Αν η μετατόπιση αυτή αφήνει την αλυσίδα στον δίσκο, πραγματοποιείται. Αν η μετατόπιση θα οδηγούσε την αλυσίδα έξω από τον δίσκο, τότε δεν πραγματοποιείται και η αλυσίδα παραμένει στη θέση που είχε την προηγούμενη χρονική στιγμή. Πεισθείτε ότι αυτή η αλυσίδα είναι μη υποβιβάσιμη, γνησίως επαναληπτική και απεριοδική στο πλέγμα των αριθμών της μηχανής που βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο δίσκο.

Αφήνουμε την αλυσίδα να κάνει $N = 100$ βήματα πριν πάρουμε ένα δείγμα.

α) Αλλάξτε τον κώδικα ώστε για διάφορες τιμές του `delta` να υπολογίζει ποιο ποσοστό από τα προτεινόμενα βήματα πραγματοποιήθηκαν και να κατασκευάζει το γράφημα των δειγμάτων που πήρατε από τον δίσκο. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί ο αλγόριθμος δεν δίνει καλά αποτελέσματα αν επιλέξουμε το `delta` πολύ κοντά στο μηδέν (π.χ. `delta` $= 0.01$) ή πολύ μεγάλο (π.χ. `delta` $= 10$);

β) Αλλάξτε τον κώδικα ώστε να δίνει 1.000 τυχαία δείγματα από τη μοναδιαία σφαίρα D_d στις d διαστάσεις.

γ) Προκειμένου να πάρουμε ένα τυχαίο δείγμα από τον κύλινδρο

$$C_{d+1} = \{(x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : \ (x_1, \dots, x_d) \in D_d, |x_{d+1}| < 1\},$$

αρκεί να επιλέξουμε το $(x_1, \dots, x_d)$ ομοιόμορφα από τη D_d και τη x_{d+1} ομοιόμορφα από το (-1,1). Παρατηρήστε ότι $|C_{d+1}| = 2 \times |D_d|$ (επιφάνεια βάσης επί ύψος) και ξανακάνετε την Άσκηση 2γ του προηγούμενου εργαστηρίου, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά δείγματα από τον κύλινδρο C_{d+1} και μετρώντας πόσα από αυτά έπεσαν στη D_{d+1}. Είναι τώρα ικανοποιητική η εκτίμησή σας ακόμα και σε αρκετά μεγάλες διαστάσεις (π.χ. $d = 21$);

Άσκηση 2 Υπολογίστε αριθμητικά το ολοκλήρωμα

$$\iint_{D_{16}} |x_1 x_2 + x_3 x_4 + \cdots + x_{15} x_{16}| \, dx_1 \cdots dx_{16}.$$