

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2016

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ για την Δευτέρα 14/3/2016

Άσκηση 1 Δείξτε ότι η πρώτη φορά που μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ επισκέπτεται την κατάσταση $x \in \mathbb{X}$ μετά τη χρονική στιγμή 10, $T = \inf\{k > 10 : X_k = x\}$, είναι χρόνος διακοπής.

Άσκηση 2 Δείξτε ότι η δεύτερη φορά που μια μαρκοβιανή αλυσίδα επισκέπτεται ένα σύνολο καταστάσεων A είναι χρόνος διακοπής.

Άσκηση 3 Αν ο T είναι χρόνος διακοπής και $A \subset \mathbb{X}$, δείξτε ότι ο χρόνος

$$S = \inf\{k > T : X_k \in A\}$$

είναι κι αυτός χρόνος διακοπής.

Άσκηση 4 Δώστε ένα παράδειγμα μιας αλυσίδας που έχει μόνο ανοιχτές κλάσεις.

Άσκηση 5 Για τη μαρκοβιανή αλυσίδα της Άσκησης 22 υπολογίστε την $\mathbb{P}[T_4^+ < +\infty | X_0 = 4]$ και τον αναμενόμενο αριθμό επισκέψεων στην κατάσταση 4, $\mathbb{E}[V(4) | X_0 = 4]$. Κάντε το ίδιο για την κατάσταση 2.

Άσκηση 6 Θεωρήστε τη μαρκοβιανή αλυσίδα του Παραδείγματος 17. Χρησιμοποιώντας την ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα κατά τον χρόνο άφιξης στο $x - 1$, $T_{x-1} = \inf\{k \geq 0 : X_k = x - 1\}$, δείξτε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mathbb{P}_x[T_0 < \infty] = (\mathbb{P}_1[T_0 < \infty])^x$$