ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ XI

Άσκηση 1 Ο αριθμός πελατών ανά 24ωρο σε μια ATM ακολουθεί κατανομή Poisson με άγνωστη παράμετρο λ. Εκτιμήστε την λ με βάση τις παρακάτω 15 παρατηρήσεις 24ώρων: 16,22,18,11,14,20,14,25,11,10,18,16,15,12,19.

Άσκηση 2 Ο χρόνος εκτέλεσης παραγγελίας από μια εταιρεία είναι τ.μ. Χ (ημέρες) με κατανομή $G(\alpha, p)$. Με βάση τα δεδομένα 12, 12, 10, 14, 8, 15, 10, 14, 9, 10, να εκτιμηθούν με τη μέθοδο των ροπών οι παράμετροι α, p.

Άσκηση 3 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x e^{-\alpha x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$$

Βρείτε την ΕΜΠ της άγνωστης παραμέτρου $\alpha > 0$.

Άσκηση 4 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0, \end{cases}$$

όπου $\alpha > 0$ γνωστό και $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος. Βρείτε την ΕΜΠ της παραμέτρου θ.

Άσκηση 5 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \theta^2 (x+1)(1-\theta)^{-x} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

όπου $\theta \in (0, 1)$ άγνωστη παράμετρος. Να βρείτε τις ΕΜΠ για τις παραμέτρους θ και $\alpha(\theta) = \frac{2(1-\theta)}{\theta}$.

Άσκηση 6 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} & , x > \theta_1 \\ 0 & , x \leq \theta_1. \end{cases}$$

α) Βρείτε την ΕΜΠ της παραμέτρου θ_1 αν η θ_2 είναι γνωστή παράμετρος.
β) Βρείτε την ΕΜΠ της παραμέτρου θ_2 αν η θ_1 είναι γνωστή παράμετρος.
γ) Βρείτε την ΕΜΠ των παραμέτρων θ_1, θ_2 αν είναι και οι δύο άγνωστες.

Άσκηση 7 Το πλάτος ενός παλμού είναι τ.μ. $X \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$. Στην έξοδο ενός δέκτη μπορούμε να παρατηρήσουμε αν το X υπερβαίνει την τιμή 40 ή όχι. Αν σε 100 παρατηρήσεις το X υπερβαίνει την τιμή αυτή 80 φορές ποια είναι η εκτίμηση με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου μ;

Άσκηση 8 Οι $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $U(\theta, 2\theta)$, όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.
α) Βρείτε την κατανομή της τ.μ. $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.
β) Να εξετάσετε αν η δειγματοσυνάρτηση αυτή είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ. Αν δεν είναι προτείνετε μια αμερόληπτη εκτιμήτρια για την θ.

Άσκηση 9 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \theta \frac{1}{x^{\theta+1}} & , x > 1 \\ 0 & , x \leq 1. \end{cases}$$

Βρείτε την ΕΜΠ για την άγνωστη παράμετρο θ.

Άσκηση 10 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. $X \sim U(-\theta, \theta)$. Βρείτε την ΕΜΠ της παραμέτρου θ. Κάντε το ίδιο αν $X \sim U(\theta - c, \theta + c)$ όπου $c > 0$ είναι γνωστή παράμετρος.

Άσκηση 11 *Βρείτε την ΕΜΠ της άγνωστης παραμέτρου θ από n ανεξάρτητες παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$.