ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VI για την Παρασκευή 7/12/2012

Άσκηση 1 Έχετε ένα μικρό ζαχαροπλαστείο και έχετε καταλήξει στην παρατήρηση ότι το πλήθος των κέικ που πωλούνται κάθε μέρα ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο 8. Η παρασκευή κάθε κέικ σας κοστίζει €5 ενώ η τιμή διάθεσής του είναι €12. Αν ένα κέικ δεν πουληθεί την ημέρα παρασκευής του πετιέται. Πόσα κέικ πρέπει να φτιάχνετε κάθε μέρα ώστε να μεγιστοποιήσετε το αναμενόμενο κέρδος από την πώλησή τους; Θα χρειαστείτε πίνακες ή τη βοήθεια του υπολογιστή.

Άσκηση 2 Το μέτρο X της ταχύτητας ενός μορίου αερίου μάζας m σε απόλυτη θερμοκρασία T είναι μια τ.μ. με κατανομή Maxwell-Boltzmann. Συγκεκριμένα η σ.π.π. της δίνεται από την

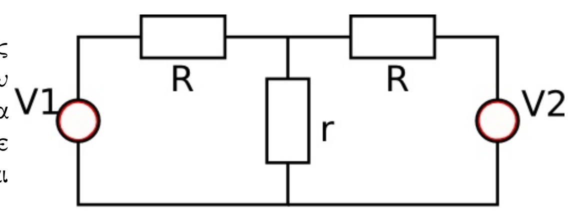
$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-\beta x^2} & \text{για } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $\beta = \frac{m}{2KT}$ και α είναι μια σταθερά κανονικοποίησης (K είναι η σταθερά του Boltzmann.)
α) Υπολογίστε τη σταθερά α.
β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της X.
γ) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της κινητικής ενέργειας $E = \frac{1}{2}mX^2$.
(Υπόδειξη: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ και $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.)

Άσκηση 3 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τ.μ. X είναι $f(x) = Ax^{-4}$ για $x > 2$, και μηδέν διαφορετικά. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς A, και στη συνέχεια τη μέση τιμή και τη διασπορά της X. Για ποιές τιμές του r είναι η ροπή τάξης r πεπερασμένη;

Άσκηση 4 Η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. X είναι η $F(x) = e^{-e^{-x}}$. Υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[e^{\frac{X}{2}}\big]$.

Άσκηση 5 Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος οι πηγές $V1$ και $V2$ δίνουν εναλλασόμενη τάση με την ίδια συχνότητα ω και πλάτος A, ενώ η διαφορά φάσης μεταξύ τους είναι μια τυχαία μεταβλητή Θ με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2\pi]$. Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της στιγμιαίας ισχύος που καταναλώνεται στην αντίσταση r.



Άσκηση 6 Έστω X μια συνεχής τ.μ. με σ.κ.π. F. Δείξτε ότι η $H(c) = \mathbb{E}\big[\,|X - c|\,\big]$ ελαχιστοποιείται αν και μόνο αν $F(c) = 1/2$. Ένα τέτοιο c το ονομάζουμε *διάμεσο τιμή* της X.

Άσκηση 7 α) Αν η X είναι μια τ.μ. με τιμές στο $\{0, 1, 2, \ldots\}$ αποδείξτε ότι $\mathbb{E}\big[X\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big[X > k\big]$.
β) Αν η X είναι μια μη αρνητική συνεχής τ.μ. αποδείξτε ότι $\mathbb{E}\big[X\big] = \displaystyle\int_0^{\infty} \mathbb{P}\big[X > t\big]dt$.

Άσκηση 8 *(Ανισότητα Jensen) Αν η $\phi(\cdot)$ είναι μια παραγωγίσιμη, κυρτή συνάρτηση και η X είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο πεδίο ορισμού της ϕ και πεπερασμένη μέση τιμή, αποδείξτε ότι $\mathbb{E}\big[\phi(X)\big] \geq \phi\big(\mathbb{E}[X]\big)$. *Υπόδειξη:* αν η $\phi(\cdot)$ είναι κυρτή το γράφημά της θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο $\mu = \mathbb{E}[X]$. Σαν εφαρμογή, πάρτε $\phi(x) = -\ln x$, $X \sim U(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ και δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x)dx \leq \ln(k).$$

Προσθέτοντας για $k = 2, 3, \ldots, n$ συμπεράνετε ότι $n! \geq cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ για κάποια σταθερά $c > 0$.