

ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ τυχαίο διάνυσμα με

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix}.$$

Έχουμε δει ότι η γνώση της κατανομής καθεμιάς από τις X_1, X_2, \dots, X_d δεν αρκεί για να προσδιορίσουμε την κατανομή του \mathbf{X} , αφού δεν περιέχει πληροφορία για το πώς αυτές σχετίζονται μεταξύ τους. Είναι δυνατόν να περιγράψουμε την κατανομή του \mathbf{X} χρησιμοποιώντας μια μεγαλύτερη συλλογή από μονοδιάστατες κατανομές; Το ακόλουθο λήμμα (που δεν θα αποδείξουμε) απαντά θετικά, αν η συλλογή περιλαμβάνει την κατανομή των προβολών του \mathbf{X} σε οποιαδήποτε κατεύθυνση του \mathbb{R}^d .

Λήμμα 1 Η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ προσδιορίζεται πλήρως από την κατανομή των πραγματικών τυχαίων μεταβλητών $\{\ell^T \mathbf{X}\}_{\ell \in \mathbb{R}^d}$, όπου

$$\ell^T \mathbf{X} = \sum_{j=1}^d \ell_j X_j.$$

1 Ορισμοί

Ορισμός 1 Θα λέμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ακολουθεί (d -διάστατη) κανονική κατανομή, αν για κάθε $\ell \in \mathbb{R}^d$ η πραγματική τυχαία μεταβλητή $\ell^T \mathbf{X}$ ακολουθεί κανονική κατανομή.

Το ακόλουθο λήμμα εξασφαλίζει ότι αν οι συνιστώσες του \mathbf{X} είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές, τότε το \mathbf{X} ακολουθεί d -διάστατη κανονική κατανομή σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε.

Λήμμα 2 Αν οι X_1, X_2, \dots, X_d είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές, τότε για κάθε $\ell \in \mathbb{R}^d$

$$\ell^T \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(0, \|\ell\|^2).$$

Απόδειξη: Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ και $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητάς τους είναι οι

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} \quad \text{και} \quad f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Επομένως η $X + Y$ έχει συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(x) &= f_X * f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) f_Y(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) - \frac{xy}{\sigma_2^2} - \frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_*^2}} \exp\left(-\frac{(y - \mu_*)^2}{2\sigma_*^2}\right) dy, \end{aligned} \quad (1)$$

όπου

$$\mu_* = -\frac{\sigma_1^2 x}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad \text{και} \quad \sigma_*^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Παρατηρήστε ότι η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα στην (1) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής $\mathcal{N}(\mu_*, \sigma_*^2)$. Επομένως το ολοκλήρωμα στην (1) ισούται με 1 και

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right).$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι $X + Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Επεκτείνοντας επαγωγικά αυτό το συμπέρασμα για το άθροισμα d ανεξάρτητων κανονικών τυχαίων μεταβλητών και εφαρμόζοντάς το για τις $\{\ell_i X_i\}_{1 \leq i \leq d}$, έχουμε πως

$$\ell^T \mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \ell_i X_i \sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=1}^d \ell_i^2),$$

που είναι και ο ισχυρισμός του λήμματος. □

Η ακόλουθη πρόταση περιγράφει τις παραμέτρους μιας κανονικής κατανομής στον \mathbb{R}^d .

Πρόταση 1 Η κατανομή του d -διάστατου τυχαίου διανύσματος \mathbf{X} προσδιορίζεται από το διάνυσμα μέσων τιμών

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix} \quad \text{με } \mu_i = \mathbb{E}[X_i], \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (2)$$

και τον πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \cdots & \Sigma_{1d} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \cdots & \Sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{d1} & \Sigma_{d2} & \cdots & \Sigma_{dd} \end{pmatrix} \quad \text{με } \Sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, d. \quad (3)$$

Απόδειξη: Η κανονική κατανομή σε μία διάσταση προσδιορίζεται από δύο παραμέτρους, τη μέση τιμή και τη διασπορά της. Από το Λήμμα 1 συμπεραίνουμε ότι η κατανομή μιας d -διάστατης κανονικής τυχαίας μεταβλητής \mathbf{X} προσδιορίζεται πλήρως, αν γνωρίζουμε για κάθε $\ell \in \mathbb{R}^d$ τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $\ell^T \mathbf{X}$. Έχουμε όμως ότι

$$\mathbb{E}[\ell^T \mathbf{X}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^d \ell_i X_i\right] = \sum_{i=1}^d \ell_i \mathbb{E}[X_i] = \ell^T \mathbf{m}.$$

Επίσης,

$$V[\ell^T \mathbf{X}] = \text{Cov}(\ell^T \mathbf{X}, \ell^T \mathbf{X}) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^d \ell_i X_i, \sum_{j=1}^d \ell_j X_j\right) = \sum_{i,j=1}^d \ell_i \ell_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \ell^T \Sigma \ell. \quad (4)$$

Επόμενως η κατανομή του \mathbf{X} προσδιορίζεται από τα \mathbf{m} και Σ . □

Ορισμός 2 Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$ την d -διάστατη κανονική κατανομή που έχει παραμέτρους $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$ και $\Sigma \in \Pi_{d \times d}$ και θα γράφουμε $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$. Επομένως

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma) \Leftrightarrow \ell^T \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\ell^T \mathbf{m}, \ell^T \Sigma \ell), \quad \text{για κάθε } \ell \in \mathbb{R}^d. \quad (5)$$

Παράδειγμα 1 Στην περίπτωση που εξετάσαμε στο Λήμμα 2, όπου οι X_1, \dots, X_d είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές, έχουμε ότι $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

2 Γραμμικοί μετασχηματισμοί - Περιθώριες κατανομές

Θεώρημα 1 Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός μιας κανονικής τυχαίας μεταβλητής ακολουθεί κανονική κατανομή. Συγκεκριμένα, αν $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$ με $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$, $\Sigma \in \Pi_{d \times d}$ και $\mathbf{A} \in \Pi_{n \times d}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, τότε για το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ στον \mathbb{R}^n έχουμε

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T).$$

Απόδειξη: Έστω $\ell \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε ότι

$$\ell^T \mathbf{Y} = \ell^T (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}) = (\ell^T \mathbf{A})\mathbf{X} + \ell^T \mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \ell)^T \mathbf{X} + \ell^T \mathbf{b}. \quad (6)$$

Εφόσον $\mathbf{A}^T \ell \in \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{\Sigma})$ έχουμε ότι

$$(\mathbf{A}^T \ell)^T \mathbf{X} \sim \mathcal{N}((\ell^T \mathbf{A})^T \mathbf{m}, (\mathbf{A}^T \ell)^T \mathbf{\Sigma} (\mathbf{A}^T \ell)) = \mathcal{N}(\ell^T (\mathbf{A}\mathbf{m}), \ell^T (\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^T) \ell)$$

Επομένως, η (6) δίνει ότι

$$\ell^T \mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\ell^T (\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{b}), \ell^T (\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^T) \ell) \quad \text{για κάθε } \ell \in \mathbb{R}^n.$$

Αυτό όμως είναι από τον ορισμό (5) ο ισχυρισμός του Θεωρήματος. \square

Πόρισμα 1 Αν το \mathbf{X} είναι τυχαίο διάνυσμα στον \mathbb{R}^d που ακολουθεί κανονική κατανομή και $\mathbf{Y} = \mathbf{P}\mathbf{X}$ είναι η προβολή του \mathbf{X} σε κάποιον υπόχωρο του \mathbb{R}^d διάστασης n , τότε το \mathbf{Y} ακολουθεί κανονική κατανομή σε n διαστάσεις. Ειδικότερα, η περιθώρια κατανομή μιας πολυδιάστατης κανονικής κατανομής είναι επίσης κανονική.

Παράδειγμα 2 Έστω \mathbf{X} τυχαίο διάνυσμα στον \mathbb{R}^3 που ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{\Sigma})$ με

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε την (περιθώρια) κατανομή του ζεύγους (X_1, X_3) . Από το προηγούμενο πόρισμα, το ζεύγος ακολουθεί κανονική κατανομή. Οι παράμετροι αυτής της κατανομής μπορούν να διαβαστούν από τις παραμέτρους της \mathbf{X} . Πράγματι,

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu_1 = 2 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}[X_3] = \mu_3 = -1,$$

ενώ

$$\text{Cov}(X_1, X_1) = \Sigma_{11} = 2, \quad \text{Cov}(X_1, X_3) = \text{Cov}(X_3, X_1) = \Sigma_{13} = \Sigma_{31} = 0, \quad \text{Cov}(X_3, X_3) = \Sigma_{33} = 2.$$

Επομένως,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}', \mathbf{\Sigma}'), \quad \text{όπου } \mathbf{m}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{\Sigma}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι οι παράμετροι της περιθώριας κατανομής προκύπτουν από εκείνες της πλήρους κατανομής, αν διαγράψουμε τις στήλες και τις γραμμές που αντιστοιχούν στις μεταβλητές που δεν μας ενδιαφέρουν (εδώ στη X_2). \square

Πόρισμα 2 Σε κάθε διάνυσμα $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$ και σε κάθε συμμετρικό θετικά ορισμένο πίνακα $\mathbf{\Sigma}$ αντιστοιχεί μία d -διάστατη κανονική κατανομή.

Απόδειξη: Από την (3) βλέπουμε ότι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων $\mathbf{\Sigma}$ μιας d -διάστατης κανονικής κατανομής είναι συμμετρικός. Από την (4) βλέπουμε ότι ο $\mathbf{\Sigma}$ είναι θετικά ορισμένος (δηλ. $\ell^T \mathbf{\Sigma} \ell \geq 0$, για κάθε $\ell \in \mathbb{R}^d$) και μάλιστα $\mathbf{\Sigma} \ell = 0$ αν και μόνο αν το τυχαίο διάνυσμα \mathbf{X} παίρνει τιμές στο υπερεπίπεδο $\{x \in \mathbb{R}^d : \ell^T x = c\}$ με πιθανότητα 1, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Αντίστροφα, κάθε συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας $\mathbf{\Sigma}$ μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ (π.χ. ανάλυση Cholesky). Μάλιστα, αν $\text{rank}(\mathbf{\Sigma}) = k \leq d$ τότε μπορούμε να επιλέξουμε τον \mathbf{L} ώστε να είναι ένας $d \times k$ πίνακας. Ας θεωρήσουμε τώρα το τυχαίο διάνυσμα \mathbf{Z} στον \mathbb{R}^k με Z_1, \dots, Z_k ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές και ας ορίσουμε $\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{Z} + \mathbf{m}$. Από το Λήμμα 2 και το Θεώρημα 1 έχουμε ότι $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{\Sigma})$. \square

Έχουμε δει ότι αν μια συλλογή από τυχαίες μεταβλητές $\{X_i\}_{1 \leq i \leq d}$ είναι ανεξάρτητες, τότε είναι και ασυσχέτιστες ενώ το αντίστροφο δεν είναι εν γένει σωστό. Η ανεξαρτησία είναι επομένως πιο ισχυρή συνθήκη από τη μηδενική συσχέτιση. Με τη βοήθεια του Λήμματος 1 θα δείξουμε ότι στο πλαίσιο των από κοινού κανονικών τυχαίων μεταβλητών οι δύο έννοιες ταυτίζονται.

Θεώρημα 2 Αν \mathbf{X} είναι ένα τυχαίο διάνυσμα στον \mathbb{R}^d με $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{\Sigma})$, τότε οι $\{X_i\}_{1 \leq i \leq d}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν είναι ασυσχέτιστες, δηλαδή $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ για $i \neq j$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ για $i \neq j$, τότε οι $\{X_i\}_{1 \leq i \leq d}$ είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, σ' αυτήν την περίπτωση από την (3) έχουμε ότι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων Σ είναι διαγώνιος,

$$\Sigma = \text{diag}[\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{dd}] = \text{diag}[V(X_1), \dots, V(X_d)]$$

Χωρίς βλάβη υποθέτουμε ότι $\Sigma_{ii} = V(X_i) > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, d$. Σε διαφορετική περίπτωση η X_i θα ήταν σταθερή με πιθανότητα 1, επομένως ανεξάρτητη από οποιοδήποτε άλλες τυχαίες μεταβλητές.

Ορίζουμε τώρα τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\Sigma_{ii}}}, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Από το Θεώρημα 1 για το τυχαίο διάνυσμα \mathbf{Y} που έχει συντεταγμένες τις Y_i έχουμε $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Από το Λήμμα 1 έχουμε ότι οι $\{Y_i\}_{1 \leq i \leq d}$ είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Επομένως και οι $\{X_i\}_{1 \leq i \leq d}$ θα είναι ανεξάρτητες αφού $X_i = \sqrt{\Sigma_{ii}}Y_i + \mu_i$ για $i = 1, \dots, d$. \square

Παράδειγμα 3 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές, θα δείξουμε ότι οι U, W με

$$U = \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad W = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$$

είναι επίσης ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές.

Εφόσον τον ζεύγος (X, Y) ακολουθεί κανονική κατανομή σε 2 διαστάσεις (Λήμμα 2) και

$$\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

συμπεραίνουμε αμέσως ότι το ζεύγος (U, W) ακολουθεί κανονική κατανομή σε δύο διαστάσεις. Μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους της κατανομής των U, W είτε από το Θεώρημα 1 είτε παρατηρώντας ότι

$$\mathbb{E}[U] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]) = 0 \quad \text{και ομοίως} \quad \mathbb{E}[W] = 0,$$

ενώ

$$V(U) = V(W) = \frac{1}{2}(V(X) + V(Y)) = 1 \quad \text{και} \quad \text{Cov}(U, W) = \frac{1}{2}\text{Cov}(X + Y, X - Y) = 0.$$

Παράδειγμα 4 Αν οι X_1, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ και

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n},$$

τότε οι $X_1 - \bar{X}$ και \bar{X} είναι ανεξάρτητες.

Από το Θεώρημα 1 το ζεύγος $(X_1 - \bar{X}, \bar{X})$ ακολουθεί κανονική κατανομή σε δύο διαστάσεις αφού

$$\begin{pmatrix} X_1 - \bar{X} \\ \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Από το Θεώρημα 2 αρκεί να ελέγξουμε ότι $\text{Cov}(X_1 - \bar{X}, \bar{X}) = 0$. Πράγματι,

$$\text{Cov}(X_1 - \bar{X}, \bar{X}) = \text{Cov}(X_1, \bar{X}) - \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_1, X_j) - \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} n = 0.$$

Φυσικά δεν υπάρχει κάτι ιδιαίτερο για τη μεταβλητή X_1 . Θα μπορούσαμε με τον ίδιο τρόπο να δείξουμε ότι οι $X_i - \bar{X}$ και \bar{X} είναι ανεξάρτητες. \square

Παράδειγμα 5 Αν το ζεύγος (X, Y) ακολουθεί κανονική κατανομή σε δύο διαστάσεις τότε καθεμιά από τις τυχαίες μεταβλητές X και Y ακολουθεί κανονική κατανομή. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ορισμού, παίρνοντας ως ℓ το μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε κατεύθυνση. Ισχύει άραγε το αντίστροφο εν γένει; Είναι δηλαδή σωστό ότι αν $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ τότε το ζεύγος (X, Y) ακολουθεί κανονική κατανομή σε δύο διαστάσεις;

Η απάντηση είναι αρνητική. Θεωρήστε για παράδειγμα $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, μια τυχαία μεταβλητή Z ανεξάρτητη από τη X , η οποία παίρνει τις τιμές $+1$ ή -1 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ την καθεμία και ορίστε

$$Y = |X|Z.$$

Η Y ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή. Πράγματι,

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}[Y \leq t] = \mathbb{P}[Y \leq t, Z = +1] + \mathbb{P}[Y \leq t, Z = -1] \\ &= \mathbb{P}[|X| \leq t, Z = +1] + \mathbb{P}[|X| \geq -t, Z = -1] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}[|X| \leq t] + \frac{1}{2}\mathbb{P}[|X| \geq -t]. \end{aligned}$$

Μπορεί κανείς να δει, διακρίνοντας περιπτώσεις ανάλογα με το αν $t \geq 0$ ή $t < 0$, ότι η τελευταία έκφραση είναι πάντα η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής $\Phi(t)$. Επομένως $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Επιπλέον, το ζεύγος (X, Y) δεν ακολουθεί κανονική κατανομή σε δύο διαστάσεις. Αν αυτό συνέβαινε, τότε από τον ορισμό η τυχαία μεταβλητή $X + Y$ θα ακολουθούσε κανονική κατανομή. Έχουμε όμως

$$\mathbb{P}[X + Y = 0] = \mathbb{P}[X \leq 0, Z = +1] + \mathbb{P}[X \geq 0, Z = -1] = \frac{1}{2},$$

επομένως η κατανομή της $X + Y$ δεν είναι καν συνεχής. □

3 Δεσμευμένες κατανομές

Μια πολύ χρήσιμη συνέπεια του Θεωρήματος 2 είναι ότι, αν το ζεύγος (X, Y) ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε μπορούμε να αναλύσουμε την Y σε δύο συνιστώσες, μία που είναι πολλαπλάσιο της X και μία που είναι ανεξάρτητη από την X .

Λήμμα 3 Έστω ζεύγος (X, Y) που ακολουθεί κανονική κατανομή σε 2 διαστάσεις, με $V(X) > 0$. Τότε

$$Y = \lambda X + Z, \quad \text{όπου } \lambda = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$$

και η τυχαία μεταβλητή Z είναι ανεξάρτητη της X και ακολουθεί κατανομή $\mathcal{N}(\mathbb{E}[Y] - \lambda\mathbb{E}[X], V(Y) - \lambda^2V(X))$.

Απόδειξη: Ορίζουμε

$$Z = Y - \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}X.$$

Το ζεύγος (X, Z) ακολουθεί κανονική κατανομή αφού το ζεύγος (X, Y) ακολουθεί κανονική κατανομή και

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον,

$$\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, Y - \lambda X) = \text{Cov}(X, Y) - \lambda\text{Cov}(X, X) = 0.$$

Από το Θεώρημα 2 οι X και Z είναι ανεξάρτητες. Από το Πόρισμα 1 η Z ακολουθεί κανονική κατανομή. Για να βρούμε τις παραμέτρους της κατανομής της Z παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}[Y] = \lambda\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Z] \Rightarrow \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Y] - \lambda\mathbb{E}[X],$$

ενώ εφόσον οι $\lambda X, Z$ είναι ανεξάρτητες έχουμε ότι

$$V(Y) = V(\lambda X) + V(Z) \Rightarrow V(Z) = V(Y) - \lambda^2V(X).$$

□

Ως τώρα δεν έχουμε δει έναν τύπο για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ενός ζεύγους (X_1, X_2) που ακολουθεί κανονική κατανομή σε δύο διαστάσεις. Θα ασχοληθούμε τώρα με αυτό το πρόβλημα.

Θεώρημα 3 Έστω ζεύγος τυχαίων μεταβλητών (X_1, X_2) που ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$ σε 2 διαστάσεις. Αν ο πίνακας συνδιακυμάνσεων Σ είναι αντιστρέψιμος, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ζευγους δίνεται από τον τύπο

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right),$$

όπου $\sigma_i = \sqrt{\Sigma_{ii}}$ είναι η τυπική απόκλιση της X_i και $\rho = \frac{\Sigma_{12}}{\sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}}}$ είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των X_1, X_2 . Μπορούμε να γράψουμε την πυκνότητα και σε πιο συμπαγή μορφή ως

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\det(\Sigma)|}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}{2}\right). \quad (7)$$

Απόδειξη: Η ιδέα της απόδειξης είναι να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3 ώστε να γράψουμε το ζεύγος (X_1, X_2) ως γραμμικό μετασχηματισμό ενός ζεύγους (U, V) όπου οι U και V είναι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Η πυκνότητα του ζεύγους (U, V) θα είναι τότε γνωστή και μπορούμε να φτάσουμε από αυτήν στην πυκνότητα του ζεύγους (X_1, X_2) .

Συγκεκριμένα από το Λήμμα 3 έχουμε ότι

$$X_2 = \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}}X_1 + V$$

όπου η V είναι ανεξάρτητη της X_1 και ακολουθεί κατανομή $\mathcal{N}(\mu_V, \sigma_V^2)$, όπου $\mu_V = \mu_2 - \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}}\mu_1$ και $\sigma_V^2 = \Sigma_{22} - \frac{\Sigma_{12}^2}{\Sigma_{11}}$. Αν θέσουμε $U = X_1$, εφόσον οι U και V είναι ανεξάρτητες, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς τους δίνεται από την

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X_1}(u)f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(u-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_V^2}} \exp\left(-\frac{(v-\mu_V)^2}{2\sigma_V^2}\right).$$

Έχουμε όμως $(X_1, X_2) = \Psi(U, V)$, όπου $\Psi(u, v) = (u, \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}}u + v)$. Η Ιακωβιανή του αντίστροφου μετασχηματισμού $(u, v) = (x_1, -\Sigma_{12}/\Sigma_{11}x_1 + x_2)$ είναι ίση με

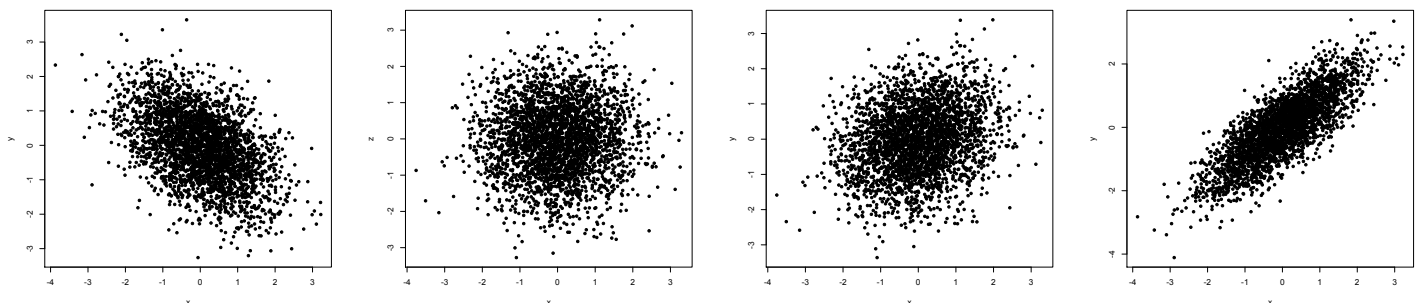
$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Επομένως

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{U, V}(x_1, x_2 - \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}}x_1) = f_{X_1}(x_1)f_V(x_2 - \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}}x_1). \quad (8)$$

Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι απλές αλγεβρικές πράξεις που μπορείτε να επιβεβαιώσετε εύκολα. □

Στο ακόλουθο Σχήμα φαίνονται 3.000 δείγματα του ζεύγους (X, Y) για διάφορες τιμές του συντελεστή συσχέτισης ρ . Σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.



$\rho = -0.5$

$\rho = 0$

$\rho = +0.2$

$\rho = +0.8$

Πόρισμα 3 Αν το ζεύγος τυχαίων μεταβλητών (X_1, X_2) ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$ σε 2 διαστάσεις, τότε η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X_2 δεδομένης της X_1 δίνεται από την

$$f_{X_2|X_1}(y|x) = f_V\left(y - \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}}x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_{22}(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2\Sigma_{22}(1-\rho^2)}\left(y - \mu_2 - \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}}(x - \mu_1)\right)^2\right).$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι η δεσμευμένη κατανομή της X_2 δεδομένου ότι $X_1 = x$ είναι κανονική, με μέση τιμή

$$\mathbb{E}[X_2 | X_1 = x] = \mu_2 + \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}}(x - \mu_1)$$

και διασπορά

$$V(X_2 | X_1 = x) = \Sigma_{22}(1 - \rho^2).$$

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από την (8) και τους τύπους για τις μ_V και σ_V^2 . □

Αν οι X_1, X_2 έχουν θετική συσχέτιση ($\Sigma_{12} > 0$) και ξέρουμε ότι η X_1 πήρε μια τιμή x μεγαλύτερη από τη μέση τιμή της, παρατηρήστε ότι η δεσμευμένη μέση τιμή της X_2 είναι κι αυτή μεγαλύτερη από τη μέση τιμή μ_2 της X_2 . Αντίθετα, αν $\Sigma_{12} < 0$, η $\mathbb{E}[X_2 | X_1 = x]$ αποκλίνει από την μ_2 προς την αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη που η x αποκλίνει από την μ_1 . Παρατηρήστε τέλος ότι η γνώση της τιμής της X_1 μειώνει την αβεβαιότητά μας για την X_2 όταν υπάρχει κάποια μεταξύ τους συσχέτιση ($\rho \neq 0$). Πράγματι, η εκ των προτέρων διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X_2 είναι $V(X_2) = \text{Cov}(X_2, X_2) = \Sigma_{22}$, ενώ η διασπορά της X_2 με δεδομένη την X_1 είναι $V(X_2 | X_1 = x) = \Sigma_{22}(1 - \rho^2) < \Sigma_{22}$.

Παράδειγμα 6 Το ζευγάρι τυχαίων μεταβλητών (X, Y) ακολουθεί κανονική κατανομή σε 2 διαστάσεις με μέση τιμή $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Η περιθώρια κατανομή της Y είναι κανονική με μέση τιμή $\mu_2 = 0$ και διασπορά $\Sigma_{22} = 2$. Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y είναι

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Με δεδομένο ότι $X = x$, η δεσμευμένη κατανομή της Y είναι κανονική με μέση τιμή

$$\mu_2 + \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}}(x - \mu_1) = 0 + \frac{1}{1}(x - 0) = x$$

και διασπορά

$$\Sigma_{22}(1 - \rho^2) = \Sigma_{22} - \frac{\Sigma_{12}^2}{\Sigma_{11}} = 2 - \frac{1^2}{1} = 1.$$

Επομένως

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

□

Θα γενικεύσουμε τώρα το Λήμμα 3 και τις συνέπειές του σε περισσότερες διαστάσεις. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το \mathbf{X} είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με τιμές στον \mathbb{R}^d και $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_X, \Sigma_{XX})$ και αντίστοιχα ότι το \mathbf{Y} είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με τιμές στον \mathbb{R}^n και $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_Y, \Sigma_{YY})$. Θα υποθέσουμε ακόμα ότι το τυχαίο διάνυσμα \mathbf{W} στον \mathbb{R}^{d+n} με

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$$

ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$ στον \mathbb{R}^{d+n} . Θα έχουμε τότε

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_X \\ \mathbf{m}_Y \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες Σ_{XY} και Σ_{YX} που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση περιέχουν τις συνδιακυμάνσεις συντεταγμένων των \mathbf{X} και \mathbf{Y} . Συγκεκριμένα ο Σ_{XY} είναι ένας $d \times n$ πίνακας με

$$(\Sigma_{XY})_{ij} = \text{Cov}(X_i, Y_j), \quad 1 \leq i \leq d, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \text{ενώ} \quad \Sigma_{YX} = \Sigma_{XY}^T.$$

Ας προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε έναν $n \times d$ πίνακα $\mathbf{\Lambda}$ ώστε

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Lambda X} + \mathbf{Z} \quad (9)$$

όπου το τυχαίο διάνυσμα \mathbf{Z} ακολουθεί κανονική κατανομή στον \mathbb{R}^n και είναι ανεξάρτητο του \mathbf{X} . Η παραπάνω σχέση σημαίνει

$$Y_j = \sum_{i=1}^d \Lambda_{ji} X_i + Z_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Παίρνοντας τη συνδιακύμανση των δύο μελών με την τυχαία μεταβλητή X_k , για $1 \leq k \leq d$ έχουμε ότι

$$\text{Cov}(Y_j, X_k) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^d \Lambda_{ji} X_i, X_k\right) + \text{Cov}(Z_j, X_k) = \sum_{i=1}^d \Lambda_{ji} \text{Cov}(X_i, X_k),$$

επομένως

$$(\Sigma_{YX})_{jk} = (\mathbf{\Lambda} \Sigma_{XX})_{jk}, \quad 1 \leq k \leq d, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι αν η (9) ισχύει για κάποιο \mathbf{Z} ανεξάρτητο του \mathbf{X} θα πρέπει

$$\Sigma_{YX} = \mathbf{\Lambda} \Sigma_{XX}.$$

Το ακόλουθο Λήμμα γενικεύει το Λήμμα 3 σε πολλές διαστάσεις.

Λήμμα 4 Έστω ζεύγος τυχαίων διανυσμάτων $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$ σε $d + n$ διαστάσεις, με

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_X \\ \mathbf{m}_Y \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{pmatrix}.$$

και Σ_{XX} αντιστρέψιμο. Τότε

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Lambda X} + \mathbf{Z}, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{\Lambda} = \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} \in \Pi_{n \times d}$$

και το τυχαίο διάνυσμα \mathbf{Z} στον \mathbb{R}^n είναι ανεξάρτητο του \mathbf{X} με

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_Y - \mathbf{\Lambda m}_X, \Sigma_{YY} - \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY}).$$

Απόδειξη: Η απόδειξη ακολουθεί τα επιχειρήματα της μονοδιάστατης περίπτωσης. Ορίζουμε

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y} - \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} \mathbf{X}.$$

Το ζεύγος (\mathbf{X}, \mathbf{Z}) ακολουθεί κανονική κατανομή σε $d + n$ διαστάσεις αφού το ζεύγος (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) ακολουθεί κανονική κατανομή και

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{0} \\ -\mathbf{\Lambda} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον, για κάθε i, j με $1 \leq i \leq d$ και $1 \leq j \leq n$ έχουμε

$$\text{Cov}(Z_j, X_i) = \text{Cov}\left(Y_j - \sum_{k=1}^d \Lambda_{jk} X_k, X_i\right) = \text{Cov}(Y_j, X_i) - \sum_{k=1}^d \Lambda_{jk} \text{Cov}(X_k, X_i) = (\Sigma_{YX} - \mathbf{\Lambda} \Sigma_{XX})_{ji} = 0.$$

Από το Θεώρημα 2 οι X_i και Z_j είναι ανεξάρτητες. Από το Πρόρισμα 1 η \mathbf{Z} ακολουθεί κανονική κατανομή σε n διαστάσεις. Για να βρούμε τις παραμέτρους της κατανομής της \mathbf{Z} παρατηρούμε ότι για $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{E}[Y_j] = \sum_{k=1}^d \Lambda_{jk} \mathbb{E}[X_k] + \mathbb{E}[Z_j] \iff \mathbf{m}_Z = \mathbf{m}_Y - \mathbf{\Lambda} \mathbf{m}_X,$$

ενώ εφόσον οι X_k, Z_j είναι ανεξάρτητες, για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$ έχουμε

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^d \Lambda_{ik} X_k + Z_i, \sum_{r=1}^d \Lambda_{jr} X_r + Z_j\right) = \sum_{k,r=1}^d \Lambda_{ik} \text{Cov}(X_k, X_r) \Lambda_{rj}^T + \text{Cov}(Z_i, Z_j).$$

Επομένως, αν συμβολίσουμε με Σ_{ZZ} τον πίνακα συνδιακυμάνσεων του \mathbf{Z} ,

$$\Sigma_{YY} = \mathbf{\Lambda} \Sigma_{XX} \mathbf{\Lambda}^T + \Sigma_{ZZ} \iff \Sigma_{ZZ} = \Sigma_{YY} - \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY}.$$

□

Εντελώς αντίστοιχα μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ενός διανύσματος \mathbf{X} που ακολουθεί κανονική κατανομή σε d διαστάσεις. Ο τύπος (7) παίρνει τη μορφή

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\det(\Sigma)|}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m})}{2}\right) \quad (10)$$

ενώ για τη δεσμευμένη κατανομή του \mathbf{Y} δεδομένου του \mathbf{X} έχουμε

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = f_Z(\mathbf{y} - \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} \mathbf{x}).$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι η δεσμευμένη κατανομή του \mathbf{Y} δεδομένου ότι $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ είναι κανονική, με μέση τιμή

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y} | \mathbf{X} = \mathbf{x}] = \mathbf{m}_Y + \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_X) \quad (11)$$

και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\Sigma_{YY} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{x}} = \Sigma_{ZZ} = \Sigma_{YY} - \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY}. \quad (12)$$

Παρατηρήστε και πάλι ότι η γνώση της τιμής του \mathbf{X} μειώνει την αβεβαιότητά μας για το \mathbf{Y} όταν υπάρχει κάποια μεταξύ τους συσχέτιση ($\Sigma_{XY} \neq \mathbf{0}$). Πράγματι, για κάθε $\ell \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\ell^T \Sigma_{ZZ} \ell = \ell^T \Sigma_{YY} \ell - \ell^T \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY} \ell = \ell^T \Sigma_{YY} \ell - (\Sigma_{XY} \ell)^T \Sigma_{XX}^{-1} (\Sigma_{XY} \ell) \leq \ell^T \Sigma_{YY} \ell.$$

Παράδειγμα 7 Η τριάδα (X, Y, Z) ακολουθεί κανονική κατανομή σε 3 διαστάσεις με μέση τιμή $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Η κατανομή της Z είναι κανονική με μέση τιμή $\mu_3 = 0$ και διασπορά $\Sigma_{33} = 3$. Επομένως

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{6}\right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Για να βρούμε την δεσμευμένη κατανομή της Z δεδομένων των X, Y χωρίζουμε τον πίνακα Σ σε μπλοκ.

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Αν ξέρουμε ότι $X = x$ και $Y = y$, η δεσμευμένη κατανομή της Z είναι και πάλι κανονική, με μέση τιμή που δίνεται από την (11)

$$\mu_{x,y} = 0 + (1 \quad -2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix} = -y.$$

Η διασπορά της δεσμευμένης κατανομής της Z δίνεται από την (12) και είναι

$$\sigma_{x,y}^2 = 3 - (1 \quad -2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Επομένως, η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z είναι

$$f_{Z|X,Y}(z|x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z+y)^2}{2}\right), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Εναλλακτικά μπορούμε να επαναλάβουμε το επιχείρημα της απόδειξης του Λήμματος 4. Πρώτα ψάχνουμε να βρούμε σταθερές α, β ώστε η τυχαία μεταβλητή $W = Z - \alpha X - \beta Y$ να είναι ανεξάρτητη από τις X, Y . Από το Θεώρημα 1 η από κοινού κατανομή των X, Y, W είναι κανονική σε 3 διαστάσεις, διότι

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Από το Θεώρημα 2, προκειμένου η W ανεξάρτητη από τις X, Y αρκεί να έχουμε $\text{Cov}(W, X) = \text{Cov}(W, Y) = 0$. Οι εξισώσεις αυτές δίνουν

$$0 = \text{Cov}(W, X) = \text{Cov}(Z - \alpha X - \beta Y, X) = \Sigma_{31} - \alpha \Sigma_{11} - \beta \Sigma_{21} = 1 - \alpha + \beta$$

και

$$0 = \text{Cov}(W, Y) = \text{Cov}(Z - \alpha X - \beta Y, Y) = \Sigma_{32} - \alpha \Sigma_{12} - \beta \Sigma_{22} = -2 + \alpha - 2\beta.$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι $\alpha = 0, \beta = -1$, επομένως η $W = Y + Z$ είναι ανεξάρτητη από τις X, Y . Η μέση τιμή της W είναι μηδέν, ενώ η διασπορά της είναι

$$\sigma_W^2 = \text{Cov}(W, W) = \text{Cov}(Y + Z, Y + Z) = \text{Cov}(Y, Z) + 2\text{Cov}(Y, Z) + \text{Cov}(Z, Z) = \Sigma_{22} + 2\Sigma_{23} + \Sigma_{33} = 2 + 2(-2) + 3 = 1.$$

Έχουμε επομένως ότι $Z = -Y + W$, όπου η W είναι ανεξάρτητη από τις X, Y με $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Έτσι, με δεδομένο ότι $X = x, Y = y$ η δεσμευμένη κατανομή της Z είναι $\mathcal{N}(-y, 1)$ και η δεσμευμένη πυκνότητα δίνεται από την (13).

Μια τρίτη προσέγγιση θα ήταν να βρούμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y,Z}$ των X, Y, Z , την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y}$ των X, Y και να υπολογίσουμε την δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{Z|X,Y}(z|x,y) = \frac{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}{f_{X,Y}(x,y)}.$$

Αυτός ο τρόπος όμως είναι μάλλον πιο επίπονος και λιγότερο παιδαγωγικός. □

Παράδειγμα 8 Η τριάδα (X, Y, Z) ακολουθεί κανονική κατανομή σε 3 διαστάσεις με μέση τιμή $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε να βρούμε τη δεσμευμένη κατανομή του ζεύγους (X, Y) δεδομένου ότι $Z = z$. Η δεσμευμένη μέση τιμή του ζεύγους δεδομένου ότι $Z = z$ δίνεται από την (11) και είναι

$$\begin{pmatrix} \mu_{x|z} \\ \mu_{y|z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3)^{-1} (z - 0) = z \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Ο δεσμευμένος πίνακας συνδιακυμάνσεων των X, Y δεδομένου ότι $Z = z$ δίνεται από την (12) και είναι

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3)^{-1} (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ζεύγους (X, Y)

$$f_{X,Y|Z}(x, y|z) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \exp\left(-x^2 - y^2 + xy + zy - \frac{z^2}{3}\right). \quad (14)$$

Εναλλακτικά μπορούμε να επαναλάβουμε το επιχειρήμα της απόδειξης. Από το Λήμμα 3 έχουμε

$$X = \frac{\Sigma_{13}}{\Sigma_{33}}Z + W_1 = \frac{1}{3}Z + W_1 \quad \text{και} \quad Y = \frac{\Sigma_{23}}{\Sigma_{33}}Z + W_2 = \frac{2}{3}Z + W_2$$

όπου οι W_1 και W_2 είναι ανεξάρτητες της Z . Έχουμε επομένως ότι

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \mathbf{W}$$

όπου το διάνυσμα \mathbf{W} είναι ανεξάρτητο της Z . Από το Θεώρημα 1 το \mathbf{W} ακολουθεί κανονική κατανομή σε δύο διαστάσεις αφού

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε πολύ εύκολα να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους της κατανομής του \mathbf{W} . Συγκεκριμένα,

$$\mathbb{E}[W_1] = \mathbb{E}[X] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[Z] = 0 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}[W_2] = \mathbb{E}[Y] - \frac{2}{3}\mathbb{E}[Z] = 0.$$

Από το Λήμμα 3 έχουμε ακόμα ότι

$$V(W_1) = V(X) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 V(Z) = \Sigma_{11} - \frac{1}{9}\Sigma_{33} = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad V(W_2) = V(Y) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 V(Z) = \Sigma_{22} - \frac{4}{9}\Sigma_{33} = \frac{2}{3}.$$

Τέλος,

$$\text{Cov}(W_1, W_2) = \text{Cov}\left(X - \frac{1}{3}Z, Y - \frac{2}{3}Z\right) = \Sigma_{12} - \frac{2}{3}\Sigma_{13} - \frac{1}{3}\Sigma_{32} + \frac{2}{9}\Sigma_{33} = \frac{1}{3}.$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \mathbf{W}$$

όπου το \mathbf{W} είναι ανεξάρτητο από την Z με $\mathbf{W} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\right)$. Επομένως

$$f_{X,Y|Z}(x, y|z) = f_{\mathbf{W}}(x - z/3, y - 2z/3)$$

και καταλήγουμε πάλι στην (14).

Μια τρίτη προσέγγιση θα ήταν να βρούμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y,Z}$ των X, Y, Z , την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_Z της X και να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως

$$f_{X,Y|Z}(x, y|z) = \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_Z(z)}.$$

Για να υπολογίσουμε την $f_{X,Y,Z}$ χρειαζόμαστε την $\det(\mathbf{\Sigma})=1$ και τον αντίστροφο του $\mathbf{\Sigma}$

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από τον τύπο (10) έχουμε

$$f_{X,Y,Z} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-x^2 - y^2 - \frac{z^2}{2} + xy + yz\right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Από την άλλη, η Z είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu_3 = 0$ και διασπορά $\Sigma_{33} = 3$. Επομένως

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{6}\right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις ξαναβρίσκουμε την (14). □

4 Εφαρμογές στη Στατιστική

Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Αν ορίσουμε

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n},$$

τότε από το Θεώρημα 1 έχουμε ότι

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \iff \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right) \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (15)$$

Ας ορίσουμε τώρα

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (16)$$

Θεώρημα 4 Αν οι $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, τότε η S^2 που ορίζεται στην (16) είναι ανεξάρτητη της \bar{X} και

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Απόδειξη: Από το Παράδειγμα 4 έχουμε ότι οι $X_i - \bar{X}$ είναι ανεξάρτητες από την \bar{X} για $i = 1, 2, \dots, n$, επομένως και η S^2 είναι ανεξάρτητη από την \bar{X} . Επιπλέον έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu - (\bar{X} - \mu))^2 = \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu)^2 + (\bar{X} - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)(X_i - \mu)] \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2. \end{aligned}$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την τελευταία σχέση ως εξής.

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \left(\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right)^2 \quad (17)$$

Εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές, το αριστερό μέλος της (17) είναι το άθροισμα των τετραγώνων n ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών, επομένως ακολουθεί κατανομή $\chi^2(n)$, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n).$$

Εφόσον η S^2 και η \bar{X} είναι ανεξάρτητες, το δεξί μέλος της (17) είναι το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, εκ των οποίων η μία ακολουθεί κατανομή $\chi^2(1)$. Συγκεκριμένα,

$$\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(1)$$

λόγω της (15). Δεν είναι δύσκολο να δούμε (π.χ. με τη βοήθεια χαρακτηριστικών συναρτήσεων) ότι θα πρέπει

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος. □

Λήμμα 5 Αν $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$ και οι X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

είναι

$$f_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (18)$$

Απόδειξη: Εφόσον οι X και Y είναι ανεξάρτητες, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ζεύγους (X, Y) είναι η

$$f_{X,Y}(x, y) = f(x)g_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της Z .

$$F_Z(t) = \mathbb{P}[Z \leq t] = \mathbb{P}[X \leq t\sqrt{Y/n}] = \mathbb{P}[(X, Y) \in D_t] = \iint_{D_t} f(x)g(y) dx dy,$$

όπου $D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : x \leq t\sqrt{y/n}\}$. Επομένως, με την αλλαγή μεταβλητής $x = z\sqrt{y/n}$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{t\sqrt{y/n}} f(x)g(y) dx dy = \int_0^\infty \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{y}{n}} f\left(\sqrt{\frac{y}{n}} z\right) dz g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^t \int_0^\infty \sqrt{\frac{y}{n}} f\left(\sqrt{\frac{y}{n}} z\right) g(y) dy dz. \end{aligned}$$

Η πυκνότητα της Z είναι λοιπόν ίση με

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{y}{n}} f\left(\sqrt{\frac{y}{n}} z\right) g(y) dy = \int_0^\infty \sqrt{\frac{y}{2\pi n}} e^{-\frac{yz^2}{2n}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{y}{2}\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)} dy = \frac{\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt, \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{y}{2}\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)$. Επομένως,

$$f_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

□

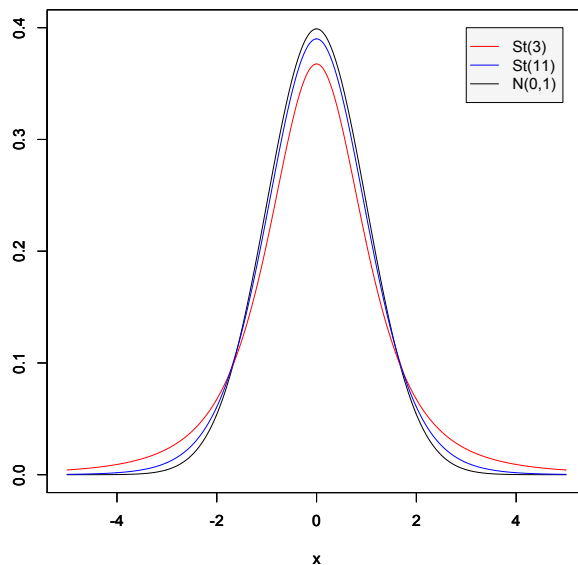
Ορισμός 3 Αν μια τυχαία μεταβλητή T έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την f_n της (18) λέμε ότι η T ακολουθεί την κατανομή Student με n βαθμούς ελευθερίας και συμβολίζουμε $T \sim St(n)$.

Παρατηρήστε ότι εφόσον $f_n(-z) = f_n(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{R}$, η κατανομή Student είναι συμμετρική ως προς το 0. Παρατηρήστε ακόμα ότι καθώς οι βαθμοί ελευθερίας n της κατανομής Student αυξάνονται, αυτή μοιάζει όλο και περισσότερο με την τυπική κανονική κατανομή. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι πυκνότητες δύο Student με 3 (κόκκινο) και 11 (μπλε) βαθμούς ελευθερίας και μιας τυπικής κανονικής κατανομής (μαύρο). Με τη βοήθεια του τύπου του Stirling μπορείτε να δείτε ότι

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

ενώ

$$\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$



Πόρισμα 4 Αν οι $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, τότε

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim St(n-1).$$

Απόδειξη: Είδαμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές

$$Z_1 = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{και} \quad Z_2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

είναι ανεξάρτητες, το Λήμμα 5 δίνει ότι

$$\frac{Z_1}{\sqrt{Z_2/(n-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim St(n-1).$$

□

Τα επόμενα δύο θεωρήματα κατασκευάζουν διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ μιας κανονικής κατανομής χωρίς πληροφορία για τη διασπορά της και για τη διασπορά σ^2 χωρίς πληροφορία για τη μέση τιμή της.

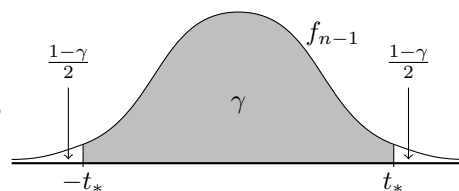
Θεώρημα 5 Αν οι $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ και $t_* > 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός ώστε

$$\int_{-\infty}^{t_*} f_{n-1}(z) dz = \frac{1+\gamma}{2}, \quad (19)$$

τότε

$$\mathbb{P}\left[\bar{X} - t_* \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_* \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = \gamma.$$

Απόδειξη: Από το Πόρισμα 4 η τυχαία μεταβλητή $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ έχει συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας την f_{n-1} . Από την (19) έχουμε ότι $\mathbb{P}[T > t_*] = \frac{1-\gamma}{2}$. Από τη συμμετρία της κατανομής έχουμε επίσης $\mathbb{P}[T < -t_*] = \frac{1-\gamma}{2}$. Επομένως,



$$\mathbb{P}[|T| \leq t_*] = \gamma \iff \mathbb{P}\left[-t_* \leq \frac{\mu - \bar{X}}{S/\sqrt{n}} \leq t_*\right] = \gamma \iff \mathbb{P}\left[\bar{X} - t_* \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_* \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = \gamma. \quad \square$$

Θεώρημα 6 Αν οι $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ και $0 < \chi_1 < \chi_2$ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί ώστε

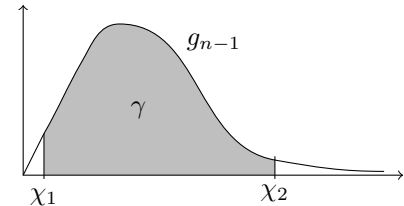
$$\int_{\chi_1}^{\chi_2} g_{n-1}(z) dz = \gamma, \quad (20)$$

όπου g_n είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής $\chi^2(n)$, τότε

$$\mathbb{P}\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_1}\right] = \gamma.$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 4 η τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ έχει συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας την g_{n-1} . Από την (20) έχουμε ότι $\mathbb{P}[\chi_1 \leq Z \leq \chi_2] = \gamma$. Επομένως,

$$\gamma = \mathbb{P}\left[\chi_1 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_2\right] = \mathbb{P}\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_1}\right]. \quad \square$$



5 Ασκήσεις

Άσκηση 1 Αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$ δείξτε ότι οι τ.μ.

$$U = \sqrt{-2 \ln X} \cos(2\pi Y) \quad V = \sqrt{-2 \ln X} \sin(2\pi Y)$$

είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή. Σ' αυτόν τον υπολογισμό βασίζεται η μέθοδος Box-Muller για την προσομοίωση κανονικών τ.μ. στον υπολογιστή. Βλέπετε πώς;

Άσκηση 2 Οι X_1, X_2, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ορίζουμε $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Ποια είναι η δεσμευμένη σ.π.π. $f_{X_1 | \bar{X}}(x | \mu)$;

Άσκηση 3 Δείξτε ότι αν το τυχαίο διάνυσμα $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή τότε και το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

ομοίως ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Δηλαδή η $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_2)$ μένει αναλλοίωτη από στροφές.

Άσκηση 4 Η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών X, Y, Z είναι κανονική σε 3 διαστάσεις με μέση τιμή $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε την δεσμευμένη κατανομή των X, Y δεδομένου ότι $Z = 0$. Βρείτε την από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών Y και $X - Z$. Ποια είναι η δεσμευμένη κατανομή της Y δεδομένου ότι $X = Z$;

Άσκηση 5 Έστω $X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και

$$X_n = \frac{3}{5}X_{n-1} + \frac{4}{5}W_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τυπική κανονική κατανομή και ανεξάρτητες από την X_0 . Δείξτε ότι η από κοινού κατανομή των X_0, X_1, X_2, X_3 είναι κανονική σε 4 διαστάσεις. Ποιος είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων; Ποια είναι η περιθώρια κατανομή των X_1, X_2, X_3 ; Ποια είναι η δεσμευμένη κατανομή της X_2 δεδομένου ότι $X_1 = x$ και $X_3 = y$;

Άσκηση 6 Ας είναι X, Y ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, 2)$. Ορίζουμε $U = \frac{X+Y}{2}$, $V = \frac{X-Y}{2}$.

α) Ποια είναι η σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος (X, Y) ;

β) Υπολογίστε την σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος (U, V) . Είναι οι τ.μ. U, V ανεξάρτητες;

γ) Έστω $S \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ανεξάρτητη από τις X, Y . Υπολογίστε την σ.π.π. του διανύσματος $(U, \sqrt{V^2 + S^2})$.

δ) Θεωρούμε δύο ακόμα ανεξάρτητες τ.μ. Z, W με κατανομή $\mathcal{N}(0, 2)$ και ανεξάρτητες από τις X, Y .

Αν $A = \begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$, και $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ είναι οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $\frac{A+A^T}{2}$ υπολογίστε την από κοινού κατανομή των Λ_1, Λ_2 .

Άσκηση 7 Οι στοχαστικές διαδικασίες είναι τυχαίες συναρτήσεις, και ένας τρόπος να τις φανταστεί κανείς είναι ότι η τιμή τους κάθε χρονική στιγμή είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία όπου $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. Αυτό δεν καθορίζει πλήρως την κίνηση Brown αφού την ίδια ιδιότητα έχει και η διαδικασία $Y_t = \sqrt{t}\chi$ όπου $\chi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και $t \geq 0$. Χρειάζεται να καθορίσουμε και το πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι τιμές της διαδικασίας σε διαφορετικούς χρόνους, πώς εξελίσσεται δηλαδή η διαδικασία στο χρόνο. Ο τρόπος που αυτό συμβαίνει για την κίνηση Brown είναι ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ η μεταβολή της $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν της, είναι δηλαδή ανεξάρτητη από τις τ.μ. B_r με $r \leq s$ με κατανομή $\mathcal{N}(0, t - s)$. Αν $r < s < t$ βρείτε την από κοινού κατανομή των B_r, B_s, B_t και την δεσμευμένη σ.π.π. της B_s δεδομένων των B_r, B_t .

Άσκηση 8 Έστω $\{(X_i, Y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ ανεξάρτητα, ισόνομα τυχαία διανύσματα με κατανομή

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma\right).$$

Ορίζουμε $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, $\bar{Y} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ και

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i + \bar{Y} - \bar{X})^2.$$

Αν το t_* είναι όπως στην (19), δείξτε ότι οποιοσδήποτε κι αν είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων Σ έχουμε

$$\mathbb{P}\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_* \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X} - \bar{Y} + t_* \frac{S_D}{\sqrt{n}}\right] = \gamma. \quad (21)$$

Άσκηση 9 Δίνονται $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ και $\{Y_j\}_{1 \leq j \leq m}$ ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, οι οποίες είναι και ανεξάρτητες από τις $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Ορίζουμε $\nu = \frac{nm}{n+m}$. Ποια κατανομή ακολουθεί η $\bar{X} - \bar{Y}$; Ορίζουμε ακόμα

$$(n+m-2)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2 = (n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2.$$

Ποια κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S/\sqrt{\nu}};$$

Μπορείτε να βρείτε μια σχέση όπως η (21) για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ που δεν χρησιμοποιεί την άγνωστη διασπορά σ^2 ;