ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Παράδοση εργασίας: Τετάρτη 26/2/2014

1. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των τομών με επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα των συντεταγμένων, να γίνει σχεδίαση σε διαφορετικά σχήματα, των επιφανειών με εξισώσεις (βλ. σελ. 113-122 βιβλίου):

α) $z=-4+(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16})$, **β)** $\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1+\frac{x^2}{36}$ **γ)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1+\frac{z^2}{36}$

2. Δίνεται η σφαίρα (Σ): $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=4$, και το επίπεδο (π): $x+z=1$.

Α. Να βρεθεί η προβολή του κέντρου της σφαίρας στο επίπεδο (π).

Β) Να δειχθεί ότι το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα.

Γ) Να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την τομή της σφαίρας με το επίπεδο.

Δ) Να γραφεί ο ίδιος κύκλος ως τομή κυλίνδρου με άξονα παράλληλο στον άξονα $z'z$ και επιπέδου. Να γίνουν τα σχετικά σχήματα.

Ε) Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση του παραπάνω κύκλου.

3. Δίνονται οι επιφάνειες $S_1: x^2+y^2-z=0$ και $S_2: 2y-z=-3$

Α. Να σχεδιασθούν οι επιφάνειες και η καμπύλη (c) που είναι η τομή τους.

Β. Να παρασταθεί η καμπύλη (c) ως τομή ορθού κυλίνδρου Κ με την επιφάνεια S_2 και να γίνει σχεδίαση των Κ, S_2 και (c).

Γ. Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση της (c).

Δ. Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση και η καρτεσιανή εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας Μ με οδηγό καμπύλη την (c) και γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}=(0,0,1)$. Να γίνει πρόχειρο σχέδιο με την Μ και την (c).

4. Να βρείτε ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι των αντιστοίχων χώρων $\mathbb{R}^n$:

Α) $U=\{(x,y): x^2+y^2=1\}\subset\mathbb{R}^2$, $V=\{(x,y): x\le y\}\subset\mathbb{R}^2$,

Β) $U=\{(x,y,z): 2x+y-z=1\}\subset\mathbb{R}^3$, $V=\{(x,y,z): x+y-z=0,\ 5x-y-z=0\}\subset\mathbb{R}^3$

Γ) $E=\{(x,y,z,w): x+y=y+z=z+w=0\}\subset\mathbb{R}^4$

5. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση των παρακάτω διανυσματικών υπόχωρων:

Α) $S=[A]$,όπου $A=\{t^3+t^2-1,\ t^2+2t+1,\ 2t^3+3t^2+2t-1,\ t^3+3t^2+4t+1\}\subset P_3$ και P_3 ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3.

Β) $S_1=\{A\in\Pi_3 : A=A^T\}$, $S_2=\{A\in\Pi_3 : A=-A^T\}$, $S_1\cap S_2$.

6. Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$V_1=\{(x,y,z): x+y-z=0\}\subset\mathbb{R}^3$, $V_2=\{(x,y,z): 5x-y-z=0\}$

Α) Να βρεθεί μια βάση και η διάστασή των υπόχωρων $V_1, V_2, V_1\cap V_2$.

7. Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το $(1,-2,\lambda)\in\mathbb{R}^3$ είναι στοιχείο της θήκης $[(3,\ 0,\ -2),(2,\ -1,\ -5)]$. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία.

8. Να εξεταστεί αν ισχύει: $[(3,\ 0,\ -2),(2,\ -1,\ -5)]=[(5,\ -1,\ -7),(8,\ -1,\ -9)]$.

9. Να δειχθεί ότι (ασκ.5Β) $\Pi_3=S_1\oplus S_2$.

10. Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} (a+1)x + y + z = a+1 \\ x + (a+1)y + z = a+3 \\ x + y + (a+1)z = -2a-4 \end{cases}.$$

11. Να κατασκευαστεί μια διαγωνοποίηση, μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας, του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \end{bmatrix}$ και να βρεθεί ένας 3×3 πραγματικός πίνακας X τέτοιος ώστε $X^2 = A$.

12. Να κατασκευαστεί μια διαγωνοποίηση, μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας, του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -10 & 9 & -9 \\ -18 & 17 & -18 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ και να βρεθεί ένας 3×3 πραγματικός πίνακας X τέτοιος ώστε $X^3 = A$.

13. Να προσδιοριστεί αντιστρέψιμος πίνακας P που διαγωνοποιεί τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -12 & 7 & 12 \\ 6 & -4 & -7 \end{bmatrix}$ και να αποδειχθεί ότι ο A ικανοποιεί τη σχέση $A^{2013} + A^{2012} - A = I$. Ποιες πραγματικές ιδιοτιμές έχει ένας (τετραγωνικός) διαγωνοποιήσιμος 3×3 πίνακας A που ικανοποιεί τη σχέση αυτή; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.