

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ (MM 2012-13)

Να παραδώσετε λυμένες τις ασκήσεις 1, 4, 6, 7 και από το βιβλίο (βλέπε στο τέλος του φυλλαδίου) τις ασκήσεις 9 και 22 σελ. 225-226.

1. Στον Διανυσματικό χώρο R^4 , θεωρούμε τους υποχώρους:

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0\},$$

$$V_2 = [(2, -2, 2, -2), (1, 2, -2, -4), (4, 0, 0, -8)],$$

$$V_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 + x_3 = 0\}.$$

Να δείξετε ότι είναι $V_1 \subset V_2 \subset V_3$ και ότι υπάρχει βάση $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}\}$ του R^4 τέτοια, ώστε $\{\mathbf{x}\}$ είναι βάση του V_1 , $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ είναι βάση του V_2 , $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ είναι βάση του V_3 .

2. Να εξετάσετε αν τα σύνολα:

$$P = \{1, 1+x, 1+x+x^2, \dots, 1+x+x^2+\dots+x^n\},$$

$$Q = \{1+x, x+x^2, x^2+x^3, \dots, x^{n-1}+x^n\}$$

είναι βάσεις του δ.χ. $\mathcal{P}_n$ των πολωνυμικών συναρτήσεων βαθμού $\leq n$.

3. Δίνεται ο δ.χ. F_R των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το R .

i) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $\sin^4 x$, $\cos^4 x$ ανήκουν στον υπόχωρο $[1, \cos 2x, \cos 4x]$.

ii) Για οποιαδήποτε $k_1, k_2 \in R$ με $k_1 \neq k_2$, $|k_1|+|k_2| \neq 0$, οι συναρτήσεις $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του F_R .

4. Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως **αληθή** ή **ψευδή** δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i) $U = \{(x, y) \in R^2 : x < y\}$ είναι υπόχωρος του R^2 .

ii) Αν $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι βάση του R^3 και $v \in R^3 \setminus \{0, 0, 0\}$, τότε και το σύνολο $\{v + \alpha, \beta, \gamma\}$ είναι επίσης βάση του R^3 .

iii) Αν $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα του R^n , τότε $k < n$.

iv) Αν $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του R^n , τότε $k \geq n$.

v) Ο υπόχωρος $[(1, 2, 1), (2, 2, 1)]$ του R^3 είναι ίσος με τον υπόχωρο $U = \{(2x, 2x+2y, x+y) : x, y \in R\}$.

5. Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του R^4 ;

a) $U = \{(x, y, z, w) : x + y = z + w\}$

b) $V = \{(x, y, z, w) : x + y = 1\}$

c) $W = \{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 = 0\}$

d) $Z = \{(x+2y, 0, 2x-y, y) : x, y \in R\}$

6. Έστω V δ.χ. πάνω στο σώμα $K = R$ ή C και $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες, ώστε το σύνολο U να είναι υπόχωρος του V

i) Για κάθε $x, y \in U$ και για κάθε $\lambda \in R$, ισχύει: $\lambda x + y \in U$

ii) Για κάθε $x, y \in U$ και για κάθε $\lambda \in R$, ισχύει: $\lambda x + \lambda y \in U$

iii) Για κάθε $x, y \in U$ και για κάθε $\lambda \in R$, ισχύει: $\lambda x - \lambda y \in U$

7. Έστω V ο υπόχωρος του R^4 που παράγεται από το σύνολο

$$A = \{(2, 2, 1, 3), (7, 5, 5, 5), (3, 2, 2, 1), (2, 1, 2, 1)\}.$$

Αν το $x = (6 + \lambda, 1 + \lambda, -1 + \lambda, 2 + \lambda) \in V$, να βρείτε το λ . Για την τιμή του λ που θα βρείτε, το αντίστοιχο x έχει μοναδική γραφή ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A ; Να βρείτε μια βάση του V και να την επεκτείνετε σε μια βάση του R^4 .

8. Να λυθούν και οι ασκήσεις: **9, 12, 17(β), 19, 22** σελ.225-226 του βιβλίου

‘ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ’

Έκδοση 4η των Ν.Καδιανάκη - Σ. Καρανάσιου.