



ΣΑΤΜ 1ο Εξάμηνο - Μάρτιος 2014
Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. α) Δίνεται ότι ο τετραγωνικός πίνακας A ικανοποιεί τη σχέση $A^3 - 3A^2 + 4A - 2I = 0$. Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να εκφράσετε τον αντίστροφο A^{-1} ως πολυώνυμο του A και I .

β) i) Να προσδιοριστεί η τιμή του k για την οποία το σύστημα

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z + w &= k \\y - z - 2w &= k + 4 \\2x + y - 5z + w &= k \\3x + 2y - z + 4w &= 2k - 5\end{aligned}$$

είναι συμβιβαστό.

ii) Να λυθεί το σύστημα για $k = 1$.

Θ2. Δίνονται τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \{(x, y, z) : 2x - y - z = 0\} \text{ και } V_2 = \{(x, y, z) : x + 2y + z = 0\}.$$

i) Ναδειχθεί ότι είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί μια βάση και η διάστασή τους.

ii) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση των υποχώρων $V_1 \cap V_2$ και $V_1 + V_2$

iii) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των υποχώρων V_1 , V_2 , $V_1 \cap V_2$.

Θ3. α) Δίνονται τα σημεία $P = (1, 1, 1)$ και $N = (1, 2, 0)$.

i) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) που διέρχεται από το P και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{ON}$.

ii) Βρείτε τις εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $Q = (1, 4, 0)$ και είναι κάθετη στο (π) .

iii) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $Q = (1, 4, 0)$ από το (π) .

β) Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, 0, -1)$ και $\Gamma = (0, 2, 1)$.

Θ4. α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A .

β) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός αντιστρέψιμου 3×3 πίνακα A είναι

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$$

Εκφράστε τον A^5 ως πολυώνυμο του A με τον μικρότερο δυνατό βαθμό.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ