# Γραμμική Άλγεβρα

## $1^{o}$ Φυλλάδιο Ασκήσεων (ΠΙΝΑΚΕΣ)

## ΑΤΜ 2013-14

**1.** Δίνονται οι αντιστρέψιμοι πίνακες $X, Y \in \Pi_\nu$. Να δείξετε ότι :

i) $\left(X^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(X^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ ii) $\left[\left(XY\right)^{-1}\right]^{\mathrm{T}} = \left(X^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(Y^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$

**2.** Έστω $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1+\lambda \\ 1-\lambda & -\lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. i) Να αποδείξετε ότι είναι $A^\nu = \begin{cases} \text{I αν ν άρτιος} \\ \text{A αν ν περιττός} \end{cases}$

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I + A + A^2 + \cdots + A^{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

**3.** Να υπολογιστούν οι πίνακες $A^\nu$, $\nu \in IN$ όπου $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**4.** Αν $A, B \in \Pi_\nu$, να αποδειχθεί ότι:

i) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$. ii) $tr(AB) = tr(BA)$. iii) Δεν υπάρχουν πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$ τέτοιοι ώστε $AB - BA = I$. (iv) Αν $A \in \Pi_\nu$ τέτοιος ώστε $tr(AA^*) = 0$, τότε $A = O$.

**5.** Αν ο πίνακας $A \in \Pi_\nu$ ικανοποιεί τη σχέση $I + A + \cdots + A^\kappa = 0$, για κάποιο $\kappa \in IN$ να αποδειχθεί ότι ο $A$ είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = A^\kappa$.

**6.** Έστω $A \in \Pi_\nu$ τέτοιος ώστε $(A + 3I)^2 = O$. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος και να γραφεί ο $A^{-1}$ με την βοήθεια δυνάμεων του $A$. Να αποδειχθεί επίσης ότι και ο πίνακας $A + I$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

**7.** Αν οι πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$ ικανοποιούν τις σχέσεις $A^2 = A$, $B^2 = B$ και $(A+B)^2 = A + B$, να αποδειχθεί ότι $AB = BA = O$.

**8.** Διαμερίζοντας κατάλληλα τον $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, υπολογίστε τον $A^3$.

**Παράδοση μέχρι 20-12-2013** Σ. Καρανάσιος