

# ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4 - Γρ. Άλγεβρα

## Επαναληπτικό. MM

1. (α) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες:

$$(i) (AB)^T = B^T A^T, \quad (ii) (AB)^* = B^* A^* \quad (1)$$

(β) Να αποδειχθεί ότι αν οι πίνακες  $B$  και  $\Gamma$  είναι συμμετρικοί τότε για οποιονδήποτε πίνακα  $A$ , οι πίνακες  $A^T B A$  και  $A \Gamma A^T$  είναι συμμετρικοί.

(γ) Να δειχθεί ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα  $A$  ισχύει  $(A^\nu)^T = (A^T)^\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ .

(δ) Να αποδειχθεί ότι αν ο πίνακας  $A$  είναι αντισυμμετρικός τότε ο πίνακας  $A^\nu$  είναι συμμετρικός αν ο  $\nu$  είναι άρτιος και αντισυμμετρικός αν ο  $\nu$  είναι περιττός.

2. Να υπολογισθούν οι πίνακες  $AB$  και  $BA$ , όταν

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & 4+3i & i \\ 7 & 6+9i & 1-i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8-4i & 5i \\ 6 & -2i \\ 3+2i & 4+5i \end{bmatrix}.$$

3. Να υπολογιστούν με χρήση ιδιοτήτων οι ορίζουσες

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad D_2 = \begin{vmatrix} \lambda + \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda + \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \lambda + \gamma \end{vmatrix}.$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις (με μεταβλητή  $x$ )

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & x \\ \lambda^2 & x & \lambda \\ x & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0.$$

5. Να υπολογισθούν ο αντίστροφοι των πινάκων:

$$B = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi & 0 \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Να λυθούν τα συστήματα:

$$(i) \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 2 \\ x_1 - 4x_3 + 10x_4 = 3 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

7. Να προσδιοριστούν όλες οι τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \alpha \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = \beta \\ 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 = \gamma \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \delta \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό.

Σ. Καρανάσιος