

Ορίζουσες - Ιδιότητες:

1. Αν ωσ/ίσουμε μια γραμμή (ή στήλη) με έναν αριθμό c η τιμή της ορίζουσας ωσ/ίζεται επί c . ($\Gamma_i \rightarrow c \cdot \Gamma_i$)
2. Αν αντικαταστήσουμε μια γραμμή (ή στήλη) με το άθροισμα της γραμμής αυτής και μιας άλλης ωσ/ίτης με ένα αριθμό c η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται ($\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + c \cdot \Gamma_j$)
3. Αν εναλλάξουμε δυο γραμμές (ή στήλες) η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο ($\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$)
4. Αν οι γραμμές (ή οι στήλες) είναι γραμμικώς εξαρτημένες (δυο μέτρα από τις γραμμές είναι γραμμικώς συνδυαστός άλλων) η ορίζουσα ισούται με μηδέν.

Συνέπεια: Η ορίζουσα που έχει δυο γραμμές (ή στήλες) ίδιες ισούται με μηδέν. Με μηδέν ισούται επίσης αν έχει μια γραμμή (ή στήλη) μηδενική.

5. Η ορίζουσα του γινομένου δυο πινάκων ισούται με το γινόμενο των ορίζουσών: $D(AB) = D(A)D(B)$

Συνέπεια: Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δυο

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow D(AA^{-1}) = D(I) = 1 \Rightarrow D(A)D(A^{-1}) = 1 \Rightarrow$$

$D(A) \neq 0$. Άρα ένας αντιστρέψιμος πίνακας έχει μη μηδενική ορίζουσα. Ισχύει και το αντίστροφο.

Επομένως: A αντιστρέψιμος $\iff D(A) \neq 0$.

6. $D(A) = D(A^T)$

7. Αν ο A είναι άνω ή κάτω τριγωνικός, η ορίζουσα του ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.

8. Ανάπτυξη κατά Laplace.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ανάπτυξη} \\ \text{ως προς τη} \\ \text{i-γραμμή} \end{pmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}$$

όπου D_{ij} είναι ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i -γραμμή και j -στήλη

Λυμένες Ασκήσεις:

Να υπολογιστούν η παραπάνω ορίζουσες (με χρήση Διοικήσεων)

$$i) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (18bc, 1) \\ \Gamma_3 \rightarrow -3 \cdot (0, 1) \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 = 18.$$

$$ii) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (c-b) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

$$iii) \text{ Αν } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ να λυθεί η εξίσωση } \det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0$$

$$\text{Δίνονται: } 0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 - 2\Sigma_2 \\ \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - 2\Sigma_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2+\lambda & -\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -(\lambda+1) & 2 & 0 \\ 2(\lambda+1) & -\lambda & 2(\lambda+1) \\ 0 & 2 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 2\Gamma_1} (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda+4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^2 (\text{ανάστροφος ως προς τη 1η στήλη}) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda+4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+1)^2 ((-\lambda+4) \cdot (-1) - 4) = -(\lambda+1)^2 (\lambda-8) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \text{ (διωχή ρίζα)}$$

$$\lambda_3 = 8 \text{ (αωχή ρίζα)}$$

Συμωληρωματικός Πίνακας - Υπολογιστός αντίστροφος

Έστω $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Θέτουμε $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, όπου D_{ij} η ορίσυντα του πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i -γραμμή και j -στήλη.

Ο αντίστροφος του πίνακα (A_{ij}) λέγεται προσαρτημένος ή adjoint του A και συμβολίζεται με $\text{adj}(A)$.

Αποδυνάμειται ότι, αν A αντιστρέψιμος, ο αντίστροφος του είναι ο:

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \text{adj}(A)$$

• Να βρεθεί ο $\text{adj}(A)$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Γίνεαι: $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

• $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (\text{ανάστροφως προς την 2η γραμμή})$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (4-3) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{υπάρχει ο } A^{-1}$$

Άρα $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Για περισσότερες ασκήσεις δείτε το φυλλάδιο 0 στην ιστοσελίδα μου.