

Ενδεικτικές Λύσεις Φυλλαδίου 4

1. (α) (i) Έστω $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (\gamma_{ij})$, $(AB)^\top = (\delta_{ij})$, $A^\top = (\varepsilon_{ij})$, $B^\top = (\zeta_{ij})$, $B^\top A^\top = (\eta_{ij})$. Τότε $\varepsilon_{ij} = a_{ji}$, $\zeta_{ij} = b_{ji}$, $\gamma_{ij} = \delta_{ji}$ και

$$\eta_{ij} = \zeta_{i1}\varepsilon_{1j} + \zeta_{i2}\varepsilon_{2j} + \cdots \zeta_{in}\varepsilon_{nj} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots b_{ni}a_{jn} = a_{j1}b_{1i} + \cdots a_{jn}b_{ni} = \gamma_{ji} = \delta_{ij}$$

Άρα $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

(ii) Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $(AB)^* = B^*A^*$.

(β) Είναι $(A^\top BA)^\top = A^\top B^\top (A^\top)^\top = A^\top BA \Rightarrow A^\top BA$ συμμετρικός πίνακας. Όμοια και ο $AGA^\top$.

(γ) Απόδειξη με επαγωγή.

(δ) Από $A^\top = -A$ προκύπτει $A^\nu = (-A^\top)^\nu = (-1)^\nu (A^\top)^\nu = (-1)^\nu (A^\nu)^\top \Rightarrow A^\nu = (A^\nu)^\top$, αν ν άρτιος και $A^\nu = -(A^\nu)^\top$, αν ν περιττός.

2. Βλέπε άσκηση 5/σελίδα 155 και απαντήσεις στη σελίδα 532 του βιβλίου.

3. Είναι η άσκηση 2/σελίδα 174 του βιβλίου:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 2\beta & 2\gamma & 2\delta \\ 0 & 0 & 2\gamma & 2\delta \\ 0 & 0 & 0 & -2\delta \end{vmatrix} = \alpha 2\beta 2\gamma (-2\delta) = -8\alpha\beta\gamma\delta.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \lambda + \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda + \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \lambda + \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + \alpha + \beta + \gamma & \lambda + \alpha + \beta + \gamma & \lambda + \alpha + \beta + \gamma \\ \beta & \lambda + \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \lambda + \gamma \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda + \alpha + \beta + \gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta & \lambda + \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \lambda + \gamma \end{vmatrix} = (\lambda + \alpha + \beta + \gamma) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & \lambda & 0 \\ \gamma & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + \alpha + \beta + \gamma)\lambda^2.$$

4. Είναι η άσκηση 3/σελίδα 174 του βιβλίου:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & x \\ \lambda^2 & x & \lambda \\ x & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & x \\ 1 & x & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = (\lambda + \lambda^2 + x) \begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & x \\ 0 & x - \lambda^2 & \lambda - x \\ 0 & \lambda - \lambda^2 & \lambda^2 - x \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda + \lambda^2 + x)(-x^2 + (\lambda + \lambda^2)x - \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2) \Rightarrow x = -\lambda - \lambda^2 \text{ ή } x = \frac{1}{2}[\lambda + \lambda^2 \pm \sqrt{3}\lambda(\lambda - 1)i].$$

$$0 = (x + 10) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 + x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 + x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 + x \end{vmatrix} = (x + 10) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x + 10)x^3 \Rightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = -10.$$

5. Βλέπε άσκηση 5/σελίδα 175 και απαντήσεις στη σελίδα 533 του βιβλίου.

6. (i)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 7 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 10 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_2 = 1 + 2x_3 - 3x_4, \quad x_1 = \dots = 3 + 4x_3 - 8x_4 \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

(ii)

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-1)^2$$

$$\bullet D \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -2, \quad 1 \Rightarrow \text{μοναδική λύση η: } x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{k+2}$$

$$\bullet D = 0 \Leftrightarrow k = -2, \quad k = 1 \text{ Για:}$$

$$* k = -2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow \text{σύστημα αδύνατο.}$$

* $k = 1$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x + y + z = 1$, οπότε $z = 1 - x - y$ και η γενική λύση είναι η $(x, y, z) = (x, y, 1 - x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) + (0, 0, 1), \quad x, y \in \mathbb{R}.$

7.

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 2 & -1 & 3 & -1 & \beta \\ 4 & -5 & 7 & -5 & \gamma \\ 1 & -2 & 2 & -2 & \delta \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 2\alpha - \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma + 3\beta - 10\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta + \alpha - \beta \end{array} \right].$$

Άρα σύστημα συμβιβαστό $\Leftrightarrow \gamma + 3\beta - 10\alpha = 0, \quad \delta + \alpha - \beta = 0$, οπότε τα ζητούμενα $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ είναι τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $V = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) : \gamma + 3\beta - 10\alpha = 0, \quad \delta + \alpha - \beta = 0\} = \{(\alpha, \beta, 10\alpha - 3\beta, \beta - \alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 0, 10, -1) + \beta(0, 1, -3, 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 10, -1), (0, 1, -3, 1)].$