ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6 (που ήταν για παράδοση)

Ασκ. 1. Έχουμε:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1=-x_2,\, x_2=-x_3,\, x_4=-x_3\} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1=x_3,\, x_2=-x_3,\, x_4=-x_3\} \\ &= \{(x_3,-x_3,x_3,-x_3) : x_3\in R\} = \{x_3(1,-1,1,-1) : x_3 \in R\} = [(1,-1,1,-1)] \end{aligned}$$

Κλιμακοποιώντας τους γεννήτορες του V_2 βρίσκουμε: $V_2 = [(1,2,-2,-4),\, (0,1,-1,-1)]$.
Είναι: $(1,-1,1,-1) = \lambda(1,2,-2,-4)+\mu(0,1,-1,-1) \Rightarrow \lambda=1,\, \mu=-3 \Rightarrow (1,-1,1,-1)\in V_2$.
Άρα: $V_1 \subseteq V_2$ και επειδή $\dim V_1 = 1 < 2 = \dim V_2 \Rightarrow V_1 \subset V_2$

$$\begin{aligned} V_3 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_2=-x_3\} = \{((x_1,-x_3,x_3,x_4) : x_1,x_3,x_4\in R\} \\ &= \{x_1(1,0,0,0)+x_3(0,-1,1,0)+x_4(0,0,0,1) : x_1,x_3,x_4\in R\} = [(1,0,0,0),(0,-1,1,0),(0,0,0,1)] \end{aligned}$$

Ομοίως:
$(1,2,-2,-4) = 1\cdot(1,0,0,0)+(-2)\cdot(0,-1,1,0)+(-4)\cdot(0,0,0,1) \Rightarrow (1,2,-2,-4)\in V_3$
$(0,1,-1,-1) = 0\cdot(1,0,0,0) - 1\cdot(0,-1,1,0) - 1\cdot(0,0,0,1) \Rightarrow (0,1,-1,-1)\in V_3$
Επομένως: $V_2\subseteq V_3$ και επειδή $\dim V_2 = 2 < 3 = \dim V_3 \Rightarrow V_2\subset V_3$.
Άρα: $V_1\subset V_2\subset V_3$ (1).

Αν $\mathbf{x} = (1,-1,1,-1) \Rightarrow \{\mathbf{x}\}$ βάση του $V_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathbf{x}\in V_2$, οπότε αν $\mathbf{y} = (0,1,-1,-1)$, τότε $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ είναι βάση του V_2 (αφού $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V_2$, γραμμικώς ανεξάρτητα και $\dim V_2 = 2$).

Τέλος αν $\mathbf{z} = (0,0,0,1)$ ομοίως $\Rightarrow \{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\}$ βάση του V_3 και αν θέσουμε $\mathbf{w} = (0,0,1,0)$ (έτσι ώστε το $\mathbf{w}$ με τα $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ να είναι σε κλιμακωτή μορφή, οπότε γραμμικώς ανεξάρτητα) τότε το σύνολο $\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}\}$ είναι βάση του R^4.

Ασκ. 4. i) Ψευδής γιατί το $(0,0)\notin U$.

ii) Ψευδής γιατί αν $v = \lambda\alpha+\mu\beta+\kappa\gamma$ τότε

$$\begin{aligned} \lambda_1(v+\alpha)+\lambda_2\beta+\lambda_3\gamma = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_1(\lambda+1)\alpha + (\mu\lambda_1+\lambda_2)\beta + (\kappa\lambda_1+\lambda_3)\gamma = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lllll} (\lambda+1)\lambda_1 & & & = & 0 \\ \quad\mu\lambda_1 & + \quad\lambda_2 & & = & 0 \\ \quad\kappa\lambda_1 & & + \quad\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad (\Sigma) \end{aligned}$$

Τα διανύσματα $v+\alpha,\ \beta,\ \gamma$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ (Σ) έχει μόνο μηδενική λύση $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ \kappa & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda+1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq -1.$$

(π.χ. αν $v=-\alpha$ τότε $(v+\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (0,\ \beta,\ \gamma)$ γραμμικώς εξαρτημένα).

iii) Ψευδής γιατί και για κάθε $r>n$ το σύνολο $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

iv) Αληθής γιατί το ¨ελάχιστο' σύνολο γεννητόρων του R^n έχει πληθικό αριθμό n.

v) Αληθής γιατί

$$[(1,2,1),(2,2,1)] = [(2,2,1),2(1,2,1)-(2,2,1)] = [(2,2,1),(0,2,1)] = \{x(2,2,1)+y(0,2,1) : x,y\in R\} = U$$

Διαφορετικά:
$(1,2,1)\in U$ (όταν $x=y=1/2$), $(2,2,1)\in U$ (όταν $x=1, y=0$) οπότε
$X = [(1,2,1),(2,2,1)] \subseteq U = \{x(2,2,1)+y(0,2,1) : x,y\in R\} = [(2,2,1),(0,2,1)]$.
Επειδή τώρα $\dim X = 2 = \dim U$ έχουμε $X=U$.

Ασκ. 6. Είναι όλες.

i) Για π.χ. $\lambda=1 \Rightarrow x+y\in U$, για $\lambda=-1\Rightarrow \mathbf{0}\in U$ και άρα για $y=\mathbf{0}\Rightarrow \lambda x\in U$.

ii) Πάρτε $\lambda=1,\ \lambda=0$ και εργαστείτε όπως στην i).

iii) Για $\lambda = 0 \Rightarrow \mathbf{0} \in U$ οπότε για $y = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda x \in U$ και άρα για $\lambda = -1 \Rightarrow -x \in U$. Επομένως για $\lambda = 1$, $x, y \in U \Rightarrow x - (-y) = x + y \in U$.

Ασκ. 7. Φέρνουμε τα διανύσματα σε κλιμακωτή μορφή.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 19 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & -2 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $V = [(1,0,1,-2),(0,1,0,5),(0,0,1,3)]$ $(*)$

Επιπλέον $x \in V \Leftrightarrow$ υπάρχουν $k_1, k_2, k_3 \in R$:

$$(6+\lambda, 1+\lambda, -1+\lambda, 2+\lambda) = k_1(1,0,1,-2) + k_2(0,1,0,5) + k_3(0,0,1,3) = (k_1, k_2, k_1+k_3, -2k_1+5k_2+3k_3)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 6+\lambda & = & k_1 \\ 1+\lambda & = & k_2 \\ -1+\lambda & = & k_1+k_3 \\ 2+\lambda & = & -2k_1+5k_2+3k_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 6+\lambda & = & k_1 \\ 1+\lambda & = & k_2 \\ -7 & = & k_3 \\ 2\lambda & = & 30 \end{array} \Rightarrow \lambda = 15, k_1 = 21, k_2 = 16$$

και $x = (21,16,14,17) = 21(1,0,1,-2) + 16(0,1,0,5) - 7(0,0,1,3)$

Το σύστημα: $(21,16,14,17) = x_1(2,2,1,3) + x_2(7,5,5,5) + x_3(3,2,2,1) + x_4(2,1,2,1)$ είναι συμβιβαστό, αφού $x \in [A]$ και έχει ορίζουσα $|\Lambda| = 0$. Άρα έχει άπειρες λύσεις, οπότε το x δεν έχει μοναδική γραφή ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A.

Μια βάση του V, από την $(*)$, είναι η $B = \{(1,0,1,-2),(0,1,0,5),(0,0,1,3)\}$ οπότε, επεκτείνοντας την B, μια βάση του R^4 είναι η: $\{(1,0,1,-2),(0,1,0,5),(0,0,1,3),(0,0,0,1)\}$.

Ασκ. 9 / Σελ. 225 Βιβλ. Τα διανύσματα $\alpha = (2,1,0)$, $\beta = (1,0,-1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αποτελούν βάση του S και επομένως $\dim S = 2$. Επεκτείνουμε τη βάση $\{\alpha, \beta\}$ του S σε μια βάση $\{(2,1,0),(1,0,-1),(0,0,1)\}$ του R^3. Έτσι αν $\xi = (0,0,1)$ τότε $S \oplus [\xi] = R^3$. Φυσικά και κάθε $\xi \notin S$ είναι επίσης λύση. Το S γεωμετρικά παριστάνει επίπεδο. Άρα η επιλογή του ξ μπορεί να είναι κάθε διάνυσμα ξ που δεν ανήκει στο επίπεδο αυτό.

Ασκ. 22 / Σελ. 226 Βιβλ.(Γενικός τρόπος). Βρίσκουμε πρώτα βάσεις για τους χώρους U, V

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{\sim} \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

οπότε $U = [(1,1,1,1),(0,-7,-2,-4)]$ και

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 4 \\ 7 & -7 & 9 & 5 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & -7 & 9 & 5 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε $V = [(1,1,1,1),(0,-7,1,-1)]$.

Ένα $x \in U \cap V \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \kappa_1, \kappa_2 \in R :\ x = \lambda_1(1,1,1,1) + \lambda_2(0,7,2,4) = \kappa_1(1,1,1,1) + \kappa_2(0,7,-1,1) \Leftrightarrow$ $(\lambda_1, \lambda_1 + 7\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + 4\lambda_2) = (\kappa_1, \kappa_1 + 7\kappa_2, \kappa_1 - \kappa_2, \kappa_1 + \kappa_2) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \lambda_1 = \kappa_1, \lambda_2 = \kappa_2 = 0$.

Άρα $x = \lambda_1(1,1,1,1)$, $\lambda_1 \in R$, οπότε $U \cap V = [(1,1,1,1)]$. Είναι:

$U + V = [(1,1,1,1),(0,7,2,4),(0,7,-1,1)] = [(1,1,1,1),(0,7,2,4),(0,0,-3,-3)]$

Άρα μια βάση του $U + V$ είναι η: $\{(1,1,1,1),(0,7,2,4),(0,0,1,1)\}$.

Άλωστε $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Σ. Καρανάσιος