ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6(υπόλοιπες)

Ασκ. 2. α. Επειδή το P έχει $n+1$ στοιχεία, όση και η διάσταση του $\mathcal{P}_n$, για να είναι βάση, αρκεί να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Είναι:

$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(1+x) + \cdots + \lambda_{n+1}(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1}) + (\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1})x + \cdots + \lambda_{n+1}x^n = 0 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1} &=& 0 \\ \lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1} &=& 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n+\lambda_{n+1} &=& 0 \\ \lambda_{n+1} &=& 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n+1}=0$$

Άρα το P είναι γραμ. ανεξ. και επομένως βάση του $\mathcal{P}_n$

β. Επειδή το Q έχει n-το πλήθος στοιχεία, δεν μπορεί να είναι βάση του $\mathcal{P}_n$, αφού η διάσταση του $\mathcal{P}_n$ είναι $n+1$.

Ασκ. 3. i). Είναι: $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1-2\cos\cos 2x+\cos^2 2x) = \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{\cos 4x+1}{2}\right) = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$ και άρα $\sin^4 x \in [1,\, \cos 2x,\, \cos 4x]$.
Όμοια: $\cos^4 x = \cdots = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$ και άρα $\cos^4 x \in [1,\, \cos 2x,\, \cos 4x]$.

ii) Είναι: $\lambda_1 e^{k_1 x}+\lambda_2 e^{k_2 x} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 e^{(k_1-k_2)x}+\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$. (π.χ. Για $x=0$ έχουμε $\lambda_1=-\lambda_2$ και για $x=1$ έχουμε $\lambda_1 e^{k_1-k_2} = -\lambda_2$ οπότε $\lambda_1=-\lambda_2,\ \lambda_1(e^{k_1-k_2}-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$, αφού $k_1\neq k_2$.

Ασκ. 5. Υπόχωροι του R^4 είναι τα: U, W, Z.
$U=\{(x,-x,z,-z):\ x,z\in R\} = \{x(1,-1,0,0)+z(0,0,1,-1):\ x,z\in R\} = [(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)]$,
$W=\{(0,0,z,w):\ z,w\in R\} = [(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$,
$Z=\{(x,0,2x,0)+(2y,0,-y,y):\ x,y\in R\} = [(1,0,2,0),(2,0,-1,1)]$

Ασκ. 8(12/σελ. 225). $(1,-2,\lambda)\in[(3,0,-2),(2,-1,-5)] \Leftrightarrow \exists\lambda_1,\lambda_2\lambda\in R:\ (1,-2,\lambda)=\lambda_1(3,0,-2)+\lambda_2(2,-1,-5) \Leftrightarrow (1,-2,\lambda)=(3\lambda_1+2\lambda_2,-\lambda_2,-2\lambda_1-5\lambda_2) \Leftrightarrow 3\lambda_1+2\lambda_2=1,\ -\lambda_2=-2,\ -2\lambda_1-5\lambda_2=\lambda \Leftrightarrow \lambda_1=-1, \lambda_2=2, \lambda=-8$.

Ασκ. 23/σελ. 226 Είναι: $V_1\cap V_2\subseteq V_1, V_2$. Άρα $\dim(V_1\cap V_2)\le\dim V_1 = 8$ (1) και από το θεώρημα διαστάσεως έχουμε:
$\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2) = 8+9-\dim(V_1+V_2)\ge 17-10=7$ (2),
αφού $\dim(V_1+V_2)\le\dim V=10$. Από (1), (2) έχουμε: $\dim(V_1\cap V_2)=7$ ή 8.

Ασκ. 24/σελ. 226 Το ότι τα σύνολα A,Π είναι υπόχωροι του $F(R)$ προκύπτει από απλή εφαρμογή του ορισμού. Έστω $f\in A\cap\Pi$. Τότε είναι: $f(x)=f(-x)=-f(x),\ \forall x\in R \Rightarrow 2f(x)=0\forall x\in R\Rightarrow f=0$, οπότε $A\cap\Pi=\{\mathbf{0}\}$ (**1**). Επιπλέον κάθε $f\in F(R)$ γράφεται:
$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Είναι $\frac{f(x)+f(-x)}{2}\in A$ και $\frac{f(x)-f(-x)}{2}\in\Pi$. Άρα $F(R)=A+\Pi\overset{(1)}{=}A\oplus\Pi$

Άσκηση I. Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος και $v_1, v_2, ..., v_k$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V. Αν $v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_k v_k$, όπου $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k\in R$, τότε τα διανύσματα $v-v_1, v-v_2, ..., v-v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα $\Leftrightarrow \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k\neq 1$.

Λύση. Είναι:
$m_1(v-v_1)+m_2(v-v_2)+\cdots+m_k(v-v_k)=\mathbf{0} \overset{v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_k v_k}{\Longleftrightarrow}$

$m_1((\lambda_1-1)v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_k v_k)+m_2(\lambda_1 v_1+(\lambda_2-1)v_2+\cdots+\lambda_k v_k)+\cdots+m_k(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+(\lambda_k-1)v_k)=\mathbf{0}\Leftrightarrow$

$((\lambda_1-1)m_1+\lambda_2 m_2+\cdots+\lambda_k m_k)v_1+(\lambda_1 m_1+(\lambda_2-1)m_2+\cdots+\lambda_k m_k)v_2+\cdots+(\lambda_1 m_1+\lambda_2 m_2+\cdots+(\lambda_k-1)m_k)v_k=\mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} (\lambda_1-1)m_1+\lambda_1 m_2+\cdots+\lambda_1 m_k &=& 0 \\ \lambda_2 m_1+(\lambda_2-1)m_2+\cdots+\lambda_2 m_k &=& 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k m_1+\lambda_k m_2+\cdots+(\lambda_k-1)m_k &=& 0 \end{array}\right\}(\Sigma)$$

Όμως τα $v - v_1$, $v - v_2$, ..., $v - v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα οπότε,

$$\text{το } (\Sigma) \text{ έχει μόνο τη μηδενική λύση} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda_1 - 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 - 1 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k & \lambda_k & \cdots & \lambda_k - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \cdots \Gamma_k}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k - 1 & \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k - 1 & \cdots & \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k - 1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 - 1 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k & \lambda_k & \cdots & \lambda_k - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 - 1 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k & \lambda_k & \cdots & \lambda_k - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$(-1)^{k-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \neq 1$.

***Άσκηση* II.** Δίνονται: $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \, x_1 + x_2 = 0, \, x_1 - x_4 = 0, \, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
$V_2 = [(2, -1, -3, 5), (3, -2, -3, 6), (3, -1, -6, 9)]$
Να δειχθεί ότι $V_1 \subset V_2$, κατόπιν να επεκταθεί μια βάση του V_1 σε μια βάση του V_2 και κατόπιν σε βάση του R^4.

***Λύση*.** Είναι
$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \, x_2 = x_1, \, x_4 = x_1, \, x_3 = x_1 - x_1 = 0\} = \{(x_1, -x_1, 0, x_1), \, x_1 \in R\} =$
$\{x_1(1, -1, 0, 1), \, x_1 \in R\} = [(1, -1, 0, 1)]$ (1)
Άρα $\vec{x} = (1, -1, 0, 1)$ είναι βάση του V_1.
Κλιμακοποιώντας τους γεννήτορες του V_2 βρίσκουμε ότι
$V_2 = [(1, -1, 0, 1), \, (0, 1, -3, 3)]$ (2).
Από (1), (2) προκύπτει ότι $V_1 \subset V_2$. (Γενικά για τη σχέση $V_1 \subset V_2$ αρκεί να δειχθεί ότι μια βάση του V_1 ανήκει στο V_2). Αν $\vec{y} = (0, 1, -3, 3)$ τότε $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ είναι βάση του V_2, οπότε με συμπλήρωση (ώστε να είναι όλα σε κλιμακωτή μορφή) με $\vec{z} = (0, 0, 1, 0)$ και $\vec{w} = (0, 0, 0, 1)$ το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ είναι βάση του R^4.

Σ. Καρανάσιος