

Ομάδα Α

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα» Φεβρουάριος 2005

Ονοματεπώνυμο: _____

ΘΕΜΑ 1^ο : Α) Δίνεται τα σημεία $A(-1,1,1)$, $B(3,9,5)$ και το επίπεδο $(p): x + y + z = 8$. Να βρεθούν:

1) Η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα A και B .

2) Η προβολή B' του σημείου B στο επίπεδο (p) και η προβολή της (ε) στο (p) .

3) Η εξίσωση του επιπέδου (q) που περιέχει την ευθεία (ε) και είναι κάθετο στο (p) .

Β) Να δειχθεί ότι οι $(\varepsilon): x - 1 = 2(3 - y) = 2z$ και $(\zeta): x - 5 = 2(1 - y) = 2z - 4$ περιγράφουν την ίδια ευθεία της οποίας να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση.

ΘΕΜΑ 2^ο : Α) Να γίνει σχεδίαση σε διαφορετικά σχήματα, των επιφανειών με εξισώσεις:

$$\alpha) z = 4 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}\right), \quad \beta) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1 + \frac{z^2}{36}$$

χρησιμοποιώντας την μέθοδο των τομών με τους άξονες και με επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα των συντεταγμένων.

Β) Δίνεται η καμπύλη $(\gamma) z = 4 - (x^2 + y^2)$, $2x + z = 4$. 1) Να βρεθεί με πλήρη διαδικασία η εξίσωση του κυλίνδρου με οδηγό την (γ) και γενέτειρες παράλληλες στο διάνυσμα $k = (0, 0, 1)$. 2) Να δειχθεί ότι η προβολή (γ') της (γ) στο επίπεδο $z = 0$ είναι ένα κύκλος και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του. 3) Να γίνει σχεδίαση (στο ίδιο σχήμα) της (γ) , της προβολής της και του κυλίνδρου. 4) Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση της (γ') και στη συνέχεια της (γ) .

ΘΕΜΑ 3^ο : Α) Δίνεται το ομογενές σύστημα:

$$(5 - \lambda)x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$$

$$4x_1 + (5 - \lambda)x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + (2 - \lambda)x_3 = 0$$

Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει και μη μηδενικές λύσεις. Να λυθεί το σύστημα για $\lambda = 1$ και να βρείτε μια βάση του χώρου των λύσεων.

Β) 1). Έστω $T: U \rightarrow U$ μια γραμμική απεικόνιση (U διανυσματικός χώρος στο σώμα K). Να δείξετε ότι το σύνολο $U_1 = \{u \in U : Tu = 2u\}$ είναι υπόχωρος του U .

2). Να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα α, β, γ ώστε το διάνυσμα $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ να ανήκει στο χώρο που παράγουν τα διανύσματα: $u_1 = (0, 3, 2)$, $u_2 = (-1, 1, 2)$, $u_3 = (2, 1, -2)$.

ΘΕΜΑ 4^ο : Α) 1) Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$: $V_1 = [(2, 3, 1, 1), (-1, 2, 3, -1), (0, 7, 7, -1)]$ και $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. Να δείξετε ότι ο V_1 είναι υπόχωρος του V_2 . Να βρείτε μια βάση του V_1 και να την επεκτείνετε σε μια βάση του V_2 αιτιολογώντας τη διαδικασία επέκτασης.

2) Με τη βοήθεια του θεωρήματος Cayley – Hamilton ή διαφορετικά να δείξετε ότι ισχύει: $A^{215} = A$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Β). Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A και κατόπιν να βρείτε τα χαρακτηριστικά ποσά

του πίνακα $B = A^2 - 50I$.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

Καλή επιτυχία !