

Ομάδα Α

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα» Ιανουάριος 2006

Ονοματεπώνυμο: _____

ΘΕΜΑ 1^ο : Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$ και $\varepsilon_2 : \frac{x-4}{3} = y-1 = \frac{z-3}{2}$ καθώς και το επίπεδο $(p) : x + y - z = 2$.

1. Ναδειχθεί ότι η ευθεία ε_1 ανήκει στο επίπεδο p .
2. Ναδειχθεί ότι η ευθεία ε_2 τέμνει το επίπεδο p .
3. Ναδειχθεί ότι η ευθείες ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες και να γίνει ένα πρόχειρο σχέδιο που να περιέχει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και το p .
4. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου q που περιέχει την ε_2 και είναι κάθετο στο p και να γίνει πρόχειρο σχέδιο.

ΘΕΜΑ 2^ο : Δίνονται οι επιφάνειες $S_1 : x^2 + y^2 - z = 0$ και $S_2 : 2y - z = -3$

1. Να σχεδιασθούν οι επιφάνειες και η καμπύλη (c) που είναι η τομή τους.
2. Να παρασταθεί η καμπύλη (c) ως τομή ορθού κυλίνδρου K με την S_2 και να γίνει σχεδίαση των K, S_2 και (c) .
3. Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση της (c) .
4. Να βρεθεί μια παράσταση της κωνικής επιφάνειας M με οδηγό καμπύλη την (c) και κορυφή το σημείο $K(0,0,8)$ και να γίνει πρόχειρο σχέδιο για τις M, K και (c) .

ΘΕΜΑ 3^ο : Α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 0 \\ -2x - (\lambda + 2)y + (\lambda + 1)z &= 0 \quad (\Sigma) \\ 6x + (6 - 2\lambda)y + (2\lambda - 3)z &= 0 \\ \lambda(\lambda + 1)x + \lambda^2 y &= 0 \end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση να δείξετε ότι το σύνολο των λύσεων του (Σ) αποτελεί διανυσματικό χώρο, να βρείτε μια βάση, την διάστασή του και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Β) 1) Αν $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 5 \\ 7 & -7 & 7 \end{bmatrix}$ να υπολογιστεί ο πίνακας $B = 5A^{321} - 4A$.

2) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ να εκφραστεί ο A^{-1} ως πολυώνυμο του A και κατόπιν να υπολογιστεί.

ΘΕΜΑ 4^ο : Α) 1) Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^4 : V = \{(k - 2l + 5m, 2k + 5l - 8m, -k - 4l + 7m, 3k + l + m) : k, l, m \in \mathbb{R}\}$.

Να δείξετε ότι ο V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, να βρείτε μια βάση και την διάστασή του και να επεκτείνετε τη βάση που θα βρείτε σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$ (αιτιολογώντας την διαδικασία). Κατόπιν να βρείτε ένα υπόχωρο U του $\mathbb{R}^4$, τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^4 = V + U$.

2) Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση $T(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 - x_3, 4x_1 + 5x_3, 7x_1 + 7x_3)$. Να βρεθεί μια βάση και διάσταση για τον πυρήνα $N(T)$ και το σύνολο τιμών $R(T)$ της T και να επαληθευθεί το σχετικό θεώρημα διάστασης.

Β). Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 0 \\ -3 & 15 & 4 \end{bmatrix}$. Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A και κατόπιν να λύσετε την εξίσωση $X^2 = A$.

Πόσες λύσεις υπάρχουν?

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

Καλή επιτυχία !