

Ομάδα Α

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα»

Ιούλιος 2007

ΘΕΜΑ 1^ο Α) Δίνονται οι ευθείες

(ε1): $x-1=1-y=z$ και (ε2): $x-1=y-1=z$

- 1) Να αποδειχθεί ότι τέμνονται και να βρεθεί το σημείο τομής τους.
- 2) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (ρ) που περιέχει και τις δύο ευθείες.
- 3) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο τομής των (ε1) και (ε2) και είναι κάθετο στην ευθεία (δ): $6(x-2)=3(1-y)=2(z-1)$.

Β) Να αποδειχθεί ότι ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, αν και μόνο αν αυτό είναι συνεπίπεδο με τα $\mathbf{b} = (1, -1, 0)$ και $\mathbf{c} = (1, 0, -1)$.

ΘΕΜΑ 2 : Α) Να αναγνωρισθούν και να σχεδιασθούν χωριστά και μετά στο ίδιο σχήμα οι επιφάνειες:

$$x^2 + y^2 - z = 9, \quad z + x^2 + y^2 = 4$$

Β) Δίνεται η σφαίρα $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$ και το επίπεδο $x - y + z = 3m$.

1. Να βρεθεί το m ώστε: (i) το επίπεδο να εφάπτεται και (ii) να τέμνει τη σφαίρα.
2. Ναδειχθεί ότι όταν $m = 1$ το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που παράγεται από την τομή.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της προβολής του κύκλου του ερωτήματος 2. στο επίπεδο xOy εξηγώντας τη διαδικασία.

ΘΕΜΑ 3^ο : Α) Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε τους υποχώρους του:

$$V_1 = [(-1, 7, -7, 5), (3, 9, -9, 5)],$$

$$V_2 = [(3, -2, 3, -1), (1, 0, 1, 1), (1, -1, 1, -1)].$$

Να βρείτε μια βάση του υπόχωρου $V_1 + V_2$ και τη διάσταση του $V_1 \cap V_2$.

Β) Δίνεται το σύστημα:

$$3x + 7y - w = k$$

$$x + 3y - 2z + w = \lambda \quad (\Sigma)$$

$$x + 2y + z - w = \mu$$

i) Να βρεθεί η συνθήκη για τα $k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα (Σ) να είναι συμβιβαστό.

ii) Να λυθεί το (Σ) για $(k, \lambda, \mu) = (3, 1, 1)$.

ΘΕΜΑ 4^ο : Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = A^4 - 6A^3 + 9A^2 + 3A - 11I$.

i) Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A .

ii) Αφού εκφράσετε τον B ως πολυώνυμο του A , με τον μικρότερο δυνατό βαθμό, να βρείτε μια διαγωνοποίηση του B^{-1} .

ΘΕΜΑ 5^ο : Α) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z, w) = (z - w, 2z, w).$$

Να βρείτε τον πίνακα της T ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ καθώς και τον πυρήνα της $N(T)$.

Β) Έστω $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = z\}$. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $M^\perp$ του M καθώς και μια ορθοκανονική βάση του. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία του $M^\perp$.

Να γράψετε τα δύο πρώτα θέματα και δύο θέματα από τα: 3^ο, 4^ο και 5^ο, με δική σας επιλογή.

Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες.

Καλή επιτυχία !