

Ομάδα Α

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα» Σεπτέμβριος 2005

Ονοματεπώνυμο: _____

ΘΕΜΑ 1^ο Δίνεται η ευθεία (ε): $x + 3y + z = 4$, $x + y - z = -2$ και το επίπεδο (π) : $x + y - z + 2 = 0$.

- 1) Να γραφεί η ευθεία (ε) ως τομή δύο επιπέδων (q_1) και (q_2) παράλληλων προς τους άξονες συντεταγμένων: του $(q_1) // z'z$ και $(q_2) // x'x$.
- 2) Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση της (ε).
- 3) Να εξετασθεί αν η ευθεία (ε) τέμνει, ανήκει ή είναι παράλληλη προς το επίπεδο (π).
- 4) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (q) που περιέχει την ευθεία (ε) και είναι κάθετο στο επίπεδο (π).

ΘΕΜΑ 2^ο 1. Να γίνει αναγνώριση και σχεδίαση σε διαφορετικά σχήματα, των γεωμετρικών τόπων των σημείων $M(x, y, z)$ του χώρου για τα οποία:

α) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, β) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1, z = 2$, γ) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1, y = 2$, δ) $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16, -2x + 2y - z = 2$

2. Δίνεται η καμπύλη (γ) $z = x^2 + y^2, z = 4$. Να βρεθεί η εξίσωση του κώνου με οδηγό την (γ) και κορυφή το σημείο $K(0, 0, 6)$. Να γίνει σχεδίαση της καμπύλης (γ) και του κώνου.

ΘΕΜΑ 3^ο Δίνεται ο 3×3 πραγματικός πίνακας A , τέτοιος ώστε:

$$A[1, 1, 1]^T = [3, 3, 3]^T, A[1, 1, 0]^T = [0, 0, 0]^T, A[1, 0, -1]^T = [-2, 0, 2]^T.$$

1. Να βρείτε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A .

2. Να προσδιορίσετε τον πίνακα A (δίνεται: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$).

3. Δείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται, ως προς τη κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, από τον πίνακα A είναι η $T(x, y, z) = (x - y + 3z, 3x - 3y + 3z, 5x - 5y + 3z)$.
4. Να βρείτε τον πυρήνα και το σύνολο τιμών της T .
5. Ποιος είναι ο πίνακας της T ως προς τη βάση $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$;

ΘΕΜΑ 4^ο

A) Έστω ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$: $V = [(2, 2, 1, 3), (7, 5, 5, 5), (3, 2, 2, 1), (2, 1, 2, 1)]$.

1. Να βρείτε μια βάση του V και να την επεκτείνετε σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$.
2. Αν το $x = (6 + \lambda, 1 + \lambda, -1 + \lambda, 2 + \lambda) \in V$, να βρείτε τη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω σύστημα να είναι συμβιβαστό:

$$2x + 5y + 5z + 6w = \alpha$$

$$x + 3y + 4z + 4w = \beta$$

$$-3x - 5y - 4w = \gamma$$

$$x + 2y + z + 2w = \delta$$

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

Καλή επιτυχία !