$\boxed{\mathbf{A}}$

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 1ο Εξαμ. Ιανουάριος 2001
Γραμμική Αλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θέμα 1. Α. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

i) Να βρεθεί μια διαγωνοποίηση του A.
ii) Να δειχθεί ότι: $A^{2\nu+1} + A^{2\nu} - I = A \ \forall \ \nu \in N^*$.
iii) Χρησιμοποιώντας μια διαγωνοποίηση του A να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα $B = A^\nu + I$, για τις διάφορες τιμές του $\nu \in N^*$ και τις διαστάσεις των αντίστοιχων ιδοχώρων.

Β. Δίνονται τα στοιχεία $a = (1, 0, 1)$, $b = (0, 1, 1)$ και $c = (0, 1, 0)$ του R^3 και ο υπόχωρος $V = \{(x, y, z) \in R^3 : \ y = z\}$. Δείξτε ότι κάθε στοιχείο του V γράφεται, κατά μοναδικό τρόπο, ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων a, b, c. Είναι το σύνολο $\{a,\ b,\ c\}$ βάση του V; Γιατί;

Θέμα 2.Α. Έστω $V = \Pi_2(R)$ το σύνολο των 2×2 πραγματικών πινάκων και τα υποσύνολά του:

$$V_1 = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \in V : \ a, b, c \in R\}, \quad V_2 = \{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & y \end{bmatrix} \in V : \ x, y \in R\}.$$

Δείξτε ότι τα V_1, V_2 είναι υπόχωροι του V και βρείτε τις διαστάσεις των υποχώρων:
V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$.

Β. Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις $T,\ S : R^2 \to R^2$ τέτοιες ώστε: $Te_1 = e_2$, $Te_2 = e_1$ και $S(x, y) = (x, -y) \, \forall \, (x, y) \in R^2$, όπου $\{e_1, e_2\}$ η κανονική βάση του R^2. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις T, S και να βρείτε τον τύπο της σύνθεσης $S \circ T$. Κατόπιν να βρείτε τον πίνακα της $S \circ T$ ως προς την κανονική βάση του R^2 και να δείξετε ότι είναι $(S \circ T)^2 = -I$.

Θέμα 3. Δίνεται το σημείο $K(3, 1, -2)$ και η ευθεία (ε) $\quad x + 1 = y + 2 = z + 1$.
i) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) που διέρχεται από το K και είναι κάθετο στην (ε).
ii) Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας (δ) που διέρχεται από το Κ και τέμνει κάθετα την (ε).
iii) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (ρ) που ορίζουν το σημείο K και η ευθεία (ε).

Θέμα 4. Δίνεται η καμπύλη (γ) : $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ 10z + y = 20 \end{cases}$ και το σημείο Κ(0,1,0).
i) Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο K και οδηγό καμπύλη τη (γ).
ii) Να αναγνωρίσετε τα γεωμετρικά αντικείμενα που περιγράφουν οι εξισώσεις της (γ) και να τα σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα με την (γ) και τη ζητούμενη κωνική επιφάνεια.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της προβολής της καμπύλης (γ) στο επίπεδο xOz και να αναγνωρίσετε το είδος της καμπύλης.

Θέμα 5.Α. Να κατασκευασθεί ορίζουσα 4ης τάξης χρησιμοποιώντας τα γράμματα α, β, γ (το πολύ ένα σε κάθε θέση) με έξι όρους στο ανάπτυγμά της κατά τον ορισμό, με στοιχεία στις θέσεις: (1,1) το α και στη (2,1) το 0 και κατόπιν να υπολογιστεί.

Β. Να διερευνηθεί και κατόπιν να λυθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές των α, β, γ :

$$\begin{aligned} x + \alpha y + \alpha^2 z &= \alpha^3 \\ x + \beta y + \beta^2 z &= \beta^3 \\ x + \gamma y + \gamma^2 z &= \gamma^3 \end{aligned}$$

Να γράψετε τέσσερα από τα πέντε θέματα. Πρέπει όμως υποχρεωτικά να γραφούν:
ένα από τα $\Theta 1, \Theta 2, \Theta 5$ και ένα από τα $\Theta 3, \Theta 4$.

Τα θέματα θεωρούνται ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

Καλή Επιτυχία